世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



《世界数学奥林匹克解题大辞典》编委会

序 言

王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在21世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生,他们也将因思维敏捷,头脑灵活,勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益.因此,数学奥林匹克必将继续下去.

数学奥林匹克已有一百多年的历史,且越来越受到重视.现在,每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个.已有的竞赛题目成千上万,其中构思独特,新颖别致,灵活深邃的题目有几千道之多,而且还在以每年几百道的速度继续增长.这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中,任何个人手中的资料都很不完整,使用起来极不方便.这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题,并给出精辟、准确的解答,编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》.这是一次很有意义的壮举,是一项艰苦而又巨大的工程,是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设.本书的出版,必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展,有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势,立于世界数学强国之林.就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺,并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢.

近10年来,我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩,我国所提供的候选题也接连被选为试题,这是值得高兴的事情.但是,我们也应清醒地看到,与一些先进国家相比,我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长,这方面的资料也不很完全.因此,这套辞典的内容也是不很完全的.此外,以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来.希望大家继续努力,不断完善这套大辞典的内容,为数学奥林匹克事业做出新贡献.

目 录

代数篇

几何篇(上) (平面几何)

目录

几何篇(中) (立体几何)

几何篇(下) (解析几何)

数论篇

组合篇

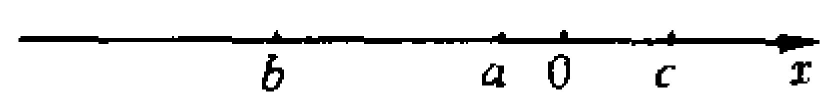
附录

代 数 篇

第一章　数与式

第1节　整式与分式

1·1　实数 a,b,c 在数轴上的位置如下图所示：



则代数式 $|a|-|a+b|+|c-a|+|b-c|$ 的值等于

(A) $-a$.　(B) $2a-2b$.　(C) $2c-a$.　(D) a.　(E) 0.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1985年）

[解]　$\because\ a<0,\quad \therefore\ |a|=-a.$

$\because\ a<0,\ b<0,\quad \therefore\ |a+b|=-(a+b).$

$\because\ c>0,\ a<0,\quad \therefore\ |c-a|=c-a.$

$\because\ b<0,\ c>0,\quad \therefore\ |b-c|=-(b-c).$

$\therefore\ |a|-|a+b|+|c-a|+|b-c|$

$=-a-[-(a+b)]+(c-a)+[-(b-c)]$

$=-a+a+b+c-a-b+c=2c-a.$

故选(C).

1·2　若 $x<-2$，那么 $|1-|1+x||$ 等于

(A) $2+x$.　(B) $-2-x$.　(C) x.　(D) $-x$.　(E) -2.

（第25届美国高中数学考试，1974年）

[解]　按定义 $|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

若　$x<-2$，　那么　$1+x<0$，

则
$$|1+x|=-(1+x),$$

$\therefore$　$|1-|1+x||=|1+1+x|=|2+x|$.

又若 $x<-2$，那么 $2+x<0$，则 $|2+x|=-2-x$.

故选(B).

1·3　化简 $\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{ab-b^2}{ab-a^2}$ 到最简项是

(A) $\dfrac{a}{b}$.　　(B) $\dfrac{a^2-2b^2}{ab}$.　　(C) a^2.

(D) $a-2b$.　　(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试，1950 年）

[解]　原式 $=\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{b(a-b)}{a(b-a)}=\dfrac{a^2-b^2}{ab}+\dfrac{b}{a}$

$$=\frac{a^2-b^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}=\frac{a}{b},$$

故选(A).

1·4　化简　$\dfrac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2}\div\dfrac{a(a+b)}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$　其结果为

(A) $\dfrac{a^2}{a-b}$.　(B) $\dfrac{a^2}{a+b}$.　(C) $\dfrac{b^4}{a-b}$.　(D) $\dfrac{b^4}{a+b}$.

（中国北京市初中数学竞赛，1982 年）

[解]注意到

$$\frac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2}\div\frac{a(a+b)}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a}$$
$$=\frac{a^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2}{a(a+b)}\cdot\frac{b^2}{a}$$
$$=\frac{b^4}{a-b}.$$

故选(C).

1·5　若 x, y 和 $2x+\dfrac{y}{2}$ 是非零数，那么

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$$

等于

(A) 1.　　(B) xy^{-1}.　　(C) $x^{-1}y$.

(D) $(xy)^{-1}$.　　(E) 这些都不对.

（第 28 届美国高中数学考试，1977 年）

[解]　注意到下面的代数式变换：

$$\begin{aligned}&(2x+\frac{y}{2})^{-1}[(2x)^{-1}+(\frac{y}{2})^{-1}]\\&=\frac{1}{2x+\frac{y}{2}}\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\right)\\&=\frac{1}{2x+\frac{y}{2}}\cdot\frac{(\frac{y}{2}+2x)}{xy}\\&=\frac{1}{xy}=(xy)^{-1}.\end{aligned}$$

故选(D).

1·6　对任意的正实数 x,y,z 而言，乘积$(x+y+z)^{-1}$ $(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})(xy+yz+zx)^{-1}[(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}]$ 等于

(A) $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$.　　(B) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$.　　(C) $(x+y+z)^{-2}$.

(D) $\frac{1}{xyz}$.　　(E) $\frac{1}{xy+yz+zx}$.

（第 32 届美国高中数学考试，1981 年）

[解]　将负指数化为分式然后化简则有

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^{-1}(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})(xy+yz+zx)^{-1}\\&\cdot[(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}]\\&=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\\&=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)\\&=\frac{1}{(xyz)^2}=x^{-2}y^{-2}z^{-2}.\end{aligned}$$

故选(A).

1·7　式$\frac{2x^2-x}{(x+1)(x-2)}-\frac{4+x}{(x+1)(x-2)}$不可由 $x=-1$ 或 $x=2$ 求得其值，因零不能做除数，对于其他的 x 值而言

(A) 此式可有许多不同的值.　　(B) 此式只有值 2.

(C) 此式只有值 1.

(D) 此式有一值介于 -1 与 $+2$ 之间.

(E) 此式有一值大于 2 或小于 -1.

（第 2 届美国高中数学考试,1954 年）

[解]　原式 $= \dfrac{2x^2 - x - x - 4}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{2(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 2$.

故选(B).

1·8　设 a 为不等于 0 的实数,则在下列哪种情况下,使得

$$\frac{\dfrac{a}{a+y} + \dfrac{y}{a-y}}{\dfrac{y}{a+y} - \dfrac{a}{a-y}} = -1.$$

(A) 除去 y 的两个实数外的所有实数.

(B) 仅 y 的两个实数.　　(C) y 的所有实数.

(D) 36.5.　　(E) 36.

（第 14 届美国高中数学考试,1963 年）

[解]　若 $y \neq \pm a$,则题设式子式左可变形为

$$\frac{a^2 - ay + ay + y^2}{ay - y^2 - a^2 - ay} = \frac{a^2 + y^2}{-(a^2 + y^2)} = -1.$$

故选(A).

1·9　化简

$$\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \frac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$$

的代数值为

(A) $a^2x^2 + b^2y^2$.　　(B) $(ax + by)^2$.

(C) $(ax + by)(bx + ay)$.　　(D) $2(a^2x^2 + b^2y^2)$.

(E) $(bx + ay)^2$.

（第 39 届美国高中数学考试,1988 年）

[解]　$\dfrac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \dfrac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$

$$= \frac{(bx + ay)(a^2x^2 + b^2y^2) + bx \cdot 2a^2y^2 + ay \cdot 2b^2x^2}{bx + ay}$$

$$= \frac{(bx+ay)(a^2x^2+b^2y^2)+2abxy(ay+bx)}{bx+ay}$$
$$= a^2x^2+b^2y^2+2abxy.$$
$$= (ax+by)^2.$$

故选(B).

1·10　非零实数的每一个三重组(a,b,c)构成一个数

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|},$$

如此构成的所有数的集是

(A) $\{0\}$.　　(B) $\{-4,0,4\}$.　　(C) $\{-4,-2,0,2,4\}$.

(D) $\{-4,-2,2,4\}$.　　(E) 这些都不对.

（第28届美国高中数学考试,1977年）

[解]　若a,b和c都是正数或负数,那么构成的是4或-4,其他情形,式子构成的数均为0.

故选(B).

1·11　若$abc>0$,则$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}-\frac{abc}{|abc|}$的值为

(A) 2.　　(B) -2.　　(C) 2或-2.　　(D) 以上都不对.

（中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993年）

[解]　由设a,b,c或全大于0,或其二小于0另一个大于0.

(1) a,b,c全大于0;

原式$=1+1+1-1=2$.

(2) a,b,c之二小于0,另一个大于0.

由对称性不妨设$a>0,\quad b<0,c<0$.

原式$=1-1-1-1=-2$.

故选(C).

1·12　代数式$a+bc$与$(a+b)(a+c)$

(A) 相等.　　(B) 绝不相等.

(C) 当$a+b+c=1$时相等.　　(D) 当$a+b+c=0$时相等.

(E) 只当$a=b=c=0$时相等.

（第6届美国高中数学考试,1955年）

[解]　若设　$a+bc=(a+b)(a+c)$,

则　　$a+bc=a^2+(b+c)a+bc$,

即 $$a=a^2+(b+c)a. \qquad ⊛$$

若 $a\neq 0$, 则 $a+b+c=1$;

若 $a=0$,则 ⊛ 式仍成立.

故选(C).

1·13 若 $a=1$, $b=10$, $c=100$ 和 $d=1000$, 那么

$(a+b+c-d)+(a+b-c+d)+(a-b+c+d)+(-a+b+c+d)$

等于

(A) 1111. (B) 2222. (C) 3333. (D) 1212. (E) 4242.

（第29届美国高中数学考试,1978年）

[解] $(a+b+c-d)+(a+b-c+d)+(a-b+c+d)$
$+(-a+b+c+d)$
$=2(a+b+c+d)=2222.$

故选(B).

1·14 实数 a,b 满足 $ab=1$,记 $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$, $N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$,则 M,N 的关系为

(A)$M>N$. (B)$M=N$. (C)$M<N$. (D)不确定.

（中国初中数学联赛,1996年）

[解] 由题设知

$$M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{b}{b+ab}+\frac{a}{a+ab}=\frac{b}{b+1}+\frac{a}{a+1}=N$$

故选(B).

1·15 如果 $\frac{b}{a}=2$, $\frac{c}{b}=3$, 那么 $\frac{a+b}{b+c}$ 等于

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{3}{8}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{2}{3}$. (E) $\frac{3}{4}$.

（第39届美国高中数学考试,1988年）

[解] 若 $\frac{b}{a}=2$, 则 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b+c}=\frac{\frac{a}{b}+1}{1+\frac{c}{b}}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1+3}=\frac{3}{8}.$$

故选(B).

1·16　若 $x=\frac{a}{b}$，　$a\neq b$ 而 $b\neq 0$,则 $\frac{a+b}{a-b}$ 等于

(A) $\frac{x}{x+1}$.　　(B) $\frac{x+1}{x-1}$.　　(C) 1.

(D) $x-\frac{1}{x}$.　　(E) $x+\frac{1}{x}$.

（第 42 届美国高中数学考试,1991 年）

[解]　$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}=\frac{x+1}{x-1}(\because\ b\neq 0)$.

故选(B).

1·17　若 $yz:zx:xy=1:2:3$,那么$\frac{x}{yz}:\frac{y}{zx}$ 等于

(A) $3:2$.　　(B) $1:2$.　　(C) $1:4$.

(D) $2:1$.　　(E) $4:1$.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

[解]　因为已知　$yz:zx=1:2$,　因此　$2yz=zx$,

则　$$\frac{zx}{yz}=2,\quad \frac{yz}{zx}=\frac{1}{2}.$$

所以比例　$\frac{x}{yz}:\frac{y}{zx}=\frac{zx}{yz}:\frac{yz}{zx}=2:\frac{1}{2}=4:1$.

故选(E).

1·18　若　$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$,　则

(A) $a=c$.

(B) $a+b+c+d=0$.

(C) 或 $a=c$,或 $a+b+c+d=0$,或二者都成立.

(D) 若 $a=c$,则 $a+b+c+d\neq 0$.

(E) $a(b+c+d)=c(a+b+d)$.

（第 15 届美国高中数学考试,1964 年）

[解]　由　$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$　有　$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}$,

且　$$\frac{a+b+c+d}{c+d}=\frac{b+c+d+a}{a+d}.$$

若 $a+b+c+d\neq 0$，则 $a=c$；

若 $a+b+c+d=0$，则 a 与 c 关系不定.

故选(C).

1·19 若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}=1$.则有

(A) x,y,z 至少有一个等于 1.

(B) x,y,z 都等于 1.

(C) x,y,z 都不等于 1.

(D) 以上结论都不对.

（第 8 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1991 年）

[解] 由题设 $\frac{1}{x+y+z}=1$ 有 $x+y+z=1$.

则
$$x+y=1-z. \quad ⊛$$

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 有 $xy+yz+zx-xyz=0$.

即
$$xy(1-z)+z(x+y)=0.$$

又由 ⊛ 式有 $(xy+z)(1-z)=0$.

将 $z=1-x-y$ 代入前一因子有
$$(xy+1-x-y)(1-z)=0,$$

即
$$(1-x)(1-y)(1-z)=0.$$

∴ x,y,z 必有其一等于 1.

故选(A).

1·20 若正数 a,b,c,满足等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$,那么

(A) $a=b=c$. (B) $a=b\neq c$.

(C) $b=c\neq a$. (D) a,b,c 两两不等.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛,1989 年）

[解] $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$$

而 $a,b,c>0$，则 $a+b+c\neq 0$,

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,

则
$$a-b=0,\quad b-c=0,\quad c-a=0,$$

即
$$a=b=c.$$

故选(A).

1·21 实数 x, y, z 满足 $x+y+z=xyz$,则以下论断

Ⅰ. x,y,z 中若有两个数互为相反数,则第三个数必为 0.

Ⅱ. x,y,z 中若有一个数为 0,则另两个数必为相反数.

Ⅲ. $z=\dfrac{x+y}{xy-1}$.

(A) 只有 Ⅰ 真,Ⅱ,Ⅲ 不真. (B) 只 Ⅰ 不真,Ⅱ,Ⅲ 都真.

(C) Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ 都不真. (D) Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ 都真.

(中国北京市高中数学竞赛,1991 年)

[解] (1) 若 $x+y=0$,且 $x=y=0$,则 $z=0$.

若 $x\neq 0$,则 $|x|=|y|\neq 0$,由题设有 $z=xyz$,

∵ $xy\neq 1$(x,y 异号),故由 $(1-xy)z=0$ 得 $z=0$.

即 (Ⅰ) 真.

(2) 设 $x=0$,则 $xyz=0$,因而 $y+z=0$. 即(Ⅱ) 真.

(3) 若 $xy-1=0$,则 $xy=1$,即 x,y 同号,则 $x+y\neq 0$.

∴ $x+y=xyz-z=(xy-1)z$ 不成立.

即 $xy-1\neq 0$. 从而 $z=\dfrac{x+y}{xy-1}$ 恒成立.

综上 (Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ) 俱真.

故选(D).

1·22 如果 $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$, 那么 x 等于

(A) y^2+2y-1. (B) y^2+2y-2. (C) y^2+2y+2.

(D) y^2+2y+1. (E) $-y^2-2y+1$.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 注意到 $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{y^2+2y-1}{(y^2+2y-1)-1}$,

检查一下答案,立刻确定 $x=y^2+2y-1$.

故选(A).

1·23 如果 x,y 是满足 $x=1+\dfrac{1}{y}$ 与 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 的不为零的实数,则 y 等于

(A) $x-1$. (B) $1-x$. (C) $1+x$.

(D) $-x$. (E) x.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解] 由题设有 $x-1=\frac{1}{y}$ 且 $y-1=\frac{1}{x}$.

或
$$y(x-1)=x(y-1)=1,$$
即
$$xy-y=xy-x,\quad 得\quad x=y.$$
故选(E).

1·24 已知 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k$,则 k 的值为

(A) 2 或 -1.　(B) 2.　(C) -1.　(D) 2 或 1.

（中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991 年）

[解] 由题设及等比定理有
$$\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}=k,$$
即
$$\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=k.$$
若 $x+y+z\neq 0$, 则 $k=2$;

若 $x+y+z=0$, 将 $y+z=-x$ 代入 $\frac{y+z}{x}=k$,

得 $k=-1$. 则 $k=2$ 或 -1.

故选(A).

1·25 已知实数 m,n,p,M 适合:
$$M=\frac{m}{n+p}=\frac{n}{p+m}=\frac{p}{m+n},$$
则 M 的值是

(A) -1.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) 1.　(D) $\frac{1}{2}$ 或 -1.

（中国北京市初中数学竞赛,1983 年;
第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年）

[解 1] 由题设可有
$$m=(n+p)M,\quad n=(p+m)M,\quad p=(m+n)M,$$
上三式相加有 $(m+n+p)=2(m+n+p)M$,

$\therefore$ 当 $m+n+p\neq 0$ 时, $M=\frac{1}{2}$.

又由 $\frac{m}{n+p}=\frac{n}{p+m}$, 即 $\frac{m}{n}=\frac{n+p}{p+m}$,

故 $$\frac{m-n}{n}=\frac{(m+p)-(p+m)}{p+m}=\frac{n-m}{p+m},$$

∴ $$\frac{n}{p+m}=\frac{m-n}{n-m}=-1,$$

即 $M=-1$(此时 $m+n+p=0$).

综上,故选(D).

[解 2] 由题设及等比定理有 $M=\dfrac{m+n+p}{2(m+n+p)}$,

即 $$(2M-1)(m+n+p)=0.$$

若 $m+n+p\neq 0$, 则 $2M-1=0$, 即 $M=\dfrac{1}{2}$;

若 $m+n+p=0$, 将 $m=-(n+p)$ 代入原式有 $M=-1$.

故选(D).

1·26 若$\dfrac{xy}{x+y}=a$,$\dfrac{xz}{x+z}=b$ 且$\dfrac{yz}{y+z}=c$,其中 a,b 与c 都不为零,则 x 等于

(A) $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$. (B) $\dfrac{2abc}{ab+bc+ac}$.

(C) $\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}$. (D) $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$.

(E) $\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 由设可有 $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{c}$.

即 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c}$.

上三式两边相加有 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

从而 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{bc+ca-ab}{2abc}$.

故选(E).

1·27 若 a,b,c 是非零实数且满足

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a},$$

及 $$x=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}, \quad 且 x<0,$$

那么 x 等于

(A) -1.　(B) -2.　(C) -4.　(D) -6.　(E) -8.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

［解］　注意到

$$\frac{a+b-c}{c}+2=\frac{a-b+c}{b}+2=\frac{-a+b+c}{a}+2,$$

即
$$\frac{a+b+c}{c}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{a}.$$

若 $a+b+c=0$，这些等式满足.

若 $a+b+c\neq 0$，那么后一等式皆除以 $a+b+c$，得

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{b}=\frac{1}{a},$$

即
$$a=b=c.$$

这样，若 $a+b+c=0$，　那么　$\dfrac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$；

若 $a=b=c$，　那么　$x=\dfrac{8a^3}{a^3}=8$，　与题设 $x<0$ 相抵.

故选(A).

1·28　如果$\dfrac{y}{x-z}=\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x}{y}$，其中 x,y,z 是三个不同的正数，那么$\dfrac{x}{y}$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$.　(B) $\dfrac{3}{5}$.　(C) $\dfrac{2}{3}$.　(D) $\dfrac{5}{3}$.　(E) 2.

（第 43 届美国高中数学考试，1992 年）

［解］　由等比定理及题设有

$$\frac{x}{y}=\frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2.$$

故选(E).

1·29　若$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{7}$，则 $\dfrac{3x+y+z}{y}$ 的值为

(A) 0.　(B) -1.　(C) -2.　(D) -3.　(E) 3.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1985 年）

［解］　$\because$　$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{7}$，　$\therefore$　$\dfrac{3x}{9}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{7}$.

$\therefore$ 由等比性质知 $\dfrac{3x+y+z}{9-4+7}=\dfrac{y}{-4}$,

$$\therefore \quad \frac{3x+y+z}{y}=\frac{12}{-4}=-3.$$

故选(D).

1·30 若 $w:x=4:3,\quad y:z=3:2,\quad z:x=1:6$, 则 $w:y$ 等于

(A) 1 : 3. (B) 16 : 3. (C) 20 : 3. (D) 27 : 4. (E) 12 : 1.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 由题设即

$$\frac{w}{x}=\frac{4}{3},\quad \frac{y}{z}=\frac{3}{2},\quad \frac{z}{x}=\frac{1}{6}.$$

前两式两边相除有 $\dfrac{wz}{yx}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}$,将第三式代入有

$$\frac{w}{y}\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{9},\quad 即\quad \frac{w}{y}=\frac{48}{9}=\frac{16}{3}.$$

故选(B).

1·31 若一切非零数 x 和 y 满足 $x=\dfrac{1}{y}$,则 $(x-\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})$ 等于

(A) $2x^2$. (B) $2y^2$. (C) x^2+y^2.

(D) x^2-y^2. (E) y^2-x^2.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解] 由设 $x=\dfrac{1}{y}$,则 $y=\dfrac{1}{x}$. 因而

$$(x-\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=(x-y)(x+y)=x^2-y^2.$$

故选(D).

1·32 已知$2x-3y-z=0,\quad x+3y-14z=0,\quad z\neq 0$, 则 $\dfrac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ 的值为

(A) 7. (B) 2. (C) 0. (D) $-\dfrac{20}{17}$. (E) -2.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解] 由题设可有 $2x-3y=z,\quad x+3y=14z$,

解得 $x=5z,\quad y=3z.$

$\therefore\quad \dfrac{x^2+3xy}{y^2+z^2}=\dfrac{x(x+3y)}{y^2+z^2}=\dfrac{5z\cdot 14z}{9z^2+z^2}=\dfrac{70z^2}{10z^2}=7.$

故选(A).

1·33 若 $|x-8y|+(4y-1)^2=0$,则$(x+2y)^3$ 的值为

(A) $6\frac{1}{4}$. (B) $11\frac{25}{64}$. (C) 27. (D) $15\frac{5}{8}$.

(中国北京市初中数学竞赛,1982 年)

[解] 由 $|x-8y|+(4y-1)^2=0$,则有

$$\begin{cases}x-8y=0,\\4y-1=0,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=2,\\y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

$\therefore\quad (x+2y)^3=(2+\frac{1}{2})^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=15\frac{5}{8}.$

故选(D).

1·34 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2+x^2y^2-4xy+1=0$,则 $(x+y)^2$ 的值为

(A) 1. (B) 4. (C) 9. (D) 16.

(中国四川省初中数学竞赛,1991 年)

[解] 题设方程可化为

$$(x^2+y^2-2xy)+(x^2y^2-2xy+1)=0,$$

即
$$(x-y)^2+(xy-1)^2=0.$$

则 $x-y=0$,且 $xy-1=0$, 即 $xy=1.$

这样
$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=4.$$

故选(B).

1·35 若$\frac{m}{n}=\frac{4}{3}$且$\frac{r}{t}=\frac{9}{14}$, $\frac{3mr-nt}{4nt-7mr}$的值为

(A) $-5\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{11}{14}$. (C) $-1\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{11}{14}$. (E) $-\frac{2}{3}$.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解] 原式$=\dfrac{\dfrac{3mr}{nt}-\dfrac{nt}{nt}}{\dfrac{4nt}{nt}-\dfrac{7mr}{nt}}=\dfrac{3\dfrac{mr}{nt}-1}{4-7\dfrac{mr}{nt}}$

$$= \frac{3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{14} - 1}{4 - 7 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{14}}$$

$$= -\frac{11}{14}.$$

故选(*B*).

1·36　若 $x^2 + x - 1 = 0$,则 $2x^3 + 3x^2 - x$ 等于

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) 无法确定.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　由 $2x^3 + 3x^2 - x = (2x+1)(x^2 + x - 1) + 1$,

则由题设知　$2x^3 + 3x^2 - x = 1$.

故选(*B*).

1·37　若 $xy = b$ 且 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a$,则 $(x+y)^2$ 等于

(A) $(a+2b)^2$.　　(B) $a^2 + b^2$.　　(C) $b(ab+2)$.

(D) $ab(b+2)$.　　(E) $\frac{1}{a} + 2b$.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解]　$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2y^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right)$

$$= b^2 \cdot (a + \frac{2}{b}) = ab^2 + 2b.$$

故选(*C*).

1·38　若 $(r + \frac{1}{r})^2 = 3$,则 $r^3 + \frac{1}{r^3}$ 等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 0.　　(D) 3.　　(E) 6.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解]　由设　$(r + \frac{1}{r})^2 = 3$　知　$r^2 - 1 + \frac{1}{r^2} = 0$, 有

$$r^3 + \frac{1}{r^3} = (r + \frac{1}{r})(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2}) = 0.$$

故选(*C*).

1·39　若 $(a + \frac{1}{3a})^2 = 3$,则 $27a^3 + \frac{1}{a^3}$ 等于

(A) 0.　　(B) $54\sqrt{3}$.　　(C) $\pm 27\sqrt{3}$.　　(D) $\pm 54\sqrt{3}$.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解] 原式 $= 27(a^3 + \frac{1}{27a^3}) = 27[(a + \frac{1}{3a})^3 - (a + \frac{1}{3a})]$

$$= 27(a + \frac{1}{3a})[(a + \frac{1}{3a})^2 - 1]$$
$$= 27 \cdot (\pm\sqrt{3}) \cdot [3 - 1]$$
$$= \pm 54\sqrt{3}.$$

故选(D).

1·40 设 $\frac{x}{x^2 - mx + 1} = 1$，则 $\frac{x^3}{x^6 - m^3x^3 + 1}$ 的值是

(A)1. (B) $\frac{1}{m^3 + 3}$. (C) $\frac{1}{3m^2 - 2}$. (D) $\frac{1}{3m^2 + 1}$.

(中国四川省初中数学竞赛,1994 年)

[解] 由题设知 $x \neq 0$,这样有

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x} = 1,\ 即\ x + \frac{1}{x} = m + 1.$$

这样 $\frac{x^6 - m^3x^3 + 1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} - m^3$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - m^3$$
$$= 3m^2 - 2,$$

知 $\frac{x^3}{x^6 - m^3x^3 + 1} = \frac{1}{3m^2 - 2}$.

故选(C).

1·41 若两数的和为 1,乘积为 1,则该两数的立方和为

(A) 2. (B) $-2 - \frac{3\sqrt{3}i}{4}$. (C) 0.

(D) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$. (E) -2.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解] 设两数分别为 x,y. 由设 $x + y = xy = 1$.(注意 x,y 非实数)

又 $1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3$,

则 $$x^3 + y^3 = -2.$$

故选(E).

1·42 若 $a - b = 2,\quad a - c = \sqrt[3]{7}$,则代数式

$$(c-b)[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]$$

的值是

(A) 1.　　(B) −5.　　(C) 9.　　(D) 15.

(E) 以上答案都不对.

(中国北京市初中数学竞赛,1983年)

[解]　由题设有

$$\begin{aligned}&(c-b)[(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]\\&=[(a-b)-(a-c)][(a-b)^2+(a-b)(a-c)+(a-c)^2]\\&=(a-b)^3-(a-c)^3=2^3-(\sqrt[3]{7})^3=1.\end{aligned}$$

故选(A).

1·43　当 $x-y=1$ 时,$x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值为

(A) −1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

(中国北京市初中数学竞赛,1991年)

[解]　原式 $=x(x^3-y^3)-y(x^3-y^3)-3xy(x-y)$

$=(x^3-y^3)(x-y)-3xy(x-y)$,

因为　$x-y=1$,　则上式可化为

原式 $=(x^3-y^3)-3xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3xy$

$=x^2+xy+y^2-3xy=(x-y)^2=1.$

故选(C).

1·44　已知 $a=1990x+1989$,　$b=1990x+1990$,　$c=1990x+1991$. 那么,$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1990年)

[解1]　由题设知 $a=b-1$,　$c=b+1$.则

原式 $=(b-1)^2+b^2+(b+1)^2-(b-1)b-b(b+1)-(b-1)(b+1)$

$=3.$

故选(D).

[解2]　原式 $=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$=\frac{1}{2}(1+1+4)=3.$

故选(D).

1·45　若 $y = x + \frac{1}{x}$,则 $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ 变成

(A) $x^2(y^2 + y - 2) = 0$.　　(B) $x^2(y^2 + y - 3) = 0$.

(C) $x^2(y^2 + y - 4) = 0$.　　(D) $x^2(y^2 + y - 6) = 0$.

(E) 非上述答案.

(第 4 届美国高中数学考试,1953 年)

[解]　由题设及 $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$$= (x^4 + 1) + (x^3 + x) - 4x^2$$
$$= x^2[(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 4]$$
$$= x^2[(x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x}) - 6]$$
$$= x^2(y^2 + y - 6).$$

故选(D).

1·46　若 $abc = 1$.则$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}$的值是

(A) 1.　　(B) 0.　　(C) -1.　　(D) -2.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　由设 $abc = 1$,则 $a \neq 0$,　$b \neq 0$,　$c \neq 0$,这样

$$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}$$
$$= \frac{abc}{ab^2c + abc + bc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{bc}{abc + bc + b}$$
$$= \frac{1}{b + 1 + bc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{bc}{1 + bc + b}$$
$$= \frac{1 + b + bc}{bc + b + 1} = 1.$$

故选(A).

1·47　如果 $xy = a$,　$xz = b$,　$yz = c$,并且它们之中没有一个是零,那么 $x^2 + y^2 + z^2$ 等于

(A) $\frac{ab + ac + bc}{abc}$.　　(B) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$.　　(C) $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$.

(D) $\frac{(ab + ac + bc)^2}{abc}$.　　(E) $\frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}$.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解] 由题设有

$$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2 = a^2z^2 = y^2b^2,$$

所以 $$x^2 = \frac{ab}{c},\quad y^2 = \frac{ac}{b},\quad z^2 = \frac{bc}{a}.$$

将它们加起来,有

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}.$$

故选(E).

1·48 已知 $a + b + c = 0$,化简 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 3$ 的答案为

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) ± 1.　　(D) 0.

(第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年)

[解 1] 我们先证明下面一个事实:

若 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, 则 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

设 α,β,γ 为三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 三个根,则由韦达定理有

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p,\quad \alpha\beta\gamma = -q. \qquad ㊀$$

将 α,β,γ 代入方程后两边相加有

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + p(\alpha + \beta + \gamma) + 3q = 0.$$

由 ㊀ 式知 $$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma.$$

回到我们的问题,注意到

$$原式 = \frac{-a^2}{bc} + \frac{-b^2}{ac} + \frac{-c^2}{ab} + 3 = \frac{-(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc}{abc}.$$

由前面结论知上式为 0.

故选(D).

[解 2]
$$\begin{aligned}原式 &= \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c}\right)\\ &= \frac{a + b + c}{a} + \frac{a + b + c}{b} + \frac{a + b + c}{c} = 0.\end{aligned}$$

故选(D).

1·49 已知实数 a,b,c 满足关系式 $a + b + c = 0$,且 $abc = 8$,那么

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值

(A) 是正数.　　　　(B) 是零.

(C) 是负数.　　　　(D) 正、负不能确定.

（中国初中数学联赛,1987 年）

[解] $\because\ abc=8$, $\therefore\ a,b,c$ 全不为 0.

又 $\because\ a+b+c=0$, 则有

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+ca)=0.$$

$\because\ a^2+b^2+c^2>0$, $\therefore\ ab+bc+ca<0$

于是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{8}<0.$

故选(C).

1·50 已知 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=10$, $a^3+b^3+c^3=36$. 那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值是

(A) $\frac{13}{18}$.　(B) $\frac{18}{13}$.　(C) $-\frac{13}{18}$.　(D) $-\frac{18}{13}$.

（中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1990 年）

[解] 由 $a+b+c=6$ 及 $a^2+b^2+c^2=10$ 及

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

$\therefore\quad ab+bc+ca=13.$

又　$a^3+b^3+c^3$

$$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc,$$

故　$abc=18.$

因而　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{13}{18}.$

故选(A).

1·51 已知 $abc=1, a+b+c=2, a^2+b^2+c^2=3$, 则 $\frac{1}{ab+c-1}+\frac{1}{bc+a-1}+\frac{1}{ca+b-1}$ 的值是

(A)1.　(B) $\frac{1}{2}$　(C)2.　(D) $-\frac{2}{3}$.

（中国山西省太原市初中数学竞赛,1997 年）

[解] 由题设有

$ab+c-1=ab+(2-a-b)-1=(a-1)(b-1)$,

同理　$bc+a-1=(b-1)(c-1)$,

且　$ca+b-1=(c-1)(a-1)$.

则　原式 $=\dfrac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\dfrac{-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$

$$=\frac{-1}{abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1}$$

$$=\frac{-1}{(ab+bc+ca)+2},$$

而 $ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=\dfrac{1}{2}$.

从而　原式 $=-\dfrac{2}{3}$.

故选(D).

1·52　若$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,且$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$,则代数式$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$的值是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(中国安徽省芜湖市初中数学竞赛,1991 年)

[解]　由设$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,则有$\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1$,

即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=1,$$

而
$$\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}=\frac{xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=0,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

故选(A).

1·53　设三实数 x,y,z 满足方程组$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2,\\[2mm] \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=1.\end{cases}$

则　$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$　的值是

(A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1991 年)

[解] $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$, 有 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}=4,$$

即

$$1+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)=4,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{3}{2}.$$

故选(C).

注 原题条件在实数范围不成立(原设 x、y、z 为实数),实因:依题设

$$4\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

即 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=0$,

这是不可能的.

如在实数范围内考虑,应注意按不等式

$$3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geqslant\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$$

赋值.比如设

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=2.\end{cases}$$

1·54 如果$2x^3-hx+k$ 的两个因子是 $x+2$ 及 $x-1$,则 $|2h-3k|$ 的值是

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1. (E) 0.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解] 由设 $f(x)=2x^3-hx+k$,由题设有

$f(-2)=2\cdot(-2)^3-h(-2)+k=2h+k-16=0$,

$f(1)=2\cdot1^3-h\cdot1+k=k-h+2=0$.

由上解得 $h=6$, $k=4$, 则 $|2h-3k|=0$.

故选(E).

1·55 已知 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$,则多项式 $1+x+x^2$

$+ x^3 + \cdots + x^{1989}$ 的值等于

(A) 1.　　(B) $1 + x$.　　(C) 0.　　(D) 1989.

（第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛，1989 年）

[解] $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1988} + x^{1989}$

$$\begin{aligned}&= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + (x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9) + \cdots \\&\quad + (x^{1985} + x^{1986} + x^{1987} + x^{1988} + x^{1989}) \\&= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x^5(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + \cdots \\&\quad + x^{1985}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \\&= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{1985}) \\&= 0.\end{aligned}$$

故选(C).

1·56　当 $x = \dfrac{1 + \sqrt{1994}}{2}$ 时，多项式 $(4x^3 - 1997x - 1994)^{2001}$ 的值为

(A)1.　　(B) -1.　　(C)2^{2001}.　　(D) -2^{2001}.

（中国初中数学联赛，1994 年）

[解] $\because \quad x = \dfrac{1 + \sqrt{1994}}{2}$,

$\therefore \quad (2x - 1)^2 = 1994$，即 $4x^2 - 4x - 1993 = 0$. 于是

$$\begin{aligned}&(4x^3 - 1997x - 1994)^{2001} \\&= [(4x^2 - 4x - 1993)x + (4x^2 - 4x - 1993) - 1]^{2001} \\&= (-1)^{2001} = -1.\end{aligned}$$

故选(B).

1·57　若对某特定范围内的 x 的任一允许值，$P = |1 - 2x| + |1 - 3x| + |1 - 4x| + \cdots + |1 - 9x| + |1 - 10x|$ 为定值，则其定值为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

（中国安徽省合肥市初中数学竞赛，1990 年）

[解] 显然，在某一特定范围内，P 中带 x 项将被消去，

$\because \quad 2 + 3 + \cdots + 10 = 54$，　最后必然形成：$27x - 27x = 0$，

由于　$8x + 9x + 10x = 27x$，易得：

当　$\dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{7}$　时，

$$
\begin{aligned}
P &= 1-2x+1-3x+1-4x+1-5x+1-6x+1-7x \\
&\quad +8x-1+9x-1+10x-1 \\
&= 3+(8x+9x+10x-2x-3x-4x-5x-6x-7x) \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

故选(B).

第2节　根　式

1·58　设 x 是无理数,但$(x-2)(x+6)$是有理数,则下列结论中正确的是

(A) x^2 是有理数.　　(B) $(x+6)^2$ 是有理数.

(C) $(x+2)(x-6)$ 是无理数.　　(D) $(x+2)^2$ 是无理数.

(中国四川省初中数学竞赛,1989年)

[解]　由

$$
\begin{aligned}
(x+2)(x-6) &= x^2-4x-12 \\
&= (x+6)(x-2)-8x,
\end{aligned}
$$

若$(x-2)(x+6)$是有理数,而$8x$是无理数,则$(x+2)(x-6)$是无理数.

故选(C).

1·59　已知最简根式 $a\sqrt{2a+b}$ 与 $\sqrt[a-b]{7}$ 是同类根式,则满足条件 a,b 的值

(A) 不存在.　　(B) 有一组.

(C) 有两组.　　(D) 多于两组.

(中国初中数学联赛,1989年)

[解]　由题设及同类根式性质有 $\begin{cases}2a+b=7,\\a-b=2.\end{cases}$ 解得惟一组解:

$$\begin{cases}a=3,\\b=1.\end{cases}$$

故选(B).

1·60　已知 a,b 和 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 都是有理数,则可知

(A) $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都是有理数.

(B) $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 都是无理数.

(C) $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 可同时为有理数,也可同时为无理数.

(D) $\sqrt{a},\sqrt{b}$ 中一个是有理数,一个是无理数.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解 1] 由题设$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数,则由

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

知 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 为有理数.

而 $\sqrt{a}=\frac{1}{2}[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})]$ 亦为有理数.

同理$\sqrt{b}$ 为有理数.

故选(A).

[解 2] 若 $a,\ b,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$ 均为有理数,由$\sqrt{a}\geqslant 0,\ \sqrt{b}\geqslant 0$,知$\sqrt{a},\sqrt{b}$ 皆为有理数.

否则,若$\sqrt{a},\sqrt{b}$ 皆为无理数,注意到 a,b 为有理数,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 必为无理数;

若不然,今设$\sqrt{a}+\sqrt{b}=r$ 为有理数,则

$\sqrt{a}=r-\sqrt{b}$ 即 $a=r^2+b-2r\sqrt{b}$,

由 a,b,r 皆为有理数,知上式不可能成立,注意到$\sqrt{b}$ 是无理数.

若$\sqrt{a},\sqrt{b}$ 之一为有理数,另一为无理数,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 亦为无理数.

故选(A).

1·61 有下列三个命题:

(甲)若 α、β 是不相等的无理数,则 $\alpha\beta+\alpha-\beta$ 是无理数;

(乙)若 α、β 是不相等的无理数,则$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 是无理数;

(丙)是 α、β 是不相等的无理数,则$\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ 是无理数.

其中正确命题的个数是

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(中国初中数学联赛,1999 年)

[解] $\because \alpha\beta+\alpha-\beta=\alpha\beta+\alpha-\beta-1+1=(\alpha-1)(\beta+1)+1$,只要令 $\alpha=1+\sqrt{2},\ \beta=-1+\sqrt{2}$,则 $\alpha\beta+\alpha-\beta$ 为有理数,知(甲)不对;

又若令 $\alpha=2\sqrt{2},\ \beta=\sqrt{2}$,则 $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ 为有理数.知(乙)不对;

又令 $\alpha=\sqrt[3]{2}$，$\beta=-\sqrt{2}$，则 $\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=0$ 为有理数. 知(丙)不对.

故选(A).

1·62　把代数式 $(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 根号外的因式移入根号内,则原式等于

(A) $\sqrt{1-a}$.　　(B) $-\sqrt{1-a}$.

(C) $\sqrt{a-1}$.　　(D) $-\sqrt{a-1}$.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1984 年)

[解]　由题设知若根号有意义,则 $a-1<0$,因而

$$a-1=-\sqrt{(a-1)^2},$$

∴　原式 $=-\sqrt{-(a-1)^2\frac{1}{a-1}}=-\sqrt{1-a}$.

故选(B).

1·63　设 $a,b\neq 0$,式子 $\sqrt{-a^3\sqrt{(-b)^4}}$ 有意义. 则该式等于

(A) $-ab\sqrt{a}$.　　(B) $ab\sqrt{-a}$.

(C) $ab\sqrt{a}$.　　(D) $-a|b|\sqrt{-a}$.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　原式 $=\sqrt{-a^3\sqrt{b^4}}=\sqrt{-a^3b^2}=|ab|\sqrt{-a}$.

若　$\sqrt{-a}$ 有意义，　则　$a<0$.

从而　原式 $=-a|b|\sqrt{-a}$,

故选(D).

1·64　如果 $a<b$,那么根式 $\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$ 等于

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$.

(B) $(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$.

(C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$.

(D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$.

(中国初中数学联赛,1986 年)

[解]　∵　$-(x+a)^3(x+b)\geqslant 0$,

即　$(x+a)(x+b)\leqslant 0$,

又 ∵　$a<b$，　则　$-b\leqslant x\leqslant -a$.

∴　原式 $=-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$.

故选(C).

1·65　在实数范围内，$\left|\left|\sqrt{-x^2}-1\right|-2\right|$ 的值为

(A) 无法确定.　　　　　　　(B) 只能等于 3.

(C) 只能等于 1.　　　　　　(D) 以上答案都不对.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1986 年）

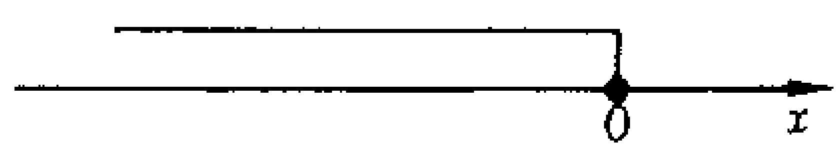
[解]　由题设，若 $\sqrt{-x^2}$ 有意义，当且仅当 $x=0$.

从而 $\left|\left|\sqrt{-x^2}-1\right|-2\right|=\left|\left|-1\right|-2\right|=1$.

故选(C).

1·66　如图是关于 x 的不等式 $ax>2x$ 的解集在数轴上的表示，那么代数式

$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$



的值是

(A) $2\sqrt{a-1}$.　　(B) 2.　　(C) a.　　(D) 1.

（第 5 届"缙云杯"初中数学邀请赛，1988 年）

[解]　由 $ax>2x$ 及 $x<0$，得 $a<2$.

又　$a-1\geqslant 0$ 根式有意义，　即 $a\geqslant 1$，则 $1\leqslant a<2$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}\\=&\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}+\sqrt{(a-1)-2\sqrt{a-1}+1}\\=&\left|\sqrt{a-1}+1\right|+\left|\sqrt{a-1}-1\right|\\=&\sqrt{a-1}+1+1-\sqrt{a-1}=2.\end{aligned}$$

故选(B).

1·67　若 $x<0$，那么 $\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|$ 等于

(A) 1.　　　　(B) $1-2x$.　　　　(C) $-2x-1$.

(D) $1+2x$.　　(E) $2x-1$.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

[解]　$\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|=\left|x-\left|x-1\right|\right|=\left|x-(1-x)\right|$
$=\left|-1+2x\right|=1-2x$.

故选(B).

1·68　若 a,b 及 c 表示整数，根式 $\sqrt{a+\frac{b}{c}}$ 及 $a\sqrt{\frac{b}{c}}$ 相等，当且仅当

(A) $a=b=c=1$.　　(B) $a=b$ 及 $c=a=1$.

(C) $c=\dfrac{b(a^2-1)}{a}$.　　(D) $a=b$ 及 c 为任何值.

(E) $a=b$ 及 $c=a-1$.

（第6届美国高中数学考试,1955年）

［解］ 若 $\sqrt{a+\dfrac{b}{c}}=a\sqrt{\dfrac{b}{c}}$，化简后有 $(ac+b)=a^2b$，得

$$c=\frac{b(a^2-1)}{a}.$$

故选(C).

1·69　计算:

$$\sqrt[5]{(-4)^5}-(-5)^2-5+\sqrt[4]{(-43)^4}-(-3^2)$$

其结果为

(A) 0.　　(B) −68.　　(C) 18.　　(D) −86.

（中国北京初中数学竞赛,1982年）

［解］ $\sqrt[5]{(-4)^5}-(-5)^2-5+\sqrt[4]{(-43)^4}-(-3^2)$

$=(-4)-25-5+43+9$

$=18$.

故选(C).

1·70　根式 $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$ 的值等于

(A) $\sqrt{2}$.　(B) 16.　(C) 32.　(D) 12.　(E) 512.5.

（第44届美国高中数学考试,1993年）

［解］ $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\dfrac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^4+(2^2)^{11}}}=\sqrt{\dfrac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}$

$=\sqrt{\dfrac{2^8(2^{12}+2^{22})}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{2^8}=16$.

故选(B).

1·71　$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 等于

(A) 2.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) $4\sqrt{2}$.

(D) $\sqrt{6}$.　　(E) $2\sqrt{2}$.

（第21届美国高中数学考试,1970年）

[**解**]　原式 $= \sqrt{2+2\sqrt{2}+1}-\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}$

$$= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= 1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 = 2.$$

故选(A).

1·72　$(7+4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(7-4\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$ 的值为

(A) $14\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) $\sqrt{4}$.　　(D) $4\sqrt{3}$.

（中国四川省初中数学竞赛,1992 年）

[**解**]　原式 $= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$.

故选(B).

1·73　代数式$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 的值是

(A) 自然数.　　(B) 无理数.

(C) 分数.　　(D) 以上结论都不对.

（第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1988 年）

[**解 1**]　$\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$

$$= 11+6\sqrt{2}+2\sqrt{11^2-(6\sqrt{2})^2}+11-6\sqrt{2}$$

$$= 22+2\sqrt{49} = 36,$$

$\therefore$　原式 $= 6$.

故选(A).

[**解 2**] 注意到下面变形:

原式 $= \sqrt{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}+\sqrt{9-2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}$

$$= \sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$$

$$= (3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2}) = 6.$$

故选(A).

1·74　化简$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 的结果是

(A) $2\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{2}$.　　(C) 2.　　(D) $2\sqrt{3}-1$.

（中国北京市初中数学竞赛,1993 年）

[**解**]　原式 $= \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

$$= (1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3}.$$

故选(A).

1·75　和$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$等于

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$.　　(C) $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$.

(D) $\sqrt[3]{2}$.　　(E) 这些都不对.

（第 31 届美国高中数学考试,1980 年）

[解]　设$a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$,$b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$,且$x=a+b$.

那么
$$x^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
即
$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$
将前设代入上式有　$x^3=10+3\sqrt[3]{-27}x$,

或
$$(x-1)(x^2+x+10)=0,$$
它仅有实数解$x=1$.　故　$a+b=1$.

故选(E).

1·76　有理化$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$的分子,那么它的分母的最简型是

(A) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.　　(B) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

(C) $3-\sqrt{3}\sqrt{2}$.　　(D) $3+\sqrt{6}$.

(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

[解]　原式
$$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{3-2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{3+\sqrt{6}}.$$
故选(D).

1·77　若$x=\sqrt{7}+\sqrt{6}$,则$(x+\frac{1}{x}):(x-\frac{1}{x})$等于

(A) $\sqrt{7}:\sqrt{6}$.　　(B) $7:6$.　　(C) $x^2:1$.　　(D) x.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛,1989 年）

[解]　由设有
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}$$
$$=\sqrt{7}-\sqrt{6}.$$

则 $(x+\frac{1}{x}):(x-\frac{1}{x})=2\sqrt{7}:2\sqrt{6}=\sqrt{7}:\sqrt{6}$.

故选(A).

1·78 若$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$,又$\sqrt{a}=m+\frac{a-b}{2}$,$\sqrt{b}=n-\frac{a-b}{2}$,其中 m,n 均为有理数,则有

(A)$mn=\frac{1}{2}$. (B)$m^2+n^2=\frac{1}{2}$.

(C)$m+n=\frac{1}{2}$. (D)$m-n=\frac{1}{2}$.

(中国“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1993 年)

[解] 由题设知

$$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{a-b}{2},$$

同理 $\sqrt{b}=\frac{1}{2}-\frac{a-b}{2}$.

知 $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, 从而 $m^2+n^2=\frac{1}{2}$.

故选(B).

1·79 设 $a=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$,$b=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-2}$. 则$(a+b):(a-b)$为

(A) $\sqrt{5}:\sqrt{3}$. (B) $5:3$. (C) $\sqrt{3}:\sqrt{5}$. (D) $3:5$.

(第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛,1991 年)

[解] 由设 $b=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{4}=\frac{a}{4},$$

则 $(a+b):(a-b)=(a+\frac{a}{4}):(a-\frac{a}{4})=5:3$.

故选(B).

1·80 有实数 x 的集合,其中 x 是使

$x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ 的值为有理数的实数,那么这样的全体 x 组成的集合是

(A) 整数集. (B) 有理数集.

(C) 实数集.　　　　　(D) 使 $\sqrt{x^2+1}$ 为有理数的集合.

(E) 使 $x+\sqrt{x^2+1}$ 为有理数集合.

（第 40 届美国高中数学考试,1989 年）

[解] 由
$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$=\sqrt{x^2+1}-x,$$

∴ 原式 $=2x$,则当 x 是有理数时,原式亦为有理数.

故选(B).

1·81 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ 的四次幂是

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.　　(B) $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.　　(C) $1+2\sqrt{3}$.

(D) 3.　　(E) $3+2\sqrt{2}$.

（第 21 届美国高中数学考试,1970 年）

[解] 设 $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, 由于 $\sqrt{1}=1$,

则
$$x=\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

故 $x^2=1+\sqrt{2}$, 且 $x^4=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$.

故选(E).

1·82 $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 等于

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.　　(B) $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$.　　(D) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

(E) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

（第 35 届美国高中数学考试,1984 年）

[解] 注意到 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5$$
$$=(5+2\sqrt{6})-5$$
$$=2\sqrt{6}.$$

则　原式 $=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

故选(A).

1·83　有理化分母时,式 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 相当于

(A) $\dfrac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$.　　(B) $\dfrac{\sqrt{6}-2+\sqrt{10}}{6}$.

(C) $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{10}$.　　(D) $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{6}$.

(E) 非上述答案.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解] 注意到代数式变形:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}\\&=\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}\\&=\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2\sqrt{6}}\\&=\frac{\sqrt{6}(2+\sqrt{6}+\sqrt{10})}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\\&=\frac{\sqrt{6}+3+\sqrt{15}}{6}.\end{aligned}$$

故选(A).

1·84　代数式 $\dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{13}+\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ 的值为

(A) $\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{13}$.　　(B) $\sqrt{13}-\sqrt{8}-\sqrt{5}$.

(C) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{13})$.　　(D) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{13}-\sqrt{8}-\sqrt{5})$.

(中国浙江省宁波市初中数学竞赛,1984 年)

[解]　$\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{13}$

$$= \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{13})(\sqrt{8}+\sqrt{5}+\sqrt{13})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}+\sqrt{13}}$$

$$= \frac{(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{13})^2}{\sqrt{8}+\sqrt{5}+\sqrt{13}}$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{13}+\sqrt{8}+\sqrt{5}}.$$

故选(A).

1·85 分数 $\dfrac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 等于

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) 1. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{4}{3}$. (E) $\dfrac{16}{9}$.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

[解] 将分数的分子和分母同乘以$\sqrt{2}$得

$$\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{4(1+\sqrt{3})}{3\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{4(1+\sqrt{3})}{3\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}} = \frac{4}{3}.$$

故选(D).

1·86 化简$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$，其结果是

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

（中国北京市初中数学竞赛，1986 年）

[解] 原式$= \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

$$= \sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

故选(D).

1·87 如果 $x<0, y<0$，且 $3x-2y=\sqrt{xy}$，则$\dfrac{y}{x}$ 的值为

(A) $-\dfrac{9}{4}$. (B) 1. (C) $\dfrac{9}{4}$. (D) 以上答案都不对.

（中国北京市初中数学竞赛，1985 年）

[解]　由设 $3x-2y=\sqrt{xy}$，平方得

$$9x^2-13xy+4y^2=0,$$

即　　$(9x-4y)(x-y)=0.$

由 $9x-4y=0$ 得 $\frac{y}{x}=\frac{9}{4}$；

由 $x-y=0$ 得 $\frac{y}{x}=1$.

经代入验算知，$\frac{y}{x}=1$ 不合要求，所以 $\frac{y}{x}=\frac{9}{4}$.

故选(C).

1·88　能使分式 $\frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}$ 的值为 $112\sqrt{3}$ 的 x^2,y^2 的值是

(A) $x^2=1+\sqrt{3}$，$y^2=2+\sqrt{3}$.

(B) $x^2=2+\sqrt{3}$，$y^2=2-\sqrt{3}$.

(C) $x^2=7+4\sqrt{3}$，$y^2=7-4\sqrt{3}$.

(D) $x^2=1+2\sqrt{3}$，$y^2=2-\sqrt{3}$.

（第2届"希望杯"全国数学邀请赛，1991年）

[解]　由 $\frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}=\frac{x^4-y^4}{xy}=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{xy}$,

经验算　$x^2=7+4\sqrt{3}$，　$y^2=7-4\sqrt{3}$ 时，

原式 $=112\sqrt{3}$.

故选(C).

1·89　若 $t=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$，那么 t 等于

(A) $(1-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})$.　　(B) $(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$.

(C) $(1+\sqrt[4]{2})(1-\sqrt{2})$.　　(D) $(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$.

(E) $-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$.

（第28届美国高中数学考试，1977年）

[解]　$$\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt[4]{2}}=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$=-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2}).$$

故选(E).

1·90　$\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ 的值是

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) 2.　　(D) -2.

（中国初中数学联赛，1990年、1999年）

［解］ 原式 $=\frac{1+\sqrt[4]{3}}{1-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt[4]{3}}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

$$=\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4}{1-3}=-2.$$

故选(D).

1·91　设实数 $p=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$，则 p 满足

(A) $0<p<1$.　　(B) $1<p<2$.

(C) $2<p<3$.　　(D) $p=\sqrt[3]{7}$.

（第1届"五羊杯"初中数学竞赛，1989年）

［解］ $p=\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$,

而 $$\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}>\frac{5}{2+3}=1.$$

又　$1\cdot 2^3<2$，　$1\cdot 3^3<3$，

则 $$\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}<\frac{5}{1.2+1.3}=2.$$

故 $$1<p<2.$$

故选(B).

1·92　代数式 $\frac{3\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{48}}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$ 的值为

(A) $\frac{3}{4}$.　　(B) 1.　　(C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.　　(D) $\frac{9}{16}$.　　(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（中国江苏省徐州市初中数学竞赛，1985年）

［解］ 原式 $=\frac{3\sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

故选(A).

1·93　$\sqrt[3]{3}\left[\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right]^{-1}$ 可以化简成

(A) $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+1)$.　　　(B) $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$.

(C) $\sqrt[3]{2}-1$.　　　(D) $\sqrt[3]{2}+1$.

（中国初中数学联赛，1993 年）

[解]　原式 $=\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)}$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}+1.$$

故选(D).

1·94　若 $N=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$,

则 N 的值为

(A) 1.　　　(B) $2\sqrt{2}-1$.　　　(C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$.　　　(E) 这些都不对.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解]　考虑代数式

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}+2+2\sqrt{5-4}+\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}$$

$$=2.$$

又　$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$,

则　$N=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$.

故选(A).

1·95　设 $T=\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

$- \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$;那么

(A) $T < 1$. (B) $T = 1$. (C) $1 < T < 2$. (D) $T > 2$.

(E) $T = \frac{1}{(3-\sqrt{8})(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 把每个分数的分母有理化,我们看到

$$T = (3+\sqrt{8}) - (\sqrt{8}+\sqrt{7}) + (\sqrt{7}+\sqrt{6}) - (\sqrt{6}+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}+2)$$
$$= 3 + 2 = 5.$$

故选(D).

1·96 若 $N = \sqrt{\underbrace{1985 \cdot 1985 \cdot \cdots \cdot 1985}_{n\text{个}1985} - 7^{n+1}}$,则 N 一定是

(A) 无理数. (B) 末位数字是 1 的正整数.

(C) 首位数字是 5 的数. (D) 以上答案都不对.

(中国北京市高中数学竞赛,1985 年)

[解] 令 $n = 1$,则 $N = \sqrt{1985 - 7^2} = \sqrt{1936} = 44$.

$\therefore$ (A) 不真,且(B),(C) 也不真.

故选(D).

1·97 若 $P = \sqrt{1988 \cdot 1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1} + (-1989^2)$,那么,$P$ 的值是

(A) 1987. (B) 1988. (C) 1989. (D) 1990.

(第 1 届“希望杯”全国数学邀请赛,1990 年)

[解] 设 $x = 1989$,则根式下面的算式可写为

$$(x-1)x(x+1)(x+2)+1$$
$$= (x^2+x)(x^2+x-2)+1$$
$$= [(x^2+x-1)+1][(x^2+x-1)-1]+1$$
$$= (x^2+x-1)^2 - 1^2 + 1$$
$$= (x^2+x-1)^2,$$

$\therefore \quad P = \sqrt{(1989^2+1989-1)^2} + (-1989^2) = 1988.$

故选(B).

1·98　若 $P=\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}$($n$ 为自然数).则

(A) P 为无理数.　(B) $P=\underbrace{111\cdots1}_{n个}$.　(C) $P=\underbrace{222\cdots2}_{n个}$.

(D) $P=\underbrace{333\cdots3}_{n个}$.　(E) $P=\underbrace{777\cdots7}_{n个}$.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1983 年)

[解]　注意到

$$\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}=\frac{10^{2n}-1}{9}-\frac{2(10^n-1)}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9}=\frac{(10^n-1)^2}{9},$$

则
$$P=\frac{10^n-1}{3}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}.$$

故选(D).

1·99　如果 $x\geqslant0$,那么$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ 等于

(A) $x\sqrt{x}$.　(B) $x\sqrt[4]{x}$.　(C) $\sqrt[8]{x}$.

(D) $\sqrt[8]{x^3}$.　(E) $\sqrt[8]{x^7}$.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解]　原式 $=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{7}{8}}=\sqrt[8]{x^7}$.

故选(E).

1·100　如果$\sqrt{2}x>\sqrt{3}x+1$,那么

$$\sqrt[3]{(x+2)^3}-\sqrt{(x+3)^2}$$

等于

(A) $2x+5$.　(B) $-2x-5$.　(C) 1.　(D) -1.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　由$\sqrt{2}x>\sqrt{3}x+1$,有$(\sqrt{3}-\sqrt{2})x<-1$,

即　$x<-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$,　故　$x<-3$.

又
$$\sqrt[3]{(x+2)^3}-\sqrt{(x+3)^2}$$
$$=x+2-|x+3|$$
$$=(x+2)+(x+3)$$
$$=2x+5.$$

故选(A).

1·101　设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = 2$. 则

$$\sqrt{x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2^2}} + \sqrt{x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2^2}}$$

等于

(A) 2.　(B) 0.　(C) $x_1 - x_2$.　(D) 无法确定.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解] $(\text{原式})^2 = x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2^2} + x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$

$$+ 2\sqrt{(x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2^2})(x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2^2})}$$

$$= 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 4,$$

$\therefore$　原式 $= 2$.

故选(A).

1·102　如果 $4(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}) = x + y + z + 9$,那么 xyz 的值是

(A) 0.　(B) 2.　(C) 15.　(D) 120.

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1991年)

[解] 由　$x + y + z + 9$

$$= (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y-1})^2 + (\sqrt{z-2})^2 + 12,$$

则题设方程可化为

$$(\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{y-1} - 2)^2 + (\sqrt{z-2} - 2)^2 = 0.$$

$\therefore$　$\sqrt{x} = 2$,　$\sqrt{y-1} = 2$,　$\sqrt{z-2} = 2$,

得　$x = 4$,　$y = 5$,　$z = 6$.

则　$xyz = 120$.

故选(D).

1·103　设等式 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立,其中 a,x,y 是两两不同的实数,则 $\dfrac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值是

(A) 3.　(B) $\dfrac{1}{3}$.　(C) 2.　(D) $\dfrac{5}{3}$.

(中国初中数学联赛,1991年)

[解] 根据算术根性质,由右端知必有 $y < a < x$,而由左端知又

有 $a \geqslant 0$ 且 $a \leqslant 0$.所以必有 $a=0$.

由此可得 $x=-y$. 于是

$$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3y^2-y^2-y^2}{y^2+y^2+y^2}=\frac{1}{3}.$$

故选(B).

1·104 如果 $x+\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=20$, 那么

$$x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$$

等于

(A) 5.05. (B) 20. (C) 51.005.

(D) 61.25. (E) 400.

(第42届美国高中数学考试,1991年)

[解] 注意到变换:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}\\&=x+\sqrt{x^2-1},\end{aligned}$$

这样由题设有 $x+\sqrt{x^2-1}=10$, 解得 $x=\dfrac{101}{20}$.

又

$$\begin{aligned}&x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}\\&=2x^2=2\cdot\left(\frac{101}{20}\right)^2=51.005.\end{aligned}$$

故选(C).

第3节 代数式的应用

1·105 时间从 $t=0$ 到 $t=1$,人口增加 $i\%$,而从 $t=1$ 到 $t=2$,人口增加 $j\%$;于是从 $t=0$ 到 $t=2$ 人口增加

(A) $(i+j)\%$. (B) $ij\%$.

(C) $(i+ij)\%$.　　(D) $\left(i+j+\dfrac{ij}{100}\right)\%$.

(E) $\left(i+j+\dfrac{i+j}{100}\right)\%$.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解]　若 $t=0$ 时,人口为 m,则当 $t=1$ 时,人口为 $m(1+i\%)$;当 $t=2$ 时,人口为

$$m(1+i\%)(1+j\%)=\left(1+i\%+j\%+\frac{ij}{100}\%\right)m,$$

即人口增加 $\left(i+j+\dfrac{ij}{100}\right)\%$.

故选(D).

1·106　A 国拥有全世界的 $c\%$ 的人口及 $d\%$ 的财产,B 国拥有全世界的 $e\%$ 的人口及 $f\%$ 的财产,假设 A 国的公民平均分享 A 国的财产,B 国的公民平均分享 B 国的财产,求 A 国的一个公民的财产对 B 国的一个公民的财产的比是

(A) $\dfrac{cd}{ef}$.　(B) $\dfrac{ce}{df}$.　(C) $\dfrac{cf}{de}$.　(D) $\dfrac{de}{cf}$.　(E) $\dfrac{df}{ce}$.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解]　设 p 是全世界的人口数,w 是全世界的总财富,那么 $\dfrac{pc}{100}$ 是 A 国公民的总人数,$\dfrac{wd}{100}$ 是他们的总财富数.所以,每个 A 国公民拥有的财富是

$$\frac{\frac{wd}{100}}{\frac{pc}{100}}=\frac{wd}{pc}.$$

同理,每个 B 国公民拥有的财富是 $\dfrac{wf}{pe}$.

因此,财富比是

$$\frac{\frac{wd}{pc}}{\frac{wf}{pe}}=\frac{de}{cf}.$$

故选(D).

1·107　若 m 人在 d 天可完成一项工作,则 $m+r$ 人 n 天才能完成这项工作,则 n 为

(A) $d+r$ 天.　　(B) $d-r$ 天.　　(C) $\frac{md}{m+r}$ 天.

(D) $\frac{d}{m+r}$ 天.　　(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

[解] 由设每人每天可完成全部工作的 $\frac{1}{md}$,由后面设每人每天可完成全部工作的 $\frac{1}{n(m+r)}$.

$\therefore\quad \frac{1}{md}=\frac{1}{(m+r)n}$,　得　$n=\frac{md}{m+r}$(天).

故选(C).

1·108　若 b 个人 c 天砌 f 块砖,那么 c 个人用相同的速度砌 b 块砖需要的天数是

(A) fb^2.　(B) $\frac{b}{f^2}$.　(C) $\frac{f^2}{b}$.　(D) $\frac{b^2}{f}$.　(E) $\frac{f}{b^2}$.

（第 22 届美国高中数学考试,1971 年）

[解] 若 x,y,z 分别表示人数,天数和砌的砖数,k 是比例常数.那么 $z=kxy$,从题设得　$k=\frac{f}{bc}$.

则天数　$y=\frac{bcz}{fx}=\frac{bcb}{fc}=\frac{b^2}{f}$.

故选(D).

1·109　若 x 头奶牛在 $x+2$ 天中得到 $x+1$ 桶奶,则 $x+3$ 头奶牛得到 $x+5$ 桶奶需要的天数为

(A) $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$.　(B) $\frac{x(x+1)(x+5)}{(x+2)(x+3)}$.

(C) $\frac{(x+1)(x+3)(x+5)}{x(x+2)}$.　(D) $\frac{(x+1)(x+3)}{x(x+2)(x+5)}$.

(E) 这些都不对.

（第 27 届美国高中数学考试,1976 年）

[解] 由题设知一头奶牛每天得到 $\frac{(x+1)}{x(x+2)}$ 桶奶,因此$(x+3)$头奶牛每天得到　$\frac{(x+1)(x+3)}{x(x+2)}$ 桶奶.

故得到$(x+5)$桶奶需　$\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$ 天.

故选(A).

1·110 从 A 到 B 距离 120 英里,一辆汽车从 A 到 B 是以每小时 30 英里的速度;而从 B 返回 A 是以每小时 40 英里的速度,那么,往返的平均速度是

(A) 33mph. (B) 34mph. (C) 35mph.

(D) 36mph. (E) 37mph. (mph 表示每小时行驶英里)

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解] 若汽车行驶 d 距离的速度为 v_1,而在同距离返回时速度为 v_2,则其往返平均速度为

$$\bar{v}=\frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

因而 $\bar{v}=\dfrac{2\cdot 30\cdot 40}{30+40}=\dfrac{2400}{70}\approx 34(\text{mph})$.

故选(B).

1·111 在十英里赛跑中,第一人超出第二人 2 英里,第一人超出第三人 4 英里,若跑者在整个赛程中保持速度不变.则第二人跑至终点时超出第三人的英里数为

(A) 2. (B) $2\frac{1}{4}$. (C) $2\frac{1}{2}$. (D) $2\frac{3}{4}$. (E) 3.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解] 在相同的时间内三人所跑的距离不同,由题设知三人的速度比为 $10:8:6$.因速度不变,则速度比也不变.

当第一人跑完 10 英里时,第二人跑完 8 英里,第三人跑完 6 英里;

当第二人跑完剩下的 2 英里时,设第三人又跑了 x 英里.依前分析

$$\frac{2}{x}=\frac{8}{6}, \quad 得 \quad x=1\frac{1}{2}.$$

故 当第二人跑完 10 英里时,第三人跑完 $7\frac{1}{2}$ 英里,即两人相差 $2\frac{1}{2}$ 英里.

故选(C).

1·112 甲杯中盛有 m 毫升红墨水,乙杯中盛有 m 毫升蓝墨水.从甲杯倒出 a 毫升到乙杯里$(0<a<m)$,搅匀后,又从乙杯倒出 a 毫

升到甲杯里，则这时

(A) 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水少.

(B) 甲杯中混入的蓝墨水比乙杯中混入的红墨水多.

(C) 甲杯中混入的蓝墨水和乙杯中混入的红墨水相同.

(D) 甲杯中混入的蓝墨水与乙杯中混入的红墨水多少关系不定.

（第 1 届“希望杯”全国数学邀请赛，1990 年）

[**解**] 依题设，从甲倒出 a 毫升到乙杯后，乙杯中所含红、蓝墨水浓度分别为

$$\frac{a}{m+a},\quad \frac{m}{m+a}.$$

搅匀后从乙杯再取出 a 毫升倒入甲杯中后，倒出的墨水中含蓝墨水(即甲杯中混入的蓝墨水)为 $\dfrac{ma}{m+a}$;

而乙杯中所剩墨水里含红墨水为

$$a-\frac{a}{m+a}\cdot a=\frac{ma}{m+a}.$$

即两者相等.

故选(C).

1·113 两个相同的瓶子装满酒精溶液. 在一个瓶子中酒精与水的容积之比是 $p:1$，而在另一个瓶子中是 $q:1$. 若把两瓶溶液混合在一起，混合液中的酒精与水的容积之比是

(A) $\dfrac{p+q}{2}$.　　(B) $\dfrac{p^2+q^2}{p+q}$.　　(C) $\dfrac{2pq}{p+q}$.

(D) $\dfrac{2(p^2+pq+q^2)}{3(p+q)}$.　　(E) $\dfrac{p+q+2pq}{p+q+2}$.

（第 30 届美国高中数学考试，1979 年）

[**解**] 若每个瓶子中溶液的总量是 x 升，那么一个瓶子含有酒精 $\dfrac{px}{p+1}$ 升，水 $\dfrac{x}{p+1}$ 升；而另一个瓶子含有酒精 $\dfrac{qx}{q+1}$ 升，水 $\dfrac{x}{q+1}$ 升.

在混合液中酒精与水的体积之比是

$$\frac{\left(\dfrac{p}{p+1}+\dfrac{q}{q+1}\right)x}{\left(\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{q+1}\right)x}=\frac{p(q+1)+q(p+1)}{(q+1)+(p+1)}=\frac{p+q+2pq}{p+q+2}.$$

故选(E).

1·114　一支票记为 x 元 y 分，x 与 y 均为两位数，在兑现时，误成 y 元 x 分，不正确的款项比正确的款项多 17.82 元，则

(A) x 不会超过 70.

(B) y 可能等于 $2x$.

(C) 支票的款项不是 5 的倍数.

(D) 不正确的款项可能等于正确款项的 2 倍.

(E) 正确款项的数字和可被 9 整除.

（第 9 届美国高中数学考试，1958 年）

［解］　设 $x=(10a+b)$ 元，$y=(10c+d)$ 分. 则支票上的值为

$$1000a+100b+10c+d(\text{分}),$$

兑现的值为

$$1000c+100d+10a+b(\text{分}).$$

两者相差　$990c+99d-99(10a+b)=1782$,

即　$(10c+d)-(10a+b)=18$,　或　$y-x=18$,

因而 y 可能等于 $2x$.

故选(B).

1·115　某人定做 4 双黑袜子和一些蓝袜子，黑袜子每双的价格是蓝袜子的 2 倍. 可是定单上两种颜色填颠倒了，为此，他的支出增加 50%. 那么，原计划定做的黑袜子和蓝袜子的双数的比为

(A) 4 : 1.　(B) 2 : 1.　(C) 1 : 4.　(D) 1 : 2.　(E) 1 : 8.

（第 1 届美国高中数学考试，1950 年）

［解］　设蓝袜子有 x 双，价格为 y，显然黑袜子每双价格为 $2y$. 由题设有

$$x\cdot 2y+4\cdot y=\frac{3}{2}(4\cdot 2y+x\cdot y)$$

得　$x=16$,　有　$\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{4}$,　即　$4:x=1:4$.

故选(C).

1·116　一群由医生和律师组成的人中平均(算术平均)年龄是 40 岁. 若医生的平均年龄是 35 岁，律师的平均年龄是 50 岁，那么医生和律师的人数比是

(A) 3 : 2.　(B) 3 : 1.　(C) 2 : 3.　(D) 2 : 1.　(E) 1 : 2.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

[解] 设 m 和 n 分别表示医生和律师的人数，那么由题设有

$$40(m+n)=35m+50n,$$

即
$$5m=10n \quad 或 \quad \frac{m}{n}=2.$$

所求的比
$$m:n=2:1.$$

故选 (D).

1·117 一个学生在求出35个分数的平均数后，他粗心地把这个平均数和35个分数混在一起，求出了这36个数的平均数.第二个平均数和正确的平均数的比值是

(A) 1:1.　(B) 35:36.　(C) 36:35.

(D) 2:1.　(E) 这些都不对.

（第22届美国高中数学考试，1971年）

[解] 令35分数记个为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{35}$，它们的平均数是 $\overline{x}$.那么 $35\overline{x}=x_1+x_2+x_3\cdots+x_{35}$.

而36个数的平均数是

$$\frac{(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{35}+\overline{x})}{36}=\frac{(35\overline{x}+\overline{x})}{36}=\frac{36\overline{x}}{36}=\overline{x},$$

因此所求的比是 1:1.

故选 (A).

1·118 在一定的人口范围内，女性的数目和男性的数目的比为11:10.如果女性的平均年龄为34岁，男性的平均年龄为32岁，那么在这个人口范围内，平均年龄为

(A) $32\frac{9}{10}$.　(B) $32\frac{20}{21}$.　(C) 33.

(D) $33\frac{1}{21}$.　(E) $33\frac{1}{10}$.

（第34届美国高中数学考试，1983年）

[解] 设 w 为女性的人数，m 为男性的人数.设 $w=11x,m=10x$，而全体妇女年龄的总和为 $34w$，全体男人年龄的总和为 $32m$，所以总的平均年龄是

$$\frac{34(11x)+32(10x)}{11x+10x}=\frac{34\cdot 11+32\cdot 10}{21}=\frac{694}{21}=33\frac{1}{21}.$$

故选 (D).

选择题卷

1·119 A 本代数书(所有代数书同样厚度)和 H 本几何书(所有几何书同样厚度且比代数书厚)正好放满书架,还知道 S 本代数书和 M 本几何书能放满同一书架.最后,单独放 E 本代数书也可放满同一书架.已知 A,H,S,M,E 是不同的正整数,则 E 等于

(A) $\frac{AM+SH}{M+H}$.　(B) $\frac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$.　(C) $\frac{AH-SM}{M-H}$.

(D) $\frac{AM-SH}{M-H}$.　(E) $\frac{AM^2-SH^2}{M^2-H^2}$.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解] 设代数书厚为 d,几何书厚为 e,由题设有

$$Ad+He=Sd+Me=Ed,$$

解得 $$e=\frac{E-A}{H}d,\quad 且\quad e=\frac{E-S}{M}d.$$

$$\therefore\quad \frac{E-A}{H}=\frac{E-S}{M},\quad 即\quad E=\frac{AM-SH}{M-H}.$$

故选(D).

1·120 Al 的年龄比 Bob 和 Carl(以下简称他们分别为 A,B,C)的年龄之和大 16,A 年龄的平方比 B 和 C 的年龄之和的平方大 1632. A,B 和 C 的年龄之和是

(A) 64.　(B) 94.　(C) 96.　(D) 102.　(E) 140.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 设 a,b 和 c 分别表示 Al,Bob 和 $Carl$ 的年龄.那么

$$a+b+c=\frac{(a+b+c)[a-(b+c)]}{a-(b+c)}$$
$$=\frac{a^2-(b+c)^2}{a-(b+c)}=\frac{1632}{16}=102.$$

故选(D).

1·121 一轮有橡皮外胎外直径为 25 英寸,当半径减少 $\frac{1}{4}$ 英寸,一英里内旋转的次数将

(A) 增加约 2%.　(B) 增加约 1%.　(C) 增加约 20%.

(D) 增加 $\frac{1}{2}$%.　(E) 保持不变.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)

[解]　设两种轮胎一英里内旋转次数分别是 n_1, n_2，则当半径减少后旋转次数增加率为

$$\frac{n_2-n_1}{n_1}=\frac{\dfrac{1}{2\pi\left(r-\dfrac{1}{4}\right)}-\dfrac{1}{2\pi r}}{\dfrac{1}{2\pi r}}=\frac{\dfrac{1}{4}}{r-\dfrac{1}{4}}=\frac{1}{49}\approx 2\% .$$

故选(A).

1·122　对于公式 $C=\dfrac{en}{R+nr}$，当 e, R, r 不变时，若 n 增加，则 C

(A) 减少.　　(B) 增加.　　(C) 保持不变.

(D) 增加然后减少.　　(E) 减少然后增加.

（第 1 届美国高中数学考试，1950 年）

[解]　将 C 变形为 $C=\dfrac{e}{\dfrac{R}{n}+r}$，当 n 增加时分母减少，故 C 增加.

故选(B).

1·123　设甲为 $4m$，乙比甲的$\dfrac{1}{4}$小$\dfrac{1}{4}$，丙比甲的$\dfrac{1}{4}$多$\dfrac{1}{4}$，则甲乙丙三数之积是

(A) $4m^3-\dfrac{1}{16}m$.　　(B) $4m^3-\dfrac{1}{4}m$.

(C) $\dfrac{1}{16}m^3-\dfrac{1}{64}m$.　　(D) $\dfrac{1}{4}m^3-\dfrac{1}{64}$.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛，1989 年）

[解]　∵　甲为 $4m$，则 乙为 $m-\dfrac{1}{4}$，丙为 $m+\dfrac{1}{4}$，这样三数之积是

$$4m\left(m-\frac{1}{4}\right)\left(m+\frac{1}{4}\right)=4m^3-\frac{1}{4}m.$$

故选(B).

1·124　设两个正数 x 与 y 成反比例. 若 x 增加 $p\%$，则 y 减少

(A) $p\%$.　　(B) $\dfrac{p}{1+p}\%$.　　(C) $\dfrac{100}{p}\%$.

(D) $\dfrac{p}{100+p}\%$.　　(E) $\dfrac{100p}{100+p}\%$.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

[解] 设 y 减少 $q\%$,依题设应有

$$(1+p\%)x\cdot(1-q\%)y=1.$$

又 $xy=1$,所以 $1-q\%=\frac{1}{1+p\%}$,

则 $$q\%=1-\frac{1}{1+p\%}=\frac{p}{100+p}=\frac{100p}{100+p}\%.$$

故选(E).

1·125 xy^2 式中,x 与 y 的值各减少 25%;则此式之值为

(A) 减少 50%. (B) 减少 75%.

(C) 减少其值的$\frac{37}{64}$. (D) 减少其值的$\frac{27}{64}$.

(E) 非上述答案.

(第 4 届美国高中数学考试,1953 年)

[解] 由题设注意到

$$(1-25\%)x\cdot[(1-25\%)y]^2=(1-25\%)^3xy^2=\left(\frac{3}{4}\right)^3xy^2,$$

而 $$1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}.$$

故选(C).

1·126 用 $1-y$ 作$\frac{1}{1+y}$的近似值,$|y|<1$,则相对误差为

(A) y. (B) y^2. (C) $\frac{1}{1+y}$.

(D) $\frac{y}{1+y}$. (E) $\frac{y^2}{1+y}$.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解] 相对误差为

$$\frac{\frac{1}{1+y}-(1-y)}{\frac{1}{1+y}}=\frac{\frac{y^2}{1+y}}{\frac{1}{1+y}}=y^2.$$

故选(B).

1·127 若长方形的长增加了 $p\%$ 以后,为了使长方形的面积保持不变,则这个长方形的宽应该减少

(A) $p\%$. (B) $(1-p)\%$.

(C) $\frac{p}{1+p}\%$.　　　　(D) $\frac{100p}{100+p}\%$.

（中国北京市初中数学竞赛,1993 年）

[解]　设原长方形长和宽分别是 a,b,再设长方形宽减少 $x\%$,依题意有

$$[a(1+p\%)][b(1-x\%)]=ab,$$

则
$$x\%=1-\frac{1}{1+p\%}=\frac{p\%}{1+p\%}$$
$$=\frac{p}{100+p}\cdot 100\%$$
$$=\frac{100p}{100+p}\%.$$

故选(D).

1·128　在某种计算机语言(例如 APL) 中,当一个代数式中没有圆括号时,式中的运算规定为从右到左逐一进行.例如,在这种语言中的 $a\times b-c$,就相当于在通常代数记号中的 $a(b-c)$.现在用这种语言书写了一个式子:$a\div b-c+d$.那么用通常代数记号表示时,它应是

(A) $\frac{a}{b}-c+d$.　　(B) $\frac{a}{b}-c-d$.　　(C) $\frac{d+c-b}{a}$.

(D) $\frac{a}{b-c+d}$.　　(E) $\frac{a}{b-c-d}$.

（第 36 届美国高中数学考试,1985 年）

[解]　由设此算式应为

$$a\div[b-(c+d)]=\frac{a}{b-c-d}.$$

故选(E).

第二章　代数方程

第1节　一元一次方程

2·1　电冰箱连续两次提价10%后,又提价5%.欲恢复原价,至少应降价 $x\%$(x 为整数).则 x 为

(A) 22.　　(B) 23.　　(C) 24.　　(D) 25.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解]　设电冰箱原价为1,则现价为

$$(1+10\%)^2(1+5\%)=1.2705.$$

若设降价 $y\%$ 可恢复至原价,则

$$1.2705\cdot(1-y\%)=1,\quad 得\quad y\approx 21.3,$$

则

$$x=22.$$

故选(A).

2·2　一物品的价增 $p\%$ 之后,此新价又减 $p\%$,若最后的价格是一美元,则原价为

(A) $\frac{1-p^2}{200}$.　　(B) $\frac{\sqrt{1-p^2}}{100}$.　　(C) 一美元.

(D) $1-\frac{p^2}{10000-p^2}$.　　(E) $\frac{10000}{10000-p^2}$.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解]　设物品原价为 x 美元,由题设有

$$x(1+p\%)(1-p\%)=1,$$

得 $x = \dfrac{10000}{10000 - p^2}$.

故选(E).

2·3 若一商人进货价便宜8%,而售价保持不变,那么他的利润(按进货价而定)可由目前的 $x\%$ 增加到$(x+10)\%$,$x\%$ 是

(A) 12%. (B) 15%. (C) 30%. (D) 50%. (E) 75%.

(第23届美国高中数学考试,1972年)

[**解**] 设C是目前的进货价,则$0.92C$是打折扣的价钱.x是目前的利润,以百分比表示.那么写出固定售货价等式,得到

$$C(1+0.01x) = 0.92C[1+0.01(x+10)],$$

即

$$0.08(0.01x) = 0.92 \cdot 1.1 - 1 = 0.012.$$

得

$$x = 15.$$

故选(B).

2·4 31本书自左至右按价格增加的次序排列,相邻每本书的价格相差2美元,对于最右的书价而言,顾客可买一本最中间的书和它相邻的一本,则

(A) 上面所指相邻书在中间书的左侧.

(B) 中间书售价为36美元.

(C) 最便宜的书售价为4美元.

(D) 最贵书售价为64美元.

(E) 非上述答案.

(第12届美国高中数学考试,1961年)

[**解**] 设书价自左至右依次为 $p, p+2, p+4, \cdots, p+60$.最中间的书价为 $p+30$.

依题设可有下面两个等式

$$(p+30)+(p+32) = p+60,$$

或

$$(p+30)+(p+28) = p+60.$$

前一方程所解 $p=-2$,不合题意;

后一方程解得 $p=2$,此即说相邻的书在中间书的左侧.

故选(A).

2·5 甲能在40秒跑完一圆形跑道,乙反向跑,每15秒钟遇到甲,问乙跑完此跑道的秒数为

(A) $12\frac{1}{2}$.　(B) 24.　(C) 25.　(D) $27\frac{1}{2}$.　(E) 55.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解 1]　设乙跑完一周所需时间为 t 秒,依题意有

$$\frac{15}{40-15}=\frac{t}{40},$$

解得　$t=24$.

故选(B).

[解 2]　设乙跑完一周所需时间为 t 秒,跑道长为 l,则由设有

$$\frac{l}{40}\cdot 15+\frac{l}{t}\cdot 15=l,$$

即　$\frac{3}{8}+\frac{15}{t}=1$,　得　$t=24$.

故选(B).

2·6　两枝蜡烛等高,同时燃着,第一枝 4 小时燃尽,第二枝 3 小时燃尽,假设两蜡烛以一定的速度燃烧,当燃烧至第一枝蜡烛的高度是第二枝的二倍时,点燃的时间为

(A) $\frac{3}{4}$ 时.　(B) $1\frac{1}{2}$ 时.　(C) 2 时.

(D) $2\frac{2}{5}$ 时.　(E) $2\frac{1}{2}$ 时.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)

[解]　设点燃 x 小时后,两枝蜡烛高度比为 2 : 1,则

$$1-\frac{x}{4}=2\left(1-\frac{x}{3}\right),$$

解得　$x=2\frac{2}{5}$(时).

故选(D).

2·7　一艘内河轮船匀速从甲地开往乙地.沿河岸有一公路,船长看见每隔30分钟有一辆公共汽车从背后开过,而迎面则每隔10分钟有一辆公共汽车开来.假定汽车以甲、乙两地为终点站往返均匀发车,匀速行驶,则每发车一辆所隔时间为(分钟)

(A) 12.　(B) 15.　(C) 18.　(D) 20.

(第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛,1991 年)

[解]　设每隔 x 分钟发车一辆.

船行驶时，前车与船相遇后，同向的下一车需多用 $30-x$ 分钟才能追上船，而逆向的下一车可少用 $x-10$ 分钟与船相遇.

则船速是同向车速的 $\frac{30-x}{30}$ 倍，也是逆向车速的 $\frac{x-10}{10}$ 倍. 因车速不变，

则 $\quad \frac{30-x}{30}=\frac{x-10}{10}$， 解得 $\quad x=15$.

故选(B).

2·8 在一人群中，若走了 15 名女的，则所剩下的男、女比例为 2∶1；在这之后，若走了 45 名男的，则男、女的比例为 1∶5，那么最初有女人为

(A) 40. (B) 43. (C) 29.

(D) 50. (E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试，1950 年）

［解］ 设最初女人数为 x，依题意男人数为 $2(x-15)$. 再由题设有

$$5[2(x-15)-45]=x-15,$$

解得

$$x=40.$$

故选(A).

2·9 一个城镇的人口增加了 1200 人，然后这新的人口又减少了 11%. 现在镇上的人数比增加 1200 人以前还少 32 人. 那么原有人口为

(A) 1200. (B) 11200. (C) 9968.

(D) 10000. (E) 这些都不对.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

［解］ 设 x 是原来的人口，那么依题意有

$$x+1200-0.11(x+1200)=x-32,$$

解得

$$x=10000.$$

故选(D).

第 2 节 一元二次方程

2·10 把三个非零实数 a,b,c 按任意的次序分别填入 $\square x^2+$

$\square x + \square = 0$ 的三个方框中,所得的方程的根均为有理数.这样的实数 a,b,c

(A) 不存在. (B) 有一组. (C) 有两组. (D) 有,多于两组.

(中国江苏省初中数学竞赛,1991 年)

[解 1] 由设若方程仅有有理根,则 $\Delta = b^2 - 4ac$ 为完全平方数即可,这里 a,b,c 为有理数.

注意到 $a = r,\quad b = -2r,\quad c = r(r \neq 0,\quad r \in R)$ 时,

$\Delta = 4r^2 - 4r^2 = 0$,或 $a = -2r,\quad b = r,\quad c = r$ 时,

$\Delta = r^2 - 4\cdot(-2r)\cdot r = 9r^2$, 其为完全平方数.

显然,当 r 为任意有理数时,方程皆仅有有理根.

故选 (D).

[解 2] 令 $a = r,\quad b = -2r,\quad c = r(r \neq 0,\quad r \in R)$,当把 a, b,c 按任意次序填入题中三个方框时,方程总有 $x = 1$ 的根,它是有理数.

又由韦达定理知其另一根亦为有理数.

注意到 r 的任意性,知这样的 a,b,c 有无数组.

故选 (D).

2·11 方程 $x = k^2(x-1)(x-2)$ 有实根,k 的值为

(A) 不存在. (B) $-2 < k < 1$.

(C) $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$. (D) $k > 1$ 或 $k < -2$.

(E) 全部实数.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 由设方程可化为

$$k^2x^2 - (3k^2+1)x + 2k^2 = 0,$$

若 $k \neq 0$,要使方程有实根,则 $\Delta \geqslant 0$,即 $k^4 + 6k^2 + 1 \geqslant 0$.它对任何实数 k 均成立.

若 $k = 0$,仍有实根 $x = 0$.

故选 (E).

2·12 对于已知数 k,方程 $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ 的根的乘积是 7,则它的所有根都是

(A) 正整数. (B) 负整数. (C) 有理数但不是整数.

(D) 无理数. (E) 虚数.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 由韦达定理知 $2k^2-1=7$, 得 $k=\pm 2$.则方程为

$$x^2 \pm 6x + 7 = 0,$$

解得 $x = 3 \pm \sqrt{2}$ 或 $-3 \pm \sqrt{2}$,

故选(D).

2·13 如果方程$(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$只有一个实数根,那么方程$(m+1)x^2-2mx+m-2=0$

(A) 没有实数根. (B) 有两个不同的实数根.

(C) 有两个相等的实数根. (D) 实数根的个数不能确定.

(中国"祖冲之杯"初中数学邀请赛,1995年)

[解] 原方程的判别式 $\Delta=4(m+1)^2-4m(m+2)=4>0$,该方程只有一个根,所以二次项系数为0,即 $m+2=0$,有 $m=-2$.

则方程$(m+1)x^2-2mx+m-2=0$化为$-x^2+4x-4=0$或$x^2-4x+4=0$知该方程有两个相等的实数根.

故选(C).

2·14 已知二次方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$有二异号实根 m 和 n,且 $m<|m|$.那么二次方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$的根的情况是

(A) 有两个负根. (B) 有两个正根.

(C) 两根异号. (D) 无实根.

(中国陕西省初中数学竞赛,1997年)

[解] $\because$ m、n 异号且 $m<|m|$,

$\therefore$ $m<0, n>0$.

从而,$mn=\dfrac{c}{a}<0, n-m>0$

方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 的判别式

$$\Delta = a^2(m-n)^2+4ac$$
$$= a^2[(m-n)^2+4\cdot\frac{c}{a}]$$
$$= a^2(m+n)^2 \geqslant 0.$$

故必有二实根.设这两个实根为 x_1、x_2.则由

$x_1+x_2=\dfrac{a}{c}(n-m)<0$, $x_1x_2=-\dfrac{a}{c}>0$ 可知 x_1、x_2 均为负.

故选(A).

2·15　设 x_1 和 x_2 是这样两个数：$x_1 \neq x_2$，且 $3x_i^2 - hx_i = b$ $(i = 1,2)$. 那么 $x_1 + x_2$ 等于

(A) $-\frac{h}{3}$.　(B) $\frac{h}{3}$.　(C) $\frac{b}{3}$.　(D) $2b$.　(E) $-\frac{b}{3}$.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

［解］　由设 x_1 和 x_2 是二次方程 $3x^2 - hx - b = 0$ 的两个根，由韦达定理，两根之和是 $\frac{h}{3}$.

故选(B).

2·16　设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2 + px + 4 = 0$ 的两个不相等的实根. 试判断下列结论正确的是

(A) $|x_1| > 2$ 且 $|x_2| > 2$.　(B) $|x_1 + x_2| > 4$.

(C) $|x_1 + x_2| < 4$.　(D) $|x_1| = 4$ 且 $|x_2| = 1$.

（中国北京市初中数学竞赛，1982 年）

［解］　因 $x^2 + px + 4 = 0$ 有二不等实根 x_1 与 x_2，所以 $x_1x_2 = 4$，$|x_1||x_2| = 4$，所以(A)应排除.

此外 $|x_1||x_2| = 4$，不能得出必定有 $|x_1| = 4$，且 $|x_2| = 1$，所以(D)也应排除.

由判别式知　$p^2 - 16 > 0$，　即　$p^2 > 16$.　但　$-p = x_1 + x_2$，所以　$|x_1 + x_2|^2 > 16$，　$|x_1 + x_2| > 4$.　因此，排除(C).

故选(B).

2·17　若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 2x - k = 0$ 的两个不等的实数根，则 $x_1^2 + x_2^2 - 2$ 是

(A) 正数.　(B) 负数.　(C) 零.　(D) 不大于 0 的数.

（中国北京市初中数学竞赛，1992 年）

［解］　由设方程有两不等的实根，则

$$\Delta = 2^2 + 4k > 0, \quad 知 \quad k > -1.$$

$$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2 = 4 + 2k - 2 = 2 + 2k > 0.$$

故选(A).

2·18　设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根. 那么 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值等于

(A) -4.　　(B)8.　　(C)6.　　(D)0.

（中国初中数学联赛，1996 年）

[解]　$\because$　x_1,x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，

$\therefore$　$x_1^2+x_1-3=0$，$x_2^2+x_2-3=0$，

即　$x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$.

由根与系数的关系知 $x_1+x_2=-1$，从而有

$$\begin{aligned}&x_1^3-4x_2^2+19=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19\\&=3x_1-x_1^2+4x_2+7\\&=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7\\&=4(x_1+x_2)+4=4\cdot(-1)+4=0.\end{aligned}$$

故选(D).

2·19　若 m,n 是二次方程 $x^2+1994x+7=0$ 的两根，那么 $(m^2+1993m+6)(n^2+1995n+8)$ 的值是

(A)2000.　　(B)1994.　　(C)1986.　　(D)7.

（中国"祖冲之杯"数学邀请赛，1994 年）

[解]　由题设知：

$m^2+1993m+6=m^2+1994m+7-(m+1)=-(m+1)$,

$n^2+1995n+8=n^2+1994n+7+(n+1)=n+1$,

从而　原式 $=-(m+1)(n+1)=-mn-(m+n)-1=1986$.

故选(C)

2·20　两数之和为 6，其差的绝对值为 8，以此两数为根的方程式为

(A) $x^2-6x+7=0$.　　(B) $x^2-6x-7=0$.

(C) $x^2+6x-8=0$.　　(D) $x^2-6x+8=0$.

(E) $x^2+6x-7=0$.

（第 6 届美国高中数学考试，1955 年）

[解]　设此两数分别为 α,β，则由题设有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6, & ①\\ |\alpha-\beta|=8. & ②\end{cases}$$

①^2 − ②^2 得　$4\alpha\beta=-28$，　即　$\alpha\beta=-7$.

$\therefore$　α,β 为方程 $x^2-6x-7=0$ 的两个根.

故选(B).

2·21　如果方程 $x^2+px+1=0(p>0)$ 的两根之差为1,那么 p 等于

(A)2.　　(B)4.　　(C)$\sqrt{3}$.　　(D)$\sqrt{5}$.

（中国初中数学联赛,1998年）

[解]　由题设方程有两实根,知

$$\Delta=p^2-4>0,\ 得\ p>2.$$

设 x_1,x_2 为方程两根,则 $x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=1$.

又由 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$, 得 $1^2=(-p)^2-4$.

所以　$p^2=5,\ p=\sqrt{5}(p<2)$.

故选(D).

2·22　已知 p、q 是有理数,$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 满足 $x^3+px+q=0$.则 $p+q$ 的值是

(A) -1.　　(B)1.　　(C) -3.　　(D)3.

（中国安徽省初中数学竞赛,1997年）

[解]　将 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 代入 $x^3+px+q=0$,

化简得 $4\sqrt{5}(2+p)+4(2q-p-4)=0$.

因 p、q 是有理数,则

$$\begin{cases}2+p=0,\\2q-p-4=0.\end{cases}$$

解得　$p=-2,\ q=1$. 所以 $p+q=-1$.

故选(A).

2·23　在解某二次方程时,甲生弄错了方程的常数项,因而得该方程的二根为8与2.乙生弄错了方程的一次项系数,因而得该方程的二根为 -9 与 -1.则正确的方程式为

(A) $x^2-10x+9=0$.　　(B) $x^2+10x+9=0$.

(C) $x^2-10x+16=0$.　　(D) $x^2-8x-9=0$.

(E) 非上述答案.

（第4届美国高中数学考试,1953年）

[解]　甲所解方程为 $(x-8)(x-2)=x^2-10x+16=0$.

乙所解方程为 $(x+9)(x+1)=x^2+10x+9=0$.

前方程常数项错误;后方程一次项系数错误,因而正确方程为

$$x^2-10x+9=0.$$

故选(A).

2·24　设 $F=\dfrac{6x^2+16x+3m}{6}$ 是一个 x 的一次式的平方,那么一定有一个 m 的值处于

(A) 3 和 4 之间.　　(B) 4 和 5 之间.

(C) 5 和 6 之间.　　(D) －4 和 －3 之间.

(E) －6 和 －5 之间.

（第 20 届美国高中数学考试,1969 年）

[解]　题设 F 式可改写成

$$F=x^2+\frac{8}{3}x+\frac{m}{2}=\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{m}{2}-\frac{16}{9}\right).$$

当 $m=\dfrac{32}{9}$ 时，$F=\left(x+\dfrac{4}{3}\right)^2$.

即

$$3<m<4.$$

故选(A).

2·25　要满足方程 $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{b}{a+b}$，则 a 和 b 必须

(A) 同时为有理数.　　(B) 同为实数但不是有理数.

(C) 不能同时为实数.　　(D) 一为实数,一非实数.

(E) 一实数,一非实数或同时不为实数.

（第 11 届美国高中数学考试,1960 年）

[解]　由 $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{b}{a+b}$ 有

$$a^2+ab+b^2=0.\quad 或\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1=0,$$

得 $\dfrac{a}{b}=\omega$ 或 ω^2，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

故选(E).

2·26　若两实数 x 和 y 满足方程 $\dfrac{x}{y}=x-y$. 则

(A) $x\geqslant 4$ 及 $x\leqslant 0$.　　(B) y 能等于 1.

(C) x 与 y 均为无理数.　　(D) x 与 y 不可能均为整数.

(E) x 与 y 均应为有理数.

（第 8 届美国高中数学考试,1957 年）

[解] 由$\frac{x}{y}=x-y$,变形为 $y^2-xy+x=0$.

因为 y 是实数,上式视为 y 的二次三项式时,$\Delta\geqslant 0$.

即 $x^2-4x\geqslant 0$, 得 $x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 0$.

故选(A).

2·27 如果 a,b 的算术平均值等于它的几何平均值的 2 倍,这里 $a>b>0$,则与 $\frac{a}{b}$ 最接近的整数是

(A) 5. (B) 8. (C) 11.

(D) 14. (E) 以上都不是.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解] 由设$\frac{1}{2}(a+b)=2\sqrt{ab}$,此可化为

$\frac{a}{b}+1=4\sqrt{\frac{a}{b}}$, 或 $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-4\sqrt{\frac{a}{b}}+1=0$.

解得 $\sqrt{\frac{a}{b}}=2\pm\sqrt{3}$.

由 $a>b>0$ 知 $\frac{a}{b}>1$, 而 $2-\sqrt{3}<1$, 故舍之.

$\therefore$ $\frac{a}{b}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}\approx 14$.

故选(D).

2·28 若 $a-b=x\neq 0$,且 $a^3-b^3=19x^3$,则

(A) $a=2x$ 或$a=3x$. (B) $a=2x$ 或$a=-3x$.

(C) $a=-2x$ 或$a=-3x$. (D) $a=-2x$ 或$a=3x$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1990 年)

[解] 由设$a-b=x\neq 0$,又 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

故
$$a^2+ab+b^2=19x^2.$$

将 $b=a-x$ 代入上式化简后有

$$a^2-ax-6x^2=0,$$

解得 $a=3x$ 或 $-2x$.

故选(D).

2·29 若方程 $x^2+bx+c=0$ 的系数 b 与c 为集合$\{1,2,3,4,5,6\}$ 的元素,则有实根的方程的个数为

(A) 20.　　(B) 19.　　(C) 18.　　(D) 17.　　(E) 16.

（第 14 届美国高中数学考试,1963 年）

［解］ 由题设注意到方程有实根须 $\Delta = b^2 - 4c \geqslant 0$. 经计算可得下表

c 取值	6	5	4	3	2	1
b 只能取值	5,6	5,6	4,5,6	4,5,6	3,4,5,6	2,3,4,5,6

综上共 19 种.

故选(B).

2·30 已知方程$(x-m)^2-(x-n)^2=(m-n)^2$,m 为正数,n 为负数,则满足方程的 x 值的集合是

(A) $x \geqslant 0$.　　(B) $x \leqslant n$.　　(C) $x=0$.

(D) 所有实数集合.　　(E) 非上述答案.

（第 10 届美国高中数学考试,1959 年）

［解］ 由设方程可变形为

$$(x-m+x-n)(x-m-x+n)=(m-n)^2,$$

即

$$(2x-m-n)(n-m)=(m-n)^2.$$

又 $m>0$, $n<0$, 故 $m-n \neq 0$,上式两边同除 $n-m$ 有

$2x-m-n=n-m$, 得 $x=n$.

故选(E).

2·31 若 $x=am+bn$ 满足二次方程$(x+m)^2-(x+n)^2=(m-n)^2$,其中 m 和 n 为不相等且不为零的常数,则

(A) $a=0$, b 有非零的惟一值.

(B) $a=0$, b 有二个非零值.

(C) $b=0$, a 有非零的惟一值.

(D) $b=0$, a 有二个非零值.

(E) a 和 b 各有惟一的非零值.

（第 11 届美国高中数学考试,1960 年）

［解］ 仿 2·30 题可得 $x=-n$.

故 $am+bn=-n$,因 m,n 为非 0 常数,则 $a=0$, $b=-1$.

故选(A).

2·32　已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个正根，则下述结论

(1) $a,b,c>0$.　　(2) $a,b,c<0$.

(3) $a>0,\quad b,c<0$,　　(4) $a<0,\quad b,c>0$

中，肯定是错误的结论个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（第2届“五羊杯”初中数学竞赛，1990年）

［解］　设 x_1,x_2 为方程的两根，由韦达定理知

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

由 $x_1>0,x_2>0$，知 a,b 异号；a,c 同号.

则结论(1)，(2)与 a,b 异号矛盾，结论(3)，(4)与 a,c 同号矛盾．即4个结论全不真.

故选(D).

2·33　已知一元二次方程

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})x^2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+(\sqrt{2}-2\sqrt{3})=0,$$

那么

(A) 方程两根之和为 $-\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$，积为$\dfrac{7-2\sqrt{6}}{5}$.

(B) 方程两根之和为$\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$，积为$\dfrac{2\sqrt{6}-7}{5}$.

(C) 方程两根之和为 $-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$，积为 $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(D) 以上答案都不对.

（中国福建省初中数学竞赛，1983年）

［解］　设方程的两根分别为 x_1,x_2，则由韦达定理及题设有

$$x_1+x_2=-\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-\frac{4+\sqrt{6}}{5},$$

$$x_1x_2=\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-1+\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-7}{5}.$$

故选(D).

2·34　当 $a<-1$ 时,方程

$$(a^3+1)x^2+(a^2+1)x-(a+1)=0$$

的根的情况是

(A) 两负根.

(B) 一正根,一负根且负根的绝对值大.

(C) 一正根,一负根且负根的绝对值小.

(D) 没有实数根.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　若 $a<-1$,则 $a^3+1<0$,且 $a^2+1>0$, $a+1<0$.

则 $\Delta=(a^2+1)^2+4(a^3+1)(a+1)>0$,知方程有不等的实根.

如设方程两根分别为 x_1,x_2,由韦达定理

$x_1x_2=-\dfrac{a+1}{a^3+1}<0$,　　即两根异号;

$x_1+x_2=-\dfrac{a^2+1}{a^3+1}>0$,　　即负根绝对值小于正根.

故选(C).

2·35　有一个关于未知数 x 的方程

$$m^2x+m(1-x)-2(1+x)=0,$$

其中 m 为常数,下列说法中正确的是

(A) m 不得为 0,否则方程无解.

(B) 不管 m 为何值,方程总有惟一的解.

(C) 当 m 为某一个正数时,方程有无穷多解.

(D) 当 m 为某一个负数时,方程无解或有无穷多解.

（第 2 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1985 年）

[解]　(1) 当 $m=0$ 时,方程化为 $-2(1+x)=0$,其有解,知(A)不真;

(2) 当 $m\neq0$ 时,方程可化为

$$(m^2-m-2)x+(m-2)=0,$$

若 $m^2-m-2=0$,　即　$m=2$ 或 -1.

当 $m=-1$ 时,　$m-2\neq0$, 方程无解,　否(B);

当 $m=2$ 时,　$m-2=0$, 方程有无穷多解.

故选(C).

2·36　方程 $x^2+1993x+3991=0$ 根的情况是

(A) 有正数根.　　(B) 有整数根.

(C) 两根的倒数和小于 -1.　　(D) 以上都不对.

（中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年）

［解］　由题设若方程根为 x_1,x_2,由韦达定理

$$x_1+x_2=-1993,\text{且 } x_1x_2=3991.$$

知方程无正根，　故否(A).

又　$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-1993}{3991}>-1$，　故否$(C)$.

若方程有整数根,则由 $x_1x_2=3991$ 知 x_1,x_2 的末位数字只能是 1,1;3,7 或 9,9.

则 x_1+x_2 的末位数字只能是偶数(0,2,4,6,8),这与 $x_1+x_2=-1993$ 矛盾.则否(B).

故选(D).

2·37　方程 $x^2+1984513x+3154891=0$ 根的情况是

(A) 没有实数根.　　(B) 有整数根.

(C) 有正数根.　　(D) 两根的倒数和小于 -1.

(E) 以上结论都不对.

（中国天津市初中数学竞赛;中国初中数学联赛,1984 年）

［解］　由方程判别式

$\Delta=1984513^2-4\cdot3154891>(19\cdot10^5)^2-4\cdot33\cdot10^5>0$,
可否(A).

若方程有整根 x_1,x_2,则由韦达定理有　$x_1\cdot x_2=3154891$,

知 $|x_1|,|x_2|$ 均为奇数,但 $|x_1+x_2|=|-1984513|$,是奇数,故不可能.则(B)不正确.

再由方程各项系数皆正,知其无正根,否(C).

而　$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1984513}{3154891}>-1$，　否$(D)$.

故选(E).

2·38　对于小于 9 的一切实数 k,方程

$$(k-5)x^2-2(k-3)x+k=0$$

(A) 没有实数根.　　　　　　　(B) 只有一个实数根.

(C) 有两个相等的实数根.　　　(D) 有两个不相等的实数根.

(E) 不能肯定实数根的个数.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985 年)

[解]　$k=5$ 时,方程化为一元一次方程,显然这时 $k\neq 3$,方程有惟一实根;

又　$k\neq 5$ 时,考察

$\Delta=[-2(k-3)]^2-4k(k-5)=36-4k.$

注意到 $k<9$,则 $\Delta>0$,因而方程有两实根.

综上,方程可有一或两个实根,

故选(E).

2·39　使实系数二次方程 $2kx^2+(8k+1)x+8k=0$ 有两不相等实根的 k 的范围是

(A) $k<-\frac{1}{16}$.　　　　　(B) $k>-\frac{1}{16}$.

(C) $k\geqslant-\frac{1}{16}$.　　　　　(D) 以上结果都不对.

(中国天津市初中数学竞赛,1983 年)

[解]　方程若有两不等的实根,则

$$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=(8k+1)^2-4\cdot 2k\cdot 8k>0.\end{cases}$$

解得　$k>-\frac{1}{16}$,　且　$k\neq 0$.

故选(D).

2·40　若二次方程$(b-c)x^2+(a-b)x+c-a=0$有相等的两实根,又 $b\neq c$,则 a,b,c 间的关系是

(A) $b=\frac{a-c}{2}$.　　　　　(B) $b=\frac{a+c}{2}$.

(C) $a=\frac{b+c}{2}$.　　　　　(D) $c=\frac{a+b}{2}$.

(中国四川省初中数学竞赛,1988 年)

[解]　由观察知 $x=1$ 是方程的根,且由题设知 $x=1$ 系重根.由韦达定理　$\frac{c-a}{b-c}=1$,

即　$c-a=b-c$，　或　$c=\frac{a+b}{2}$.

故选(D).

2·41　设二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 p,q,则 pq 的值是

(A) 0.　(B) -2.　(C) 0 或 -2.　(D) 非上述答案.

（中国上海市初中数学竞赛,1985 年）

［解］　由题设及韦达定理有

$$\begin{cases} p+q=-p, & ① \\ pq=q. & ② \end{cases}$$

由 ② 得　$q=0$ 或 $p=1$.

当　$q=0$ 时，　由 ① 有　$p=0$;

当　$p=1$ 时，　由 ① 有　$q=-2$.

则　$pq=0$ 或 -2.

故选(C).

2·42　若 p 和 q 是素数,$x^2-px+q=0$ 有相异的正整数根,那么下列说法中正确的是

Ⅰ. 根的差是奇数.

Ⅱ. 至少一个根是素数.

Ⅲ. p^2-q 是素数.

Ⅳ. $p+q$ 是素数.

(A) 仅 Ⅰ.　(B) 仅 Ⅱ.　(C) 仅 Ⅱ 和 Ⅲ.

(D) 仅 Ⅰ, Ⅱ 和 Ⅳ.　(E) 全都正确.

（第 26 届美国高中数学考试,1975 年）

［解］　由韦达定理,题设方程的两正整数根的乘积是素数 q,则两个根必须是 1 和 q.

又因为 $p=1+q$ 也是素数,只好有 $q=2,p=3$ 满足.

由 $p^2-q=3^2-2=7$ 是素数,且 $p+q=3+2=5$ 也是素数.

则结论 Ⅰ ~ Ⅳ 全正确.

故选(E).

2·43　两个素数 a,b,恰好是 x 的整系数方程 $x^2-21x+t=0$ 的两个根.则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 等于

(A) 2213.　　(B) $\frac{58}{21}$.　　(C) $\frac{2402}{49}$.　　(D) $\frac{365}{38}$.

（第2届"希望杯"全国数学邀请赛,1991年）

[解]　由题设及韦达定理知:$a+b=21$,这样 $a=2$, $b=19$;或 $a=19$, $b=2$.

则
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{2^2+19^2}{2\cdot 19}=\frac{365}{38}.$$

故选(D).

2·44　若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根,则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的关系式是

(A) $\Delta>M$.　(B) $\Delta=M$.　(C) $\Delta<M$.　(D) 不确定.

（中国初中数学联赛,1992年）

[解]　依题意有 $ax_0^2+bx_0+c=0$.

而
$$\begin{aligned}(2ax_0+b)^2&=4a(ax_0^2+bx_0+c)+b^2-4ac\\&=b^2-4ac=\Delta.\end{aligned}$$

故选(B).

2·45　设 $a+b>c>0$ 且 $|a-b|<c$,那么二次方程 $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 的根的情形是

(A) 有两个等根.　　(B) 无实根.　　(C) 有两个不等根.

(D) 有实根.　　(E) 不定.

（吉林省八市初中数学竞赛,1986年）

[解]　显然 $a\neq 0$,否则与题设 $a+b>c>0$ 且 $|a-b|<c$ 矛盾.考察题设方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=(b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2\\&=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)\\&=[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]\\&=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c),\end{aligned}$$

由题设　$a+b>c>0$,

知　$a+b+c>0$,　$a+b-c>0$.

又　$|a-b|<c$,且 $c>0$,知

$$a-b+c>0,\quad a-b-c<0.$$

从而 $\Delta < 0$,方程无实根.

故选(B).

2·46 若 p,q 为奇数,且方程 $x^2+2px+2q=0$ 有两实根,则两根都是

(A) 无理数. (B) 奇数. (C) 偶数. (D) 有理数,但非整数.

(中国上海市初中数学竞赛,1983 年;
中国部分省、市初中数学通讯赛,1985 年)

[解] 由求根公式有 $x=-p\pm\sqrt{p^2-2q}$.

若 x 是有理数,则 $\sqrt{p^2-2q}=r$ 是有理数.

$$\therefore \quad p^2-2q=r^2,$$

即 $p^2-r^2=2q$, 或 $(p+r)(p-r)=2q$.

由于 r 是有理数,且 $r^2=p^2-2q$,则 r 是整数且为奇数($\because$ p,q 为奇数).

于是 $p+r$, $p-r$ 都是偶数,则 $(p+r)(p-r)$ 是 4 的倍数.但当 q 是奇数时,$2q$ 不是 4 的倍数.

$\therefore$ 方程根 x 是有理数假设不妥.

故选(A).

2·47 若方程 $x^2+px-q=0$ 的二根分别为 x_1,x_2,又 $x_1>1$,且 $p+q+3>0$,则 x_2

(A) 小于 1. (B) 等于 1. (C) 大于 1. (D) 不确定.

(中国四川省初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由韦达定理有 $p=-(x_1+x_2)$,且 $q=-x_1x_2$.

又 $p+q+3>0$, 则

$$-(x_1+x_2)-x_1x_2+3>0,$$

或
$$4-(x_1+1)(x_2+1)>0,$$

即
$$(x_1+1)(x_2+1)<4.$$

又 $x_1>1$,则 $x_1+1>2$, 从而 $x_2+1<2$, 即 $x_2<1$.

故选(A).

2·48 对于方程 $x^2+cx+2=0$ 和 $x^2+2x+c=2$,以下结论正确的是

(A) 至少有一方程有实根.　　(B) 至多有一方程有实根.

(C) 都有实数根.　　(D) 都无实数根.

（第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年）

[解]　设两方程判别式分别为 Δ_1 和 Δ_2,则

$\Delta_1 = c^2 - 8$,　且 $\Delta_2 = 4 - 4(c-2) = 12 - 4c$.

而　$$\Delta_1 + \Delta_2 = c^2 - 4c + 4 = (c-2)^2 \geqslant 0,$$

则　Δ_1, Δ_2 中至少之一非负,从而至少有一方程有实根.

故选(A).

2·49　方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 与 $x^2 - x - a = 0$ 有一公共实数解,那么系数 a 的值可有的个数是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 无穷多.

（第28届美国高中数学考试,1977年）

[解]　从题设第一方程中减去第二方程得

$$ax + x + (1+a) = 0,$$

即　$(a+1)(x+1) = 0$.　解得　$a = -1$ 或 $x = -1$.

若 $a = -1$,那么两个已知方程恒等且无实数解(但有两个复数解);

当 $x = -1$ 时,得 $a = 2$,已知方程有一个公共实解.

故选(B).

2·50　若 c 是实数,并且 $x^2 - 3x + c = 0$ 的一个解的相反数是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的一个解,那么 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解是

(A) 1,2.　(B) $-1, -2$.　(C) 0,3.

(D) $0, -3$.　(E) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$.

（第27届美国高中数学考试,1976年）

[解]　设 r 是 $x^2 - 3x + c = 0$ 的一个解,那么 $-r$ 是 $x^2 + 3x - c = 0$ 的一个解,由此

$$r^2 - 3r + c = 0,\qquad r^2 - 3r - c = 0.$$

解得 $c = 0$.因而 $x^2 - 3x + c = 0$ 的解是0和3.

故选(C).

2·51　已知方程 $x^2 + kx + 6 = 0$ 与 $x^2 - kx + 6 = 0$,若第二个方程的各根均比第一个方程的各对应根多5,则 k 等于

(A) 5. (B) -5. (C) 7.

(D) -7. (E) 非上述答案.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解] 设第一个方程的两根分别为 r,s. 由韦达定理有

$$r+s=-k,\quad rs=6.$$

对第二个方程而言则有

$$\begin{cases}(r+5)+(s+5)=k,\\(r+5)(s+5)=6,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}r+s=k-10,\\rs+5(r+s)+25=6.\end{cases}$$

将前式代入可解得 $k=5$.

故选(A).

2·52 关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 r 和 s, $x^2+px+q=0$ 的两根为 r^2 和 s^2,那么 p 等于

(A) $4c-b^2$. (B) b^2-4c. (C) b^2-2c. (D) $2c-b^2$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1989年)

[解] 由设及韦达定理有

$$\begin{cases}r+s=-b,\\rs=c;\end{cases}\qquad \begin{cases}r^2+s^2=-p,\\r^2s^2=q.\end{cases}$$

从而 $p=-(r^2+s^2)=-[(r+s)^2-2rs]=-b^2+2c$,

故选(D).

2·53 设 $Ax^2+Bx+C=0$ 的根为 r 和 s, 又 $x^2+px+q=0$ 的根为 r^2 和 s^2, 则 p 必等于

(A) $\dfrac{B^2-4AC}{A^2}$. (B) $\dfrac{B^2-2AC}{A^2}$. (C) $\dfrac{2AC-B^2}{A^2}$.

(D) B^2-2C. (E) $2C-B^2$.

(第9届美国高中数学考试,1958年)

[解] 由题设及韦达定理有

$$r^2+s^2=-p,\quad r+s=-\frac{B}{A},\quad rs=\frac{C}{A},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad p&=-(r^2+s^2)=-(r+s)^2+2rs\\&=-\frac{B^2}{A^2}+\frac{2C}{A}=\frac{2AC-B^2}{A^2}.\end{aligned}$$

故选(C).

2·54　若方程 $x^2+px+q=0$ 的解是方程 $x^2+mx+n=0$ 的解的立方,那么

(A) $p=m^3+3mn$.　(B) $p=m^3-3mn$.　(C) $p+q=m^3$.

(D) $\left(\frac{m}{n}\right)^3=\frac{p}{q}$.　(E) 这些都不对.

（第 28 届美国高中数学考试,1977 年）

［解］　设 α 和 β 是 $x^2+mx+n=0$ 的解,那么由题设有

$$\begin{cases}-m=\alpha+\beta,\\ n=\alpha\beta;\end{cases}\qquad \begin{cases}-p=\alpha^3+\beta^3,\\ q=\alpha^3\beta^3.\end{cases}$$

因为 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$,

$\therefore$ $-p=-m^3+3mn$.

故选(B).

2·55　若 a,b,c 和 d 是非零数,c 和 d 是 $x^2+ax+b=0$ 的解,a 和 b 是 $x^2+cx+d=0$ 的解,那么 $a+b+c+d$ 等于

(A) 0.　(B) -2.　(C) 2.　(D) 4.　(E) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

（第 29 届美国高中数学考试,1978 年）

［解］　由题设及韦达定理可有

$$\begin{cases}c+d=-a, & ①\\ cd=b, & ②\\ a+b=-c, & ③\\ ab=d, & ④\end{cases}$$

由 ① 得　$a+c=-d$,

由 ③ 得　$a+c=-b$,　$\therefore$　$b=d$,　代入 ② 得　$c=1$.

再将 $b=d$ 代入 ④ 得　$a=1$.

① + ③ 得　$a+b+c+d=-(a+c)=-2$.

故选(B).

2·56　如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$,没有实数根,那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根个数为

(A) 2.　(B) 1.　(C) 0.　(D) 不确定.

（中国初中数学联赛,1989 年）

[解] 因前一个方程没有实根,则其判别式

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 4m(m+5) < 0,\ 解得\ m > 4.$$

后一个方程在 $m > 4$ 且 $m \neq 5$ 时,其判别式

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 4m(m-5) = 36m + 16 > 0,$$

有两个不同的实根.

而在 $m = 5$ 时,方程为一次方程,只有一个实根.

因此,其实根的个数不能确定.

故选(D).

2·57 方程$(1984x)^2 - 1983 \cdot 1985x - 1 = 0$ 的较大的根为 r, $1983x^2 - 1984x + 1 = 0$ 的较小的根为 s,则 $r - s$ 等于

(A) $\frac{1984}{1983}$. (B) $\frac{1985}{1984}$. (C) $\frac{1982}{1983}$. (D) $\frac{1983}{1984}$. (E) 0.

(中国北京市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 因为 $1984^2 - 1983 \cdot 1985 - 1 = 0$,

故 1 为第一个方程的一个根.

由于 $-\frac{1}{1984^2} < 0$,知另一根为负.所以 $r = 1$.

观察可知 1 为第二个方程一个根,$\frac{1}{1983}$ 为另一根,所以

$$s = \frac{1}{1983}, \quad 且 \quad r - s = \frac{1982}{1983}.$$

故选(C).

2·58 若方程$(1992x)^2 - 1991 \cdot 1993x - 1 = 0$较大根为 m,方程 $x^2 + 1991x - 1992 = 0$ 的较小根为 n,则 $m - n$ 等于

(A) 1993. (B) 1992. (C) $\frac{1992}{1993}$. (D) $\frac{1991}{1992}$.

(中国四川省初中数学竞赛,1992 年)

[解] 对于第一个方程而言,较大的根

$$m = \frac{1991 \cdot 1993 + \sqrt{1991^2 \cdot 1993^2 + 4 \cdot 1992^2}}{2 \cdot 1992^2}.$$

对于第二个方程而言,较小的根

$$n = \frac{-1991 - \sqrt{1991^2 + 4 \cdot 1992}}{2},$$

则　$m-n$

$$=\frac{(1992-1)(1992+1)+\sqrt{(1992-1)^2(1992+1)^2+4\cdot1992^2}}{2\cdot1992^2}$$
$$+\frac{1991+\sqrt{(1992-1)^2+4\cdot1992}}{2}$$
$$=\frac{(1992^2-1)+(1992^2+1)}{2\cdot1992^2}+\frac{1991+(1992+1)}{2}$$
$$=1+1992$$
$$=1993.$$

故选(A).

2·59　方程 $x^2-px+\dfrac{p^2-1}{4}=0$ 的大根与小根的差为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) p.　(E) $p+1$.

（第13届美国高中数学考试,1962年）

[解]　设方程两根分别为 α 和β,且设 $\alpha>\beta$.

则　$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$$=\sqrt{p^2-(p^2-1)}=1.$$

故选(B).

2·60　方程$(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x-2=0$的大根减去小根,则可得

(A) $-2+3\sqrt{3}$.　(B) $2-\sqrt{3}$.　(C) $6+3\sqrt{3}$.

(D) $6-3\sqrt{3}$.　(E) $3\sqrt{3}+2$.

（第15届美国高中数学考试,1964年）

[解]　设方程的两根分别为 r,s 且 $r\geqslant s$.

由　$r-s=\sqrt{(r-s)^2}=\sqrt{(r+s)^2-4rs}$
$$=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+8(7+4\sqrt{3})}}{7+4\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{9(2+\sqrt{3})^2}}{(2+\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2+\sqrt{3}}$$
$$=6-3\sqrt{3}.$$

故选(D).

2·61　已知方程 $x^2+px+q=0$,其中 p 及q 是正数,如果其根的

差是 1,那么 p 等于

(A) $\sqrt{4q+1}$.　(B) $q-1$.　(C) $-\sqrt{4q+1}$.

(D) $q+1$.　(E) $\sqrt{4q-1}$.

（第 21 届美国高中数学考试,1970 年）

[解]　设方程两根为 x_1,x_2,依题设 $|x_1-x_2|=1$,

即　$(x_1-x_2)^2=1$,　或　$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1$,

则由韦达定理知 $p^2-4q=1$.

又　$p>0$,　则 $p=\sqrt{4q+1}$.

故选(A).

2·62　方程 $x^2+bx+c=0$ 的根均为大于 1 的实数,设 $s=b+c+1$,则 s

(A) 可能小于零.　(B) 可能等于零.　(C) 应该大于零.

(D) 应该小于零.　(E) 介于 -1 和 1 之间.

（第 10 届美国高中数学考试,1959 年）

[解]　设方程两根分别为 $1+\alpha$ 和 $1+\beta$,其中 $\alpha>0$,且 $\beta>0$.由韦达定理

$$\begin{cases}(1+\alpha)+(1+\beta)=-b,\\(1+\alpha)(1+\beta)=c.\end{cases}$$

而

$$\begin{aligned}s&=b+c+1\\&=-(\alpha+\beta+2)+(1+\alpha)(1+\beta)+1\\&=\alpha\beta>0.\end{aligned}$$

故选(C).

2·63　若方程 $x^2+(m-1)x+4-m=0$ 的两根都比 2 大,则 m 的取值范围是

(A) $m\leqslant-6$.　(B) $-6<m\leqslant-5$.

(C) $m<-3$.　(D) $m<-6$ 或 $-6<m\leqslant-5$.

（中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1989 年）

[解]　设方程的两根分别为 x_1,x_2,则 $x_1>2$ 且 $x_2>2$.

令　$y=x-2$,即　$x=y+2$ 代入原方程有

$$(y+2)^2+(m-1)(y+2)+4-m=0,$$

即

$$y^2+(m+3)y+m+6=0. \quad ㊉$$

$\because$ 原方程两根皆大于 2,则 ㊉ 式两根皆大于 0. 于是

$$\begin{cases}\Delta = (m+3)^2 - 4(m+6) \geqslant 0, \\ m+3 < 0, \\ m+6 > 0.\end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} m \geqslant 3 \text{ 或 } m \leqslant -5, \\ m < -3, \\ m > -6.\end{cases}$$

$\therefore \quad -6 < m \leqslant -5.$

故选(B).

2·64 方程 $x^2 + 2hx = 3$ 的根的平方和是 10, h 的绝对值等于

(A) -1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2. (E) 这些都不对.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解] 如果 r 和 s 是方程的两个根,那么 $r + s = -2h$, $rs = -3$.

因此 $(r+s)^2 = r^2 + s^2 + 2rs = 10 - 6 = 4h^2$, $\therefore \quad |h| = 1$.

故选(E).

2·65 已知一元二次方程 $x^2 - 4ax + 5a^2 - 6a = 0$ 有两个实根,且这两根差的绝对值是 6. 那么, a 的值等于

(A) -1. (B) 1. (C) 3. (D) 5.

(中国北京市初中数学竞赛,1991 年)

[解] 设方程两根为 x_1, x_2,由韦达定理有

$$x_1 + x_2 = 4a, \quad 且 \ x_1x_2 = 5a^2 - 6a.$$

则

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{16a^2 - 4(5a^2 - 6a)} \\ &= 2\sqrt{6a - a^2} = 6,\end{aligned}$$

$\therefore \quad \sqrt{6a - a^2} = 3$, 即 $a^2 - 6a + 9 = 0$.

得 $a = 3$,其适合 $6a - a^2 > 0$.

故选(C).

2·66 已知方程 $2x^2 + kx - 2k + 1 = 0$ 的两实根的平方和为 $\frac{29}{4}$,则 k 的值为

(A) 3. (B) -11. (C) 3 或 -11.

(D) 11. (E) 以上结论都不对.

(中国天津市初中数学竞赛;中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 设方程的两实根分别为 x_1, x_2,则由题设有

选择题卷

$$\begin{cases}\Delta = k^2 - 4\cdot 2(-2k+1) > 0, & ①\\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{29}{4}, & ②\\ x_1 + x_2 = -\dfrac{k}{2}, & ③\\ x_1x_2 = \dfrac{1-2k}{2}. & ④\end{cases}$$

由 ① 解得　$k < -8-6\sqrt{2}$　或　$k > -8+6\sqrt{2}$.

由 ② 有　$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{29}{4}$.

由 ③,④ 及上式得　$k^2 + 8k - 33 = 0$.

解得　$k = 3$ 或 -11.　综上，$k = 3$.

故选(A).

2·67　已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 r 及 s，则以 $ar + b$ 及 $as + b$ 为根的方程为

(A) $x^2 - bx - ac = 0$.　　(B) $x^2 - bx + ac = 0$.

(C) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$.　　(D) $x^2 + 3bx - ca + 2b^2 = 0$.

(E) $x^2 + b(2-a)x + a^2c + b^2(a+1) = 0$.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解]　由设有 $r + s = -\dfrac{b}{a}$，　$rs = \dfrac{c}{a}$.

又　$[x-(ar+b)][x-(as+b)] = 0$,

从而　$x^2 - [a(r+s)+2b]x + a^2rs + ab(r+s) + b^2 = 0$,

即　$x^2 - [a(-\dfrac{b}{a}) + 2b]x + a^2(\dfrac{c}{a}) + ab(-\dfrac{b}{a}) + b^2 = 0$,

或　$x^2 - bx + ac = 0$.

故选(B).

2·68　若 $a_2 \neq 0$，且 r，s 为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ 的根,则等式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0(1-\dfrac{x}{r})(1-\dfrac{x}{s})$ 在下列情况中成立的是

(A) 所有 x 值,$a_0 \neq 0$.　　(B) 所有 x 值.

(C) 仅当 $x = 0$.　　(D) 仅当 $x = r$ 或 $x = s$.

(E) 仅当 $x = r$ 或 $x = s$，$a_0 \neq 0$.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[**解**] 由 $a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$= a_2(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2})$$
$$= a_2[x^2 - (r + s)x + rs]$$
$$= a_2(r - x)(s - x),$$

若 $rs \neq 0$, 又 $a_2 \neq 0$, 则 $a_0 \neq 0$.

$\therefore$ $a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$= a_2rs(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{x}{s})$$
$$= a_2 \cdot \frac{a_0}{a_2}(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{x}{s})$$
$$= a_0(1 - \frac{x}{r})(1 - \frac{x}{s}).$$

故选(A).

2·69 一个一元二次方程的两个根为 α, β,它们适合关系式$\frac{1 + \beta}{2 + \beta} = -\frac{1}{\alpha}$ 和 $\frac{\alpha\beta^2 + 121}{1 - \alpha^2\beta} = 1$,则这个一元二次方程是

(A) $x^2 + 12x - 10 = 0$ 或 $x^2 - 10x + 12 = 0$.

(B) $x^2 + 10x + 12 = 0$ 或 $x^2 - 12x + 10 = 0$.

(C) $x^2 + 12x + 10 = 0$ 或 $x^2 - 10x - 12 = 0$.

(D) $x^2 + 10x - 12 = 0$ 或 $x^2 - 12x - 10 = 0$.

(中国浙江省宁波市初中数学竞赛,1985 年)

[**解**] 由题设两式可得

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) + \alpha\beta = -2, \\ \alpha\beta(\alpha + \beta) = -120. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \alpha + \beta = -12, \\ \alpha\beta = 10; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha + \beta = 10, \\ \alpha\beta = -12. \end{cases}$

则所求方程为

$$x^2 + 12x + 10 = 0 \text{ 或 } x^2 - 10x - 12 = 0.$$

故选(C).

2·70 若$\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根(其中 a, b 是有理数),则 ab 为

(A) $-220+\sqrt{3}$.　(B) $220-\sqrt{3}$.　(C) -220.　(D) 220.

（中国四川省初中数学竞赛，1990 年）

［解］　由 $\sqrt{28-10\sqrt{3}}=\sqrt{5^2-10\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=5-\sqrt{3}$，

又　$x^2+ax+b=0$ 为有理系数方程，则 $5+\sqrt{3}$ 为其另一根.

则　$$a=-[(5+\sqrt{3})+(5-\sqrt{3})]=-10,$$

且　$$b=(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})=25-3=22.$$

因而　$$ab=-220.$$

故选(C).

2·71　a,b 是两个不为零的实数，a^2,b^2 是方程 $x^2-cx+c=0$ 的两根，那么代数式 $a\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$ 的值是

(A) 0.　(B) 2.　(C) 不存在.　(D) 以上答案都不对.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛，1990 年）

［解］　由韦达定理可得　$a^2+b^2=c$，　$a^2b^2=c$，

故　$a^2+b^2=a^2b^2$，　$\therefore$　$b^2-1=\frac{b^2}{a^2}$，　$a^2-1=\frac{a^2}{b^2}$.

若　$a>0$，　$b>0$，则

$$\begin{aligned}&a\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\\&=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}}\\&=\sqrt{a^2-(a^2-1)}+\sqrt{b^2-(b^2-1)}=2.\end{aligned}$$

若 $a<0$，　$b<0$，同理可求得 $a\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}=-2$.

此外，当 $a>0$，　$b<0$ 或 $a<0$，　$b>0$ 时，　原式 $=0$.

故选(D).

2·72　某人出生于 19 世纪前半叶，于 x^2 年时年龄为 x，则此人出生年为

(A) 1849.　(B) 1825.　(C) 1812.　(D) 1836.　(E) 1806.

（第 5 届美国高中数学考试，1954 年）

［解］　由设知　$1800<x^2<1900$，即 $10\sqrt{18}<x<10\sqrt{19}$，

而　$$10\sqrt{18}\approx 42,\quad 10\sqrt{19}\approx 43.$$

因 x 为整数,经验算 $x=43$ 时,$x^2=1849$,且 $1849-43=1806$.故选(E).

2·73　一物品值 C 元,在损失为售价的 $x\%$ 之下,以100元售出,之后,又在获利为新售价 S 的$x\%$ 之下售出,若 S 与C之差为 $1\frac{1}{9}$ 元,则 x 为

(A) 未定.　(B) $\frac{80}{9}$.　(C) 10.　(D) $\frac{95}{9}$.　(E) $\frac{100}{9}$.

(第16届美国高中数学考试,1965年)

[解]　由设　$C=100+100\cdot x\%=100+x$,

又　$$S=C+1\frac{1}{9}=(100+x)+1\frac{1}{9}=101\frac{1}{9}+x,$$

同时　$$S=100+\frac{x}{100}(101\frac{1}{9}+x).$$

综上两式有　$$\frac{x^2}{100}+\frac{x}{90}-\frac{10}{9}=0,$$

解得　$x=10$(已舍去负值).

故选(C).

2·74　一石落井,7.7秒后闻石至井底的回声,设石落 t 秒的距离为 $16t^2$ 英尺,且声速每秒1120英尺,则井深为

(A) 784英尺.　(B) 342英尺.　(C) 1568英尺.

(D) 156.8英尺.　(E) 非上述的答案.

(第2届美国高中数学考试,1951年)

[解]　设井深为 h,石头落井底历时为 t,则　$h=16t^2$.

由题设有

$$t+\frac{h}{1120}=7.7,\quad \text{即}\quad t^2+70t-7\cdot 77=0,$$

得　$t=7$ 或 -77 (舍去负值).

故选(A).

2·75　某队伍长6千米,以每小时5千米的速度行进.通讯员骑马从队头到队尾送信,到队尾后立即返回队头,共用了半小时.则通讯员的速度每小时的千米数为

(A) 25.　(B) 24.　(C) 20.　(D) 18.

(第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年)

[解] 设通讯员速度为 x 千米/时,又通讯员相对于队伍的运动,从头至尾速度为 $(x+5)$ 千米/时,从尾至头速度为 $(x-5)$ 千米/时.依题意有

$$\frac{6}{x+5}+\frac{6}{x-5}=\frac{1}{2},$$

即 $$x^2-24x-25=0.$$

解得 $$x=25 \quad (\text{已舍} -1).$$

故选(A).

2·76 一条河有每小时3英里的恒定流速.一只汽船用恒定的速度顺流行4英里再返回原地,总共需1小时(不计船调头的时间).顺流速度与逆流速度的比是

(A) 4∶3. (B) 3∶2. (C) 5∶3. (D) 2∶1. (E) 5∶2.

(第22届美国高中数学考试,1971年)

[解] 设 v 是汽船在静水中的速度(单位是英里/时),那么依题设有

$$1=\frac{4}{v+3}+\frac{4}{v-3},$$

即 $$v^2-9=4(v-3)+4(v+3),$$

或 $$v^2-8v-9=0,$$

$$(v-9)(v+1)=0.$$

解得 $$v=9.(\text{已舍去负值})$$

$$\therefore \quad \frac{\text{顺流速度}}{\text{逆流速度}}=\frac{v+3}{v-3}=\frac{12}{6}=\frac{2}{1}. \quad \text{即比是 } 2:1.$$

故选(D).

2·77 甲,乙两个在环形跑道上以各自的不变速度跑步,如果两人同时从同地相背而跑,第一次相遇后,乙又跑8分的时间到达出发点,已知甲跑一周需6分,那么乙跑一周需要

(A) 11分. (B) 12分. (C) 14分. (D) 16分.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛,1989年)

[解] 设乙跑一周需 x 分.由题设得比例式

$(x-8):8=6:x$, 即 $x^2-8x-48=0$.

解后取正根 $$x=12.$$

故选(*B*).

2·78 甲,乙二人同时同地出发相背而行,一小时后分别到达各自终点 *A*,*B*.若仍从原地出发,互换彼此到达目的地,则甲在乙到达 *A* 地之后 35 分钟到达 *B* 地,甲的速度与乙的速度之比是

(A) 7 : 12. (B) 12 : 17. (C) 3 : 4. (D) 4 : 3.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1991 年)

[**解**] 设甲,乙两人的速度分别为 v_1,v_2,依题意有

$$\frac{60v_2}{v_1}=\frac{60v_1}{v_2}+35,$$

若设 $\frac{v_1}{v_2}=t$, 则上方程可化为

$$\frac{60}{t}-60t-35=0,\quad 即\quad 12t^2+7t-12=0.$$

解得 $$t_1=\frac{3}{4},\quad t_2=-\frac{4}{3}(舍去).$$

故选(*C*).

2·79 两人分别从相距 76 英里的两点 *R* 与 *S* 同时相向而行,在 *R* 处的人以每小时 $4\frac{1}{2}$ 英里的速度匀速步行,在 *S* 处的人以每小时 $3\frac{1}{4}$ 英里的速度匀速步行第一小时,以每小时 $3\frac{3}{4}$ 英里的速度匀速步行第二小时,依次,按等差数列进行,若二人相遇处离 *R* 比离 *S* 近 x 英里,而所用时间恰为一整数小时,则 x 为

(A) 10. (B) 8. (C) 6. (D) 4. (E) 2.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[**解**] 设他们从出发到相遇的时间为 k 小时,依题意可有

$$\frac{9}{2}k+\frac{1}{2}k\left[2\cdot\frac{13}{4}+\frac{1}{2}(k-1)\right]=76,$$

即 $k^2+30k-304=0$, 解得 $k=8$(只取整数解).

故相遇处距 *R* 处 36 英里,距 *S* 处 40 英里.

这样 $$x=40-36=4.$$

故选(*D*).

第3节　绝对值方程

2·80　方程 $|x-2|+x-2=0$ 的实数解的个数为

(A) 1个.　(B) 2个.　(C) 3个.　(D) 4个以上.

(中国四川省初中数学竞赛,1990年)

[解]　当 $x \leqslant 2$ 时,原方程化为

$$(2-x)+(x-2) \equiv 0.$$

则方程有无穷多解.

故选(D).

2·81　方程 $|x-2|+|x-3|=1$ 的实数解的个数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 多于3.

(第41届美国高中数学考试,1990年)

[解]　分 $x<2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$ 和 $x \geqslant 3$ 三段考虑.

当 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 时,方程化为 $(x-2)+(3-x)=1$,即 $1=1$ 为恒等式,则此时方程有无穷多解.

故选(E).

2·82　已知 $|x-1|+|x-5|=4$,则 x 的取值范围是

(A) $1 \leqslant x \leqslant 5$.　(B) $x \leqslant 1$.

(C) $1<x<5$.　(D) $x \geqslant 5$.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1985年)

[解]　将给出的 x 值代入题设方程,结果:

根据(B)和(D),我们取 $x=0$ 或 $x=6$,则方程不成立;

若将 $x=1$(或 $x=5$)代入方程成立,所以(C):$1<x<5$ 不符合.

故选(A).

2·83　若实数 x 满足方程 $|1-x|=1+|x|$,那么 $\sqrt{(x-1)^2}$ 等于

(A) $x-1$.　(B) $1-x$.　(C) $\pm(x-1)$.　(D) 1.　(E) -1.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1983年)

[解]　当 $x \leqslant 0$ 时,$|1-x|=1-x$,而 $1+|x|=1-x$,知方

程恒成立.

当 $0<x<1$ 时,原方程化为 $1-x=1+x$,即 $x=0$,但与 $0<x<1$ 矛盾.

原方程在此区间无解.

当 $x\geqslant 1$ 时,原方程化为 $x-1=1+x$,方程亦无解.

$\therefore\quad |1-x|=1+|x|$ 的解是 $x\leqslant 0$.

这时 $\quad\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

故选(B).

2·84　设实数 x 满足 $|2-x|=2+|x|$,则 $\sqrt{(x-1)^2}$ 等于

(A) $x-1$.　　(B) $1-x$.　　(C) $\pm(x-1)$.　　(D) 1.

(上海市初中数学竞赛,1986 年)

[解]　由设 $|2-x|=2+|x|$,　知 $x\leqslant 0$.

$\therefore\quad x-1<0$.　则 $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

故选(B).

2·85　方程 $|2x-1|+|x-2|=|x+1|$ 的实数解的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 不同于上述的结论.

(中国上海市初中数学竞赛,1984 年;

中国部分省、市初中数学通讯赛,1988 年)

[解]　先求出使每个绝对值内的代数式等于零的 x 值.这些值依从小到大的顺序排列,即为 $-1,\frac{1}{2},2$.

然后分 $x<-1$,　$-1\leqslant x<\frac{1}{2}$,　$\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 及 $x\geqslant 2$ 四种情况分别去掉绝对值号,解方程.

当考虑 $\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 时,原方程化为

$$(2x-1)-(x-2)=x+1.\quad 即\quad 1=1.$$

这是一个恒等式,说明凡是满足 $\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 的 x 值都是方程的根,这就排除(A),(B),(C).

故选(D).

2·86　若关于 x 的方程 $||x-2|-1|=a$ 有三个整数解,则 a 的值是

(A) 0.　　　　(B) 1.　　　　(C) 2.　　　　(D) 3.

（中国初中数学联赛，1986年）

[解] ∵ 当 $a=0$ 时，方程 $||x-2|-1|=0$ 有 $x=1,3$ 两解，∴ (A)不正确.

∵ 当 $a=1$ 时，有 $||x-2|-1|=1$，

即 $|x-2|=2$ 或 $|x-2|=0$，有 $x=0,\ 2,\ 4$ 三个解.

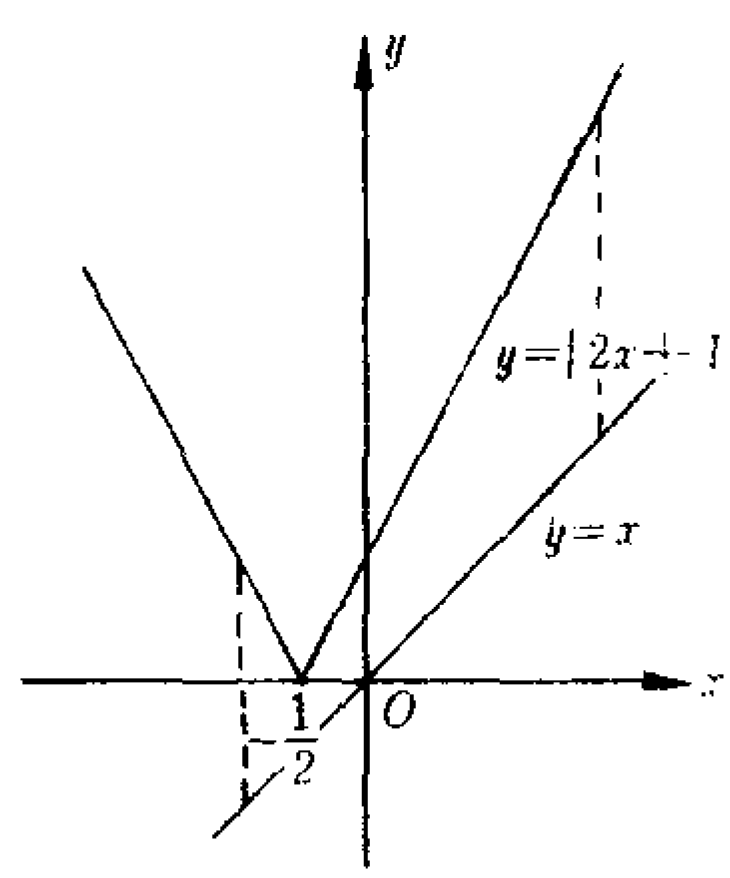
故选(B).

2·87　方程 $|x-|2x+1||=3$ 的互不相同的解的个数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

（第35届美国高中数学考试，1984年）

[解1] 我们不妨将方程的左边考虑成两个函数 $y=x$ 和 $y=|2x+1|$ 的图像间在垂直 x 轴方向上的距离. 在平面直角坐标系中画出它们的图像，后者的形状如V形，且其顶点 $(-\frac{1}{2},0)$，及斜率 ± 2.



从图像上，我们很快就可以看出，恰有两个值，使它们间的在垂直 x 轴方向上的距离为3.

[解2] 由题设方程有

$$x-|2x+1|=-3 \text{ 或 } x-|2x+1|=3.$$

于是有 $|2x+1|=x+3$ 或 $|2x+1|=x-3$.

在第一种情形中，注意方程的左边是一个绝对值，因此右边也必须 $x+3\geqslant 0$，即 $x\geqslant -3$，这就是一个约束条件；

同样在第二种情形中，也要有约束条件 $x\geqslant 3$.

在第一种情形中 $2x+1$ 必等于 $x+3$ 或 $-x-3$，于是解得 $x=2$ 和 $x=-\frac{4}{3}$，它们都满足第一个约束条件，因此是原方程的解.

在第二种情形中，$2x+1$ 必然等于 $x-3$ 或 $-x+3$，于是解得 $x=-4$ 及 $x=\frac{2}{3}$，但是它们都不符合 $x\geqslant 3$ 的条件，所以它们不是原方程的解. 所以原方程仅有两解.

故选(C).

2·88 $||||x-1|-1|-1|-1|=0$ 是一个含有 4 重绝对值符号的方程.则

(A) 0,2,4 全是根.　　(B) 0,2,4 全不是根.

(C) 0,2,4 不全是根.　　(D) 0,2,4 之外没有根.

（第 2 届“五羊杯”初中数学竞赛,1990 年）

[解] 由题设可有

$|||x-1|-1|-1|=1$, 即 $||x-1|-1|-1=\pm 1$,

也即 $||x-1|-1|=0$ 或 2,

则 $|x-1|-1=0$ 或 ± 2,

从而 $|x-1|=1,-1$ 或 3, 解得 $x=0, \pm 2, 4$.

故选(A).

2·89 已知方程 $|x|=ax+1$ 有一个负根而且没有正根,那么 a 的取值范围是

(A) $a>-1$.　(B) $a=1$.　(C) $a\geqslant 1$.　(D) 非上述答案.

（中国初中数学联赛,1987 年）

[解 1] 设 x 是方程的负根,则 $-x=ax+1$,由此

$x=\dfrac{-1}{a+1}<0$. 所以 $a+1>0$, $a>-1$.

显然,$a>-1$ 时,方程有负根.

假设方程有一个正根 x,则 $x=ax+1$.

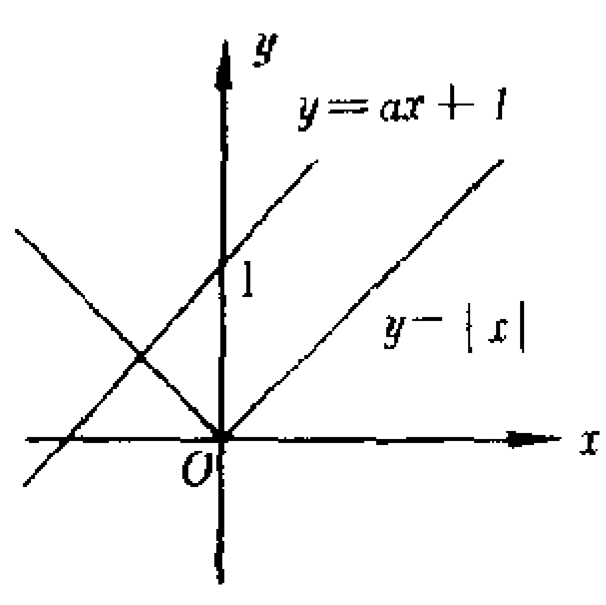
由此 $(1-a)x=1$,

有 $x=\dfrac{1}{1-a}>0$, 所以 $a<1$.

所以方程有一个负根而且没有正根的条件是 $a>-1$ 且 $a \not< 1$,所以 $a\geqslant 1$.

故选(C).

[解 2] 作 $y=|x|$ 与 $y=ax+1$ 的图像.



显然,直线 $y=ax+1$ 仅当其斜率 $a\geqslant 1$ 时,才能只与第二象限角平分线($y=|x|$ 的一支)相交,而不与第一象限的角平分线相交($y=|x|$ 的另一支).

故选(C).

2·90　已知方程 $|x-2n|=k\sqrt{x}(n\in N)$ 在区间 $(2n-1,2n+1]$ 上有两个不相等的实根.则 k 的取值范围是

(A) $k>0$.　　(B) $0<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

(C) $\frac{1}{2n+1}<k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.　　(D) 以上都不是.

（中国高中数学联赛,1995 年）

[解]　由题设,显然 $k\geqslant0$.

而 $k=0$ 导出 $x=2n$,原方程只有一根,故 $k>0$.

又由 $(x-2n)^2=k^2x$ 知,抛物线 $y=(x-2n)^2$ 与直线 $y=k^2x$ 在区间 $(2n-1,2n+1]$ 上有两个不同交点,

所以 当 $x=2n-1$ 时,有 $(x-2n)^2>k^2x$,

而当 $x=2n+1$ 时,有 $(x-2n)^2\geqslant k^2x$.

从而 $k^2(2n+1)\leqslant1$,　即　$k\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

故选(B).

2·91　方程 $x^2-|x|-1=0$ 的解是

(A) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.　　(B) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(C) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.　　(D) $\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（中国初中数学联赛,1991 年）

[解]　原方程即 $|x|^2-|x|-1=0$.

所以　$|x|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（其中 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$,已舍去).

从而

$$x=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

故选(D).

2·92　方程 $x^2+|x|+1=0$ 实数根的个数是

(A) 4.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　由 $x^2\geqslant0$, $|x|\geqslant0$,　则　$x^2+|x|+1>0$.

∴　方程无实根.

故选(D).

2·93　方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小一个根的负倒数是

(A) -1.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$.

(D) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})$.　　(E) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$.

(中国北京市初中数学竞赛,1983 年)

[解]　由 $x^2-3|x|-2=0$ 即 $|x|^2-3|x|-2=0$.

解得　$|x|=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$　(其中$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<0$舍去).

$\therefore$　$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$,　$x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

则最小的一个根为$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$,它的负倒数为:

$$\frac{1}{-\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)}=\frac{2}{3+\sqrt{17}}=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3).$$

故选(E).

2·94　对于方程 $x^2-2|x|+2=m$.如果方程实根的个数恰为3个,则 m 值等于

(A) 1.　　(B) $\sqrt{3}$.　　(C) 2.　　(D) 2.5.

(中国北京市初中数学竞赛,1991 年)

[解]　将方程改写为 $|x|^2-2|x|+2-m=0$,则

$$|x|=1\pm\sqrt{m-1},$$

即　$x=1\pm\sqrt{m-1}$　或　$x=-1\mp\sqrt{m-1}$,

当　$m=2$ 时,　$x=2,0,-2$,恰有 3 个根.

故选(C).

2·95　方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实根的个数是

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

(中国天津市初中数学竞赛,1983 年;

第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年)

[解]　分两种情况考虑:

(1)$x \geqslant 0$ 时,方程可化为 $x^2-3x+2=0$,解得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2},$$

两根皆为所求.

(2)$x \leqslant 0$ 时,方程可化为 $-x^2+3x+2=0$,即

$$x^2-3x-2=0.$$

解得 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2+4\cdot 2}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$,

其中 $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}>0$ 不符合上设.

综上,方程有 3 个实根.

故选(C).

2·96 方程 $x|x|-3|x|-4=0$ 的实根个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1987 年)

[解] 当 $x \geqslant 0$ 时,方程可化为 $x^2-3x-4=0$,解得 $x=4$ 或 -1(不合前设,舍去).

当 $x<0$ 时,方程可化为 $-x^2+3x-4=0$,

即
$$x^2-3x+4=0.$$

因其判别式 $\Delta=3^2-4\cdot 4<0$, 无实数根.

综上,知方程仅有一实根.

故选(A).

2·97 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论,下面的结论中是错误的为

(A) 至多有三个实根.

(B) 至少有一个实根.

(C) 仅当 $p^2-4q \geqslant 0$ 时才有实根.

(D) 当 $p<0$ 和 $q>0$ 时有三个实根.

(中国高中数学联赛,1981 年)

[解] 我们给 p,q 以满足条件的特殊值进行分析:

(1) 考虑方程 $x|x|+x+1=0$, ①

当 $x \geqslant 0$ 时,① 成为 $x^2+x+1=0$,此方程无实根;

当 $x \leqslant 0$ 时,① 成为 $-x^2+x+1=0$,此方程有一个负根.

综上可知,方程①有一个负根,但 $p^2-4q=-3<0$.所以(C)错.

(2) 考虑方程 $$x|x|-2x+1=0 \quad ②$$

当 $x \geqslant 0$ 时,② 成为 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$.所以 $x=1$ 是 ② 的根;

当 $x \leqslant 0$ 时,② 成为 $-x^2-2x+1=0$,它有一正根一负根,其中只有负根才是 ② 的根.

综上可知,② 只有二个根,可以证明(C),(D) 是错误的.

故选(C) 或(D).

2·98 方程 $|x|^2+|x|-6=0$ 的根

(A) 只有一个. (B) 各根之和为 1. (C) 各根之和为 0.

(D) 各根之积为 4. (E) 各根之积为 -6.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解] 由设方程可化为 $(|x|-2)(|x|+3)=0$,

$\because \quad |x| \geqslant 0, \quad$ 故 $\quad |x|+3>0$.

而由 $\quad |x|-2=0, \quad$ 得 $\quad x=\pm 2$.

故选(C).

2·99 方程 $|x^2-1|=\frac{1}{10}(x+\frac{9}{10})$ 的实根个数为

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 当 $|x|>1$ 时,方程可化为

$$x^2-1=\frac{1}{10}\left(x+\frac{9}{10}\right), \quad \text{即} \quad x^2-\frac{1}{10}x-\frac{109}{100}=0.$$

此时判别式 $\Delta=\left(-\frac{1}{10}\right)^2+4\left(\frac{109}{100}\right)>0$,知方程有两实根,且正根绝对值较大,且大于 1(两根之积绝对值大于 1),符合前设.负根绝对值小于 1,不合前设.

当 $|x|<1$ 时,方程可化为

$$1-x^2=\frac{1}{10}\left(x+\frac{9}{10}\right), \quad \text{即} \quad x^2+\frac{1}{10}x-\frac{91}{100}=0,$$

同理知方程有两异号实根,且正根符合题设,负根不合题设.

而 $\quad |x|=1$ 时, $\quad$ 即 $x=\pm 1$ 不适合方程.

综上,方程有两实根.

故选(C).

2·100　如果 $|x|+x+y=10$，且 $x+|y|-y=12$，那么 $x+y$ 等于

(A) -2.　(B) 2.　(C) $\frac{18}{5}$.　(D) $\frac{22}{3}$.　(E) 22.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解]　分 $x>0,y>0$;　$x<0,y<0$;　$x<0,y>0$ 和 $x>0,y<0$ 四种情况考虑.

对于前三种,方程组均无解.今考虑 $x>0,y<0$ 的情形.此时方程组化为

$$\begin{cases}2x+y=10,\\ x-2y=12.\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=\frac{32}{5},\\ y=-\frac{14}{5}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad x+y=\frac{18}{5}.$$

故选(C).

2·101　满足 $|a-b|+ab=1$ 的非负整数对 (a,b) 的个数是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

(中国初中数学联赛,1992 年)

[解]　由设 $ab\geqslant 0$,又 $|a-b|\geqslant 0$,则有

$$\begin{cases}|a-b|=1,\\ ab=0,\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}|a-b|=0,\\ ab=1.\end{cases}$$

可解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1;\end{cases}$　$\begin{cases}a=1,\\ b=0;\end{cases}$　和　$\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

故选(C).

第 4 节　一元高次方程

2·102　方程式 $x^3+6x^2+11x+6=0$ 的解为

(A) 无负实根.　(B) 无正实根.　(C) 无实根.

(D) 1 与 -2.　　　　(E) -1 与 2.

（第 5 届美国高中数学考试，1954 年）

[解]　由

$$\begin{aligned} & x^3+6x^2+11x+6 \\ =\ & (x^3+5x^2+6x)+(x^2+5x+6) \\ =\ & (x+1)(x^2+5x+6) \\ =\ & (x+1)(x+2)(x+3), \end{aligned}$$

∴　题设方程可化为　$(x+1)(x+2)(x+3)=0$.

其有三个负实根：-1，-2，-3.

故选 (B).

2·103　若 $a\neq b$，　$a^3-b^3=19x^3$ 并且 $a-b=x$，下面结论正确的是

(A) $a=3x$.　　　　(B) $a=3x$ 或 $a=-2x$.

(C) $a=-3x$ 或 $a=2x$.　　(D) $a=3x$ 或 $a=2x$.

(E) $a=2x$.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解]　若 $a\neq b$，　$a^3-b^3=19x^3$，且 $a-b=x$，那么

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=x(a^2+ab+b^2)=19x^3$.

把上面最后的等式除以 x 并将 $b=a-x$ 代入式中得到

$$18x^2+3ax-3a^2=0,$$

即

$$-3(a-3x)(a+2x)=0,$$

解得　　$a=3x$ 或 $a=-2x$.

故选 (B).

2·104　若 p，　q 和 r 是 $x^3-x^2+x-2=0$ 的相异根，　那么 $p^3+q^3+r^3$ 等于

(A) -1.　(B) 1.　(C) 3.　(D) 5.　(E) 这些都不对.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解]　将恒等式

$$p^2+q^2+r^2=(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp),$$

代入另一恒等式

$$p^3+q^3+r^3=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)+3pqr,$$

并利用韦达定理有

$$p^3+q^3+r^3=(p+q+r)[(p+q+r)^2-3(pq+qr+rp)]+3pqr$$

$$= 1 \cdot (1^2 - 3 \cdot 1) + 3 \cdot 2 = 4.$$

故选(E).

2·105　方程 $64x^3 - 144x^2 + 92x - 15 = 0$ 的根组成等差数列，这方程的最大根与最小根之差是

(A) 2.　(B) 1.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{3}{8}$.　(E) $\frac{1}{4}$.

（第18届美国高中数学考试，1967年）

[解]　原方程可变形为

$$x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{23}{16}x - \frac{15}{64} = 0.$$

设方程的三根分别为 $a-d$，a，$a+d$. 由韦达定理

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=\frac{9}{4}, \\ (a-d)a(a+d)=\frac{15}{64}.\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}a=\frac{3}{4}, \\ d=\pm\frac{1}{2}.\end{cases}$$

因而　$(a+|d|)-(a-|d|)=2|d|=1.$

故选(B).

2·106　考虑所有形如：

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

方程的集合，其中 a_2, a_1, a_0 都是实常数，且 $|a_i| \leqslant 2, (i=0,1,2)$. 设 r 是至少满足一个这样的方程的最大的正实数，那么

(A) $1 \leqslant r < \frac{3}{2}$.　(B) $\frac{3}{2} \leqslant r < 2$.　(C) $2 \leqslant r < \frac{5}{2}$.

(D) $\frac{5}{2} \leqslant r < 3$.　(E) $3 \leqslant r < \frac{7}{2}$.

（第32届美国高中数学考试，1981年）

[解]　设 $g(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 是满足题设条件的特殊的三次多项式. 我们知道，当 x 充分大时 $g(x)$ 的值将取决于 x^3，此处 $g(x)$ 的最高次项的系数是 $1>0$，所以对于所有大于 $g(x)=0$ 的最大根的 x，都有 $g(x)>0$.

为使方程最大实根的值能尽可能地大，应使 $a_2x^2 + a_1x + a_0$ 三项要尽量地小，又由题设 $|a_i| \leqslant 2$，则考虑极端的情形：

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2$$

不妨设该方程的最大正实根为 r_0.

对于所有的 $x \geqslant 0$,有

$$-2x^2 \leqslant a_2x^2, \quad -2x \leqslant a_1x, \quad -2 \leqslant a_0,$$

将以上三不等式相加,再在两边加上 x^3,于是对于所有的 $x \geqslant 0$ 有

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 2 \leqslant x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = g(x).$$

因此对于所有的 $x > r_0$,有 $0 < f(x) \leqslant g(x)$,所以它们都不是 $g(x)$ 的根,也就是说大于 r_0 的数将不是 $g(x)$ 的根,因而 r_0 即为所求的 r.

描绘一下 $f(x)$ 的草图,可以看到它是一条标准的三次曲线,它的最大的根略比 3 小.

事实上,$f(2) = -6, f(3) = 1$,这就说明答案只能是(C)或(D).

为了确定起见,计算一下 $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{31}{8}$ 为负值.

故选(D).

2·107　如果方程$(x-1)(x^2-2x+m)=0$的三根可以作为一个三角形的三边之长,那么实数 m 的取值范围是

(A)$0 \leqslant m \leqslant 1$.　　(B)$m \geqslant \frac{3}{4}$.

(C)$\frac{3}{4} < m \leqslant 1$.　　(D)$\frac{3}{4} \leqslant m \leqslant 1$.

(中国初中数学联赛,1995年)

[解 1]　设 α, β 为方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两根,

由 $\Delta = 4 - 4m \geqslant 0$, 得 $m \leqslant 1$.

显然 $\alpha + \beta = 2 > 1$,

又由三角形两边之差小于第三边,知 $|\alpha - \beta| < 1$,或 $|\alpha - \beta|^2 < 1$.

利用韦达定理有

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 - 4m < 1,$$

解得　$m > \frac{3}{4}$.

故选(C).

[解 2]　∵　$x^2 - 2x + m = 0$ 有两实根,

则 $\Delta = 4 - m \geqslant 0$, 得 $m \leqslant 1$.

又原方程三根分别

$$x_1=1,\ x_2=1-\sqrt{1-m},\ x_3=1+\sqrt{1-m}$$，显然 $x_2\leqslant x_1\leqslant x_3$.

注意到 $x_1+x_3=2-\sqrt{1-m}>1+\sqrt{1-m}=x_3$，

因而得 $m>\frac{3}{4}$.

故选(C).

2·108　$p^2\geqslant 4q$ 是关于 x 的实系数方程 $x^4+px^2+q=0$ 有实根的

(A) 必要条件但不是充分条件.

(B) 充分条件但不是必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既不是充分条件也不是必要条件.

(中国东北三省数学邀请赛,1989年)

[解]　若令 $x^2=t$,题设方程可化为 $t^2+pt+q=0$,其有实根的充要条件是 $\Delta=p^2-4q\geqslant 0$,即 $p^2\geqslant 4q$.

但此二次方程有实根,并不保证原方程有实根.

反之,若 $p^2\geqslant 4q$ 不成立,则原方程定无实根.

这就是说:$p^2\geqslant 4q$ 是题设方程有实根的必要条件,但不充分.

故选(A).

2·109　若 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根,其中三个为1,2,3,则 $a+c$ 等于

(A) 35.　(B) 24.　(C) -12.　(D) -61.　(E) -63.

(第17届美国高中数学考试,1966年)

[解]　因方程的四个根之和为0(方程 x^3 的系数相反数),故方程第四个根为 -6.

由 $(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=x^4-25x^2+60x-36=0$,

知
$$a+c=-25-36=-61.$$

故选(D).

2·110　要使 $p=x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ 为一整数的平方,则整数 x 的数目为

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1. (E) 0.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解] 由设 $p=(x^2+3x+1)^2-3(x-10)$, 令 $p=y^2$.

故当 $x=10$ 时, $p=(x^2+3x+1)^2=131^2$.

下证仅 $x=10$ 时,p 为完全平方数.

注意到:若 $|N|>|M|$,这里 N,M 皆为整数,则

$$||N|-1|\geqslant|M| \text{ 或 } N^2-M^2\geqslant 2|N|-1.$$

(1) 若 $x>10$,注意到

$3(x-10)=(x^2+3x+1)^2-y^2\geqslant 2|x^2+3x+1|-1$,

不可能成立.

(2) 若 $x<10$,注意到

$$\begin{aligned}3(10-x)&=y^2-(x^2+3x+1)^2\\&\geqslant 2|y|-1\\&>2|x^2+3x+1|-1,\end{aligned}$$

此不等式仅在 $x=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2$ 时成立,但无一值为完全平方数.

综上,故选(D).

2·111 如果 a,b,c,d 都是方程 $x^4-bx-3=0$ 的解,那么有下面四个解

$$\frac{a+b+c}{d^2},\quad \frac{a+b+d}{c^2},\quad \frac{a+c+d}{b^2},\quad \frac{b+c+d}{a^2}$$

的方程是

(A) $3x^4+bx+1=0$. (B) $3x^4-bx+1=0$.

(C) $3x^4+bx^3-1=0$. (D) $3x^4-bx^3-1=0$.

(E) 非以上这些方程.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 因为多项式函数 $f(x)=x^4-bx-3$ 的三次项 x^3 的系数是零,由韦达定理有

$$a+b+c+d=0,$$

又 $$\frac{a+b+c}{d^2}=\frac{a+b+c+d-d}{d^2}=\frac{-1}{d},$$

$$\frac{a+c+d}{b^2}=\frac{-1}{b},\quad \frac{a+b+d}{c^2}=\frac{-1}{c},\quad \frac{b+c+d}{a^2}=\frac{-1}{a}.$$

因为 a,b,c,d 是 $f(x)$ 的根，

所以 $\frac{-1}{d}$，$\frac{-1}{b}$，$\frac{-1}{c}$，$\frac{-1}{a}$ 是 $f\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ 的根，

即 $\frac{a+b+c}{d^2}$，$\frac{a+b+d}{c^2}$，$\frac{a+c+d}{b^2}$，$\frac{b+c+d}{a^2}$ 也是 $f\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ 的根. 这个方程即为

$$\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x}-3=0 \quad 或 \quad 3x^4-bx^3-1=0.$$

故选(D).

2·112　方程 $2x^5+x^4-20x^3-10x^2+2x+1=0$ 有一个实数根是

(A) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.　(B) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.　(C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.　(D) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　原方程可化为

$$(2x^5-20x^3+2x)+(x^4-10x^2+1)=0,$$

即
$$(2x+1)(x^4-10x^2+1)=0.$$

注意到由　$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，有 $(x-\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2$，

即　$x^2-2\sqrt{3}x+3=2$　或　$(x^2+1)^2=12x^2$，

则
$$x^4-10x^2+1=0.$$

故选(C).

2·113　方程 $x^6-3x^5-6x^3-x+8=0$

(A) 无实数根.　(B) 恰有两个相异的负根.

(C) 恰有一个负根.　(D) 无负根，但至少有一个正根.

(E) 这些都不对.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解]　若 r 是题设方程的一个根，那么 $r^6+8=3r^5+6r^3+r$.

若 $r<0$，这个方程的左边将是正数，右边将是负数，不妥.

若设 $f(x)=x^6-3x^5-6x^3-x+8$，则由 $f(0)=8>0$，而 $f(1)=-1<0$，知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 之间至少有一实根.

故选(D).

2·114 已知多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 n 是正整数或零,a_0 是正整数,余下的 a 都是整数或零,令 $h=n+a_0+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,当 $h=3$ 时,构成多项式的数目为

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 7. (E) 9.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解] 由设 $3=n+a_0+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,

上述不定方程有解:

$$n=0,\quad a_n=3;$$
$$n=1,\quad a_{n-1}=2;$$
$$n=1,\quad a_n=\pm 1,\quad a_{n-1}=1;$$
$$n=2,\quad a_{n-2}=1,\quad a_{n-1}=a_n=0.$$

与它们相应的多项式为:$3x^0,\ 2x^1,\ x^1+1,\ x^1-1,\ x^2$.

故选(B).

2·115 找出满足 $x^{256}-256^{32}=0$ 的所有实数的平方和为

(A) 8. (B) 128. (C) 512. (D) 65536. (E) $2(256^{32})$.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 注意到

$$\begin{aligned}x^{256}-256^{32}&=x^{2^8}-(2^8)^{32}=x^{2^8}-2^{2^8}\\&=(x^{2^7}+2^{2^7})(x^{2^6}+2^{2^6})\cdots(x+2)(x-2),\end{aligned}$$

则已知方程的实数根是 ± 2,因而实数根的平方和是 8.

故选(A).

第 5 节 分式方程

2·116 如果在分数$\dfrac{a}{b}(a\neq b,\quad b\neq 0)$的分子和分母中各加上 x,分数变成$\dfrac{c}{d}$,那么 x 等于

(A) $\dfrac{1}{c-d}$. (B) $\dfrac{ad-bc}{c-d}$. (C) $\dfrac{ad-bc}{c+d}$.

(D) $\frac{bc-ad}{c-d}$.　　　(E) $\frac{bc-ad}{c+d}$.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　依题设有 $\frac{a+x}{b+x}=\frac{c}{d}$, 则 $ad+dx=bc+cx$, 得

$$x=\frac{ad-bc}{c-d}.$$

故选(B).

2·117　若$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$有等值异号的根,则 m 的值应为

(A) $\frac{a-b}{a+b}$.　　(B) $\frac{a+b}{a-b}$.　　(C) c.　　(D) $\frac{1}{c}$.　　(E) 1.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解]　由设,当 $ax-c\neq 0$ 时,有

$$(x^2-bx)(m+1)=(m-1)(ax-c),$$

或　$$(m+1)x^2-[a(m-1)+b(m+1)]x+c(m-1)=0.$$

原方程有等值异号根时应有:

$m+1\neq 0$,　且　$a(m-1)+b(m+1)=0$, 得

$$m=\frac{a-b}{a+b}\quad(a+b\neq 0).$$

故选(A).

2·118　如果关于 x 的方程

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$$

有增根 $x=1$,则 k 的值等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 6.

(中国北京市初中数学竞赛,1985 年)

[解]　由$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$,

即　$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{k-5}{x(x+1)}=\frac{k-1}{(x-1)(x+1)}.$$

以 $x(x-1)(x+1)$ 乘两边,得

$$(x+1)+(k-5)(x-1)=(k-1)x \qquad ㊀$$

此时 $x=1$(增根)应满足㊀,代入㊀式得　$k=3$.

故选(C).

2·119　满足方程$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x}=x-3$的$x$值的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.

(D) 3.　　(E) 一个大于3的整数.

（第17届美国高中数学考试,1966年）

［解］　由$x^2-5x=x(x-5)$,当$x\neq 0,5$时,方程可化简为$2=x-3$,即$x=5$,与前假设矛盾.

因而此方程无解.

故选(A).

2·120　若$ab\neq 0$, $|a|\neq|b|$,则满足方程

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$$

的不同x的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

（第17届美国高中数学考试,1966年）

［解］　题设方程可化为

$$\frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab}=\frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

上式分子相同,故若分式相等,或分子为0,或分母相等.

(1) 若分子为0,则

$$a(x-a)+b(x-b)=0,\quad 即\quad x=\frac{a^2+b^2}{a+b};$$

(2) 若分母相等,则

$(x-a)(x-b)=ab$,解得　$x=0$或$x=a+b$.

故选(D).

2·121　在方程$\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$中,若诸根相等,则:

(A) $m=1$.　　(B) $m=\frac{1}{2}$.　　(C) $m=0$.

(D) $m=-1$.　　(E) $m=-\frac{1}{2}$.

（第2届美国高中数学考试,1951年）

［解］　由题设方程变形得

$$\frac{x(x-1)-(m+1)}{m-1}=\frac{x(x-1)}{m},$$

由比例性质得 $\dfrac{m+1}{1}=\dfrac{x(x-1)}{m}$,

即 $(m+1)m=x(x-1)$, 得 $x=m+1$ 或 $-m$.

若 $m+1=-m$, 有 $m=-\dfrac{1}{2}$,此为方程诸根相等条件.

故选(E).

2·122 已知实数 a,b 分别满足$\dfrac{4}{a^4}-\dfrac{2}{a^2}-3=0$和 $b^4+b^2-3=0$. 则代数式$\dfrac{a^4b^4+4}{a^4}$的值等于

(A) 175 (B) 55. (C) 13. (D) 7.

(中国北京市初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由题设知 $\left(\dfrac{2}{a^2}\right)^2-\left(\dfrac{2}{a^2}\right)-3=0$,

则 $$\frac{2}{a^2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\quad(\text{已舍负值}).$$

同理 $$b^2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\quad(\text{已舍负值}).$$

$$\therefore\quad \frac{a^4b^4+4}{a^4}=b^4+\frac{4}{a^4}=(3-b^2)+\left(\frac{2}{a^2}+3\right)=7.$$

故选(D).

2·123 两邮递员骑车从邮局同时出发,甲沿盘山公路到山顶送邮件后即原路返回,乙沿水平公路到火车站送邮件后亦即原路返回.若两人平路车速相同,上山比平路每小时慢 5km,下山比平路每小时快 5km,邮局到山顶和火车站距离均为 5km,两邮递员下车派送邮件的时间忽略不计.则

(A) 甲先回到邮局. (B) 乙先回到邮局.

(C) 甲、乙同时回邮局. (D) 前三种答案都有可能成立.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 设平路车速为 v 千米 / 时,由题设甲往返所需时间

$$\frac{5}{v-5}+\frac{5}{v+5}=\frac{10v}{v^2-25}=\frac{10}{v-\dfrac{25}{v}}>\frac{10}{v}\quad(\text{乙所需时间}),$$

则乙先到邮局.

故选(B).

2·124　一船在静水中的速度为 15mph(每小时英里),一溪的流水速度为 5mph,若此船往返航行于其中一段距离.则此船往返的平均速度与在静水中的速度之比为

(A) $\frac{5}{4}$.　(B) $\frac{1}{1}$.　(C) $\frac{8}{9}$.　(D) $\frac{7}{8}$.　(E) $\frac{9}{8}$.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解]　设船航行距离为 d,平均速度为 x,由设有

$$\frac{d}{15+5}+\frac{d}{15-5}=\frac{2d}{x},\quad \text{解得}\quad x=\frac{40}{3}.$$

则　平均速度 : 静水速度 $=\frac{40}{3}:15=8:9$.

故选(C).

2·125　三机器 P,Q,R 共同完成某项任务需 x 小时,当 P 单独完成此项任务时需另加 6 小时,Q 需另加 1 小时,R 需另加 x 小时,则 x 的值为

(A) $\frac{2}{3}$.　(B) $\frac{11}{12}$.　(C) $\frac{3}{2}$.　(D) 2.　(E) 3.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解]　由设知　$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+x}=\frac{1}{x}$,

化简后为　$3x^2+7x-6=0$,　得 $x=\frac{2}{3}$ 或 -3(舍去).

故选(A).

第 6 节　无理方程

2·126　方程 $2\sqrt{x-3}+6=x$ 的根的个数是

(A) 3 个.　(B) 2 个.　(C) 1 个.　(D) 无实数根.

(第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1988 年)

[解]　由设有　$2\sqrt{x-3}=x-6$,两边平方得

$$x^2-16x+48=0,$$

解得

$$x_1=12,\quad x_2=4(\text{舍去}).$$

故选(C).

2·127　方程 $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}+1=0$

(A) 无根.　　(B) 有一实根.　　(C) 有一实根与一虚根.

(D) 有两虚根.　　(E) 有两实根.

（第 7 届美国高中数学考试,1956 年）

[解]　由设有　$\sqrt{x+4}+1=\sqrt{x-3}$，两边平方化简后有

$$8+2\sqrt{x+4}=0,$$

此式不能成立.

故选(A).

2·128　方程$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=-\sqrt{x^2-1}$解的情况是

(A) 惟一解.　　(B) 两个解.

(C) 无数个解.　　(D) 无实数解.

（第 6 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1989 年）

[解]　由题设有　$x-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$.

而　$$\sqrt{x-1}\geqslant 0,\quad \sqrt{x+1}\geqslant 0,$$

则只有　$$\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-1}=0,$$

∴　$x=1$ 或 -1(不合题意舍去).

故选(A).

2·129　若 x 为满足$\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$的一个数,则 x^2 介于

(A) 55 与 65 之间.　　(B) 65 与 75 之间.　　(C) 75 与 85 之间.

(D) 85 与 95 之间.　　(E) 95 与 105 之间.

（第 14 届美国高中数学考试,1963 年）

[解]　将方程两边立方:

$$(x+9)-3\sqrt[3]{(x+9)^2(x-9)}+3\sqrt[3]{(x+9)(x-9)^2}-(x-9)=27$$

即　$3\sqrt[3]{(x+9)(x-9)}(\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9})=-9$

再由设 $\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$，则上式进一步化简为

$$\sqrt[3]{x^2-81}=-1,\quad 或\ x^2=80.$$

故选(C).

2·130　方程 $|\sqrt{(x-2)^2}-1|=x$ 的解为

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.　　(D) 无解.

（中国四川省初中数学竞赛,1992年）

[**解**]　分下面几种情形讨论:

(1) $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,原方程可化为 $|x-2-1|=x$,则 $3-x=x$,解得 $x=\frac{3}{2}$,其与前设矛盾,舍之.

(2) $x>3$ 时,原方程可化为 $|x-2-1|=x$,则 $x-3=x$,不妥.

(3) $1\leqslant x<2$ 时,原方程可化为 $|2-x-1|=x$,则 $x-1=x$,不妥.

(4) $x<1$ 时,原方程化为 $|2-x-1|=x$,则 $1-x=x$,解得 $x=\frac{1}{2}$,其适合原方程.

综上知原方程仅有一解　$x=\frac{1}{2}$.

故选(B).

2·131　方程 $\sqrt{x^2+12x+36}+x+6=0$ 的根的个数为

(A) 0.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) 无穷多.

（第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年）

[**解**]　原方程可化为

$|x+6|+x+6=0$,　或　$|x+6|=-(x+6)$,

$\therefore$　$x+6\leqslant 0$,　有 $x\leqslant -6$,　即方程有无穷多解.

故选(D).

2·132　方程

$$\sqrt{x^2+2x-63}+\sqrt{x+9}-\sqrt{7-x}+x+13=0$$

的实根个数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 多于2个.

（中国北京市高中数学竞赛,1993年）

[**解**]　若题设根号有意义则有

$$\begin{cases}x^2+2x-63\geqslant 0,\\ x+9\geqslant 0,\\ 7-x\geqslant 0;\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x\leqslant -9 或 x\geqslant 7,\\ x\geqslant -9,\\ x\leqslant 7.\end{cases}$$

$\therefore\quad x=7$ 或 -9. 代入原方程仅 $x=-9$ 合适.

故选(B).

2·133　如果 $a\geqslant 1$, 那么方程 $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$ 的所有实根的和为

(A) $\sqrt{a}-1$.　　(B) $\dfrac{\sqrt{a}-1}{2}$.　　(C) $\sqrt{a-1}$.

(D) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{2}$.　　(E) $\dfrac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$.

（第 32 届美国高中数学考试, 1981 年）

[**解**]　因为 x 是一个算术根, 所以 $x\geqslant 0$. 由 $x\geqslant 0$, 则所给的方程与下面方程等价

$$a-\sqrt{a+x}=x^2.$$

又由上方程的左边是 x 的减函数, 而方程的右边是 x 的增函数, 因此容易验证此方程仅有一解. 为此不妨设 $y=\sqrt{a+x}$. 于是有:

$a-y=x^2$,　因而　$a-y-y^2=x^2-y^2$.

注意到 $y^2=a+x$ 有 $a-y-(a+x)=x^2-y^2$,

即
$$-(x+y)=(x+y)(x-y),$$
或
$$0=(x+y)(x-y+1).$$

因为 $a\geqslant 1$, 且 $x\geqslant 0$, 所以 $y>0$, 因此 $x+y\neq 0$, 于是

$$x-y+1=0,\quad 即\quad x+1=y.$$

而 $y=\sqrt{a+x}$, 则

$$x+1=\sqrt{a+x},\quad 或\quad (x+1)^2=a+x.$$

解得
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}.$$

由题设知 $x\geqslant 0$.　所以　$x=\dfrac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$.

故选(E).

2·134　设正整数 a,m,n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$. 则这样的 a,m,n 的取值

(A) 有一组.　　(B) 有二组.　　(C) 多于二组.　　(D) 不存在.

（中国初中数学联赛, 1996 年）

[**解**]　将题设式两边平方得

$$a^2-4\sqrt{2}=m+n-2\sqrt{mn}.$$

又由题设 a,m,n 是自然数,从而 $a^2-4\sqrt{2}$ 是无理数.于是

$$\begin{cases}\sqrt{mn}=\sqrt{8},\\ m+n=a^2,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}mn=8,\\ m+n=a^2.\end{cases}$$

由已知有 $m>n$,因而只有 $m=8,n=1,a=3$ 这一组取值.

故选(A).

2·135 求方程式 $2\sqrt{x}+2x^{-\frac{1}{2}}=5$ 的根可由解下列方程得出的是

(A) $16x^2-92x+1=0$. (B) $4x^2-25x+4=0$.

(C) $4x^2-17x+4=0$. (D) $2x^2-21x+2=0$.

(E) $4x^2-25x-4=0$.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解] 方程两边平方有 $4\left(x+\dfrac{1}{x}+2\right)=25$,

即

$$4x^2-17x+4=0.$$

故选(C).

第三章　代数方程组

第1节　方程组

3·1　设 c 为常数,方程组 $\begin{cases} x-y=2, \\ cx+y=3. \end{cases}$ 在第一象限内有一组解 (x,y) 的充要条件是

(A) $c=-1$.　　(B) $c>-1$.　　(C) $c<\frac{3}{2}$.

(D) $0<c<\frac{3}{2}$.　　(E) $-1<c<\frac{3}{2}$.

(第38届美国高中数学考试,1987年)

[**解**]　由题设方程组解得　$x=\frac{5}{c+1}$,　$y=\frac{3-2c}{c+1}$.

又　(x,y) 在第一象限则

$$\begin{cases} \frac{5}{c+1}>0, \\ \frac{3-2c}{c+1}>0. \end{cases}\quad 解得\quad -1<c<\frac{3}{2}.$$

故选(E).

3·2　若 n 是一个实数,那么方程组

$$\begin{cases} nx+y=1, \\ ny+z=1, \\ x+nz=1. \end{cases}$$

当且仅当方程组无解时 n 的值为

(A) -1.　(B) 0.　(C) 1.　(D) 0 或 1.　(E) $\frac{1}{2}$.

（第 24 届美国高中数学考试,1973 年）

［解］ 若 $n \neq -1$,利用加减或代入消元法可解得

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right),$$

这是已知方程组的解.

若 $n = -1$,将三个方程两边相加得 $0 = 3$,矛盾!

故选(A).

3·3　两个正数 m, n 的比是 $t(t > 1)$.若 $m + n = s$,则 m, n 中较小的数可以表示为

(A) ts.　(B) $s - ts$.　(C) $\frac{ts}{1+s}$.　(D) $\frac{s}{1+t}$.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年）

［解］ 由 $m > 0$, $n > 0$, 且 $\frac{m}{n} = t > 1$, 知 n 较小.

又由　$m + n = s$ 有 $nt + n = s$, 则有 $n = \frac{s}{1+t}$.

故选(D).

3·4　满足方程 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ 的非零实数 (a, b),这样的 (a, b)

(A) 无.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 对每一个 $b \neq 0$ 的数有一对.

(E) 对每一个 $b \neq 0$ 的数有两对.

（第 31 届美国高中数学考试,1980 年）

［解］ 已知方程可变形为

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \quad 或 \quad (a+b)^2 = ab,$$

亦即

$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$

因为 (a, b) 满足最后的方程,这样

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{-3b^2}}{2},$$

注意到 $b \neq 0$,所以没有一对实数满足原方程.

故选(A).

3·5　方程组 $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$ 的实数解组数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多.

（上海市初中数学竞赛，1987 年）

[解] 由设可有 $x+y=2$, $xy=1+z^2$.

这样 x,y 是方程 $t^2-2t+(1+z^2)=0$ 的两个根. 而其判别式

$$\Delta=4-4(1+z^2)=-4z^2\leqslant 0,$$

当且仅当 $z=0$ 时 $\Delta=0$，方程有实根，且仅有 $x=y=1$ 满足方程组，因而方程组仅有一组解.

故选 (A).

3·6 满足下列两个方程 $x=x^2+y^2$, $y=2xy$ 的相异实数对 (x,y) 的数目是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

[解] 若 $y\neq 0$，第二个方程得 $x=\dfrac{1}{2}$，代入第一个方程得

$$y=\pm\frac{1}{2}.$$

若 $y=0$，由第一个方程得 $x=0$ 或 1.

综上方程组有解 $\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, $(1,0)$.

故选 (E).

3·7 两数之差，和与积之比为 $1:7:24$，则此两数之积为

(A) 6. (B) 12. (C) 24. (D) 48. (E) 96.

（第 15 届美国高中数学考试，1964 年）

[解] 设两数分别为 x,y，依题意有

$$\begin{cases}x+y=7(x-y),\\ xy=24(x-y);\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}8y-6x=0,\\ xy-24x+24y=0.\end{cases}$$

将后一组方程中第一式代入第二式有 $x(y-6)=0$,

得 $x=0$ 或 $y=6$.

$x=0$ 不合题意，故 $y=6$. 得 $x=8$.

$$\therefore\qquad xy=48.$$

故选 (D).

3·8 满足方程 $2x^2+6x+5y+1=0$ 和 $2x+y+3=0$ 的 y 值满足方程

(A) $y^2+14y-7=0$.　　　　(B) $y^2+8y+1=0$.

(C) $y^2+10y-7=0$.　　　　(D) $y^2+y-12=0$.

(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

[解]　由第二个方程解出 x 代入第一个方程可得:

$$2\left(-\frac{y+3}{2}\right)^2+6\left(-\frac{y+3}{2}\right)+5y+1=0,$$

即
$$y^2+10y-7=0.$$

故选(C).

3·9　方程式 $y=(x+1)^2$ 与 $xy+y=1$ 的公共解为

(A) 3 组实数.　　(B) 4 组实数.　　(C) 4 组虚数.

(D) 2 组实数,2 组虚数.　　(E) 1 组实数,2 组虚数.

（第 6 届美国高中数学考试,1955 年）

[解]　由设　$xy+y=1$　有　$y=\frac{1}{x+1}$,

从而
$$\frac{1}{x+1}=(x+1)^2.$$

即
$$(x+1)^3-1=0,$$

或
$$x(x^2+3x+3)=0.$$

注意到 $x^2+3x+3=0$ 无实根.

故选(E).

3·10　方程 $x^2+3x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{x-1}$ 的解与方程 $x^2+3x=a$ 的解

(A) 相同.　　(B) 不相同.

(C) 相同与不相同不确定,而与 a 的取值有关.

(D) 以上结论都不对.

（第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年）

[解]　由 $x^2+3x=a$　即　$x^2+3x-a=0$,

解得
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4a}}{2}.$$

若　$x\neq 1$,　即 $a\neq 4$ 时,题设两方程的解相同;

若 $a=4$ 时,两方程不同解(前一方程当 $x=1$ 不合题意).

故选(C).

3·11　若非零实数 x,y 满足 $|x|+y=3$,且 $|x|y+x^3=0$.则与 $x-y$ 最接近的整数是

(A) -3.　(B) -1.　(C)2.　(D)3.　(E)5.

（第45届美国高中数学考试,1994年）

[解]　若 $x>0$,则 $|x|=x$,题设式化为:

$\begin{cases}x+y=3,\\ xy+x^3=0.\end{cases}$ 得 $x^2-x+3=0$ 无实根,不妥.

若 $x<0$, 则 $|x|=-x$, 由题设 $y-x=3$.

故选(D).

3·12　若(x,y)是方程组

$$\begin{cases}xy=6,\\ x^2y+xy^2+x+y=63\end{cases}$$

的解,则 x^2+y^2 等于

(A) 13.　(B) $\dfrac{1173}{32}$.　(C) 55.　(D) 69.　(E) 81.

（第38届美国高中数学考试,1987年）

[解]　由

$$\begin{aligned}&x^2y+xy^2+x+y\\=&xy(x+y)+x+y\\=&(x+y)(xy+1),\end{aligned}$$

又 $xy=6$ 代入上式有　$(x+y)(6+1)=63$,

$\therefore$　$x+y=9$,　且　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=69$.

故选(D).

3·13　设实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0,\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0.\end{cases}$$

那么 a 的取值范围是

(A) $(-\infty,+\infty)$.　(B) $(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$.

(C) $(0,7)$.　(D) $[1,9]$.

（中国高中数学联赛,1986年）

[解]　由 $b^2+c^2+bc\geqslant 0$,及题设第二个等式,得 $-6a+6\leqslant 0$,即 $a\geqslant 1$,于是否定(A),(B),(C).

将题中第一个等式乘以 3 加第二个式子,得

$$(b-c)^2+3a^2-30a+27=0,$$

则
$$(b-c)^2=-3(a^2-10a+9),$$

$$\therefore \quad a^2-10a+9=(a-1)(a-9)\leqslant 0.$$

得
$$1\leqslant a\leqslant 9.$$

故选(D).

3·14 联立方程

$$2y=x+\frac{17}{x},\quad 2z=y+\frac{17}{y},\quad 2w=z+\frac{17}{z},\quad 2x=w+\frac{17}{w}$$

的实数解(x,y,z,w)的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) 8.　　(E) 16.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解 1] 由题设有

$$\begin{cases} x^2-2xy+17=0, & ① \\ y^2-2yz+17=0, & ② \\ z^2-2zw+17=0, & ③ \\ w^2-2wx+17=0. & ④ \end{cases}$$

由对称性易看出 $x=y=z=w$,代入上诸方程可得

$$x=y=z=w=\pm\sqrt{17}.$$

故选(B).

[解 2] 由题设知 x,y,z,w 同号,且若方程组有解(x_0,y_0,z_0,w_0),且 $x_0,y_0,z_0,w_0\in R^+$,则必有另一组解$(-x_0,-y_0,-z_0,-w_0)$.

无妨设 $x,y,z,w\in R^+$, 且 $x\leqslant y\leqslant z\leqslant w$.

题设四式相加得

$$4x\leqslant x+y+z+w=17\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)\leqslant\frac{4\cdot 17}{x},$$

于是有 $x^2\leqslant 17$, 即 $0<x\leqslant\sqrt{17}$.

另一方面由 $2x=w+\dfrac{17}{w}\geqslant 2\sqrt{17}$, 知 $x\geqslant\sqrt{17}$,

从而
$$x=\sqrt{17}.$$

同理有
$$y=z=w=\sqrt{17}.$$

且方程仅有一组正实解($\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{17}$),同时有一组负实解($-\sqrt{17}$, $-\sqrt{17}$, $-\sqrt{17}$, $-\sqrt{17}$).

故选(B).

第2节　方程组的应用

3·15　如果某一货物以 x 元出售,就有成本的15% 的亏损,如果以 y 元出售,就有成本的15% 的利润.则 $y:x$ 是

(A) $23:17$.　(B) $17y:23$.　(C) $23x:17$.

(D) 同成本有关.　(E) 非上述答案.

(第20届美国高中数学考试,1969年)

[**解**]　设 c 为成本,依题设有

$$\begin{cases} x = c - 0.15c, & ① \\ y = c + 0.15c, & ② \end{cases}$$

②:①有　$\dfrac{y}{x} = \dfrac{c+0.15c}{c-0.15c} = \dfrac{1.15}{0.85} = \dfrac{23}{17}$.

故选(A).

3·16　若一物品的标价比成本增高的百分数为 p,然后,为了要得回本钱,卖价的折扣不可超过 d,则 d 的值为

(A) $\dfrac{1}{1+p}$.　(B) $\dfrac{1}{1-p}$.　(C) $\dfrac{p}{1+p}$.

(D) $\dfrac{p}{p-1}$.　(E) $\dfrac{1-p}{1+p}$.

(第4届美国高中数学考试,1953年)

[**解**]　设物品本钱为 I,卖价为 S,依题设有

$S = I(1+p)$,　又　$S(1-d) = I$,消去 S, I

得　$(1+p)(1-d) = 1$,　则　$d = \dfrac{p}{1+p}$.

故选(C).

3·17　某人卖掉两枝烟嘴,每枝1.20美元,以本钱为准,其中一枝得利20%,另一枝亏损20%.此次出售,他

(A) 无所得失.　(B) 赔4美分.　(C) 赚4美分.

(D) 赔 10 美分.　　　(E) 赚 10 美分.

（第 7 届美国高中数学考试,1956 年）

[解]　设两枝烟嘴本钱分别为 C_1, C_2;售价分别为 S_1, S_2. 依题意

$$S_1 = C_1 + \frac{1}{5}C_1,\quad S_2 = C_2 - \frac{1}{5}C_2,\quad 且\ S_1 = S_2.$$

$$\therefore\qquad C_1 = \frac{5}{6}S_1,\quad C_2 = \frac{5}{4}S_2.$$

从而　$C_1 + C_2 = \frac{5}{6}S_1 + \frac{5}{4}S_2 = \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{4}\right)\cdot 1.20 = 2.50.$

而　$$S_1 + S_2 = 2.40.$$

故选(D).

3·18　Ann 和 Sue 各买了一盒同样的信笺盒. Ann 用她买的写了一些一张信纸的信, Sue 用她买的写了一些三张信纸的信. Ann 用掉了所有的信封但余下 50 张信纸, 而 Sue 用掉了所有的信纸但余下 50 张信封. 每个盒子中装有的信纸张数为

(A) 150.　　(B) 125.　　(C) 120.　　(D) 100.　　(E) 80.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

[解]　设 x 和 y 分别是每个盒子里的信纸数和信封数,那么依题意有

$$\begin{cases} x - y = 50, \\ y - \frac{1}{3}x = 50, \end{cases}$$

得$\frac{2}{3}x = 100$,即每个盒子里的信纸数 $x = 150$.

故选(A).

3·19　已知苹果 2 千克,雪梨 1 千克,蜜桃 4 千克,共价 6 元,又知苹果 4 千克,雪梨 2 千克,蜜桃 2 千克,共价 4 元. 今要买苹果 4 千克,雪梨 2 千克,蜜桃 5 千克,应付钱

(A) 8.　　　(B) 6.　　　(C) 5.　　　(D) 4.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛,1989 年）

[解]　设苹果,雪梨,蜜桃每千克价分别为 x, y, z 元,依题意有

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 6, & ① \\ 4x + 2y + 2z = 4. & ② \end{cases}$$

①×2+②得　$8x + 4y + 10z = 16$, 即

$$4x+2y+5z=8.$$

故选(A).

3·20　四个孩子买一只60美元的小船.第一个孩子付的钱是其他孩子付的总数的一半,第二个孩子付的钱是其他孩子付的总数的三分之一,第三个孩子付的钱是其他孩子付的总数的四分之一.第四个孩子应付

(A) 10美元.　　(B) 12美元.　　(C) 13美元.

(D) 14美元.　　(E) 15美元.

(第29届美国高中数学考试,1978年)

[解]　设w,x,y和z分别是第一个,第二个,第三个和第四个孩子付的美元数.那么由设

$$w+x+y+z=60,$$

又　$w=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{1}{2}(60-w)$,得　$w=20$;

且　$x=\frac{1}{3}(w+y+z)=\frac{1}{3}(60-x)$,得　$x=15$;

同时 $y=\frac{1}{4}(w+x+z)=\frac{1}{4}(60-y)$,得　$y=12$;

则　$$z=13.$$

故选(C).

3·21　一条轮船从A港到B港顺水航行需6小时,从B港到A港逆水航行需8小时.若在静水条件下,从A港到B港需

(A) 7小时.　(B) $6\frac{6}{7}$小时.　(C) $7\frac{1}{2}$小时.　(D) $6\frac{1}{2}$小时.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1990年)

[解]　设A到B路程为S,船在静水速度为x,水流速度为y,依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{S}{x+y}=6,\\[2mm]\dfrac{S}{x-y}=8.\end{cases}\quad\text{则}\quad\begin{cases}x+y=\dfrac{S}{6},\\[2mm]x-y=\dfrac{S}{8}.\end{cases}\quad\text{解得}\quad x=\frac{7S}{48}.$$

则船在静水中由A到B需　$S\div\frac{7}{48}S=6\frac{6}{7}$(时).

故选(B).

3·22　某人划船15英里，若以他习惯的速度来划，则顺流比逆流所需时间少5小时，若以他习惯速度的二倍而划，则顺流比逆流所需时间仅少1小时，以每小时的英里数计算，水流的速度为

(A) 2.　　(B) $\frac{5}{2}$.　　(C) 3.　　(D) $\frac{7}{2}$.　　(E) 4.

（第17届美国高中数学考试，1966年）

[解]　设 c 为水流速度，m 为船在静水中速度．由题设有

$$\begin{cases}\dfrac{15}{m+c}=\dfrac{15}{m-c}-5, & ①\\ \dfrac{15}{2m+c}=\dfrac{15}{2m-c}-1. & ②\end{cases}$$

化简后可分别有

$$\begin{cases}5m^2-5c^2=30c, & ③\\ 4m^2-c^2=30c. & ④\end{cases}$$

③－④有　$m^2-4c^2=0$，　得　$m=2c$（已舍负值）．

代入④化简后为　$15c-30=0$，　得　$c=2$．

故选(A)．

3·23　一自动扶梯，常可见到的部分为 n 级，以固定的速度下降，两男孩 A 与 Z 从走动的自动扶梯稳定地走下来，A 每分钟走动的梯级数是 Z 的两倍，经27级 A 到达底端，而 Z 经18级到达底端，则 n 为

(A) 63.　　(B) 54.　　(C) 45.　　(D) 36.　　(E) 30.

（第16届美国高中数学考试，1965年）

[解1]　设自动扶梯每滚动一阶为一个单位时间，且设 Z 每单位时间走 k 阶，即每走一阶需 $\frac{1}{k}$ 单位时间．因而 Z 下楼速度为 $k+1$．

因此　　$$\frac{18}{k}(k+1)=n. \qquad ①$$

同样对 A 来讲有　$$\frac{27}{2k}(2k+1)=n. \qquad ②$$

∴　　$$\frac{18}{k}(k+1)=\frac{27}{2k}(2k+1),\quad 得\quad k=\frac{1}{2}.$$

从而　　$$n=54.$$

故选(B)．

[解2]　设 Z 每分钟走 x 阶，则 A 每分钟走 $2x$ 阶．又设扶梯每分

钟走 y 阶.

Z 走下来需$\frac{18}{x}$分钟，A 走下来需$\frac{27}{2x}$分钟，依题意有

$$\begin{cases}(x+y)\cdot\frac{18}{x}=n, & ①\\(2x+y)\cdot\frac{27}{2x}=n, & ②\end{cases}$$

解得 $n=54$.

故选(B).

3·24 一火车出发后 1 小时因故停留半小时后以原速度的$\frac{3}{4}$行进，结果到达目的地迟 $3\frac{1}{2}$ 小时. 若出事的地点向前移 90 英里时，则火车将达目的地只迟 3 小时. 整个路程的英里数为

(A) 400.　(B) 465.　(C) 600.　(D) 640.　(E) 550.

（第 5 届美国高中数学考试，1954 年）

[解] 设全程为 x 英里，原来速度为 v，则有

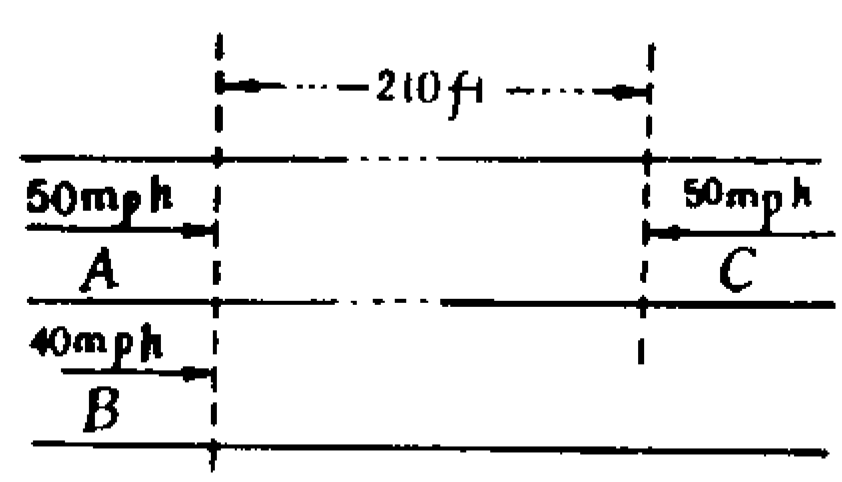
$$\begin{cases}\dfrac{x-v}{\frac{3}{4}v}+1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{v}=3\dfrac{1}{2},\\[2ex]\dfrac{x-v-90}{\frac{3}{4}v}+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{90}{v}-\dfrac{x}{v}=3,\end{cases}$$

两式相减得 $\dfrac{90}{\frac{3}{4}v}-\dfrac{90}{v}=\dfrac{1}{2}$，解得 $v=60$.

代入前式得 $x=600$.

故选(C).

3·25 在双线马路上为了超过 B 车，A 车须超过后且保持车距 30 英尺，这时 C 车又迎面而来，距 A 为 210 英尺(如图). 若 B，C 各保持原速度 40mph，50mph 时，为了安全超车，A 必须增加的速度是



(A) 30mph.　(B) 10mph.　(C) 5mph.

(D) 15mph.　(E) 3mph.

(注　1 英里 = 5280 英尺)

(第 6 届美国高中数学考试,1955 年)

[解]　设 A 车增加的速度为 r,其安全超过 B 车所行距离为 d,则 A 安全超过 B 车时

$$\frac{d}{50+r}=\frac{d-\frac{30}{5280}}{40},$$

同时 A 车又安全让过 C 车时

$$\frac{d}{50+r}=\frac{\frac{210}{5280}-d}{50}.$$

解上两方程得　　$r=5,\quad d=\frac{110}{5280}.$

故选(C).

3·26　一架飞机逆风直线飞行在两个城镇之间用了 84 分钟,顺风返回的时间比它在无风时飞行的时间少 9 分钟. 返回旅程的分钟数是(两个答案)

(A) 54 或 18.　　(B) 60 或 15.　　(C) 63 或 12.

(D) 72 或 36.　　(E) 75 或 20.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解]　设 d, v, w 分别表示两镇间的距离,逆风速度和顺风速度. 那么由 $\frac{d}{v}=84$,即 $d=84v$,我们有

$$\frac{d}{w}=\frac{d}{\frac{1}{2}(w+v)}-9,\quad 或\quad 84\frac{v}{w}=\frac{84v}{\frac{1}{2}(w+v)}-9.$$

设 $x=\frac{v}{w}$,上面的方程可化简为　$28x=\frac{56}{\frac{1}{x}+1}-3,$

即　　$28x^2-25x+3=0,\quad 或\quad (4x-3)(7x-1)=0,$

解得　　$x=\frac{3}{4}\quad 或\quad \frac{1}{7}.$

对于距离 d 在顺风速度 w 时飞行的分钟数是

$$\frac{d}{w}=84\frac{v}{w}=84\cdot\frac{3}{4}\quad 或\quad 84\cdot\frac{1}{7},\quad 即\ 63\ 或\ 12.$$

故选(C).

3·27　汽车 A 和 B 行驶同样的距离. 汽车 A 以每小时 u 英里行驶距离的一半并以每小时 v 英里行驶另一半. 汽车 B 以每小时 u 英里行驶所行时间的一半并以每小时 v 英里行驶另一半. 汽车 A 的平均速度是每小时 x 英里,汽车 B 的平均速度是每小时 y 英里. 那么我们总有

(A) $x \leqslant y$.　　(B) $x \geqslant y$.　　(C) $x = y$.

(D) $x < y$.　　(E) $x > y$.

（第 24 届美国高中数学考试,1973 年）

[解]　设 s 表示距离,t 为汽车 A 行驶的时间,则依题设有

$$t = \frac{S}{2u} + \frac{S}{2v},$$

汽车 A 的平均速度是　$\dfrac{S}{t} = \dfrac{S}{\dfrac{S}{2u} + \dfrac{S}{2v}} = \dfrac{2uv}{u+v} = x.$

设 S_1, S_2 分别表示汽车 B 在速度 u, v 时所行驶的距离. 所以如果汽车 B 的行驶时间是 T,则

$$\frac{S_1}{\dfrac{T}{2}} = u,\quad \frac{S_2}{\dfrac{T}{2}} = v.$$

把两式相加得　$\dfrac{S}{\dfrac{T}{2}} = \dfrac{S_1 + S_2}{\dfrac{T}{2}} = u + v.$

汽车 B 的平均速度是　$\dfrac{S}{T} = \dfrac{u+v}{2} = y.$

对于正数 u 和 v,由　$4uv \leqslant (u+v)^2$,　从而　$x \leqslant y$.

故选(A).

3·28　甲乙二人,从 M 地同时出发去 N 地. 甲用一半时间以每小时 a 千米的速度行走,另一半时间以每小时 b 千米的速度行走;乙以每小时 a 千米的速度行走一半路程,另一半路程以每小时 b 千米的速度行走. 若 $a \neq b$ 时,则两人到达 N 地的先后是

(A) 二人同时.　　(B) 甲先.　　(C) 乙先.

(D) 若 $a > b$ 时,甲先到达;若 $a < b$ 时乙先到达.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　设 M, N 两地距离为 S,甲到 N 需时间 t_1,乙需时间 t_2. 依题意

$$\begin{cases}\dfrac{at_1}{2}+\dfrac{bt_1}{2}=S,\\ t_2=\dfrac{\frac{S}{2}}{a}+\dfrac{\frac{S}{2}}{b},\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}t_1=\dfrac{2S}{a+b},\\ t_2=\dfrac{(a+b)S}{2ab}.\end{cases}$$

则 $t_1-t_2=\dfrac{2S}{a+b}-\dfrac{(a+b)S}{2ab}=\dfrac{S[4ab-(a+b)^2]}{2ab(a+b)}$

$=\dfrac{-S(a-b)^2}{2ab(a+b)}<0.$

$\therefore\ t_1<t_2$，知甲领先.

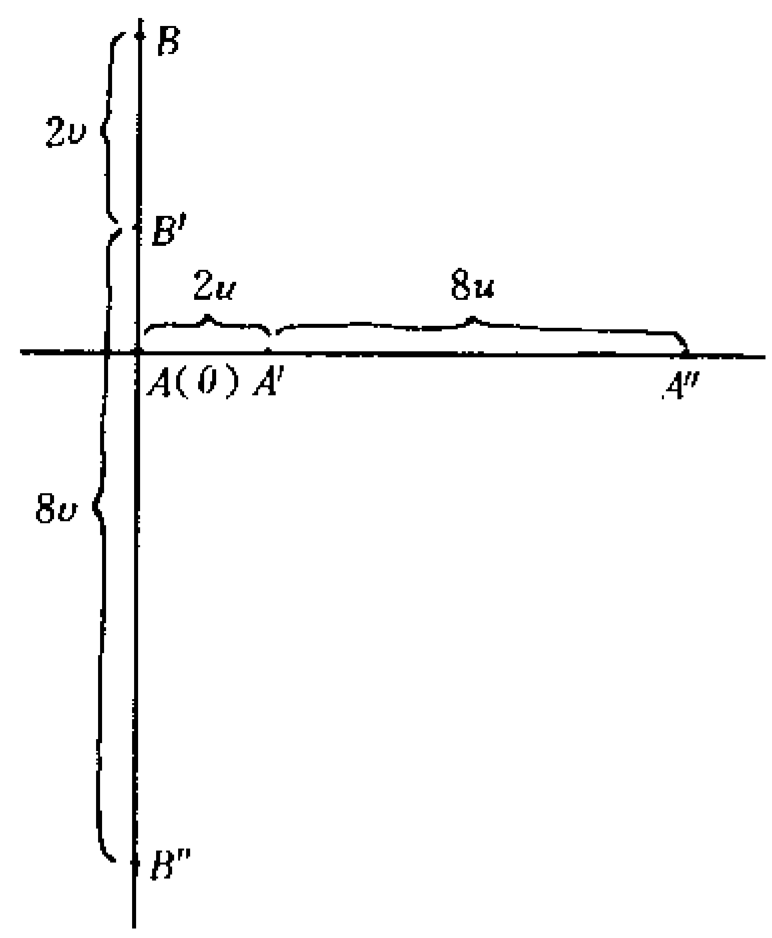
故选(B).

3·29 两直线垂直交于O点，A,B各沿这两条直线作匀速直线运动，当A在O点时，B距O点500码，2分钟后，他们与O点等距，再过8分钟，他们与O点仍等距，则A的速度与B的速度之比为

(A) 4 : 5.　(B) 5 : 6.　(C) 2 : 3.

(D) 5 : 8.　(E) 1 : 2.

（第19届美国高中数学考试，1968年）



[解] 设u,v分别表示A,B的速度. 依题设2分钟与10分钟后，它们与O等距，如图$OA'=OB',OA''=OB''$.即

$$\begin{cases}2u=500-2v, & ①\\ 10u=10v-500. & ②\end{cases}$$

① + ② 得 $12u=8v$,

即 $u:v=2:3$.

故选(C).

3·30 甲，乙，丙三人作100英里旅程的旅行. 甲与丙以每小时25英里的车速行进，而乙却以每小时5英里步行，经过某距离后，丙下车改步行，每小时5英里，而甲驾车折回，将乙载上而与丙同时到达目的地，此旅程所用时数为

(A) 5.　(B) 6.　(C) 7.　(D) 8.　(E) 非上述答案.

（第2届美国高中数学考试，1951年）

[解] 设t_1,t_2,t_3分别表示车前进，回头载乙，载后到达目的地的时间. 则

$$\begin{cases}25t_1-25t_2+25t_3=100 & (\text{对车子而言}),\\ 5t_1+5t_2+25t_3=100 & (\text{对乙而言}),\\ 25t_1+5t_2+5t_3=100 & (\text{对丙而言}).\end{cases}$$

解方程组可得　$t_1=3,\quad t_2=2,\quad t_3=3.$

由　$t_1+t_2+t_3=8.$

故选(D).

3·31　在距离为d码的跑道上作等速赛跑,到终点时,A超过B为20码,B超过C为10码,A超过C为28码,问d的码数为

(A) 无法确定.　(B) 58.　(C) 100.

(D) 116.　(E) 120.

（第12届美国高中数学考试,1961年）

[解]　设A,B,C的速度各为v_A,v_B,v_C.依题设有

$$\begin{cases}\dfrac{d}{v_A}=\dfrac{d-20}{v_B}, & ①\\ \dfrac{d}{v_B}=\dfrac{d-10}{v_C}, & ②\\ \dfrac{d}{v_A}=\dfrac{d-28}{v_C}. & ③\end{cases}$$

由①,③有　$\dfrac{d-20}{v_B}=\dfrac{d-28}{v_C}$　④

④÷②有　$\dfrac{d-20}{d}=\dfrac{d-28}{d-10}$, 得 $d=100$.

故选(C).

3·32　三辆汽车A,B,C各以一定的速度从甲地开往乙地,B比C迟5分钟出发,出发后20分钟追上C.若A比B迟10分钟出发,出发后50分钟追上C.则A在出发后追上B的时间是

(A) 100分.　(B) 200分.　(C) 250分.　(D) 50分.

（第2届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985年）

[解]　设A,B,C的速度分别为x,y,z,依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{5z}{y-z}=20,\\ \dfrac{(10+5)z}{x-z}=50.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}4y=5z,\\ 10x=13z.\end{cases}$$

则
$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{4}z, \\ x = \dfrac{13}{10}z. \end{cases}$$

而 A 追 B 所需时间为

$$\frac{10y}{x-y} = \frac{10 \cdot \dfrac{5}{4}z}{\dfrac{13}{10}z - \dfrac{5}{4}z} = 250(\text{分}).$$

故选(C).

3·33　一个人以匀速走一段路.若他每小时走快$\frac{1}{2}$英里,他走这段路只需要原时间的五分之四;若他每小时走慢$\frac{1}{2}$英里,那他走这段路得多花$2\frac{1}{2}$小时,他走的这段路程的英里数是

(A) $13\frac{1}{2}$.　(B) 15.　(C) $17\frac{1}{2}$.　(D) 20.　(E) 25.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解]　设 D,R,T 分别表示距离(英里),速度(英里/时),时间(时).那么由设有

$$D = RT,$$

及　$$D = \frac{4}{5}\left(R+\frac{1}{2}\right)T, \qquad ①$$

且　$$D = \left(R-\frac{1}{2}\right)\left(T+2\frac{1}{2}\right). \qquad ②$$

从①,②两式得　$\frac{1}{5}D = \frac{2}{5}T$,　即　$D = 2T$.　③

因而　　$2T = RT$,　$R = 2$.

用$\frac{1}{2}D$代替T,用2代替R,代入②式,得$D = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}D + 2\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore$　$D = 15$.

故选(B).

3·34　一人驾驶帆船沿江顺流而下,迎面遇到一艘逆流而上的快艇,他问快艇驾驶员:"你后面有轮船开过来吗?"快艇驾驶员回答:"半小时前我超过一艘轮船."帆船继续航行了半小时遇到了迎面开来的一艘轮船.已知轮船静水速度是帆船静水速度的2倍.那么,快艇静水速度是帆船静水速度的

(A) 4 倍.　　　　(B) 5 倍.　　　　(C) 6 倍.

(D) 因不知水流速度,无法确定.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1991 年)

[解]　设快艇,轮船,帆船静水速度分别为 v, v_1, v_2,依题设 $v_1 = 2v_2$. 又设水流速度为 u.

快艇从与轮船相遇到与帆船相遇的半小时内与轮船相距

$$\frac{1}{2}(v-u)-\frac{1}{2}(v_1-u).$$

这恰好是半个小时后帆船与轮船相遇过程两船所行距离,这样有

$$\frac{1}{2}(v-u)-\frac{1}{2}(v_1-u)=\frac{1}{2}(v_2+u)+\frac{1}{2}(v_1-u),$$

又　$v_1 = 2v_2$,　则有　$v = 5v_2$.

故选(B).

3·35　从甲地到乙地有两条同样长的路,一条在平地上;一条有 $\frac{1}{3}$ 的路是上山,$\frac{2}{3}$ 的路是下山. 如果上山速度为平地的 $\frac{1}{2}$,平地速度为下山的 $\frac{1}{2}$,那么从甲地到乙地

(A) 走山路快.　　　　(B) 走平地快.

(C) 走山路与走平地一样快.

(D) 若甲地到乙地路程很长,则走山路快,路程较短,则走平地快.

(E) 若甲地到乙地路程很长,则走平地快,路程较短,则走山路快.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1985 年)

[解]　设 $S_{平}, S_{上}, S_{下}$ 分别表示平地,上山,下山路程,由题设 $S_{平} = S$, 则 $S_{上} = \frac{1}{3}S$,　$S_{下} = \frac{2}{3}S$.

且　　$t_{上} = \frac{S_{上}}{V_{上}}$,　$t_{下} = \frac{S_{下}}{V_{下}}$,　$t_{平} = \frac{S}{V_{平}}$

又由题设　　$V_{上} = \frac{1}{2}V_{平}, V_{下} = 2V_{平}$,

则有　　$$t_{上} = \frac{\frac{1}{3}S}{\frac{1}{2}V_{平}} = \frac{2}{3}t_{平},$$

且 $$t_{下} = \frac{\frac{2}{3}S}{2V_{平}} = \frac{1}{3}t_{平}.$$

因此 $$t_{上} + t_{下} = \frac{2}{3}t_{平} + \frac{1}{3}t_{平} = t_{平}.$$

故选(C).

3·36　在一行车路程中，从仪表上读出的路程是450英里，在回程时，用上雪地轮胎去走同样路程，读数是440英里. 设原来车轮半径是15英寸，试求出车轮半径的增加量为(精确到百分之一英寸)

(A) 0.33.　　(B) 0.34.　　(C) 0.35.

(D) 0.38.　　(E) 0.66.

(第21届美国高中数学考试，1970年)

[解]　若车轮半径是 r，则行程 D 和车轮转数 N 满足 $D = N \cdot 2\pi r$.

设 N_1, N_2 分别为往返程转数，r_1, r_2 分别为往返程车轮半径. 依题设有

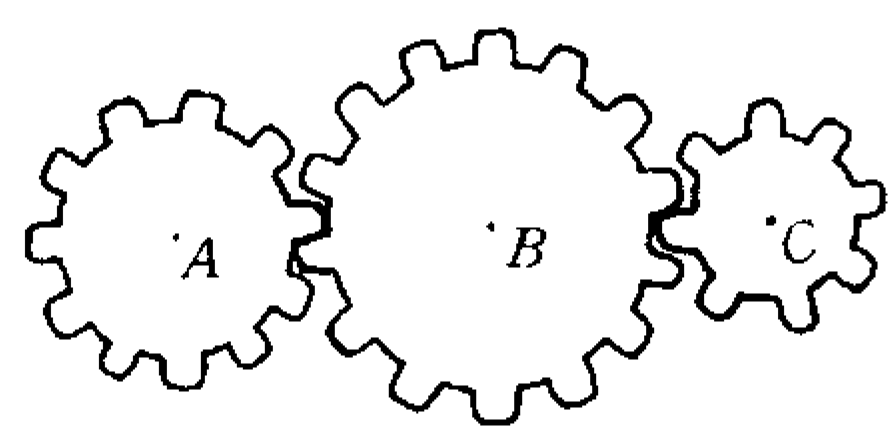
$$2\pi r_1 N_1 = 2\pi r_2 N_2, \quad 则 \quad r_2 : r_1 = N_1 : N_2 = 450 : 440.$$

又 $r_1 = 15$，　则 $$r_2 = \frac{15 \cdot 45}{44},$$

$$\therefore \quad r_2 - r_1 = 15 \cdot \left(\frac{45}{44} - 1\right) = \frac{15}{44} \approx 0.34.$$

故选(B).

3·37　三个啮合的圆齿轮 A, B, C 的齿数分别是 x, y, z(如图，所有齿轮的齿大小相同并且间隔均匀).



A, B, C 每分钟旋转的角速度之比是

(A) $x : y : z$.　　(B) $z : y : x$.　　(C) $y : z : x$.

(D) $yz : xz : xy$.　　(E) $xz : yx : zy$.

(第31届美国高中数学考试，1980年)

[解]　因为三个齿轮的齿大小相同，间隔均匀，并且互相啮合，它们都用相同的绝对速度 v 运转(v 是圆周上一点在单位时间内移动的距离). 设 α, β, γ 分别是A, B, C的角速度. 若 a, b, c 分别是A, B, C的周长. 那么

$$\alpha = \frac{v}{a}, \qquad \beta = \frac{v}{b}, \qquad \gamma = \frac{v}{c}.$$

所以 $$\alpha a = \beta b = \gamma c,$$

或者 $$\frac{\alpha}{\frac{1}{a}} = \frac{\beta}{\frac{1}{b}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{c}}.$$

这样它们角速度之比为 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

但 a,b,c 与 x,y,z 成正比,又得角速度之比是 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$.

即 $$yz : xz : xy.$$

故选(D).

3·38 把某一高度的桌子和两块完全一样的木块搭成图 1 的形状,测得长度 r 是 32 英寸,把两块木头按图 2 重放后,测得长度 s 是 28 英寸,桌子的高为

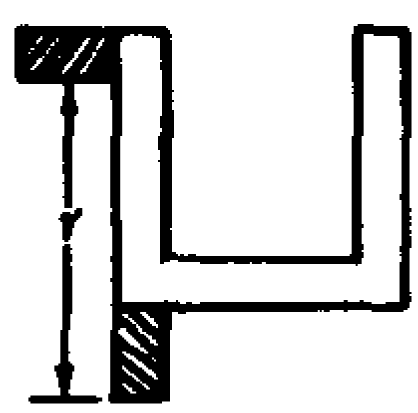


图 1

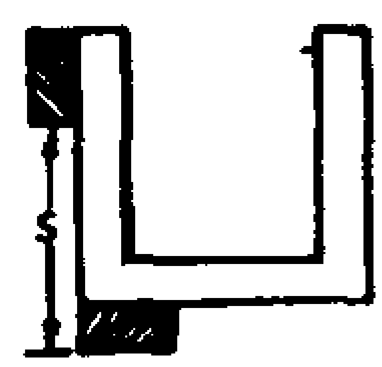


图 2

(A) 28 英寸. (B) 29 英寸. (C) 30 英寸.
(D) 31 英寸. (E) 32 英寸.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解] 设木块长为 x,宽为 y,桌子高为 l,依题意可有

$$\begin{cases} x + l - y = r, & ① \\ y + l - x = s. & ② \end{cases}$$

① + ② 得 $2l = r + s$,

$\therefore$ $$l = \frac{1}{2}(32 + 28) = 30(\text{英寸}).$$

故选(C).

3·39 A 与 B 合做一事 2 天可完成,B 与 C 合做 4 天可完成,C 与 A 合做 $2\frac{2}{5}$ 天可完成,A 一人做此事可完成的天数为

(A) 1.　　(B) 3.　　(C) 6.　　(D) 12.　　(E) 2.8.

（第 5 届美国高中数学考试,1954 年）

[解]　设 A,B,C 分别各自工作所需天数为 x,y,z. 由设有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, & ①\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}, & ②\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12}. & ③\end{cases}$$

① - ② + ③ 得　$\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{3}$,　解得　$x=3$.

故选(B).

3·40　A 完成一件工作所需的时间为 B 与 C 一起完成工作所需时间的 m 倍;B 完成这件工作所需的时间为 A 与 C 一起完成工作所需时间的 n 倍,而 C 完成这件工作所需时间为 A 与 B 一起完成工作所需时间的 x 倍,则 x 为

(A) $\dfrac{2mn}{m+n}$.　　(B) $\dfrac{1}{2(m+n)}$.　　(C) $\dfrac{1}{m+n-mn}$.

(D) $\dfrac{1-mn}{m+n+2mn}$.　　(E) $\dfrac{m+n+2}{mn-1}$.

（第 16 届美国高中数学考试,1965 年）

[解]　设 A,B,C 单独完成该工作各需时间为 a,b,c. 由设可有

$$m\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\quad n\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},\quad x\cdot\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

由前两式有　$\dfrac{m}{a}-\dfrac{n}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$, 故 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m+1}{n+1}$.

同时有

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{2}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{2}{x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

即
$$\frac{1}{a}\left(m-1-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{b}\left(1-n+\frac{2}{x}\right),$$

故
$$\frac{a}{b}=\frac{m-1-\dfrac{2}{x}}{1-n+\dfrac{2}{x}}=\frac{m+1}{n+1},$$

得
$$x=\frac{m+n+2}{mn-1}.$$

故选(E).

3·41　完成某项工作,甲乙合做要2天;乙丙合做要4天;丙甲合做要2.4天.则甲单独做完此项工作需要的天数是

(A) 2.8.　　(B) 3.　　(C) 6.　　(D) 12.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1988年)

[解]　设甲,乙,丙单独完成这项工作分别需要x天,y天,z天.依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, & ①\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}, & ②\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2.4}. & ③\end{cases}$$

$\dfrac{1}{2}$(①+②+③)得　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{12}$,　④

④−②得　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore\quad x=3$.

故选(B).

3·42　某工程,甲队独做所需天数是乙,丙两队合做所需天数的a倍;乙队独做所需天数是甲,丙两队合做所需天数的b倍;丙队独做所需天数是甲,乙两队合做所需天数的c倍.则$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}$的值是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(中国江苏省初中数学竞赛,1990年)

[解]　设甲,乙,丙三队完成此工程各需x,y,z天,依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z},\\ \dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z},\\ \dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}.\end{cases}\quad 则\quad \begin{cases}a+1=x\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right),\\ b+1=y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right),\\ c+1=z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right).\end{cases}$$

令　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=k$,则由上式有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\\=&\frac{1}{kx}+\frac{1}{ky}+\frac{1}{kz}\\=&\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\=&\frac{1}{k}\cdot k=1.\end{aligned}$$

故选(A).

3·43　甲,乙,丙三人合做一件工作比甲单独一人做所需时间少 6 小时,比乙单独一人做少 1 小时,也刚好是丙单独一人做所用时间的一半,设甲,乙二人合作需 h 小时,则 h 等于

(A) $\frac{5}{2}$.　(B) $\frac{3}{2}$.　(C) $\frac{4}{3}$.　(D) $\frac{5}{4}$.　(E) $\frac{3}{4}$.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解]　设甲,乙,丙单独完成此工作各需 a,b,c 小时.依题设可有(按单位时间完成工作列等式)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-6}=\frac{1}{b-1}=\frac{2}{c},$$

又　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$,　从而　$\frac{1}{h}+\frac{1}{c}=\frac{2}{c}$,　得　$h=c$.

又由　$\frac{1}{a-6}=\frac{2}{h}$,　得　$a=\frac{h+12}{2}$,

且由　$\frac{1}{b-1}=\frac{2}{h}$,　得　$b=\frac{h+2}{2}$.

从而 $\frac{2}{h+12}+\frac{2}{h+2}=\frac{1}{h}$,

即 $3h^2+14h-24=0$.

解得　$h=\frac{4}{3}$(已舍去负值).

故选(C).

3·44　完成同一工作,A 独做所需时间为 B 与 C 共同工作所需时间的 m 倍;B 独做所需时间为 A 与 C 共同工作所需时间的 n 倍;而 C 独做所需时间为 A 与 B 共同工作所需时间的 k 倍;则 k 用 m,n 表示为

(A) $\frac{2mn}{m+n}$.　(B) $\frac{1}{m+n-mn}$.

(C) $\dfrac{1-mn}{m+n+2mn}$.　　　　(D) $\dfrac{m+n+2}{mn-1}$.

（第2届"缙云杯"初中数学邀请赛，1985年）

[解]　设 A,B,C 每天工作量为 x,y,z，依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{m}{y+z},\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{n}{x+z}.\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}mx-y=z,\\ ny-x=z.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{n+1}{mn-1}z,\\ y=\dfrac{m+1}{mn-1}z.\end{cases}$$

则由　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{k}{x+y}$，　有　$k=\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{m+n+2}{mn-1}$.

故选(D).

3·45　打开 A,B,C 每一个阀门，水就以各自不变的速度注入水槽. 当所有三个阀门都打开时，注满水槽需1小时；只打开 A,C 两个阀门，需要1.5小时；如果只打开 B,C 两个阀门，需要2小时. 则只打开 A,B 两个阀门时，注满水槽所需的小时数是

(A) 1.1.　(B) 1.15.　(C) 1.2.　(D) 1.25.　(E) 1.75.

（第24届美国高中数学考试，1973年）

[解]　设 x,y,z 分别是A,B,C三个阀门打开一小时注入槽中的水量. 那么

$$\begin{cases}x+y+z=1, & ①\\ x+z=\dfrac{1}{1.5}, & ②\\ y+z=\dfrac{1}{2}. & ③\end{cases}$$

①×②－②－③得　$x+y=\dfrac{5}{6}$，　即　$\dfrac{6}{5}(x+y)=1$.

所以打开 A、B 两个阀门注满水槽需$\dfrac{6}{5}=1.2$小时.

故选(C).

3·46　将一盎司水加入到酸和水的混合液中，新的混合液含酸

20%. 将一盎司酸加入到新的混合液中,结果含酸 $33\frac{1}{3}\%$. 在原混合液中酸的百分数是

(A) 22%. (B) 24%. (C) 25%. (D) 30%. (E) $33\frac{1}{3}\%$.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解] 设 (x,y) 表示原混合液中(水,酸)的盎司数.

在加入 1oz(盎司)水和 1oz 酸后,在混合液总量 $(x+y+1)$ 和 $(x+y+2)$oz 中我们分别有酸 $y$oz 和 $(y+1)$oz,这样

$$\frac{y}{x+y+1}=\frac{1}{5},\ \frac{y+1}{x+y+2}=\frac{1}{3}.$$

于是得到 $(x,y)=(3,1)$. 由此算出原混合液中酸的百分数是

$$\frac{y}{x+y}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}=25\%.$$

故选 (C).

3·47 去年世纪中学有 100 名学生参加"AHSME",他们的平均分数为 100. 参赛学生中非毕业班的人数比毕业班的人数多 50%,而毕业班学生的平均分数比非毕业班学生的平均分数多 50%. 那么毕业班学生的平均分数是

(A) 100. (B) 112.5. (C) 120. (D) 125. (E) 150.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解] 设参赛学生中毕业班人数为 x,非毕业班人数为 y,依题意有

$$\begin{cases}x+y=100,\\ y=\frac{3}{2}x.\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=40,\\ y=60.\end{cases}$$

又由题设若毕业班平均分为 u,非毕业班平均分为 v,则

$$\begin{cases}40u+60v=100\cdot100,\\ u=\frac{3}{2}v.\end{cases}\quad 解得\quad u=125.$$

故选 (D).

3·48 某城市的人口在某时为一完全平方数,以后,增加 100,人口数为一完全平方数多 1,再增加 100,人口数再度为完全平方数,原来的人口数为下列数的倍数的是

(A) 3.　　(B) 7.　　(C) 9.　　(D) 11.　　(E) 17.

（第13届美国高中数学考试，1962年）

[解]　设 N 为该城市最初人口数，依题设有

$$N = x^2,\quad N + 100 = y^2 + 1,\quad N + 200 = z^2.$$

这里 x, y, z 均为整数. 上面前两式相减有

$$100 = y^2 - x^2 + 1 \text{ 或 } y^2 - x^2 = 99,$$

即 $(y + x)(y - x) = 99 \cdot 1$ 或 $33 \cdot 3$ 或 $11 \cdot 9$.

若 $\begin{cases} y + x = 99, \\ y - x = 1; \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 49, \\ y = 50. \end{cases}$

此时，$N = 49^2 = 2401$，且 $N + 100 = 2501 = 50^2 + 1$，同时

$$N + 200 = 2601 = 51^2.$$

若 $\begin{cases} y + x = 33, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y + x = 11, \\ y - x = 9. \end{cases}$

所得之解无法满足前面所设三个方程.

故选(B).

3·49　约翰(John)在本届 AHSME 中得了93分. 要是旧的评分法仍然有效的话，按同样的答卷他只能得84分. 他没有回答的题目数为(新评分标准为答对一题得5分，答错一题得0分，不答一律得2分. 在旧评分法中，以30分为起点，每个正确答案加4分，每个错误的答案扣1分；没有回答的题目既不得分也不扣分)

(A) 6.　(B) 9.　(C) 11.　(D) 14.　(E) 不能惟一确定.

（第37届美国高中数学考试，1986年）

[解]　设约翰答对 x 题，答错 y 题，并有 z 题没答.

依题意可有方程组

$$\begin{cases} 5x + 0 \cdot y + 2z = 93, & ① \\ 30 + 4x - y + 0 \cdot z = 84, & ② \\ x + y + z = 30. & ③ \end{cases}$$

② + ③ 有　$5x + z = 84.$　④

① − ④ 有　$z = 9.$

故选(B).

3·50　Ann 和 Barbara 比较他们的年龄，发现现在的B和A以前某年的年龄一样大，在以前某年中B和A再以前某年的年龄一样大，在再以前某年中，B是A今年年龄的一半大. 若他们现在年龄之和是44岁，

那么 A 的年龄是

(A) 22. (B) 24. (C) 25. (D) 26. (E) 28.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解] 设 A 是 Ann 现在的年龄，B 是 Barbara 现在的年龄. 那么 $B = A - t$，其中的 t 满足 $B - t = A - T$，且这里的 T 适合 $B - T = \frac{1}{2}A$.

又因为 $A + B = 44$，即得 A, B, t 和 T 的方程组：

$$\begin{cases} A + B = 44, & ① \\ A - B - t = 0, & ② \\ A - B + t - T = 0, & ③ \\ A - 2B + 2T = 0. & ④ \end{cases}$$

在前两个方程中用 A 表示 B 和 t，把结果代入后两个方程得到

$$A = 24.$$

故选(B).

3·51 Dick 年龄的三倍加上 Tom 的年龄等于 Harry 年龄的二倍，Harry 年龄的立方的二倍等于 Dick 年龄立方的三倍加上 Tom 年龄的立方. 他们的年龄是互质的，他们年龄的平方和是

(A) 42. (B) 46. (C) 122. (D) 290. (E) 326.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

[解] 设 T, D 和 H 分别为 Tom, Dick 和 Harry 的年龄. 那么有

$$3D + T = 2H, \quad 2H^3 = 3D^3 + T^3,$$

或

$$2(H - D) = D + T,$$

$$2(H^3 - D^3) = D^3 + T^3.$$

因为 $D + T \neq 0$,

有 $$\frac{2(H^3 - D^3)}{2(H - D)} = \frac{D^3 + T^3}{D + T}.$$

或者 $H^2 + HD + D^2 = D^2 - DT + T^2$.

因此 $T^2 - H^2 = D(T + H)$，得 $T - H = D$.

从最后一式和第一式中消去 T 得到 $H = 4D$.

故有 $D = 1, H = 4$（因为 H 和 D 是互质数）.

于是 $T = H + D = 5$，则所要求的平方和是

$$T^2 + D^2 + H^2 = 5^2 + 1^2 + 4^2 = 42.$$

故选(A).

3·52 亚当中学和贝克中学的学生都参加了一次考试,这两个学校男,女生的平均分统计如下:

	亚当平均分	贝克平均分	两校合起来平均分
男生	71	81	79
女生	76	90	?
男女生	74	84	

那么两校女生的平均分是

(A) 81. (B) 82. (C) 83. (D) 84. (E) 85.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解] 设亚当中学男,女人数分别为 a,b;贝克中学男,女人数分别为 c,d,依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{71a+76b}{a+b}=74, & ①\\ \dfrac{81c+90d}{c+d}=84, & ②\\ \dfrac{71a+81c}{a+c}=79. & ③\end{cases}$$

由 ① 有 $3a-2b=0$, 即 $b=\dfrac{3}{2}a$,

由 ② 有 $3c-6d=0$, 即 $d=\dfrac{1}{2}c$,

由 ③ 有 $8a-2c=0$, 即 $c=4a$.

这样 $$\frac{76b+90d}{b+d}=\frac{76\cdot\frac{3}{2}a+90\cdot\frac{1}{2}c}{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}c}=\frac{76\cdot\frac{3}{2}a+90\cdot 2a}{\frac{3}{2}a+2a}$$

$$=\frac{38\cdot 3+180}{\frac{3}{2}+2}=84.$$

故选(D).

3·53 X,Y,Z 为两两不相交的人群集合,每个集合的人均年龄如下表:

集　合	X	Y	Z	$X\cup Y$	$X\cup Z$	$Y\cup Z$
人均年龄	37	23	41	29	39.5	33

则集合 $X\cup Y\cup Z$ 的平均年龄是

(A) 33.　(B) 33.5.　(C) $33.\dot{6}$.　(D) $33.8\dot{3}$.　(E) 34.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解]　若 $|X|$ 表示 X 中元素个数,设 $|X|=x$, $|Y|=y$, $|Z|=z$,由题设 X,Y,Z 两两不相交,这样

$$|X\cup Y|=x+y,\ |X\cup Z|=x+z,\ |Y\cup Z|=y+z.$$

依题设可有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{37x+23y}{x+y}=29,\\ \dfrac{37x+41z}{x+z}=39.5,\\ \dfrac{23y+41z}{y+z}=33.\end{cases}$$

解得　$y=\dfrac{4}{3}x,\quad z=\dfrac{5}{3}x.$

这样　$X\cup Y\cup Z$ 的平均年龄为

$$\frac{37x+23y+41z}{x+y+z}=\frac{37x+23\left(\frac{4}{3}x\right)+41\left(\frac{5}{3}x\right)}{x+\left(\frac{4}{3}x\right)+\left(\frac{5}{3}x\right)}=34.$$

故选(E).

3·54　有四个整数,任意选三个,取其平均值再加另一个整数则得 29,23,21 与 17. 原四整数之一为

(A) 19.　(B) 21.　(C) 23.　(D) 29.　(E) 17.

(第 6 届美国高中数学考试,1955 年)

[解]　设该四整数分别为 a,b,c,d,由设有

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(a+b+c)+d=29,\\ \frac{1}{3}(b+c+d)+a=23,\\ \frac{1}{3}(a+c+d)+b=21,\\ \frac{1}{3}(a+b+d)+c=17.\end{cases}$$

解得 $a=12,\quad b=9,\quad c=3,\quad d=21.$

故选(B).

3·55　一个退休职工每年获得一份退休金,金额与他服务的年数的平方根成正比.如果他多服务 a 年,他的退休金会比他原有的多 p 元,而如果他多服务 b 年($b\neq a$),他的退休金会比原有的多 q 元,那么,他每年的退休金是(以 a,b,p,q 表示)

(A) $\frac{p^2-q^2}{2(a-b)}$.　(B) $\frac{(p-q)^2}{2\sqrt{ab}}$.　(C) $\frac{ap^2-bq^2}{2(ap-bq)}$.

(D) $\frac{aq^2-bp^2}{2(bp-aq)}$.　(E) $\sqrt{(a-b)(p-q)}$.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解]　设 x 为每年退休金,y 为服务年限,k 为比例常数,依题设有

$$\begin{cases}x=k\sqrt{y},\\ x+p=k\sqrt{y+a},\\ x+q=k\sqrt{y+b};\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x^2=k^2y, & ①\\ (x+p)^2=k^2(y+a), & ②\\ (x+q)^2=k^2(y+b). & ③\end{cases}$$

由①代入②,③化简后得　$2px+p^2=k^2a,\quad 2qx+q^2=k^2b.$

故　$\frac{2px+p^2}{2qx+q^2}=\frac{a}{b}$,　解得　$x=\frac{aq^2-bp^2}{2(bp-aq)}$,这里 $bp\neq aq$.

当 $bp=aq$ 时上面两方程分别乘以 q 和 p 后相减得

$$pq(p-q)=k^2(aq-bp)=0,$$

即

$$pq=0\quad 或\quad p-q=0.$$

若 $pq=0$,则 $p=0$ 或 $q=0$,则 a 或 b 为0,此时方程②或③之一会恒等于方程①;

若 $p-q=0$,即 $p=q$,这样 $a=b$,与假设矛盾.

综上,故选(D).

第四章　代数不等式

4·1　若 $|-a|>-a$. 则

(A) $a>0$.　　(B) $a<0$.　　(C) $a<-1$.

(D) $-1<a<0$.　　(E) 以上结论都不对.

（中国初中数学联赛,1984 年）

[解]　若 $a>0$, 则 $|-a|>0$, $-a<0$, 则 $|-a|>-a$ 成立. 故选(A).

4·2　a, b 是实数,下面五个命题中正确的是

(A) 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$.　　(B) 若 $|a|>b$, 则 $a^2>b^2$.

(C) 若 $a>|b|$, 则 $a^2>b^2$.　　(D) 若 $a^2>b^2$, 则 $a>b$.

(E) 若 $a\neq|b|$, 则 $a^2\neq b^2$.

（中国北京市初中数学竞赛,1983 年）

[解]　设 $a=-2$, $b=-3$, 则 $-2>-3$, $|-2|>-3$, 但 $(-2)^2<(-3)^2$, 故知(A), (B) 均不正确；

设 $a=-2$, $b=-1$, $(-2)^2>(-1)^2$, 但 $-2<-1$, 故知(D) 不正确；

设 $a=-3$, $b=3$, 显然 $-3\neq|3|$, 但 $(-3)^2=3^2$, 故(E) 不正确.

故选(C).

4·3　设命题 P: 关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同；命题 Q: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$. 则命题 Q

(A) 是命题 P 的充分必要条件.

(B) 是命题 P 的充分条件但不是必要条件.

(C) 是命题 P 的必要条件但不是充分条件.

(D) 既不是命题 P 的充分条件也不是命题 P 的必要条件.

(中国高中数学联赛,1998 年)

[解] 注意到 $x^2-3x+2>0$ 与 $-x^2+3x-2>0$ 的解集不同,从而排除(A),(B);

又如 $x^2+x+1>0$ 与 $x^2+x+3>0$ 解集相同,从而排除(C).

故选(D).

4·4 给出下列两个命题:

(1) 设 a,b,c 都是复数.如果 $a^2+b^2>c^2$,则 $a^2+b^2-c^2>0$;

(2) 设 a,b,c 都是复数.如果 $a^2+b^2-c^2>0$,则 $a^2+b^2>c^2$.

那么,下述说法正确的是

(A) 命题(1) 正确,命题(2) 也正确.

(B) 命题(1) 正确,命题(2) 错误.

(C) 命题(1) 错误,命题(2) 也错误.

(D) 命题(1) 错误,命题(2) 正确.

(中国高中数学联赛,1994 年)

[解] 依题设我们有:

命题(1)是正确的.由 $a^2+b^2>c^2$ 表明 a^2+b^2 与 c^2 都是实数,因此,根据移项法则有 $a^2+b^2-c^2>0$.

命题(2)是错误的.由 $a^2+b^2-c^2>0$ 仅表明 $a^2+b^2-c^2$ 是实数,并不能保证 a^2+b^2 与 c^2 都是实数,故 $a^2+b^2>c^2$ 不一定成立.

例如,取 $a=2+i,\ b=i,\ c=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$,则有

$$a^2+b^2-c^2=(3+4i)+(-1)-4i=2>0,$$

但并没有 $a^2+b^2=2+4i>4i=c^2$.

故选(B).

4·5 若 $a\geqslant 2,\quad b>2$,则下列式子正确的是

(A) $ab<a+b$. (B) $ab\leqslant a+b$,等号能够达到.

(C) $ab>a+b$. (D) $ab\geqslant a+b$,等号能够达到.

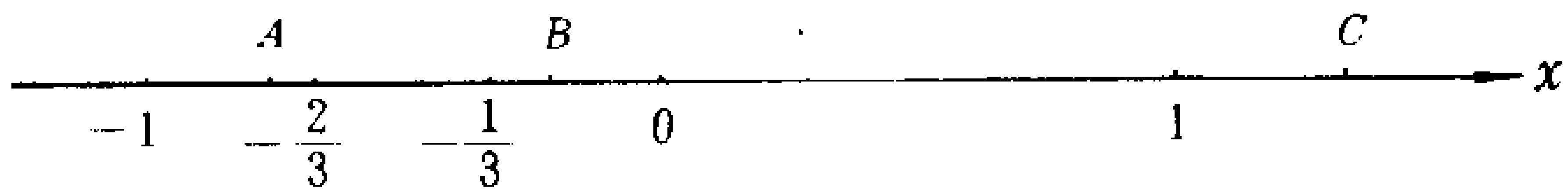
(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解] 由 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

又　$a+b>0$,　$ab>0$,　则　$a+b<ab$.

故选(C).

4·6　观察图中的数轴:



用字母 a,b,c 依次表示点 A,B,C 对应的数.则 $\frac{1}{ab},\frac{1}{b-a},\frac{1}{c}$ 的大小关系是

(A) $\frac{1}{ab}<\frac{1}{b-a}<\frac{1}{c}$.　　(B) $\frac{1}{b-a}<\frac{1}{ab}<\frac{1}{c}$.

(C) $\frac{1}{c}<\frac{1}{b-a}<\frac{1}{ab}$.　　(D) $\frac{1}{c}<\frac{1}{ab}<\frac{1}{b-a}$.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1990 年)

[解]　由题中图像可看出

$$-1<a<-\frac{2}{3},\quad -\frac{1}{3}<b<0,\quad c>1.$$

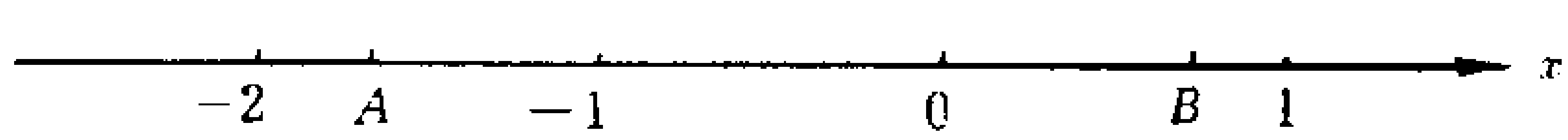
则　$0<ab<\frac{1}{3}$,　$\frac{1}{3}<b-a<1$.

因而　$\frac{1}{ab}>3$,　$3>\frac{1}{b-a}>1$, 且 $\frac{1}{c}<1$, 从而

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{b-a}<\frac{1}{ab}.$$

故选(C).

4·7　如图:



设数轴上 A,B 两点所对应的有理数分别是 a,b,令 $x=\frac{a-5b}{a+5b}$.那么,下列不等式中正确的是

(A) $0<x<1$.　　(B) $x>1$.

(C) $-1<x<0$.　　(D) $x<-1$.

(第 8 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1991 年)

[解]　从图中可见: $-2<a<-1.5$, 且 $0.5<b<1$,

$\therefore$　$-7<a-5b<-3.5$,　且　$0.5<a+5b<3.5$.

从而 $x < 0.$

又 $\frac{|a-5b|}{|a+5b|} > 1$, $\therefore$ $x < -1.$

故选(D).

4·8 已知$6 < a < 10$, $\frac{a}{2} \leqslant b \leqslant 2a$, $c = a + b$,那么有

(A) $9 \leqslant c \leqslant 30.$ (B) $15 \leqslant c < 30.$ (C) $9 < c \leqslant 18.$

(D) $9 \leqslant c < 30.$ (E) $9 < c < 30.$

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1984年)

[解] 由设$6 < a < 10$知$3 < \frac{a}{2} < 5$,且$12 < 2a < 20.$

$\therefore$ $3 < \frac{a}{2} \leqslant b \leqslant 2a < 20,$

$\therefore$ $9 < a + b < 30$, 即 $9 < c < 30.$

故选(E).

4·9 若$b < c$且$1 < a < b + c < a + 1$,则

(A) $a < b.$ (B) $a = b.$ (C) $a \leqslant b.$ (D) $b < a.$

(中国江苏省初中数学竞赛,1990年)

[解] 若$b \geqslant a$,则由$c > b$,有$c > a$,

$\therefore$ $b + c > 2a.$

又 $b + c < a + 1$, 则 $2a < b + c < a + 1.$

即 $a < 1$,这与已知$a > 1$矛盾.

因而$a > b$.

故选(D).

4·10 已知关于x的不等式$(2a - b)x + a - 5b > 0$的解是$x < \frac{10}{7}$.则$ax + b > 0$的解是

(A)$x > -\frac{3}{5}$. (B)$x < -\frac{3}{5}$.

(C)$x > \frac{3}{5}$. (D)$x < \frac{3}{5}$.

(中国安徽省初中数学竞赛,1997年)

[解] 由题设 $(2a - b)x > 5b - a$ 的解是 $x < \frac{10}{7}$.

$\therefore$ $2a - b < 0$, $x < \frac{5b - a}{2a - b}$.

$\therefore \quad \frac{5b-a}{2a-b}=\frac{10}{7}$. 解得 $\quad b=\frac{3a}{5}$.

于是 $\quad 2a-b=2a-\frac{3a}{5}=\frac{7a}{5}<0$.

$\therefore \quad a<0$.

则 $ax+b>0$ 的解是 $x<-\frac{b}{a}=-\frac{3}{5}$.

故选(B).

4·11 若非空集合 $A=\{x \mid 2a+1 \leqslant x \leqslant 3a-5\}$, $B=\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 22\}$,则能使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是

(A) $\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 9\}$. (B) $\{a \mid 6 \leqslant a \leqslant 9\}$.

(C) $\{a \mid a \leqslant 9\}$. (D) $\varnothing$.

(中国高中数学联赛,1998年)

[解] 依题意得 $A \subseteq B$,这样可有

$$\begin{cases}2a+1 \geqslant 3, \\ 3a-5 \leqslant 22, \\ 3a-5 \geqslant 2a+1.\end{cases}$$

解得 $\quad 6 \leqslant a \leqslant 9$.

故选(B).

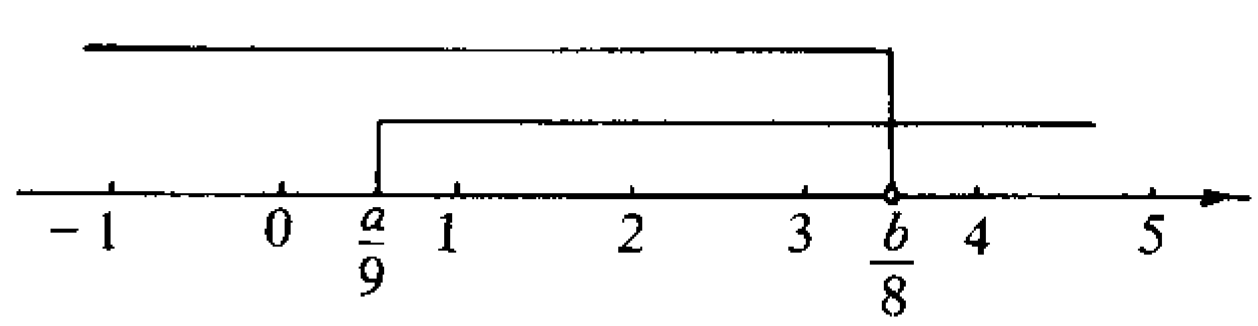
4·12 如果不等式组 $\begin{cases}9x-a \geqslant 0, \\ 8x-b<0\end{cases}$ 的整数解仅为1,2,3,那么,适合这个不等式组的整数 a、b 的有序数对 (a,b) 共有

(A)17个. (B)64个. (C)72个. (D)81个.

(中国初中数学联赛,1998年)

[解] 由原不等式组可得 $\quad \frac{a}{9} \leqslant x<\frac{b}{8}$.

在数轴上画出这个不等式组解集的可能区间,如下图:



易知 $\quad 0<\frac{a}{9} \leqslant 1, \quad 3<\frac{b}{8} \leqslant 4$.

由 $\quad 0<\frac{a}{9} \leqslant 1$, 得 $\quad 0<a \leqslant 9$.

$\therefore\qquad a=1,2,3,\cdots,9$,共9个.

由 $3<\dfrac{b}{8}\leqslant 4$,得 $3\times 8<b\leqslant 4\times 8$.

$\therefore\quad b=3\times 8+1,\ 3\times 8+2,\ 3\times 8+3,\cdots,3\times 8+8$. 共8个.

$\therefore\quad 9\times 8=72$(个).

故选(C).

4·13 如果 a,b,c,d 是四个有理数,且满足下列条件:

$$①a+b=c+d,\quad ②a+d<b+c,\quad ③c<d$$

那么 a,b,c,d 的大小顺序是

(A) $a>b>d>c$.　　(B) $d>b>a>c$.

(C) $d>b>c>a$.　　(D) $b>d>c>a$.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1991年)

[解] 由①+②得 $a<c$, 排除 (A),(B);

由②有 $b+c>a+d$ 与①相加得: $b>d$, 排除(C);

故选(D).

4·14 四个互不相等的正数 a,b,c,d 中,a 最大,d 最小,且 $a:b=c:d$,则 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是

(A) $b+c>a+d$.　　(B) $a+d>b+c$.

(C) $a+d=b+c$.　　(D) 不能确定.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1986年)

[解] $\because\quad a:b=c:d,\quad\therefore\quad a=\dfrac{bc}{d}$.

$\therefore\quad (a+d)-(b+c)=\dfrac{bc-bd-cd+d^2}{d}=\dfrac{(b-d)(c-d)}{d}$,

$\because\quad d$ 最小, $\therefore b>d,\ c>d$, 且 $d>0$,

则 $\dfrac{(b-d)(c-d)}{d}>0$,

$\therefore\quad a+d>b+c$.

故选(B).

4·15 已知 $a<0,\ -1<b<0$,则 $a,\ ab,\ ab^2$ 之间的大小关系是

(A) $a>ab>ab^2$.　　(B) $ab^2>ab>a$.

(C) $ab > a > ab^2$.　　　　(D) $ab > ab^2 > a$.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛；中国部分省、市初中数学通讯赛，1984 年）

[解 1]　由 $a < 0, -1 < b < 0$，有

$$ab - ab^2 = ab(1-b) > 0, \quad 知 \quad ab > ab^2.$$

又　$ab^2 - a = a(b^2 - 1) > 0$，　知　$ab^2 > a$.

从而　$ab > ab^2 > a$.

故选(D).

[解 2]　若 $a < 0, b < 0$，显然 $a > ab$ 不成立，(A) 不对.

同时 $ab^2 > ab$ 不成立，(B) 不对.

若 $a < 0, -1 < b < 0$ 时，有 $ab^2 > a$，则(C) 不成立.

故选(D).

4·16　某学生试图通过先求 x 与 y 的平均值，再求得数与 z 的平均值来计算 x, y 与 z 三个数的平均值 A. 当 $x < y < z$ 时，这个学生的最后得数是

(A) 正确的.　　　　(B) 总小于 A.

(C) 总大于 A.　　　(D) 有时小于 A 有时等于 A.

(E) 有时大于 A 有时等于 A.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

[解]　由代数式变形得

$$\frac{\frac{x+y}{2}+z}{2} - \frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+2z}{4} - \frac{x+y+z}{3}$$

$$= \frac{x+y+z+z}{4} - \frac{x+y+z}{3} = \frac{3A+z}{4} - A$$

$$= \frac{z}{4} - \frac{A}{4},$$

$\because$　$x < y < z$，　则　$z > \dfrac{x+y+z}{3} = A$，

$$\therefore \quad \frac{z}{4} - \frac{A}{4} > 0.$$

故选(C).

4·17　m 为 a, b, c, d, e 的算术平均数，k 为 a 与 b 的算术平均数，

l 为c,d与e的算术平均数,p为k与l的算术平均数,不论a,b,c,d,e如何选取,则常有

(A) $m=p$.　　(B) $m\geqslant p$.　　(C) $m>p$.

(D) $m<p$.　　(E) 非上述答案.

(第16届美国高中数学考试,1965年)

[解]　由设知　$2k=a+b,\quad 3l=c+d+e,$

故 $m=\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=\dfrac{2k+3l}{5}=\dfrac{4k+6l}{10}$.

而 $p=\dfrac{k+l}{2}=\dfrac{5k+5l}{10}$,

则
$$4k+6l\begin{cases}>5k+5l, & 若\ k<l;\\ =5k+5l, & 若\ k=l;\\ <5k+5l, & 若\ k>l.\end{cases}$$

而k决定于$a,\ b$;　l决定于c,d,e.故$k<l,\quad k=l,\quad k>l$均有可能.

故选(E).

4·18　在四个实数中,如果任意三个数之和都不比另一个数小.则下列说法中必定错误的是

(A) 非零的数不可能只有一个.　(B) 四个数可以都是正的.

(C) 负数有两个.　　(D) 如果有零就没有负数.

(中国北京市初中数学竞赛,1990年)

[解]　设该四个实数分别为a,b,c,d.依题意有

$$\begin{cases}a+b+c\geqslant d, & ①\\ b+c+d\geqslant a, & ②\\ c+d+a\geqslant b, & ③\\ d+a+b\geqslant c. & ④\end{cases}$$

若$a<0,\quad b<0$,由①有$c>d$,由④有$d>c$,不妥.

同样,对其他两数为负情形均可产生矛盾.

故选(C).

4·19　已知$abcd>0$,且$a<c,\quad bcd<0$,则下列诸情形可能成立的是

(A) $a>0,\quad b>0,\quad c<0,\quad d>0$.

(B) $a<0,\quad b<0,\quad c>0,\quad d<0$.

(C) $a>0,\quad b>0,\quad c>0,\quad d<0$.

(D) $a<0,\quad b>0,\quad c<0,\quad d>0$.

(E) $a>0,\quad b<0,\quad c<0,\quad d<0$.

（中国上海市初中数学竞赛，1982 年）

[解] (A) 中，$a>0,\quad c<0$ 与题设 $a<c$ 矛盾，故不妥；

(B) 中，$b<0,\quad c>0,\quad d<0$ 与题设 $bcd<0$ 矛盾，否之；

(C) 中，$a>0,\quad b>0,\quad c>0,\ d<0$ 与题设 $abcd>0$ 矛盾，否之；

(E) 中，$a>0,\quad c<0$ 与题设 $a<c$ 矛盾，亦否之.

故选(D).

4·20 如果 $r>0$，那么对所有使得 $pq\neq 0$ 和 $pr>qr$ 的 p,q，我们有

(A) $-p>-q$.　　(B) $-p>q$.　　(C) $1>-\dfrac{q}{p}$.

(D) $1<\dfrac{q}{p}$.　　(E) 非上述答案.

（第 21 届美国高中数学考试，1970 年）

[解] 若 $pr>qr$，且 $r>0$，则 $p>q$，即 $-p<-q$，可否(A)；

又若 $p>0$，则 $\dfrac{q}{p}<1$，可否(D)；

而当 $p>q\geqslant 0$，有 $q>-p$，可否(B)；

且当 $p>0,\quad q<0$ 时，若 $|q|>p$，有 $-q>p>0$ 或 $-\dfrac{q}{p}>1$，可否(C).

综上，故选(E).

4·21 若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$，则下式一定成立的是

(A) $M\geqslant 0$.　(B) $M<0$.　(C) $M>0$.　(D) $M\leqslant 0$.

（中国山西省初中数学竞赛，1990 年）

[解]
$$\begin{aligned}M&=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13\\&=(2x^2-8xy+8y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+6x+9)\\&=2(x-2y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2,\end{aligned}$$

由 $x=2$ 和 $y=-3$ 与 $x-2y=0$ 不能同时成立，

则　$M \neq 0$，即 $M > 0$.

故选(C).

4·22　已知 a,b,c 为实数，且 $b+c=6-4a+3a^2$，　$c-b=4-4a+a^2$. 则 a,b,c 间的大小关系是

(A) $a < b \leqslant c$.　　　(B) $b < a \leqslant c$.

(C) $b < c \leqslant a$.　　　(D) $c < a \leqslant b$.

（中国四川省初中数学竞赛，1992 年）

[解]　由设　$c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2 \geqslant 0$，知 $c \geqslant b$.

由题设两式相减可有　$2b=2+2a^2$，即 $b=1+a^2$.

又　$b-a=a^2+1-a$，

而 $a^2-a+1>0$（注意到其二次项系数为正，且 $\Delta=1^2-4<0$），知 $b>a$.

即　$a < b \leqslant c$.

故选(A).

4·23　若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$. 那么 $f(0)$，　$f(-1992)$，　$f(1992)$ 的大小关系是

(A) $f(0) < f(1992) < f(-1992)$.

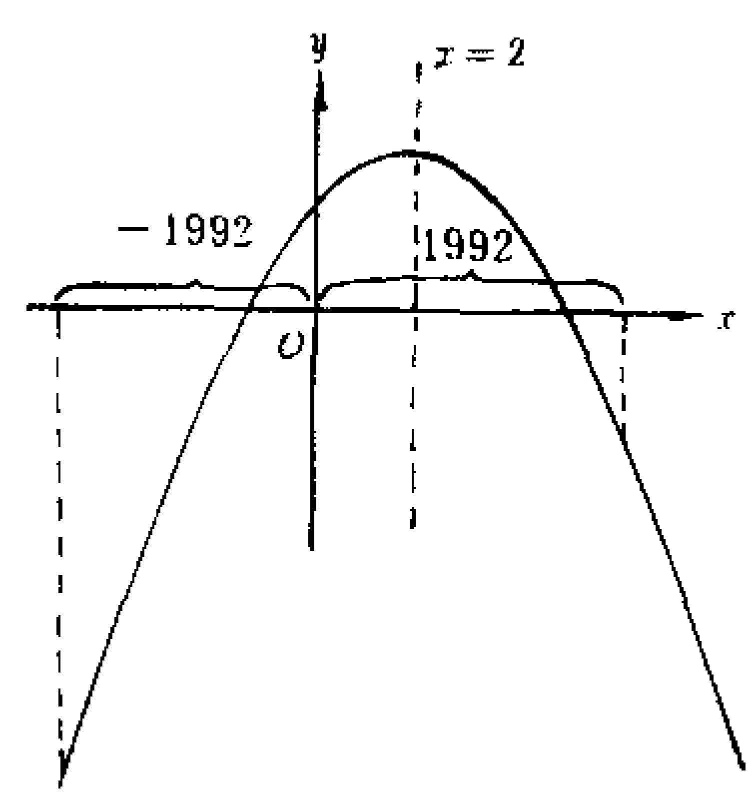
(B) $f(1992) < f(0) < f(-1992)$.

(C) $f(-1992) < f(0) < f(1992)$.

(D) $f(-1992) < f(1992) < f(0)$.

（中国北京市高中数学竞赛，1992 年）

[解]　由题设知该抛物线开口向下，且由 $f(x+2)=f(2-x)$ 即 $f(2+x)=f(2-x)$，则 $x=2$ 为其对称轴.



又　$f(1990+2)=f(2-1990)$，

即　　$f(1992)=f(-1988)$，

知　　$f(1992) > f(-1992)$.

$\therefore$　$f(-1992) < f(1992) < f(0)$.

故选(D).

4·24　如果二次不等式 $mx^2+8mx+60<0$ 的解集是 $-5<x<-3$，那么 m 的值是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

（中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985年）

［解］ 由题设知 $-5,-3$ 是 $mx^2+8mx+60=0$ 的两根.依韦达定理可有

$$\frac{60}{m}=(-5)\cdot(-3),\quad 得\quad m=4.$$

故选(D).

4·25 方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$(k 是实数)有两个实根 α,β,且 $0<\alpha<1,\quad 1<\beta<2$,那么 k 的取值范围是

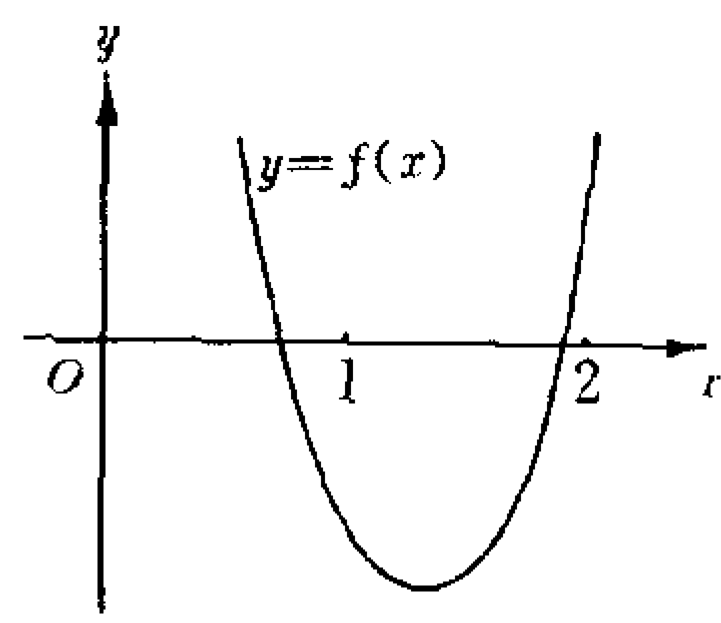
(A) $3<k<4$.　　(B) $-2<k<-1$.

(C) $3<k<4$ 或 $-2<k<-1$.　(D) 无解.

（中国初中数学联赛,1990年）

［解］ 记 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$,如图可有

$$\begin{cases}f(0)=k^2-k-2>0,\\ f(1)=k^2-2k-8<0,\\ f(2)=k^2-3k>0.\end{cases}$$



解得　$3<k<4$　或　$-2<k<-1$.

故选(C).

4·26 以方程 $x^2+px+1=0$ 的两根为三角形两边之长,第三边长为2.则实数 p 的取值范围是

(A) $p<-2$.　　(B) $p\leqslant-2$ 或 $p\geqslant2$.

(C) $-2\sqrt{2}<p<2\sqrt{2}$.　　(D) $-2\sqrt{2}<p<-2$.

（中国四川省高中数学联赛,1991年）

［解］ 设方程两根为 r,s,依题设其为三角形两边则

$$r+s>2,\quad r+2>s,\quad s+2>r.$$

后两不等式可归结为 $|r-s|<2$,或 $(r-s)^2<4$.

即 $(r+s)^2<4+4rs$.又由韦达定理有

$$\begin{cases}-p>2,\\ p^2<8.\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}p<-2,\\ -2\sqrt{2}<p<2\sqrt{2}.\end{cases}$$

综上有　$-2\sqrt{2}<p<-2$.

故选(D).

4·27 集合 $M=\{(x,y)\mid x^3+8y^3+6xy\geqslant1,\quad x,y\in R\}$,

选择题卷

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,\quad t\in R,\quad t\neq 0\}$，$D\cap M=\varnothing$，则有

(A) $-1<t<1$.　　　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}<t<\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}<t<\frac{\sqrt{5}}{5}$.　　　　(D) $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　由 $x^3+8y^3+6xy\geqslant 1$，有

$$x^3+(2y)^3+(-1)^3-3x(2y)(-1)\geqslant 0.$$

即　$(x+2y-1)[(x-2y)^2+(2y+1)^2+(x+1)^2]\geqslant 0.$

又　$(x-2y)^2+(2y+1)^2+(x+1)^2\geqslant 0,$

$\therefore$　$x+2y-1\geqslant 0,$

因为原点(0,0)到 $x+2y-1=0$ 的距离为

$\frac{|0+2\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，　即　$-\frac{1}{\sqrt{5}}<t<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

故选(C).

4·28　若 $a>b>c>d$，又若 $x=(a+b)(c+d)$，且 $y=(a+c)(b+d)$，及 $z=(a+d)(b+c)$. 则 x,y,z 的大小次序是

(A) $x<z<y$.　　　　(B) $y<z<x$.

(C) $x<y<z$.　　　　(D) $z<y<x$.

（中国北京市高中数学竞赛，1990 年）

[解]　$y-x=(ab+cb+ad+cd)-(ac+bc+ad+bd)$

$=a(b-c)+d(c-b)$

$=(a-d)(b-c)$.

由 $a>b>c>d$，　知　$y-x>0$，　即　$y>x$.

又　$z-y=(ab+db+ac+dc)-(ab+cb+ad+cd)$

$=a(c-d)+b(d-c)$

$=(a-b)(c-d)$，

$\therefore$　$z-y>0$，　即　$z>y$.

综上　$x<y<z$.

故选(C).

4·29　对所有实数 a,b,c,x,y,z 其中 $x<a,y<b,z<c$，下列不等式

Ⅰ. $xy + yz + zx < ab + bc + ca$

Ⅱ. $x^2 + y^2 + z^2 < a^2 + b^2 + c^2$

Ⅲ. $xyz < abc$

可以成立的有

(A) 没有一个成立.　(B) 仅 Ⅰ.　(C) 仅 Ⅱ.

(D) 仅 Ⅲ.　(E) 所有的都成立.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 令 $x = y = z = -1$, $a = b = c = 0$,

由 $xy + yz + zx = 3 > 0$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 3 > 0$,

知不等式(Ⅰ),(Ⅱ)不恒成立.

取 $x = y = -1$, $z = 1$, 且 $a = b = 0$, $c = 2$,

则
$$xyz = 1 > 0 = abc.$$

知(Ⅲ)亦不恒成立.

故选(A).

4·30 $a > b > c$, $x > y > z$, $M = ax + by + cz$, $N = az + by + cx$, $P = ay + bz + cx$, $Q = az + bx + cy$.则有

(A) $M > P > N$ 且 $M > Q > N$.

(B) $N > P > M$ 且 $N > Q > M$.

(C) $P > M > Q$ 且 $P > N > Q$.

(D) $Q > M > P$ 且 $Q > N > P$.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1990 年)

[解] $M - N = a(x - z) + c(z - x) = (a - c)(x - z) > 0$,

则 $M > N$;

$N - P = a(z - y) + b(y - z) = (a - b)(z - y) < 0$,

则 $N < P$;

$N - Q = b(y - x) + c(x - y) = (b - c)(y - x) < 0$,

则 $N < Q$;

$$\begin{aligned} M - P &= a(x - y) + b(y - z) + c(z - x) \\ &= [(a - b) + b](x - y) + b(y - z) + [(c - b) + b](z - x) \\ &= b[(x - y) + (y - z) + (z - x)] + (a - b)(x - y) + (c - b)(z - x) \end{aligned}$$

$=(a-b)(x-y)+(c-b)(z-x)>0,$

(注意到 $a>b>c$, $x>y>z$)

$\therefore \quad M>P.$

同理可证 $M>Q.$

综上 $M>P>N$, 且 $M>Q>N.$

故选(A).

4·31 实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 满足方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a_1, & ① \\ x_2+x_3+x_4=a_2, & ② \\ x_3+x_4+x_5=a_3, & ③ \\ x_4+x_5+x_1=a_4, & ④ \\ x_5+x_1+x_2=a_5. & ⑤ \end{cases}$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是实常数,且 $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5$, 那么 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的大小顺序是

(A) $x_1>x_2>x_3>x_4>x_5$. (B) $x_4>x_2>x_1>x_3>x_5$.

(C) $x_3>x_1>x_4>x_2>x_5$. (D) $x_5>x_3>x_1>x_4>x_2$.

(中国初中数学联赛,1993 年)

[解] 由 ① - ② 有 $x_1-x_4=a_1-a_2>0$,即 $x_1>x_4$.

由 ② - ③ 有 $x_2-x_5=a_2-a_3>0$,即 $x_2>x_5$.

由 ③ - ④ 有 $x_3-x_1=a_3-a_4>0$,即 $x_3>x_1$.

由 ④ - ⑤ 有 $x_4-x_2=a_4-a_5>0$,即 $x_4>x_2$.

综上 $x_3>x_1>x_4>x_2>x_5$.

故选(C).

4·32 若设代数式

$$P=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^2}{d^2+a^2+b^2}.$$

其中 a,b,c,d 均为非 0 实数.则

(A) $0<P\leqslant 1$. (B) $1<P<2$.

(C) $2\leqslant P<3$. (D) $P\geqslant 3$.

(中国北京市高中数学竞赛,1986 年)

[解] $P>\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

$$+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}+\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}=1.$$

又 $P<\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+d^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}+\frac{d^2}{b^2+d^2}$

$$=\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)+\left(\frac{b^2}{b^2+d^2}+\frac{d^2}{b^2+d^2}\right)$$

$$=2.$$

$\therefore\quad 1<P<2.$

故选(B).

4·33 满足不等式 $|x+1|+|x|<2$ 的 x 取值范围是

(A) $-\frac{3}{2}<x<-1$.　　(B) $-\frac{3}{2}<x<0$.

(C) $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$.　　(D) $0<x<\frac{1}{2}$.

(E) $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1986年）

[解] 若 $x\geqslant 0$，有 $x+1+x<2$，即 $2x<1$，

$\therefore\quad 0\leqslant x<\frac{1}{2}$.

若 $-1<x<0$，有 $x+1-x<2$，即 $1<2$，不等式恒成立.

若 $x\leqslant -1$，有 $-(x+1)-x<2$，即 $-2x<3$，

$\therefore\quad -\frac{3}{2}<x\leqslant -1$.

综上 $$-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

故选(C).

4·34 设实数 a,b 满足不等式

$$\big||a|-(a+b)\big|<\big|a-|a+b|\big|,\text{则}$$

(A) $a>0$ 且 $b>0$.　　(B) $a<0$ 且 $b>0$.

(C) $a>0$ 且 $b<0$.　　(D) $a<0$ 且 $b>0$.

（中国初中数学联赛，1995年）

[解] 由题设得 $\big||a|-(a+b)\big|^2<\big|a-|a+b|\big|^2$,

化简整理为 $|a|(a+b)>a|a+b|$.

由此看出 $a\neq 0$,且 $a+b\neq 0$,从而 $a+b>\frac{a}{|a|}|a+b|$,

则 $\frac{a}{|a|}$ 只能取 -1, 故 $a<0$.

易知 $a+b>0$, 则 $b>-a>0$.

故选(B).

4·35 不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的所有实数解的集合是

(A) $\{x:-3<x<2\}$. (B) $\{x:-1<x<2\}$.

(C) $\{x:-2<x<1\}$. (D) $\{x:-\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}\}$.

(E) $\varnothing$(空集).

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解] (1) 若 $-2<x<1$,那么 $x-1<0$ 和 $x+2>0$,因而已知不等式化为 $-x+1+x+2<5$,即 $3<5$,它恒成立.

又当 $x=1$ 和 $x=-2$ 时,不等式也是正确的.

(2) 若 $x>1$,那么 $x-1>0$ 和 $x+2>0$,因而已知不等式化为

$$(x-1)+(x+2)=2x+1<5,$$

即 $x<2$, $\therefore$ $1<x<2$.

(3) 若 $x<-2$,那么 $x+2<0$ 和 $x-1<0$,已知不等式化为

$$-(x-1)-(x+2)=-2x-1<5,$$

$\therefore$ $-2x<6$, 即 $x>-3$.

综上可有 $-3<x<2$ 为实数解集.

故选(A).

4·36 若 x 为实数,且 $|x-4|+|x-3|<a$,其中 $a>0$,则

(A) $0<a<0.01$. (B) $0.01<a<1$. (C) $0<a<1$.

(D) $0<a\leqslant 1$. (E) $a>1$.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解] 分以下三种情况考虑:

当 $x\geqslant 4$ 时,

$$|x-4|+|x-3|=x-4+x-3=2x-7\geqslant 1;$$

当 $x\leqslant 3$ 时,

$$|x-4|+|x-3|=4-x+3-x=7-2x\geqslant 1;$$

当 $3<x<4$ 时,

$$|x-4|+|x-3|=4-x+x-3=1.$$

综上 $|x-4|+|x-3|\geqslant 1.$

因而 $|x-4|+|x-3|<a$ 时, $a>1$.

故选(E).

4·37 对于实数 x,不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant 7$ 等价于

(A) $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$. (B) $1\leqslant x\leqslant 3$.

(C) $-5\leqslant x\leqslant 9$. (D) $-5\leqslant x\leqslant 1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 9$.

(E) $-6\leqslant x\leqslant 1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 10$.

(第23届美国高中数学考试,1972年)

[解] 首先当 $x-2\geqslant 0$ 时,题设不等式化为 $1\leqslant x-2\leqslant 7$, 即

$$3\leqslant x\leqslant 9.$$

又若 $x-2<0$ 时,有 $1\leqslant 2-x\leqslant 7$, 即

$$-1\leqslant -x\leqslant 5, \quad 或 \quad -5\leqslant x\leqslant 1,$$

故选(D).

4·38 已知 $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<x<\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.那么,满足上述不等式的整数 x 的个数是

(A)4. (B)5. (C)6. (D)7.

(中国初中数学联赛,1997年)

[解] 将题设式子分母有理化后有

$$4(\sqrt{3}-\sqrt{2})<x<2(\sqrt{5}-\sqrt{3}),$$

即 $1.27\cdots<x<7.3\cdots$

故选(C).

4·39 设 $x=\sqrt[3]{1+991a}$, $y=\sqrt[3]{1+992a}$, $z=\sqrt[3]{1+993a}$, 那么,当 $\sqrt{-a}$ 有意义时,x,y,z 的大小关系是

(A) $x\leqslant y\leqslant z$. (B) $y\leqslant z\leqslant x$.

(C) $z\leqslant x\leqslant y$. (D) $z\leqslant y\leqslant x$.

(中国北京市初中数学竞赛,1992年)

[解] 由设 $\sqrt{-a}$ 有意义,则 $a\leqslant 0$.

选择题卷

因而 $1+993a \leqslant 1+992a \leqslant 1+991a$,

即有 $\sqrt[3]{1+993a} \leqslant \sqrt[3]{1+992a} \leqslant \sqrt[3]{1+991a}$.

故选(D).

4·40 设 $a>b>c>d>0$,且 $X=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $Y=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$, $Z=\sqrt{ad}+\sqrt{bc}$.则 X,Y,Z 的大小关系为

(A) $X<Z<Y$. (B) $Y<Z<X$.

(C) $X<Y<Z$. (D) $Z<Y<X$.

(中国北京市初中数学竞赛,1990年)

[解] 由题设我们有

$$X-Y=\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})+\sqrt{d}(\sqrt{c}-\sqrt{b})$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{d})(\sqrt{b}-\sqrt{c})>0,$$

又
$$Y-Z=\sqrt{a}(\sqrt{c}-\sqrt{d})+\sqrt{b}(\sqrt{d}-\sqrt{c})$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})>0.$$

则 $X>Y>Z$.

故选(D).

4·41 已知两正数 a,b,且 $a<b$,设A.M为其算术平均,G.M为其正几何平均,则A.M - G.M常小于

(A) $\frac{(b+a)^2}{ab}$. (B) $\frac{(b+a)^2}{8b}$. (C) $\frac{(b-a)^2}{ab}$.

(D) $\frac{(b-a)^2}{8a}$. (E) $\frac{(b-a)^2}{8b}$.

(第15届美国高中数学考试,1964年)

[解] 由设知 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, 且 $\frac{a+b}{2}-a>\sqrt{ab}-a$,

即
$$\frac{b-a}{2}>\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}).$$

又 $a<b$,则 $\frac{(b-a)^2}{4}>a(a+b-2\sqrt{ab})$,

或
$$\frac{(b-a)^2}{8a}>\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}.$$

故选(D).

4·42 若 a 与 b 表两不等正数,则

(A) $\frac{2ab}{a+b}>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}$. (B) $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}>\frac{a+b}{2}$.

(C) $\frac{2ab}{a+b} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.　(D) $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b} > \sqrt{ab}$.

(E) $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$.

（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

[解]　对于正数 x, y 总有 $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$,

$\therefore$　$a>0, b>0$ 且 $a \neq b$ 时, $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, 且

$$\frac{2ab}{a+b} < \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

综上　$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

故选(E).

4·43　已知 $x<y<0$. 设 $M=|x|$,　$N=|y|$,　$P=\frac{|x+y|}{2}$, $Q=\sqrt{xy}$. 则 M, N, P, Q 的大小关系是

(A) $M<Q<P<N$.　　(B) $M<P<Q<N$.

(C) $Q<N<P<M$.　　(D) $N<Q<P<M$.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1990 年）

[解 1]　由设 $x<y<0$, 首先有 $|y| < \frac{|x+y|}{2} < |x|$,

即　　$N<P<M$.

又　$\sqrt{xy} > \sqrt{y^2} = |y|$,　即　$Q>N$, 且

$$\sqrt{xy} = \sqrt{|x||y|} < \frac{|x|+|y|}{2} = \frac{|x+y|}{2},$$

（注意 $x<y<0$）

即　$Q<P$.

综上有　$N<Q<P<M$.

故选(D).

[解 2]　显然有 $M>P>N$, 且 $M>Q>N$.

又　$P^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2}$,　$Q^2 = xy$,

则　$P^2 - Q^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 > 0$

有　$P^2 > Q^2$,　又　$P>0$,　$Q>0$,　则　$P>Q$.

选择题卷

综上 $M > P > Q > N$.

故选(D).

4·44 设 $ab \neq 0, a^2+b^2=1$,如果

$$X=\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6},\quad Y=\frac{a^4+b^4}{\sqrt{a^6+b^6}},\quad Z=\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{a^6+b^6}.$$

则 X,Y,Z 的大小关系是

(A) $X<Y<Z$. (B) $Y<Z<X$.

(C) $Y<X<Z$. (D) $Z<X<Y$.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1988年)

[解1] 由设 $ab\neq 0$,且 $a^2+b^2=1$,有 $a^2<1$,则

$$a^4<a^2,\quad a^6<a^4;$$

又 $b^2<1$, 有 $b^4<b^2$, $b^6<b^2$.

$\therefore$ $a^4+b^4<a^2+b^2$,则 $a^4+b^4<\sqrt{a^4+b^4}$,故 $X<Z$;

$a^6+b^6<a^2+b^2$, 则 $a^6+b^6<\sqrt{a^6+b^6}$, 故 $Y<X$.

$$\therefore \quad Y<X<Z.$$

故选(C).

[解2] $\because$ $0<a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=1-2a^2b^2<1$,

$\therefore$ $\sqrt{a^4+b^4}>a^4+b^4$, 即 $Z>X$.

再注意到 $0<a^6+b^6=1-3a^2b^2<1-2a^2b^2<a^4+b^4<1$

$$\therefore \quad \sqrt{a^6+b^6}>\sqrt{a^4+b^4}>a^4+b^4,$$

$$\therefore \quad X=\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6}>1,$$

而
$$Y=\frac{a^4+b^4}{\sqrt{a^6+b^6}}<1,$$

$$\therefore \quad X>Y.$$

从而
$$Y<X<Z.$$

故选(C).

4·45 设 a,b,c,d,m,n 都是正实数,$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$,$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$.那么

(A) $P \geqslant Q$.　　(B) $P \leqslant Q$.　　(C) $P < Q$.

(D) P,Q 间的大小关系不确定,而与 m,n 的大小有关.

（中国高中数学联赛,1983 年）

[解]　由题设有

$$P^2 = ab + cd + 2\sqrt{abcd},\quad Q^2 = ab + cd + \frac{mad}{n} + \frac{nbc}{m},$$

$$\because \quad \frac{mad}{n} + \frac{nbc}{m} \geqslant 2\sqrt{\frac{mad}{n} \cdot \frac{nbc}{m}} = 2\sqrt{abcd},$$

$$\therefore \quad Q^2 \geqslant P^2.$$

又 $\because$ P,Q 都是正数,则 $Q \geqslant P$.

故选(B).

4·46　若 $x+y+z=30$, $3x+y-z=50$,其中 x,y,z 皆为非负数.则 $M=5x+4y+2z$ 的取值范围是

(A) $100 \leqslant M \leqslant 110$.　　(B) $110 \leqslant M \leqslant 120$.

(C) $120 \leqslant M \leqslant 130$.　　(D) $130 \leqslant M \leqslant 140$.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛,1989 年）

[解]　$M = 5x+4y+2z = (x+y+z)+(4x+3y+z)$

$= 30+4x+3y+z$,

又由题设两式相加得　$4x+2y=80$,

$\therefore$　$M = 30+(4x+2y)+y+z = 110+y+z$,

再由题设两式相减得　$2x-2z=20$,

$\because$　$z \geqslant 0$,　$\therefore$　$x \geqslant 10$.

由设　$30-(y+z)=x \geqslant 10$,　有　$y+z \leqslant 20$,

$\therefore$　$M = 110+y+z \leqslant 130$.

由　$4x+2y=80$　有　$y=40-2x \geqslant 0$,　知　$x \leqslant 20$,

从而　$y+z \geqslant 10$,　有　$M = 110+y+z \geqslant 120$.

故选(C).

4·47　设 a,b,c 是不全相等的任意实数.若 $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$,则 x,y,z

(A) 都不小于 0.　　(B) 都不大于 0.

(C) 至少有一个小于 0.　　(D) 至少有一个大于 0.

（中国初中数学联赛,1994 年）

[解] 注意到代数式

$$\begin{aligned}&2(x+y+z)\\=&2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\=&(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\>&0,\end{aligned}$$

即 $x+y+z>0$，因而 x,y,z 中至少有一个大于0.

故选(D).

4·48 如果 p,q 和M都是正数，且 $q<100$，那么将 M 增加$p\%$，然后再将此结果减少 $q\%$ 之后仍大于M 的充要条件是

(A) $p>q$. (B) $p>\dfrac{q}{100-q}$. (C) $p>\dfrac{q}{1-q}$.

(D) $p>\dfrac{100q}{100+q}$. (E) $p>\dfrac{100q}{100-q}$.

（第32届美国高中数学考试，1981年）

[解] 依题意可有下面的不等式：

$$M\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)>M,$$

即
$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)>1,$$

或
$$1+\frac{p}{100}>\frac{1}{1-\dfrac{q}{100}}=\frac{100}{100-q}.$$

因而
$$\frac{p}{100}>\frac{100}{100-q}-1=\frac{q}{100-q},$$

$$\therefore\quad p>\frac{100q}{100-q}.$$

故选(E).

4·49 设 $S=\left\{\dfrac{2x+3}{x+2}\,\middle|\,x\geqslant 0\right\}$，若有一最小的数 M，集合 S 的所有元素都不大于M，则 M 为S 的最小上界（上确界），若有一最大的数 m，集合 S 的所有元素都不小于m，则 m 为S 的最大下界（下确界），则

(A) m 在S中，M不在S中. (B) M 在S中，m 不在S中.

(C) m 和M 均在S中. (D) m 和M 均不在S中.

(E) M 不存在.

（第12届美国高中数学考试，1961年）

[解]　令 $y=\frac{2x+3}{x+2}$，　则　$y=2-\frac{1}{x+2}$.
因而当 $x\geqslant 0$ 时，y 是 x 的增函数.

当 $x=0$ 时，　$y_{\min}=\frac{3}{2}=m$；

当 $x\to+\infty$ 时，　$y\to 2=M$（即 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2$）.

故选(A).

4·50　若对于一切实数 x，　$f(x)=3x+2$，那么下述说法"$|f(x)+4|<a$，每当 $|x+2|<b$，　$a>0$，　$b>0$"为真的条件是

(A) $b\leqslant\frac{a}{3}$.　(B) $b>\frac{a}{3}$.　(C) $a\leqslant\frac{b}{3}$.　(D) $a>\frac{b}{3}$.

(E) 这种说法永不为真.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

[解]　考虑 $|f(x)+4|=|3x+2+4|=3|x+2|$.

若 $|f(x)+4|=3|x+2|<a$，只须 $|x+2|<\frac{a}{3}$.

因而每当 $|x+2|<b$，　$b\leqslant\frac{a}{3}$ 时，我们总有 $|f(x)+4|<a$.

故选(A).

4·51　若 x 为实数，且有 $4y^2+4xy+x+6=0$，则使 y 取实数的所有 x 值的集为

(A) $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 3$.　　(B) $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$.

(C) $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 2$.　　(D) $-3\leqslant x\leqslant 2$.

(E) $-2\leqslant x\leqslant 3$.

（第 17 届美国高中数学考试，1966 年）

[解 1]　先将题设方程视为 y 的方程则有

$$4y^2+(4x)y+(x+6)=0,$$

若 y 取实数，则 $\Delta=(4x)^2-4\cdot 4\cdot(x+6)\geqslant 0$.

解得　$x\geqslant 3$　或　$x\leqslant -2$.

故选(A).

[解 2]　由设有 $4y^2+4xy+x^2-(x^2-x-6)=0$.

即

$$(2y+x)^2=(x+2)(x-3),$$

上式左恒 $\geqslant 0$(x,y 均为实数)，因而 $(x+2)(x-3)\geqslant 0$,

得 $x \geqslant 3$ 或 $x \leqslant -2$.

故选(A).

4·52 不等式 $x-1<(x-1)^2<3x+7$ 的整数解的个数

(A) 等于4. (B) 小于4. (C) 大于5. (D) 等于5.

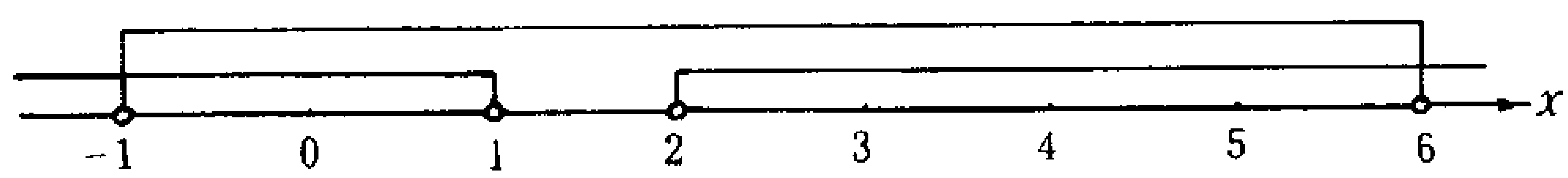
(中国初中数学联赛,1993年)

[解] 题设不等式可化为

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0, & ① \\ x^2-5x-6<0. & ② \end{cases}$$

① 的解为 $x<1$ 或 $x>2$;

② 的解为 $-1<x<6$.



从而适合不等式组的整数解仅有 $x=0,3,4,5$(见上图).

故选(A).

4·53 不等式 $x^2-2|x|-15>0$ 的解集是

(A) $-5<x<5$. (B) $-3<x<5$.

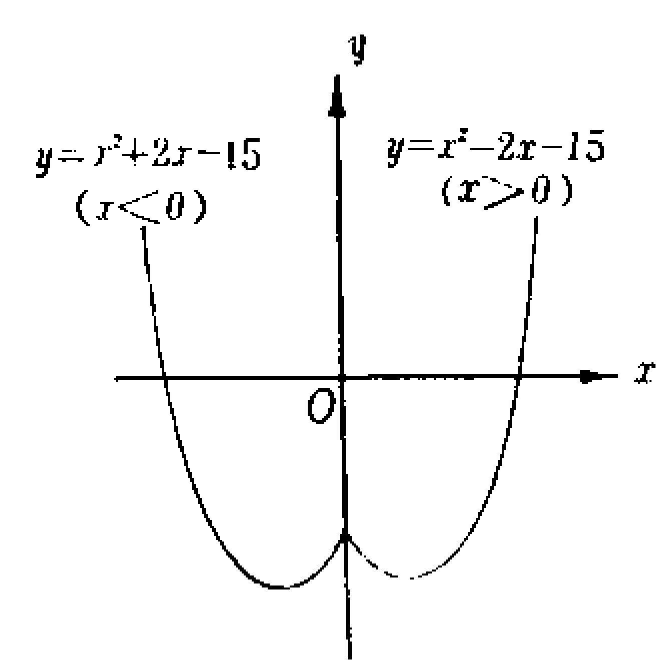
(C) $x<-3$ 或 $x>5$. (D) $x<-5$ 或 $x>5$.

(辽宁省沈阳市初中数学邀请赛,1987年)

[解] 设 $y=x^2-2|x|-15$,则有

$x \geqslant 0$ 时,$y=x^2-2x-15$;

$x<0$ 时,$y=x^2+2x-15$.



其图像如右图.显然其与 x 轴交点关于原点对称.

则原不等式解集为 $x<-5$ 或 $x>5$.

故选(D).

4·54 不等式 $y-x<\sqrt{x^2}$ 可被满足并且仅仅满足(亦即同解于)的条件是

(A) $y<0$ 或 $y<2x$(或两个不等式都成立).

(B) $y>0$ 或 $y<2x$(或两个不等式都成立).

(C) $y^2<2xy$.

(D) $y<0$.

(E) $x>0$ 与 $y<2x$.

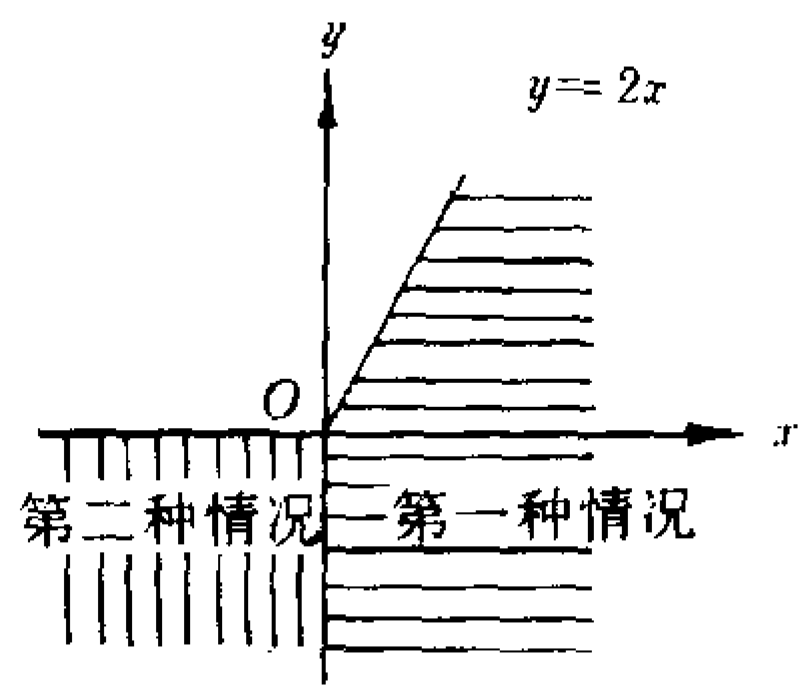
(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 分两种情况考虑:

(1) 若 $x\geqslant 0$,那么 $y-x<\sqrt{x^2}$ 成立的条件是当且仅当 $y-x<x$,即 $y<2x$.

(2) 若 $x<0$,那么 $y-x<\sqrt{x^2}$ 成立,当且仅当 $y-x<-x$, 即 $y<0$.

几何解释见右图,图中阴影部分的点 (x,y) 就是满足 $y<0$ 或 $y<2x$ 者.



故选(A).

4·55 当 $1-x>(1-x)^2>(1-x)^3>(1-x)^4>\cdots$ 时,x 的取值范围为

(A) $x>1$. (B) $x<1$. (C) $x>0$.

(D) $x<0$. (E) $0<x<1$.

(中国湖北省武汉市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由 $1-x>(1-x)^2$, 解得 $0<x<1$.
当 $0<x<1$ 时, $0<1-x<1$.因而题设不等式皆成立.

故选(E).

4·56 已知 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{1989},x_{1990}$ 是 1990 个正数.且

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_{1989}}+\frac{1}{1+x_{1990}}=1.$$

则 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{1989},x_{1990}$ 这 1990 个正数中

(A) 小于 1 的数最多只有 1 个. (B) 肯定有比 1989 大的数.

(C) 肯定有比 1989 小的数. (D) 必有一个为 1990.

(中国北京市高中数学竞赛,1990 年)

[解] 若 $x_1=x_2=\cdots=x_{1990}=x$,则题设式子可化为

$$\frac{1990}{1+x}=1,$$

这样 $x=1989$,则可否定(B),(C),(D).

又 x_i 中小于 1 的数不能多于 1 个,否则:

设 $0<x_1<1$, $0<x_2<1$, 则

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

与题设矛盾.

故选(A).

4·57 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{1989},a_{1990}$ 均为正数.又

$M=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1989})(a_2+a_3+\cdots+a_{1990})$

$N=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990})(a_2+a_3+\cdots+a_{1989})$

则 M 与 N 的大小关系是

(A) $M=N$.　　(B) $M<N$.

(C) $M>N$.　　(D) 关系不确定.

（中国北京市高中数学竞赛,1990 年）

[**解**] 设 $A=a_2+a_3+\cdots+a_{1989}$，于是

$M=(a_1+A)(A+a_{1990})$， $N=(a_1+A+a_{1990})A$.

而 $M=a_1A+a_{1990}A+A^2+a_1a_{1990}$,

又 $N=a_1A+a_{1990}A+A^2$,

$\because$ $a_i>0(i=1,2,\cdots,1990)$， $\therefore$ $M>N$.

故选(C).

第五章　初等代数函数

第1节　正、反比例函数，一次函数及其他

5·1　现有以下方程：

Ⅰ. $y = x - 2$.　Ⅱ. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.　Ⅲ. $(x + 2)y = x^2 - 4$.

其中表示同一图形的是

(A) Ⅰ 和 Ⅱ.　(B) Ⅰ 和 Ⅲ.　(C) Ⅱ 和 Ⅲ.

(D) Ⅰ, Ⅱ 和 Ⅲ.　(E) 都不代表同一图形.

(第 43 届美国高中数学考试, 1992 年)

[解]　对于 Ⅱ 来讲，$x \neq -2$，即其图像为不包括点 $(-2, -4)$ 的直线 $y = x - 2$.

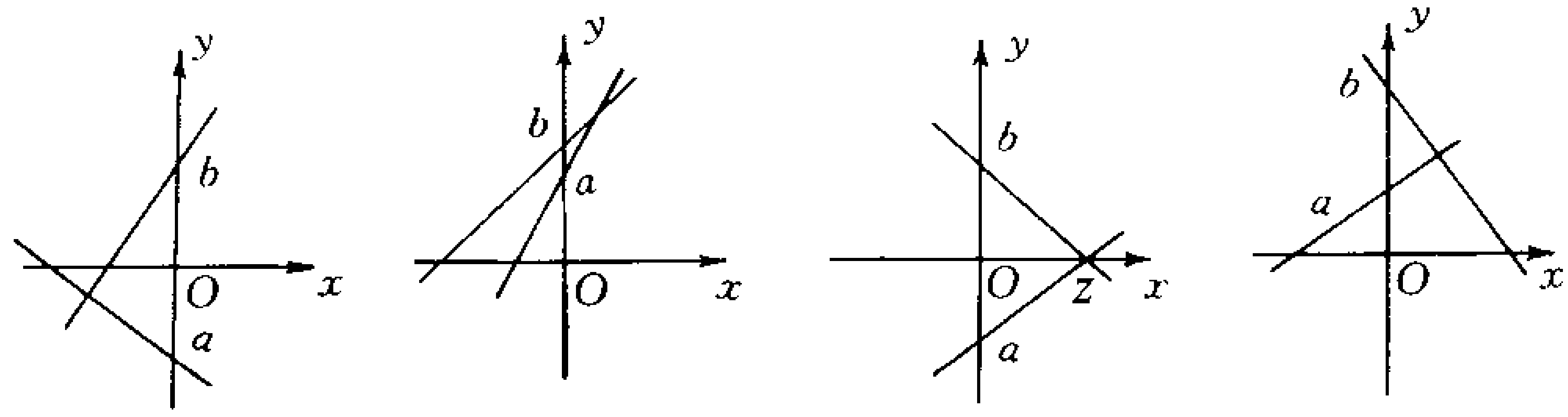
对 Ⅲ 来讲，其图像包含两条直线

$$x + 2 = 0 \text{ 和 } y = x - 2.$$

显然 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 的图像均不相同.

故选 (E).

5·2　设 $b > a$，将一次函数 $y = bx + a$ 与 $y = ax + b$ 的图像画在平面直角坐标系内，则有一组 a、b 的取值，使得下列 4 个图中的一个为正确的是



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（中国初中数学联赛，1999年）

[解] 两直线的交点(x,y)为方程组 $\begin{cases} y = bx + a, \\ y = ax + b \end{cases}$ 的解，即$(1, a+b)$.

(A) 中交点横坐标是负数，故(A)不对.

(C) 中交点横坐标是$2 \neq 1$，故(C)不对.

(D) 中交点纵坐标是大于a、小于b的数，不是$a+b$，故(D)不对.

因为4个选择项中仅有一个正确，故选(B).

故选(B).

5·3　已知$abc \neq 0$，并且$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = p$. 那么直线$y = px + p$一定通过

(A) 第一、二象限.　　(B) 第二、三象限.

(C) 第三、四象限.　　(D) 第一、四象限.

（中国初中数学联赛，1998年）

[解] 由题设可得：

$$\begin{cases} a + b = pc, \\ b + c = pa, \\ a + c = pb. \end{cases}$$

上三式相加，得$2(a+b+c) = p(a+b+c)$.

$\therefore\quad p = 2$　或　$a + b + c = 0$.

当$p = 2$时，$y = 2x + 2$.则直线通过第一、二、三象限.

当$a + b + c = 0$时，不妨取$a + b = -c$，于是

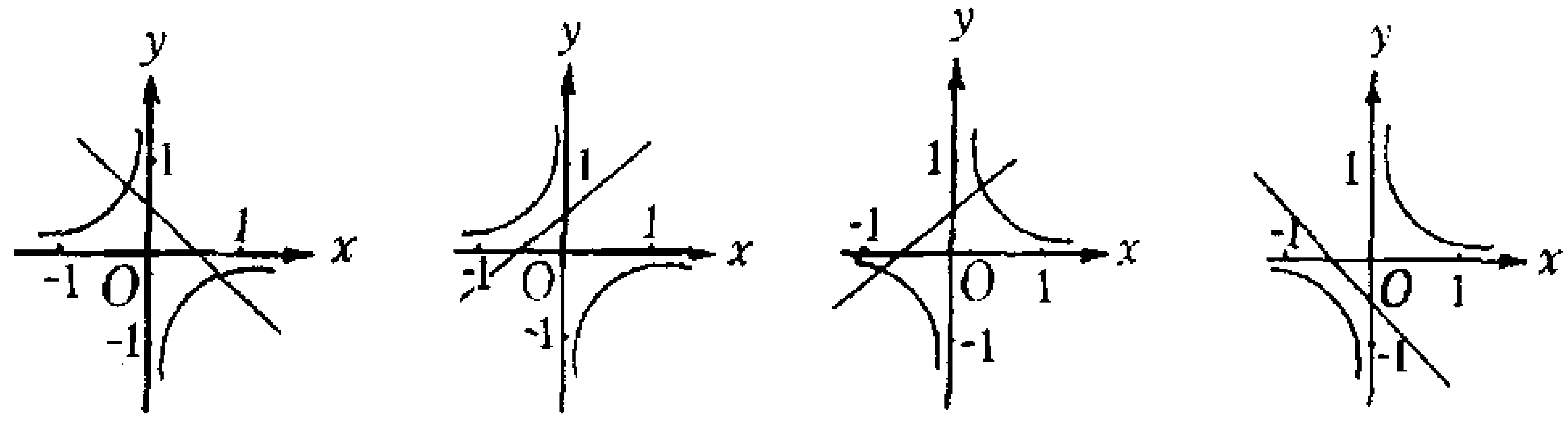
$$p = \frac{a+b}{c} = -1 (c \neq 0).$$

$\therefore\quad y = -x - 1$，则直线通过第二、三、四象限.

综上,直线一定通过第二、三象限.

故选(B).

5·4　反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 与一次函数 $y=k(x+1)$(其中 x 为自变量,k 为常数)在同一坐标中的图像只有可能是(见图)



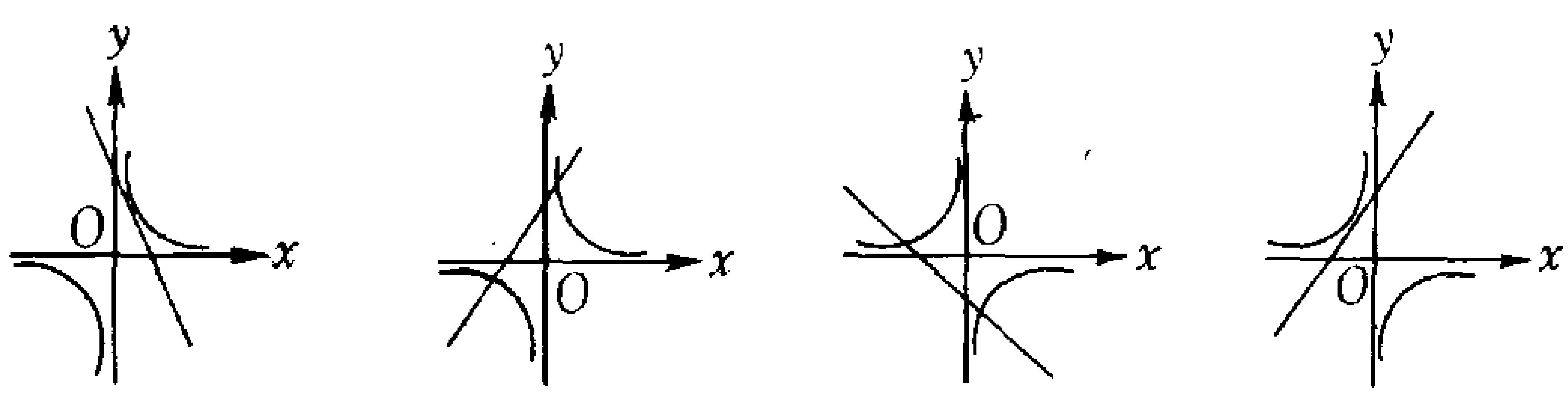
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1987年)

[解]　直线应过点$(-1,0)$,否定(A).其余之图中 $|k|<1$,有 $k-1<0$.故反比例函数图像应在Ⅱ,Ⅳ象限,则(B)正确.

故选(B).

5·5　在同一坐标系里,表示函数 $y=kx+b$ 与 $y=\frac{kb}{x}$($k\neq 0,b\neq 0$)的图像只能是



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

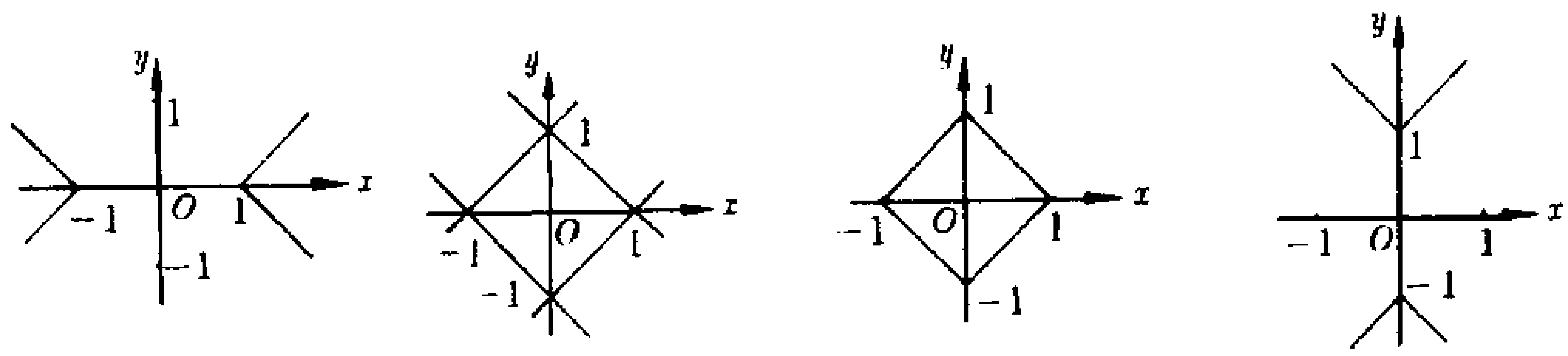
(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1989年)

[解]　若 $kb>0$,则 $y=\frac{kb}{x}$ 的图像如(A),(B),而 $y=kx+b$ 如(B),(C),(D),故(B)同时满足两方程.

若 $kb<0$,$y=\frac{kb}{x}$ 如(C),(D),$y=kx+b$ 如(A),不能同时满足两方程.

故选(B).

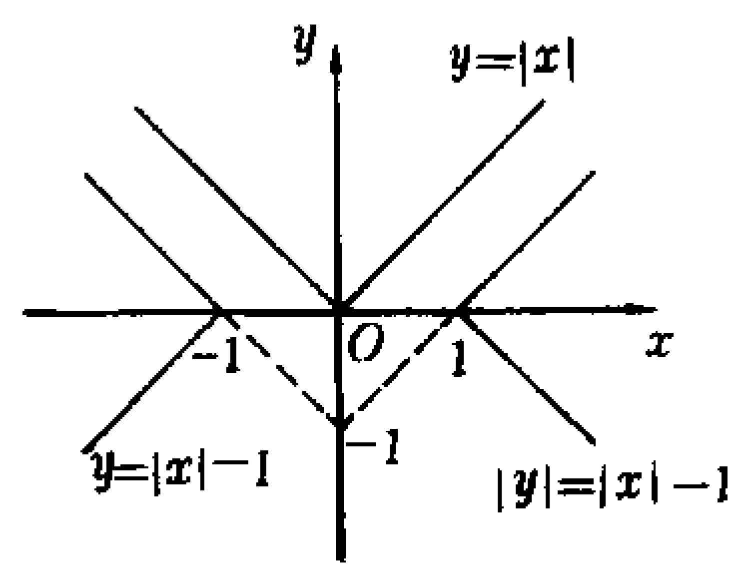
5·6　函数 $|y|=|x|-1$ 的图像形状是



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（中国江苏省苏州市初中数学竞赛，1985 年）

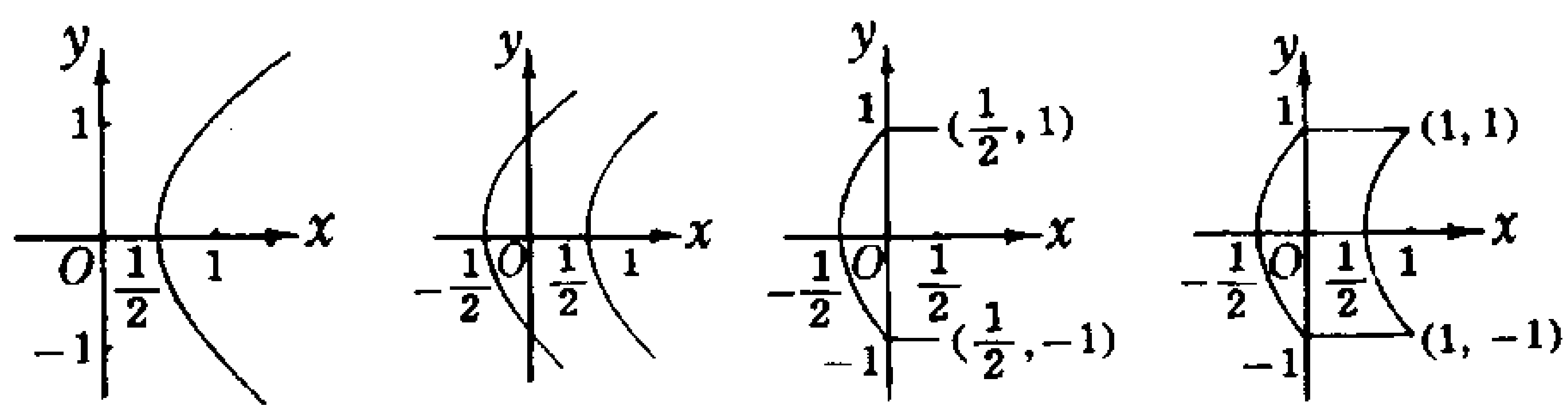
［解］　$\because \quad |y|\geqslant 0$，
故函数定义域 $|x|-1\geqslant 0$.



又从右图中可看到从 $y=|x|$，$y=|x|-1$ 的图像，得到 $|y|=|x|-1$ 的图像步骤.

故选(A).

5·7　方程 $|x-y^2|=1-|x|$ 的图像为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（中国高中数学联赛，1991 年）

［解］　因为$|x-y^2|=\begin{cases}x-y^2, x\geqslant y^2,\\ y^2-x, x<y^2,\end{cases}$

$$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0,\end{cases}$$

所以 方程 $|x-y^2|=1-|x|$ 等价于

$x-y^2=1-x$，　当 $x\geqslant y^2$，　　即　$y^2=2x-1$，　$x\geqslant y^2$，

$y^2-x=1-x$，　当 $0\leqslant x<y^2$，即　$y^2=1$，　$0\leqslant x<y^2$，

$y^2-x=1+x$，　当 $x<0$，　　即　$y^2=2x+1$，　$x<0$.

故选(D).

5·8　若 $y=-|x-a|+b$ 和 $y=|x-c|+d$ 的图像交于(2,5)和(8,3)点,则 $a+c$ 等于

(A)7.　　(B)8.　　(C)10.　　(D)13.　　(E)18.

(第 50 届美国高中数学考试,1999 年)

[解]　作题设有

$$\begin{cases}5=-|2-a|+b,\\8=-|8-a|+b\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}5=|2-c|+d,\\8=|8-c|+d.\end{cases}$$

每组两式两边相减可有

$$\begin{cases}|2-a|-|8-a|=3 & (1)\\|8-c|-|2-c|=3 & (2)\end{cases}$$

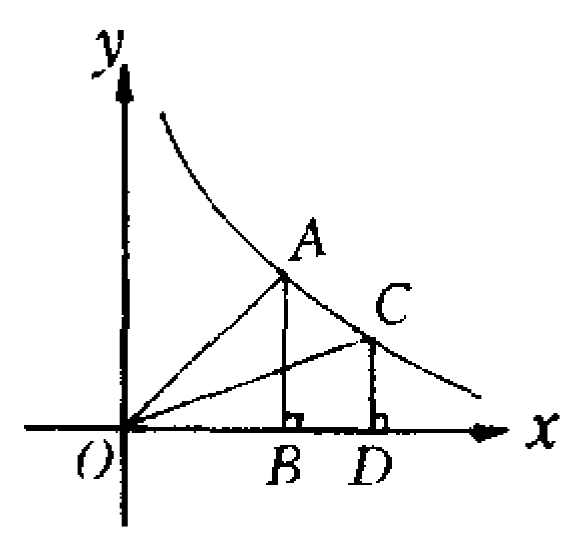
在区间 $a\leqslant 2$, $2<a<8$, $a>8$ 上讨论(1)式;

在区间 $c\leqslant 2$, $2<c<8$, $0>8$ 上讨论(2)式可解得 $a=6\frac{1}{2}$, $c=3\frac{1}{2}$.

因而 $a+c=10$.

故选(C).

5·9　如图,正比例函数 $y=x$ 和 $y=ax(a>0)$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图像分别交于 A 点和 C 点.若 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2,则 S_1 与 S_2 的关系是



(A) $S_1>S_2$.　　(B) $S_1=S_2$.

(C) $S_1<S_2$.　　(D) 不确定.

(中国初中数学联赛,1992 年)

[解]　设 A 点坐标为 (x_1,y_1), C 点坐标为 (x_2,y_2).

则 $x_1y_1=k$, $x_2y_2=k$.

又由　$S_1=\frac{1}{2}x_1y_1$,　$S_2=\frac{1}{2}x_2y_2$,　则 $S_1=S_2$.

故选(B).

5·10　函数 $y=|||x|-1|-1|$ 的图像与 x 轴围成的封闭区域的面积是

(A) 2.　　(B) $\sqrt{2}$.　　(C) 1.　　(D) $\frac{1}{2}$.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

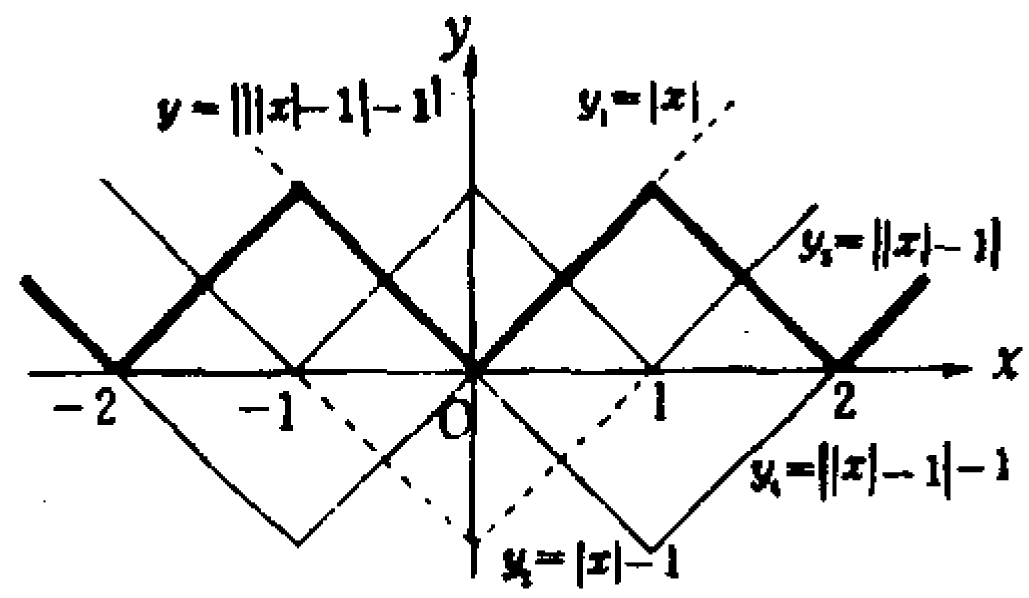
[解]　依次作出

$y_1 = |x|$, $y_2 = |x| - 1$,

$y_3 = ||x| - 1|$,

$y_4 = ||x| - 1| - 1$

$y = |||x| - 1| - 1|$



的图像.易求得题设函数图像与 x 轴围成的封闭区域面积为

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\right) = 2.$$

故选(A).

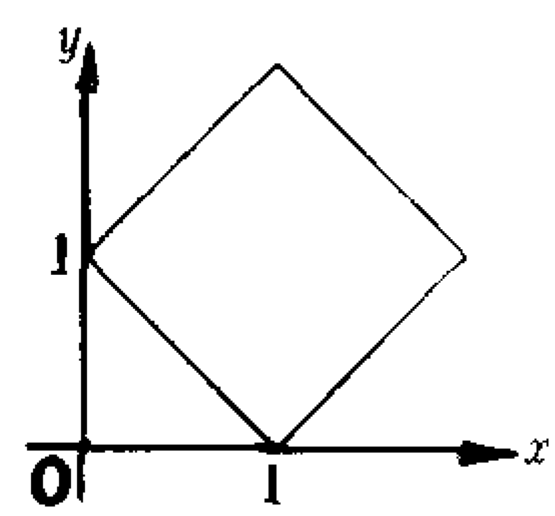
5·11　由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形的面积是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) π.　　(D) 4.

（中国高中数学联赛,1982年）

[**解1**]　题设方程可化为下面四组等价形式

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ y-1 \geqslant 0, \\ x-1+y-1=1; \end{cases}$$



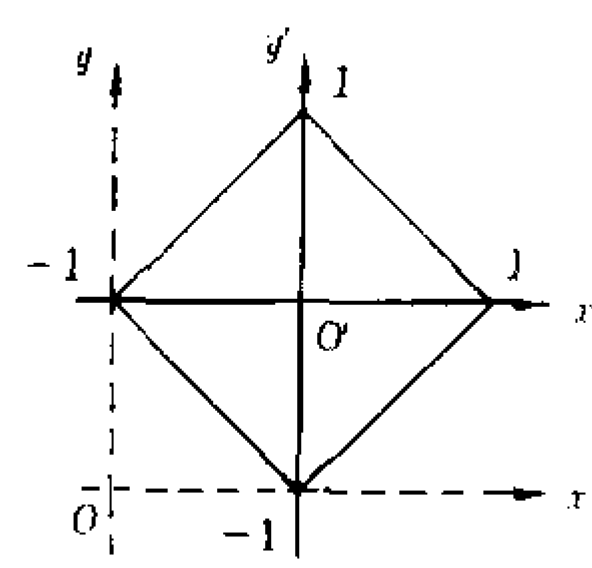
$$\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ y-1 \geqslant 0, \\ 1-x+y-1=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ y-1 \leqslant 0, \\ 1-x+1-y=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ y-1 \leqslant 0, \\ x-1+1-y=1. \end{cases}$$

作出图像,即可得出面积为2.

[**解2**]　利用坐标平移

$$\begin{cases} x' = x-1, \\ y' = y-1, \end{cases}$$



则原方程变为　$|x'|+|y'|=1$.

易见图形所围面积为2(注意坐标平移不改变图形的面积大小).

故选(B).

第2节　二次函数

5·12　方程式$x^2-2x=0$的根可由图形法求得,即等于求下列各组方程式交点的横坐标,其中有一组例外为

(A) $y=x^2$, $y=2x$.　　(B) $y=x^2-2x$, $y=0$.

(C) $y=x$, $y=x-2$.　　(D) $y=x^2-2x+1$, $y=1$.

(E) $y=x^2-1$, $y=2x-1$.

(第2届美国高中数学考试,1951年)

[解]　方程　$x^2-2x=0$可等价于

$x^2=2x$　或　$x^2-2x+1=1$　或　$x^2-1=2x-1$.

故选(C).

5·13　如表

x	1	2	3	4	5
y	3	7	13	21	31

所示,x与y的关系式为

(A) $y=4x-1$.　　(B) $y=x^3-x^2+x+2$.

(C) $y=x^2+x+1$.　　(D) $y=(x^2+x+1)(x-1)$.

(E) 非上述答案.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解]　由设可看出y之间差依次为4,6,8,10,知其为二阶等差数列,即函数关系应为$y=ax^2+bx+c$型.

首先可排除(A),(B),(D).经验算(C)适合.

故选(C).

5·14　若函数$y=\frac{1}{2}(x^2-100x+196+|x^2-100x+196|)$,则当自变量$x$取1,2,3,…,100这100个自然数时,函数值的和是

(A)540.　　(B)390.　　(C)194.　　(D)97.

(中国初中数学联赛,1999年)

[解]　$\because$　$x^2-100x+196=(x-2)(x-98)$,

$\therefore$　当　$2\leqslant x\leqslant 98$　时,

$$|x^2-100x+196|=-(x^2-100x+196).$$

故当自变量 x 取 2,3,…,98 时函数值为 0.

而当 x 取 1,99,100 时,

$$|x^2-100x+196|=x^2-100x+196.$$

所以,所求的和为

$(1-2)(1-98)+(99-2)(99-98)+(100-2)\cdot(100-98)$

$=97+97+196=390.$

故选(B).

5·15　要描绘 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像,须作一表.对于 x 的值以等间隔的值增加时,函数的值依次为3844,3969,4096,4227,4356,4489,4624 及 4761,其中有一不正确者为

(A) 4096.　　(B) 4356.　　(C) 4489.

(D) 4761.　　(E) 非上述答案.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解]　考虑函数值:

$$f(x),f(x+h),f(x+2h),\cdots,f(x+7h),h\text{ 为等间隔.}$$

由　$f(x+h)-f(x)=2ahx+ah^2+bh,$

知函数值差为 x 的一次式,即成正比例,换言之,函数值差之差为恒量(二阶等差数列).考虑下列各数两两之差:

	3844	3969	4096	4227	4356	4489	4624	4761
相邻数差	125	127	131	129	133	135	137	

显然 4227 为不正确者.

故选(E).

5·16　函数 $y=-x^2+px+q$ 的图像与 x 轴交于$(a,0)$和$(b,0)$两点,若 $b<1<a$,那么

(A)$p+q>1$.　(B)$p+q=1$.　(C)$p+q<1$.　(D)$pq>0$.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1993 年)

[解]　由题设知 a,b 为方程$x^2-px-q=0$的两根,由韦达定理

知

$$p+q=(a+b)-ab=(a-1)(1-b)+1.$$

注意到 $b<1<a$，因而 $p+q>1$.

故选(A).

5·17 设抛物线 $y=x^2+kx+4$ 和 x 轴有两个不同的交点(x_1,0),(x_2,0).则下列结论中一定成立的是

(A) $x_1^2+x_2^2=17$.　　(B) $x_1^2+x_2^2=8$.

(C) $x_1^2+x_2^2>8$.　　(D) $x_1^2+x_2^2<17$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1990年)

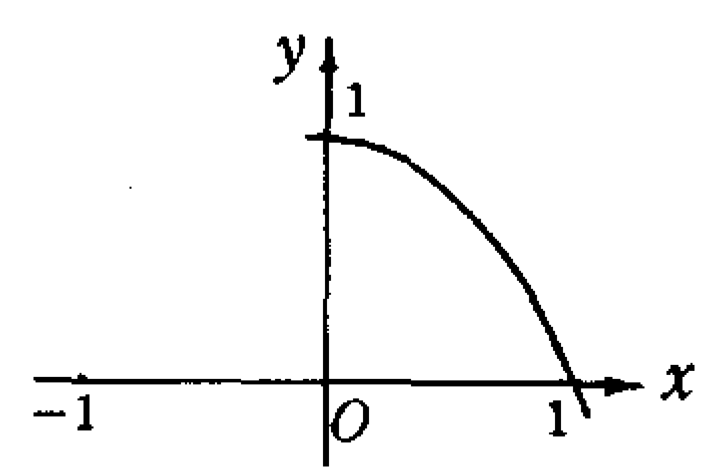
[解] 题设条件即方程 $x^2+kx+4=0$ 有两个不同的实根 x_1,x_2,知判别式 $\Delta=k^2-16>0$,或 $k^2>16$.

又由韦达定理有 $x_1+x_2=-k$, $x_1x_2=4$.

$\therefore\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k^2-8>16-8=8$.

故选(C).

5·18 右图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像的一部分,根据图像判断,下列答案正确的是



(A) $a-b+c=0$.

(B) $a-b+c>0$.

(C) $a-b+c<0$.

(D) $a-b+c$ 值的范围一般不能确定,要根据 a,b,c 的具体数值.

(中国福建省初中数学竞赛,1984年)

[解] 当 $x=0$ 时 $y=1$, 则 $c=1$.

又当 $x=1$ 时 $y=0$, 则 $a+b+c=0$.

且抛物线开口向下,知 $a<0$.

注意到当 $a=-1$, $b=0$ 时,有 $a-b+c=0$.

而当 $a=-2$, $b=1$ 时, 有 $a-b+c<0$.

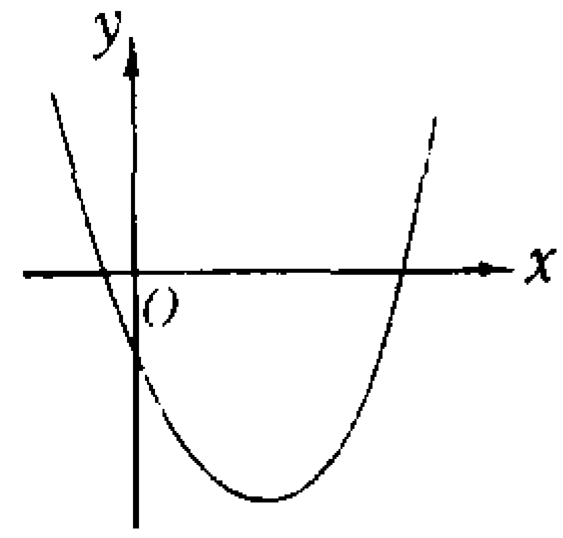
故选(D).

5·19 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如下右图,下面不等式结论正确的是

(A) $4ac-b^2>0$.　　(B) $abc>0$.

(C) $abc < 0$.　　　　(D) $a(b+c) > 0$.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1991年)



[解]　从题设图像首先有 $a > 0$,且二次三项式有两实根,则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.则否定(A).

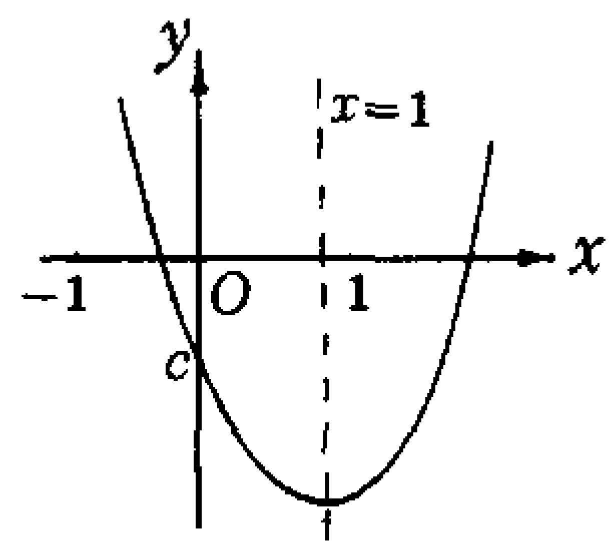
又知两根异号且正根绝对值大,则 $\frac{c}{a} < 0$, $\frac{b}{a} < 0$;因 $a > 0$,知 $b < 0$, $c < 0$.可否定(C),(D).

故选(B).

5·20　如图,直线 $x = 1$ 是二次函数

$$y = ax^2 + bx + c$$

图像的对称轴,则



(A) $a + b + c > 0$.　(B) $b > a + c$.

(C) $c > 2b$.　　　　(D) $abc < 0$.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1990年)

[解]　令 $x = 1$,则 $a + b + c < 0$,排除(A).

令 $x = -1$,则 $a + c > b$,排除(B).

又　$a > 0, c < 0(x = 0$ 时 $y = c)$,由 $-\frac{b}{2a} = 1$,有 $b < 0$,

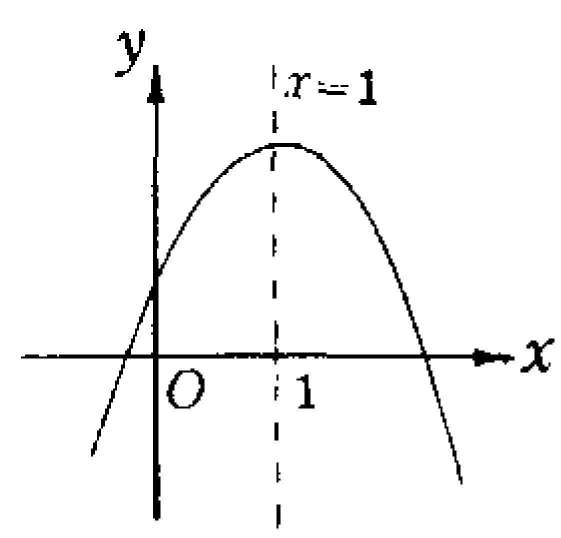
$\therefore$　$abc > 0$,排除(D).

故选(C).

5·21　如图,直线 $x = 1$ 是二次函数

$$y = ax^2 + bx + c$$

的图像的对称轴,则



(A) $a + b + c < 0$.　(B) $b < a + c$.

(C) $c < 2b$.　　　　(D) $abc > 0$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1989年)

[解]　从图像上可见:当 $x = 1$ 时,$y > 0$,又 $y_{x=1} = a + b + c$,则(A)不真;

当 $x = -1$ 时,　$y < 0$,　即

$y_{x=-1} = a - b + c < 0$,　或　$b > a + c$,可否(B).

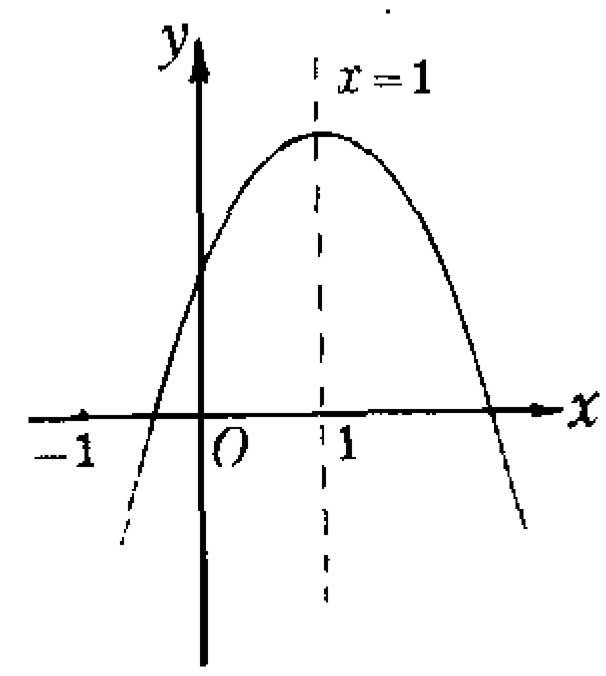
又 $a < 0$, $c = y_{x=0} > 0$,及对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 1 > 0$, 知 $b > 0$,

则　$abc < 0$.

知(D)不真.

故选(C).

5·22 如图 $x = 1$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴.则下列关系一定成立的是



(A) $abc > 0$.　　(B) $a + b + c < 0$.

(C) $b < a + c$.　　(D) $2c < 3b$.

(E) $c > 2b$.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1984年)

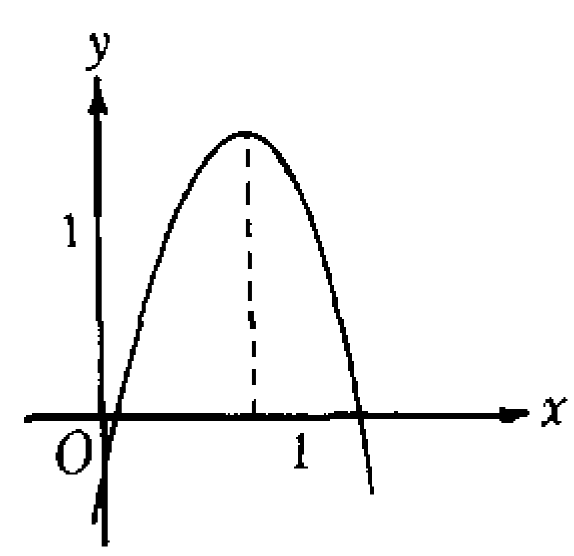
[**解**]　由题设图形则有

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1, & ① \\ y_{x=1} = a + b + c > 0, & ② \\ y_{x=-1} = a - b + c < 0. & ③ \end{cases}$$

由①得 $a = -\dfrac{1}{2}b$ 代入③有 $-\dfrac{b}{2} - b + c < 0$,　即　$3b > 2c$.

故选(D).

5·23　已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示,则下列6个代数式 $ab, ac, a + b + c, a - b + c, 2a + b, 2a - b$ 中,其值为正的式子个数为



(A) 2个.　　(B) 3个.

(C) 4个.　　(D) 多于4个.

(中国初中数学联赛,1989年)

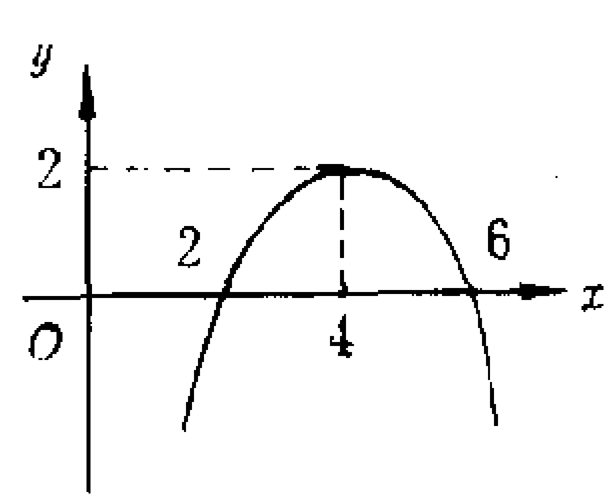
[**解**]　图像开口向下,则 $a < 0$;顶点横坐标 $0 < \dfrac{-b}{2a} < 1$,则 $b > 0, 2a + b < 0$.因而 $ab < 0$, $2a - b < 0$.

又当 $x = 0$ 时,$y = c < 0$,　因而 $ac > 0$.　$a - b + c < 0$.

当 $x = 1$ 时,$y = a + b + c > 0$.所以6个代数式中只有2个为正.

故选(A).

5·24　抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 以(4,2)为顶点.若(2,0)在抛物线上,则 abc 等于



(A) -12.　　(B) -6.　　(C) 0.

(D) 6.　　(E) 12.

(第37届美国高中数学考试,1986年)

[**解**]　依题设知抛物线过(2,0),(4,2),(6,

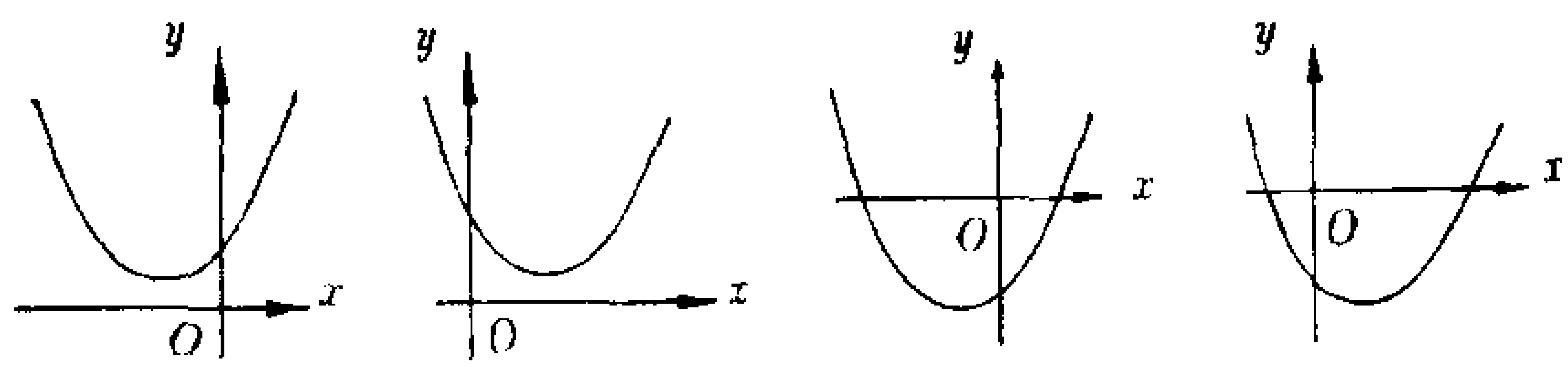
0) 点,则有

$$\begin{cases}16a+4b+c=2,\\4a+2b+c=0,\\36a+6b+c=0.\end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=4$, $c=-6$. 则 $abc=12$.

故选(E).

5·25　函数 $y=ax^2+bx+c(a>0,b<0,c<0)$ 的图像(示意图)为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

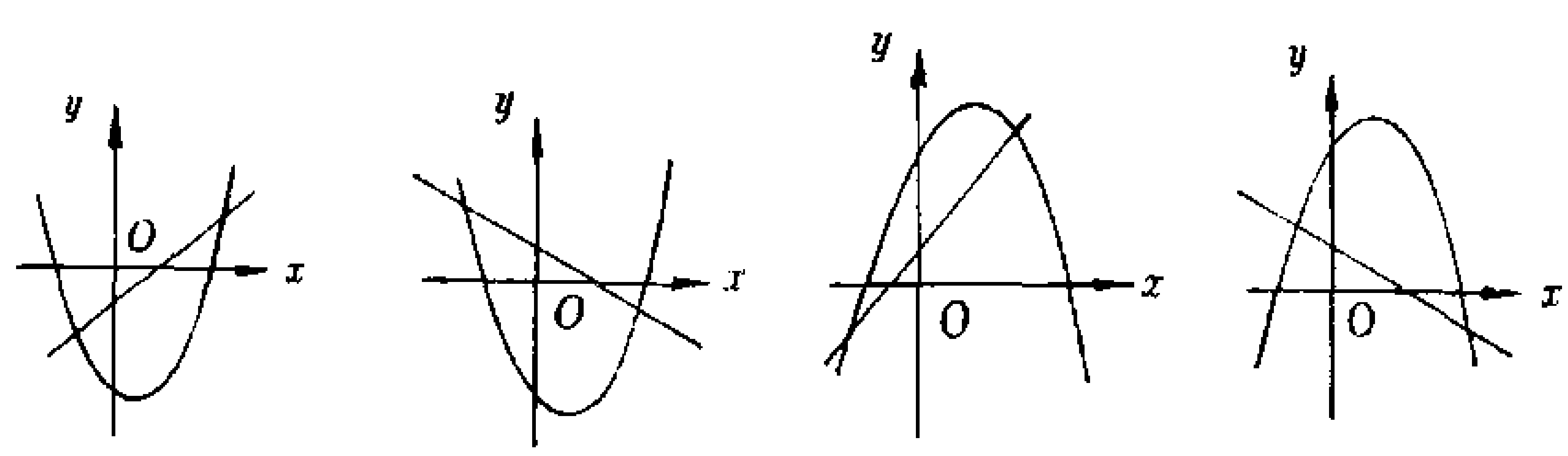
(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1984 年)

[解]　由题设知 $\Delta=b^2-4ac>0$,则方程有两不等实根,故可否(A),(B).

又抛物线对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$,则否(C).

故选(D).

5·26　适当选取 a,b 与c,方程 $ax+by+c=0$ 与方程 $y=ax^2+bx+c$ 的图像可以是



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1991 年)

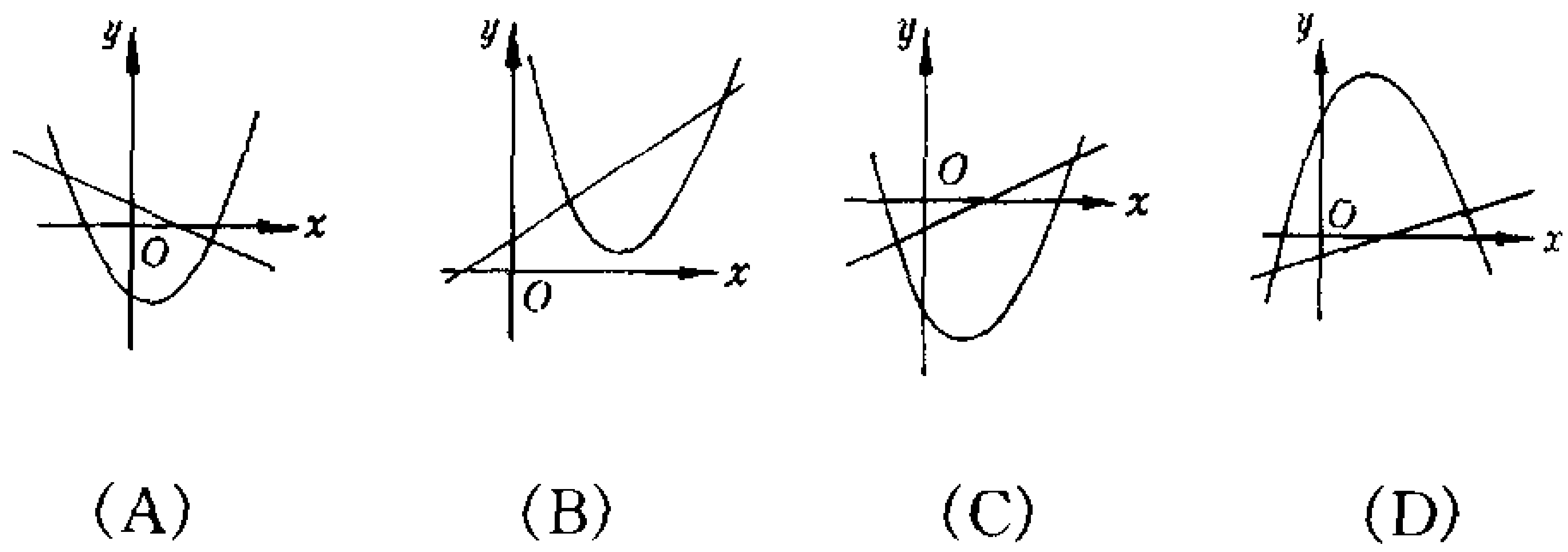
[解]　由(A)中抛物线形状可知 $a>0$, $-\dfrac{b}{2a}>0$, 则 $b<0$.

又　$x=0$ 时 $y=c<0$,

$\therefore$　$a>0$,　且　$b<0$,　$c<0$.

而直线 $ax+by+c=0$ 在上述条件下恰好为(A)图中形状.
仿上不难分析出(B),(C),(D)均不妥.
故选(A).

5·27 已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c$,那么它们的图像是



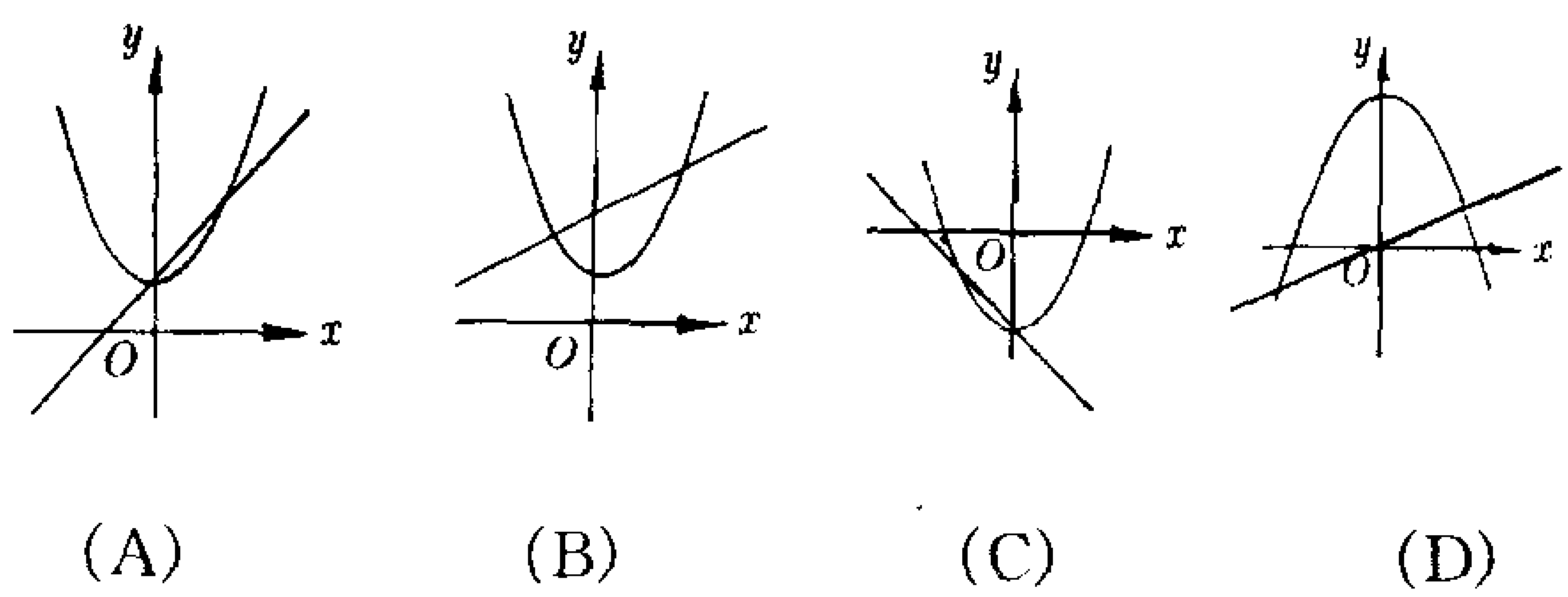
(中国福建省初中数学竞赛,1983 年)

[解] $a>0$,抛物线开口向上;直线 $y=ax+b$ 的斜率为正,则可否(A).类似地可否(D).

又对于(B),直线截距 $b>0$,抛物线开口朝上知 $a>0$,这样其对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<0$,则(B)不真.

故选(C).

5·28 下面四图中,直线方程为 $y=ax+b$,抛物线方程是 $y=ax^2+b$.其中仅有一个图可能正确,正确的图是

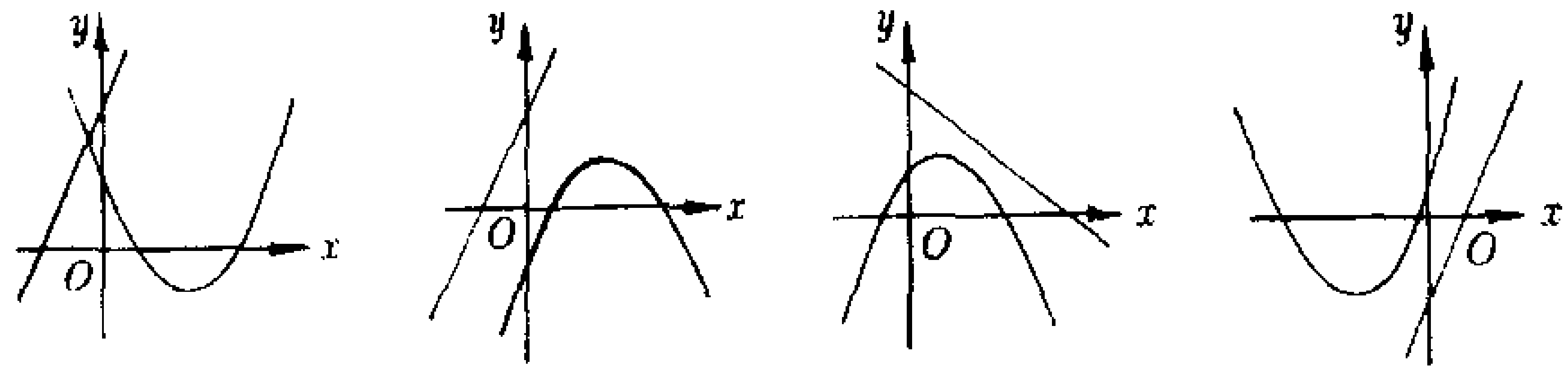


(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由题设知,直线与抛物线皆过$(0,b)$点,则可否(B),(D).
若抛物线开口朝上,则 $a>0$,则直线斜率亦大于 0,则否(C).
故选(A).

5·29 设 a,m,n 均为常数且 $a\neq0$,则二次函数 $y=a(x+m)(x+n)$ 与一次函数 $y=ax+mn$ 在同一坐标系中的图像位置关系

只可能是下面四个图中的



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

（中国河北省初中数学竞赛,1993 年）

[解]　若 $a>0$,从抛物线开口方向和直线斜率上看可以否(B).

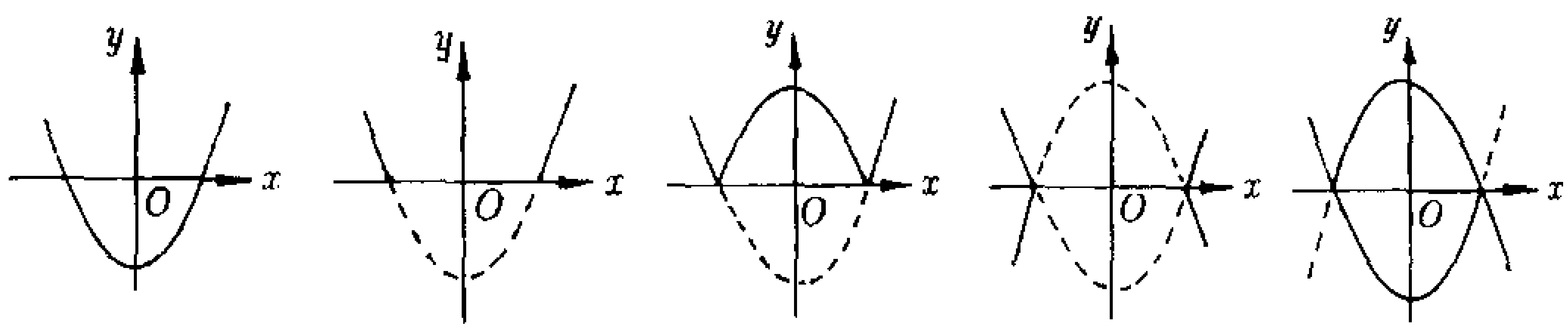
从(A)看,二次函数两根皆正,即 $m<0$,　$n<0$.

则　$mn>0$,即　$y=ax+mn$ 的截距在 y 轴正向.

从(D)看,二次函数两根皆负,仍有 $mn>0$.从直线截距上看可否(D).同理可否(C).

故选(A).

5·30　函数 $|y|=x^2-1$ 的图像大致形状是下列图像中的实线部分的是



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)　　　　(E)

（中国吉林省八市初中数学竞赛,1986 年）

[解]　首先由 $|y|=x^2-1$ 及 $|y|\geqslant 0$,知函数无 $x^2-1<0$ 的图像,可否(A),(C),(E).

又　$|y|=x^2-1$,　可化为　$\pm y=x^2-1(x^2-1\geqslant 0)$,

故选(D).

5·31　函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图像大致形状是

(A) 图 ① 中的实线部分.　　(B) 图 ② 中的实线部分.

(C) 图 ③ 中的实线部分.　　(D) 图 ④ 中的实线部分.

（中国初中数学联赛,1985 年）

[解 1]　因 $x^2-x=0$ 的根为 0 及 1,

故
$$y=1-|x-x^2|=1-|x^2-x|$$

$$= \begin{cases} 1 + x^2 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1 - x^2 + x, & x < 0, \text{或} x > 1. \end{cases}$$

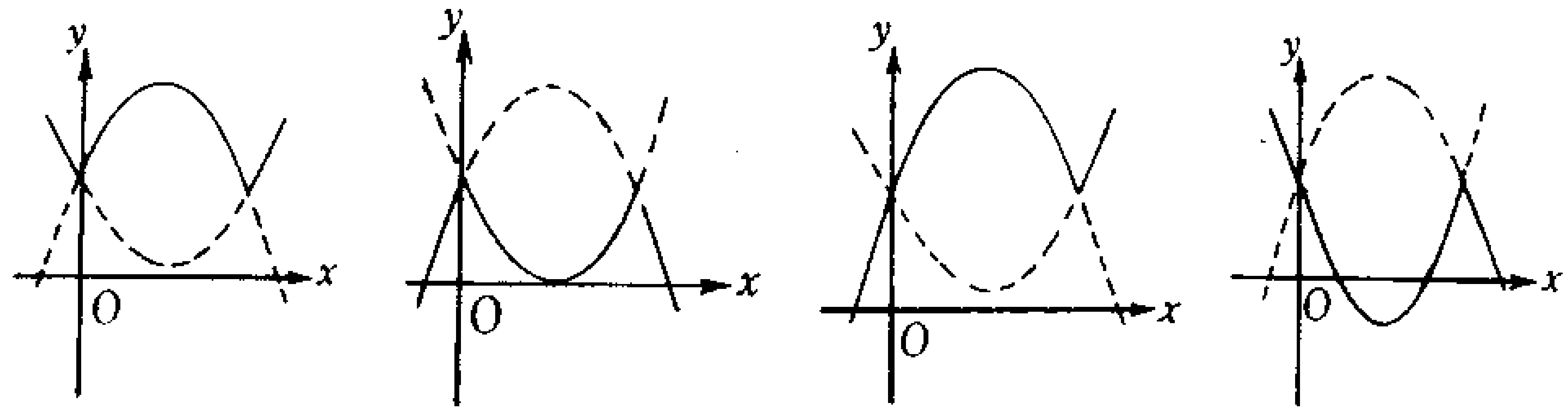


图 ①　　图 ②　　图 ③　　图 ④

由二次函数的图像可知,函数 $y = 1 - |x - x^2|$ 的图像的大致形状是图 ④ 中的实线部分.

故选(D).

[解 2]　由设 $y = 1 - |x - x^2| \leqslant 1$,知其图像在 $y = 1$ 下方,则可否(A),(B),(C).

故选(D).

5·32　$f(x)$ 是定义在全体实数上的偶函数,它的图像关于 $x = 2$ 为轴对称. 已知当 $x \in (-2,2]$ 时 $f(x)$ 的表达式为 $-x^2 + 1$. 则当 $x \in (-6, -2)$ 时,$f(x)$ 的表达式是

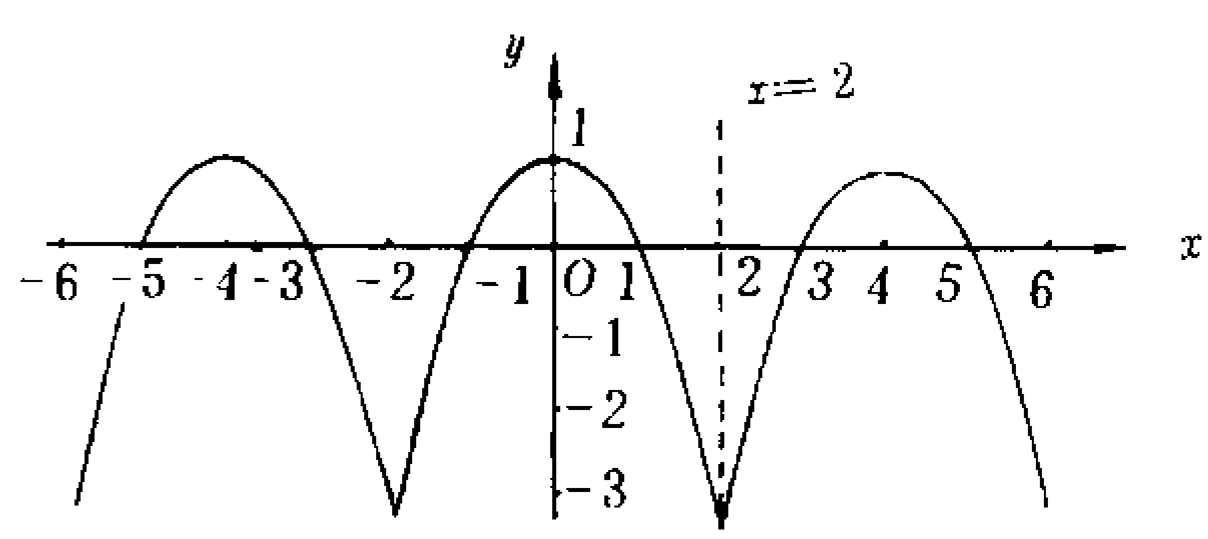
(A) $-x^2 + 1$.　　(B) $-(x-2)^2 + 1$.

(C) $-(x+2)^2 + 1$.　　(D) $-(x+4)^2 + 1$.

(中国北京市高中数学竞赛,1990 年)

[解]　先在$(-2,2]$ 上作出 $y = -x^2 + 1$ 的图像. 由设 $y = f(x)$ 图像关于 $x = 2$ 对称,故可作出$[2,6)$ 上的函数图像,其方程为

$$y = -(x-4)^2 + 1,$$



又 $y = f(x)$ 是偶函数,即其图像关于 y 轴对称(如图),则在$(-6, -2)$ 上 $f(x)$ 的表达式为

$$-(x+4)^2 + 1.$$

故选(D).

第五章 初等代数函数

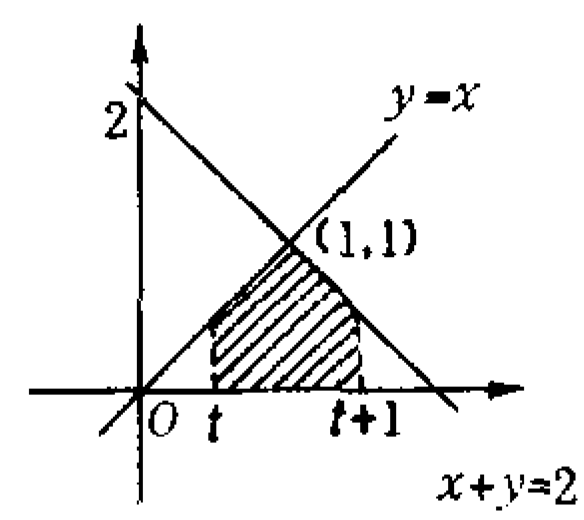
5·33　在坐标平面上有两个区域 M 和 N. M 是由 $y\geqslant 0, y\leqslant x$ 和 $y\leqslant 2-x$ 这三个不等式决定的. N 是随 t 变化的区域,它由不等式 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 所确定,t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 1$. 设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$,则 $f(t)$ 为

(A) $-t^2+t+\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-2t^2+2t$.

(C) $1-\dfrac{1}{2}t^2$.　　(D) $\dfrac{1}{2}(t-2)^2$.

（中国高中数学联赛,1981 年）

[解]　依题意,M 和 N 的公共部分是右图中所示阴影部分,它的面积为



$$f(t)=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}(1-t)^2$$
$$=-t^2+t+\frac{1}{2}\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

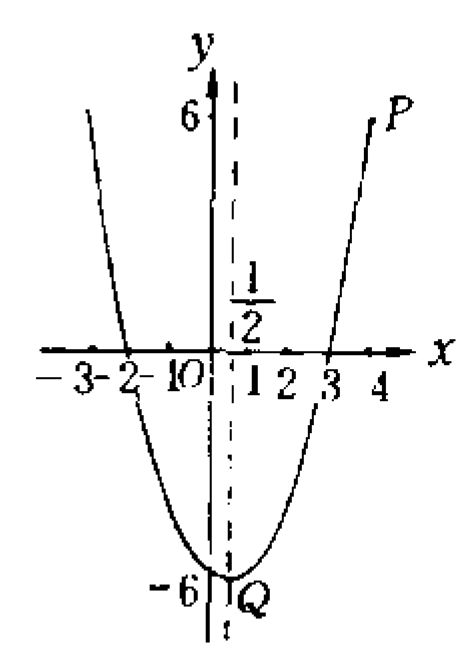
故选(A).

5·34　一质点放在抛物线 $y=x^2-x-6$ 上的一点 P(P 的纵坐标是 6),若质点可以自由沿抛物线滚落到点 Q(Q 的纵坐标是 -6),那么此质点水平移动的最近距离是

(A) 5.　(B) 4.　(C) 3.　(D) 2.　(E) 1.

（第 9 届美国高中数学考试,1958 年）

[解]　由设点 P 的坐标为(4,6) 或(−3,6);而点 Q 的坐标为(0, −6) 或(1, −6).



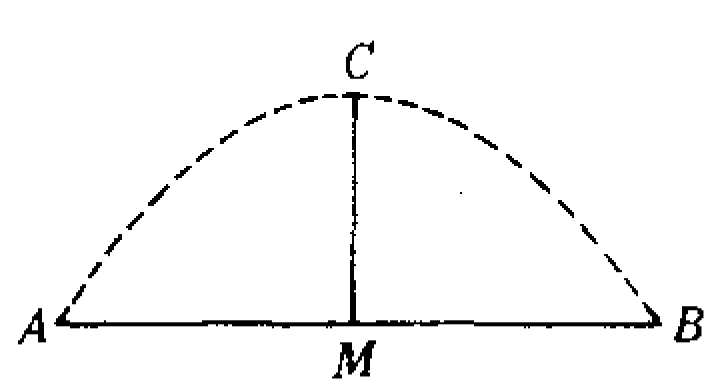
由对称性且依题意,质点从(4,6) 滚至(1, −6) 或由(−3,6) 滚至(0, −6).

则质点移动水平距离为

$$4-1=3\quad\text{或}\quad 0-(-3)=3.$$

故选(C).

5·35　一抛物线最大高度为 16 英寸,跨度为 40 英寸,在离中心 M5 英寸的地方,弧的高度(以英寸为单位)是



(A) 1.　(B) 15.　(C) $15\dfrac{1}{2}$.

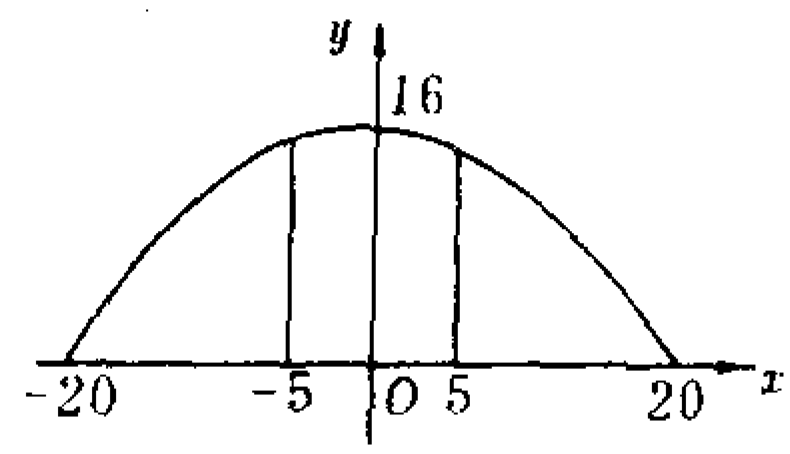
(D) $15\frac{1}{3}$.　(E) $15\frac{3}{4}$.

（第 20 届美国高中数学考试,1969 年）

[解] 建立坐标系,使抛物线顶点位于 y 轴,且沿跨度建立横轴,中心 M 为坐标原点.

因抛物线顶点为(0,16),故其方程为 $y = ax^2 + 16$.

又其过(20,0)点,代入上式可求得



$$a = -\frac{1}{25}.$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{25}x^2 + 16.$$

当 $x = \pm 5$ 时，得 $y = 15$.

故选(B).

5·36　如果 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 以及 $p(x) = x^2 + 5x + 6$,则

(A) $p(x)$ 能取任意实数值.　(B) $20 < p(x) < 30$.

(C) $0 < p(x) < 20$.　(D) $p(x) < 0$.

(E) $p(x) > 30$.

（第 18 届美国高中数学考试,1967 年）

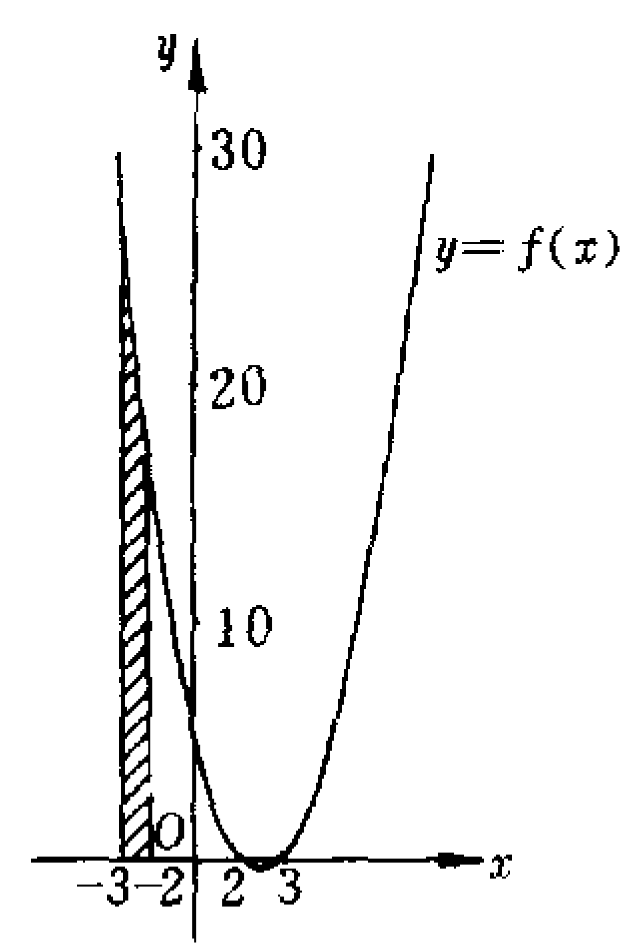
[解] 设 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$= (x - 2)(x - 3)$.

由　$f(x) < 0$，得　$2 < x < 3$.

又　$p(x) = f(-x)$,

故　$p(x)$ 在 $2 < x < 3$ 变化相当于 $f(x)$ 在 $-3 < x < -2$ 之间变化.



$f(-3) = 30$,　$f(-2) = 20$.

则　$20 < p(x) < 30$,

故选(B).

5·37　若二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的图像的顶点在第一象限,且过点(0,1)和(-1,0),则 $S = a + b + c$ 的值的变化范围是

(A)$0 < S < 1$.　(B)$0 < S < 2$.

(C)$1 < S < 2$.　(D)$-1 < S < 1$.

（中国陕西省初中数学竞赛,1997 年）

[解 1] 分别令 $x = 0$, $y = 1$ 和 $x = -1$, $y = 0$,

求得 $c = 1, \ a = b - 1.$

$\therefore \quad S = a + b + c = 2b.$

由题设知 $-\dfrac{b}{2a} > 0$，且 $a < 0$，可推知 $2b > 0$.

又由 $b = a + 1$ 及 $a < 0$ 可推知 $2b < 2$.

$\therefore \quad 0 < S < 2.$

故选(B).

[解 2] 对照选择支(A)、(B)、(C),应排除(A)、(C).

再令 $S = 0$,即 $a + b + c = 0$,

而当 $x = 0$ 时，$c = 1$，$a + b = -1$;

当 $x = -1$ 时，$b = a + 1$.

从而 $b = 0$，与 $-\dfrac{b}{2a} > 0$ 矛盾.故又可排除(D).

故选(B).

[解 3] 排除(A)、(C) 如上.

又若 $a + b + c = 0$，则当 $x = -1$，$x = 1$ 时,y 值都为 0,可见 y 轴是抛物线的对称轴,但这与抛物线的顶点在第一象限矛盾,故可排除(D).

故选(B).

第六章　初等超越函数(一)

第1节　指数与指数函数

6·1　假定有两个命题：

命题甲：a 是大于 0 的实数.　命题乙：$a > b$ 且 $a^{-1} > b^{-1}$. 那么

(A) 甲是乙的充分而不必要条件.

(B) 甲是乙的必要而不充分条件.

(C) 甲是乙的充分必要条件.

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[解]　设 $a > b$，$a^{-1} > b^{-1}$,则必 $a > 0$(事实上,若 $a < 0$,则由 $a > b$ 有 $b < 0$,且 $a^{-1} < b^{-1}$ 矛盾),即甲是乙的必要条件.

又取 $a = 1$，$b = 0.5$，这时 $a > b$，但 $a^{-1} < b^{-1}$,即甲不是乙的充分条件.

故选(B).

6·2　下面是一位同学做的四个题：

① $6a^{\frac{2}{3}} \times 7a^{\frac{1}{2}} = 42a^{1\frac{1}{6}}$;

② $(-ax)^6 \div (-ax^3) = a^5x^3$;

③ $(-1989^0)^{1989} = -1$;

④ $[(-3)^m]^2 = 3^{m^2}$.

这位同学做对的题共有

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

(中国四川省初中数学竞赛,1989 年)

[解] ①,③ 结论正确;

对于 ②,由 $\frac{a^6x^6}{-ax^3}=-a^5x^3$,知 ② 错;

对于 ④,由 $[(-3)^m]^2=(-3)^{2m}=3^{2m}=(3^m)^2$,知 ④ 错.

故选(B).

6·3　若 $a=(-3)^{-4}$,　$b=-3^4$,　$c=-3^{-4}$,则下列结论中错误的是

(A) $\log_3 a=-4$.　　(B) $\lg bc=0$.

(C) a,c 互为相反数.　　(D) a,b 互为倒数.

(中国四川省初中数学联赛,1989 年)

[解]　由 $a=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{3^4}>0$,

而
$$c=-3^{-4}=-\frac{1}{3^4}<0,$$

则 a,c 互为相反数,且 $\log_3 a=-4$, $\lg bc=\lg 1=0$.

故选(D).

6·4　$(-1)^{(-1)^{(-1)}}$ 等于

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) ±1.　　(D) 没意义.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解]　∵
$$(-1)^{(-1)}=\frac{1}{-1}=-1,$$

∴
$$(-1)^{(-1)^{(-1)}}=(-1)^{(-1)}=-1.$$

故选(B).

6·5　$(-1)^{2^{3^5}}+(-1)^{5^{3^2}}$ 等于

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) 0.　　(D) -2.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　因 $m=2^{3^5}$ 为偶数,　$n=5^{3^2}$ 为奇数,则
$$(-1)^m+(-1)^n=0.$$

故选(C).

6·6　用 1,9,8,5 四个数码构成形如 $a^{b^{c^{d}}}$ 的数,若欲使其值最大,则 c 的值为

(A) 1.　　(B) 9.　　(C) 8.　　(D) 5.

（中国上海市高中数学竞赛,1985 年）

［解］　容易推算 $5^8 > 8^5, 8^9 > 9^8$ 等.这样 $5^{8^{9^{1}}}$ 是值最大的数,即

$$c = 9.$$

故选(B).

6·7　$4^{16} \cdot 5^{25}$ 这个数的位数(按十进制计)是

(A) 31.　　(B) 30.　　(C) 29.　　(D) 28.　　(E) 27.

（第 35 届美国高中数学考试,1984 年）

［解］　将 $4^{16}5^{25}$ 用科学记数法(指数记数)来表示,有

$$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot 10^{25} = 128 \cdot 10^{25}.$$

这就表示 128 后面有 25 个零,因此一共有 28 位数.

故选(D).

6·8　设 $a = 19^{91}$,　$b = (999991)^{19}$,则 $a - b$ 是

(A) 不小于 1 的数.　　(B) 绝对值大于 0 小于 1 的数.

(C) 不大于 -1 的数.　　(D) 0.

（中国北京市初中数学竞赛,1991 年）

［解 1］　由 $b = (999991)^{19} < (19^4 \cdot 8)^{19} = 19^{76} \cdot 2^{57}$,

又　$a = 19^{91} = 19^{76} \cdot 19^{15}$,

则　$a - b > 19^{76}(19^{15} - 2^{57}) > 19^{76}(16^{15} - 2^{57})$

$= 19^{76}(2^{60} - 2^{57}) = 19^{76} \cdot 2^{57} \cdot (2^3 - 1)$

$= 19^{76} \cdot 2^{57} \cdot 7.$

故选(A).

［解 2］　$b = (999991)^{19} < (1042568)^{19} = (19^4 \cdot 8)^{19} = 19^{76} \cdot 2^{57}$,

$a = 19^{91} = 19^{76} \cdot 19^{15} > 19^{76} \cdot 18^{15} = 19^{76} \cdot 2^{15} \cdot 9^{15}$

$> 19^{76} \cdot 2^{15} \cdot 8^{15} = 19^{76} \cdot 2^{60}$,

$\therefore$　$a > b$,又 a, b 为整数,　则　$|a - b| \geqslant 1$.

故选(A).

6·9　一个计算器有一个平方键(即按此键可使输入的数变成它的平方),还有一个倒数键(即按此键可使输入的数变成它的倒数).如

果一个人开始先输入一个不等于零的数 x,然后分别交替地按平方键和倒数键各 n 次.假设此计算器是完全准确的,那么 y 应为

(A) $x^{(-2)^n}$.　(B) x^{2n}.　(C) x^{-2n}.

(D) x^{1-2n}.　(E) $x^{[(-1)^n 2n]}$.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解]　将一个数平方,可以看做是取它的 2 次幂;而求一个数的倒数,则可以看做是取它的 -1 次幂,因此无论按计算器两个键中的哪一个,都可以看做取输入数的某次幂.

每按一次倒数键就改变一次 x 指数的符号;

每按一次平方键,则是用 2 去乘 x 的指数.

这样合起来,每按一次平方键和倒数键就相当于用 -2 去乘 x 的指数.

因为 x 最初的指数是 1,所以它的最后指数是 $(-2)^n$.

故选 (A).

6·10　公式 $N = 8 \cdot 10^8 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$ 表示某团体中收入超过 x 元的人数,收入最高的 800 人的最低收入至少是

(A) 10^4.　(B) 10^6.　(C) 10^8.　(D) 10^{12}.　(E) 10^{16}.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解]　由 $800 = 8 \cdot 10^8 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$,　得 $x = 10^4$.

故选 (A).

6·11　n 为正整数,若 $a^{2n} = 5$,　则 $2a^{6n} - 4$ 的值为:

(A) 26.　(B) 246.　(C) 242.　(D) $12\sqrt{5} - 4$.

(中国北京市初中数学竞赛,1982 年)

[解]　$2a^{6n} - 4 = 2a^{2n \cdot 3} - 4 = 2(a^{2n})^3 - 4 = 2 \cdot 5^3 - 4 = 246$.

故选 (B).

6·12　若 $10^{2x} = 25$,则 10^{1-x} 等于

(A) 5.　(B) 2.　(C) $\frac{1}{5}$.　(D) $\frac{1}{50}$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1988 年)

[解]　由 $10^{2x} = 25$,可得 $10^x = 5$.

于是有 $10^{(1-x)}=10\cdot 10^{-x}=10\cdot(10^x)^{-1}=10\cdot 5^{-1}=2$.

故选(B).

6·13 设 $x+\sqrt{x^2-1}=a^{\frac{m-n}{2mn}}$.则 $x-\sqrt{x^2-1}$ 等于

(A) $a^{\frac{2mn}{m-n}}$.　(B) $a^{\frac{2mn}{n-m}}$.　(C) $a^{\frac{n-m}{2mn}}$.　(D) $a^{\frac{n+m}{2mn}}$.

(浙江省杭州市初中数学竞赛,1985 年;
江苏省初中数学竞赛,1990 年)

[解] 注意到$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=1$,则

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=(x+\sqrt{x^2-1})^{-1}$$
$$=\left(a^{\frac{m-n}{2mn}}\right)^{-1}=a^{\frac{n-m}{2mn}}.$$

故选(C).

6·14 设 $x=1+2^p$, $y=1+2^{-p}$.那么 y 等于

(A) $\frac{x+1}{x-1}$.　(B) $\frac{x+2}{x-1}$.　(C) $\frac{x}{x-1}$.

(D) $2-x$.　(E) $\frac{x-1}{x}$.

(中国北京市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 由题设有 $x-1=2^p$, $y-1=2^{-p}$,

故　$(x-1)(y-1)=2^p\cdot 2^{-p}=1$.

则　$y-1=\frac{1}{x-1}$,　即　$y=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1}$.

故选(C).

6·15 若 $a^x=c^q=b$ 且 $c^y=a^z=d$,则

(A) $xy=qz$.　(B) $\frac{x}{y}=\frac{q}{z}$.　(C) $x+y=q+z$.

(D) $x-y=q-z$.　(E) $x^y=q^z$.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 由 $c^y=a^z$, 有 $c=a^{\frac{z}{y}}$.

故 $c^q=a^{\frac{z}{y}\cdot q}=a^x$, 有 $x=\frac{zq}{y}$, 即 $xy=zq$.

故选(A).

6·16 设 a,b 是正数，且满足 $a^b=b^a$ 及 $b=9a$，则 a 的值是

(A) 9. (B) $\frac{1}{9}$. (C) $\sqrt[9]{9}$. (D) $\sqrt[3]{9}$. (E) $\sqrt[4]{3}$.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

［解 1］ 由题设有 $a^{9a}=(9a)^a$， 则 $a^{9a}=9^a\cdot a^a$，

即 $$a^{8a}=9^a,\quad 或\quad a^{8a}=(9^{\frac{1}{8}})^{8a}.$$

则 $a=9^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{9}=\sqrt[4]{3}$.

故选(E).

［解 2］ 由设有 $a^{9a}=(9a)^a$，两边取对数有

$$9a\lg a=a(\lg 9+\lg a),$$

即 $8\lg a=\lg 9$， 或 $\lg a=\lg 9^{\frac{1}{8}}$， 则

$$a=9^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}.$$

故选(E).

6·17 将 a^b 的底数及指数均改为原来的 3 倍所得的数记为 r，其中 $a,b>0$，如果 r 等于a^b 和x^b 的乘积，其中 $x>0$，那么 x 等于

(A) 3. (B) $3a^2$. (C) $27a^2$. (D) $2a^{3b}$. (E) $3a^{2b}$.

（第 44 届美国高中数学考试，1993 年）

［解］ 因为 $r=(3a)^{3b}=[(3a)^3]^b=(27a^3)^b$，

又 $r=a^bx^b=(ax)^b$，

有 $(27a^3)^b=(ax)^b$， 即 $27a^3=ax$， 则 $x=27a^2$.

故选(C).

6·18 如果 $60^a=3$ $60^b=5$，那么 $12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$ 是

(A) $\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\sqrt{5}$. (D) 3. (E) $\sqrt{12}$.

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

［解］ 由 $12=\frac{60}{5}=\frac{60}{60^b}=60^{1-b}$，可有

$$12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=[60^{1-b}]^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}=60^{\frac{1-a-b}{2}}=\sqrt{\frac{60}{60^a60^b}}=\sqrt{\frac{60}{3\cdot 5}}=2.$$

故选(B).

6·19 若 $a>1$，且 b 是正有理数，又 $a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$，则

$a^b - a^{-b}$ 等于

(A) $\sqrt{6}$.　　(B) 2 或 -2.　　(C) -2.　　(D) 2.

（中国天津市初中数学竞赛，1983 年）

[解] 考虑 $(a^b - a^{-b})^2 = (a^b + a^{-b})^2 - 4$，即

$$(a^b - a^{-b})^2 = (2\sqrt{2})^2 - 4 = 4,$$

又 $a > 1$，$b > 0$，则 $a^b > a^{-b}$，$\therefore$ $a^b - a^{-b} = 2$.
故选(*D*).

6·20 已知 $a > 1$，b 为正有理数，且 $a^b + a^{-b} = 2\sqrt{3}$，那么 $a^b - a^{-b}$ 的值为

(A) $-2\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{2}$.　　(C) $-2\sqrt{2}$.　　(D) $\pm 2\sqrt{2}$.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1985 年）

[解] 由 $\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = (t + t^{-1})^2 - 4$，

又 $\because$ $a > 1$，b 为正有理数，可知

$$a^b - a^{-b} = \sqrt{(a^b + a^{-b})^2 - 4} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

故选(*B*).

6·21 已知 $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ 和 $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ ($t > 0$，$t \neq 1$)，则 x 与 y 的关系是

(A) $y^x = x^{\frac{1}{y}}$.　　(B) $y^{\frac{1}{x}} = x^y$.　　(C) $y^x = x^y$.

(D) $x^x = y^y$.　　(E) 非上述答案.

（第 20 届美国高中数学考试，1969 年）

[解 1] 依设且注意到

$$\frac{y}{x} = \frac{t^{\frac{t}{t-1}}}{t^{\frac{1}{t-1}}} = t^{\frac{t}{t-1} - \frac{1}{t-1}} = t,$$

另一方面 $y = t^{\frac{t}{t-1}} = (t^{\frac{1}{t-1}})^t = x^t$,

因而 $y = x^t = x^{\frac{y}{x}}$，即 $y^x = x^y$.
故选(*C*).

[解 2] 由上知 $y = tx$，则 $\frac{1}{t-1}y = \frac{t}{t-1}x$，即

$$(\log_t x)y = (\log_t y)x, \quad 或 \quad \log_t x^y = \log_t y^x,$$

$\therefore \quad x^y = y^x \quad (\because \quad t > 0, \quad t \neq 1).$

故选(C).

6·22 已知 $x = \frac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}} - 1991^{-\frac{1}{n}})$ （n 是自然数）. 那么 $(x - \sqrt{1 + x^2})^n$ 的值是

(A) 1991^{-1}. (B) -1991^{-1}.

(C) $(-1)^n 1991$. (D) $(-1)^n 1991^{-1}$.

（中国初中数学联赛，1991 年）

[解] 因为 $1 + x^2 = 1 + \frac{1}{4}(1991^{\frac{2}{n}} - 2 + 1991^{-\frac{2}{n}})$

$$= \frac{1}{4}(1991^{\frac{2}{n}} + 2 + 1991^{-\frac{2}{n}})$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}} + 1991^{-\frac{1}{n}})\right]^2.$$

$\therefore$ 原式 $= \left[\frac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}} - 1991^{-\frac{1}{n}}) - \frac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}} + 1991^{-\frac{1}{n}})\right]^n$

$$= (-1991^{-\frac{1}{n}})^n = (-1)^n 1991^{-1}.$$

故选(D).

第 2 节　对数与对数函数

6·23 已知函数 $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\lg(|x| + x)}$，则它的定义域是

(A) $[-2,0) \cup (0,2]$. (B) $\left(0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},2\right]$.

(C) $\left[-2,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},2\right]$. (D) $(0,2]$.

（中国北京市高中数学竞赛，1990 年）

[解] 要分子有意义，则 $4 - x^2 \geqslant 0$，则 $|x| \leqslant 2$，

要分母有意义，则 $\lg(|x| + x) \neq 0$，且 $|x| + x > 0$，

即 $x > 0$，且 $x \neq \frac{1}{2}$.

综上，函数定义域为 $\left(0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},2\right]$.

故选(B).

6·24 $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$ 的值是属于区间

(A) $(-2,-1)$.　　(B) $(1,2)$.

(C) $(-3,-2)$.　　(D) $(2,3)$.

（中国高中数学联赛,1983 年）

[解]　$\because$　$x=\dfrac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{3}}+\dfrac{\lg\frac{1}{5}}{\lg\frac{1}{3}}=\dfrac{\lg 10}{\lg 3}$,

而　$\dfrac{\lg 9}{\lg 3}<\dfrac{\lg 10}{\lg 3}<\dfrac{\lg 27}{\lg 3}$,　即　$2<x<3$,

$\therefore$　$x\in(2,3)$

故选(D).

6·25　$x,y>0$,　$x,y\neq 1$,　$\log_x y+\log_y x$ 的取值范围(区间形式)是

(A) $(-\infty,+\infty)$.

(B) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(C) $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$.

(D) $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　分下面两种情况考虑:

当 $x>1$,　$y>1$ 或 $0<x<1$,　$0<y<1$ 时,　$\log_x y>0$,　$\log_y x>0$,

这样　$\log_x y+\log_y x\geqslant 2\sqrt{\log_x y\cdot\log_y x}=2$;

当 $0<x<1$,　$y>1$ 或 $x>1, 0<y<1$ 时,

$$\log_x y<0,\quad \log_y x<0,$$

这时 $-(\log_x y+\log_y x)\geqslant 2$,　即　$\log_x y+\log_y x\leqslant -2$.

综上　$\log_x y+\log_y x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

故选(B).

6·26　给出五个命题:

(1) 若 $a,b,a-b$ 都是无理数,则 $a+b$ 也是无理数.

(2) 若 k 为整数,则 2^k 也是整数.

(3) 若 a,b 都是有理数,则 a^b 也是有理数.

(4) 对于实数 x、y,若 $\lg(xy)$ 有意义,则有 $\lg(xy) = \lg x + \lg y$.

(5) 若 $a > b > 0$,则 $a^2 > b^2$.

上述命题中是正确的命题个数是

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛,1988 年)

[解] 若 a,b 是两个互为相反的无理数,则(1) 不成立.

若 $k < 0$,则(2) 不成立.

若 $a \neq 1, a \neq 0$; b 为不等于 0,且大于 -1 而小于 1 的有理数,如 $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ 时则(3) 不成立.

若 $x < 0$, $y < 0$,则(4) 不成立.

根据选择的惟一性,(5) 是正确的.

故选(A).

6·27 设有一个正数 x 恰好满足下面四个条件中的三个

(甲) $|x - 2.5| < 1.5$;

(乙) $\sqrt{x^2 + x + 1}$ 不是整数;

(丙) x 是整数;

(丁) $\log_x 10 > 2$.

那么 x 不满足的条件是

(A) 甲. (B) 乙. (C) 丙. (D) 丁. (E) 不能确定.

(中国北京市初中数学竞赛,1983 年)

[解] (甲) 条件等价于 $1 < x < 4$.

(乙) 条件对任意正整数 x 均成立.

(丁) 条件等价于 $0 < x < \sqrt{10} (x \neq 1)$.

这样,若正数 x 满足(丙),则 x 为正整数.当 $x = 2$ 或 3 时该数不但满足(丙),同时也满足(甲),(乙),(丁).这与题设 x 只满足四个条件中的三个相抵.

因此 x 必不满足(丙).

故选(C).

6·28 x 为任意实数,下列能成立的等式是

(A) $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x - 1}$.

(B) $10^{\lg x} = x$.

(C) $x^0 = 1$.

(D) $\sqrt[2n+1]{x} = -\sqrt[2n+1]{-x}$($n$ 为自然数).

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1985 年)

[解] 若 $x < 1$ 时,则(A) 不成立;

若 $x < 0$ 时,则(B) 不成立;若 $x = 0$ 时,则(C) 不成立;

而 x 取任意实数时,(D) 成立.

故选(D).

6·29 下列四对函数中,图像形状相同的一对是

(A) $y = \log_3 x^2$ 和 $y = 2\log_3 x$.

(B) $y = x^2$ 和 $y = 10^{\lg x^2}$.

(C) $y = \dfrac{2}{x}$ 和 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

(D) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ 和 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 由 $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$,其图像可由 $y = \dfrac{2}{x}$ 右移一单位,再上移一单位得到,则它们的图像形状相同.

故选(C).

6·30 若 $\lg m = b - \lg n$,则 m 等于

(A) $\dfrac{b}{n}$.　(B) bn.　(C) $10^b n$.　(D) 5.　(E) $\dfrac{10^b}{n}$.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解] 注意到 $\lg m = b - \lg n = \lg 10^b - \lg n = \lg \dfrac{10^b}{n}$,

则
$$m = \frac{10^b}{n}.$$

故选(E).

6·31 若 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, 则 $\log_5 12$ 等于

(A) $\dfrac{a+b}{1+a}$.　(B) $\dfrac{2a+b}{1+a}$.　(C) $\dfrac{a+2b}{1+a}$.

(D) $\dfrac{2a+b}{1-a}$.　(E) $\dfrac{a+2b}{1-a}$.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解] 由换底公式有

$$\log_5 12 = \frac{\lg 12}{\lg 5} = \frac{\lg 3 + 2\lg 2}{\lg 10 - \lg 2} = \frac{2a+b}{1-a}.$$

故选(D).

6·32 若 $a = \log_8 225$,且 $b = \log_2 15$,则用 b 表示 a 等于

(A) $\frac{b}{2}$. (B) $\frac{2b}{3}$. (C) b. (D) $\frac{3b}{2}$. (E) $2b$.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 由设有 $8^a = 225$, $2^b = 15$.

即 $2^{3a} = 15^2$, $2^{2b} = 15^2$, 从而 $3a = 2b$, 或 $a = \frac{2}{3}b$.

故选(B).

6·33 若 $\log_8 3 = p$,$\log_3 5 = q$,那么用 p 和 q 表示 $\lg 5$ 等于

(A) pq. (B) $\frac{3p+q}{5}$. (C) $\frac{1+3pq}{p+q}$.

(D) $\frac{3pq}{1+3pq}$. (E) p^2+q^2.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 由题设我们有 $3 = 8^p = 2^{3p}$, $5 = 3^q$.

所以 $$5 = (2^{3p})^q = 2^{3pq}.$$

因此 $\lg 5 = \lg 2^{3pq} = 3pq\lg 2 = 3pq\lg\frac{10}{5}$.

又因为 $\lg\frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - \lg 5$,我们有

$$\lg 5 = 3pq(1 - \lg 5),$$

即 $$\lg 5 = \frac{3pq}{1+3pq}.$$

故选(D).

6·34 若已知 $\lg 8 = 0.9031$,及 $\lg 9 = 0.9542$,则不用对数表惟一无法求得的对数是

(A) $\lg 17$. (B) $\lg\frac{5}{4}$. (C) $\lg 15$. (D) $\lg 600$. (E) $\lg 4$.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 由对数性质有 $\lg 8 = \lg 2^3 = 3\lg 2$, $\lg 9 = \lg 3^2 = 2\lg 3$.
则 $\lg 2$, $\lg 3$ 可求.

又 $\lg\frac{5}{4}=\lg\frac{10}{8}=1-\lg8=1-3\lg2$, 可求;

$\lg15=\lg3+\lg5=\lg3+1-\lg2$, 可求;

$\lg600=\lg100+\lg6=2+\lg2+\lg3$, 可求;

$\lg4=2\lg2$, 亦可求.

但 $\lg17=\lg(8+9)$,无法据题设求出其值.

故选(A).

6·35 若 $\lg3=0.47712$,则下列四个对数值中错误的一个是

(A) $\lg1.5=0.17609$. (B) $\lg5=0.69897$.

(C) $\lg2=0.30103$. (D) $\lg7=0.84519$.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 若(A)错,则由 $\lg1.5=\lg3-\lg2$,即

$$\lg2=\lg3-\lg1.5=0.47712-0.17609=0.30103,$$

知(C)也错,与题设不符.故(A),(C)都真.

又 $\lg2+\lg5=0.30103+0.69897=1$,由$(C)$真知$(B)$真.

∴ 只有(D)错.

故选(D).

6·36 $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$ 的值等于

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\frac{1}{2}\lg6$. (E)$2\sqrt{5}$.

(中国北京市初中数学竞赛,1984 年)

[解]

$$\begin{aligned}&\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})\\&=\frac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2\\&=\frac{1}{2}\lg[3+\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}]\\&=\frac{1}{2}\lg10=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故选(A).

6·37 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\sqrt{5}}$ 是

(A) 无理数. (B) 正整数. (C) 正分数. (D) 负分数.

(中国福建省初中数学竞赛,1984 年)

[解] ∵ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$, 则

原式 $= (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\sqrt{5}} = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{5}$.

故选(C).

6·38　若 $y = \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10$,那么

(A) $y \in (0,1)$.　　(B) $y = 1$.　　(C) $y \in (1,2)$.

(D) $y = 2$.　　(E) $y \in (2,3)$.

(中国上海市高中数学竞赛,1982年)

[解]　利用对数换底公式有

$$y = \frac{\lg 6}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 8} \cdot \frac{\lg 10}{\lg 9} = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \log_5 10.$$

$\because\ \log_5 5 < \log_5 10 < \log_5 25$,

即有　$1 < y < 2$.

故选(C).

6·39　若 $y = (\log_2 3)(\log_3 4) \cdot \cdots \cdot (\log_n [n+1]) \cdot \cdots \cdot (\log_{31} 32)$,那么

(A) $4 < y < 5$.　　(B) $y = 5$.　　(C) $5 < y < 6$.

(D) $y = 6$.　　(E) $6 < y < 7$.

(第28届美国高中数学考试,1977年)

[解]　由换底公式有

$$y = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \cdots \cdot \frac{\lg(n+1)}{\lg n} \cdot \cdots \cdot \frac{\lg 31}{\lg 30} \cdot \frac{\lg 32}{\lg 31}$$

$$= \frac{\lg 32}{\lg 2} = \log_2 32 = 5.$$

故选(B).

6·40　$\lg(\mathrm{tg}1°) + \lg(\mathrm{tg}2°) + \lg(\mathrm{tg}3°) + \cdots + \lg(\mathrm{tg}88°) + \lg(\mathrm{tg}89°)$ 的值为

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}\lg 2$.

(D) 1.　　(E) 以上都不是.

(第38届美国高中数学考试,1987年)

[解]　由题设及对数性质有

原式 $= \lg(\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}3° \cdot \cdots \cdot \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89°)$

$= \lg[(\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}89°)(\mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}88°) \cdot \cdots \cdot (\mathrm{tg}44° \cdot \mathrm{tg}46°) \cdot \mathrm{tg}45°]$

$$= \lg(1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot 1) = \lg 1 = 0.$$

故选(A).

6·41　已知 $a = \log_{0.1} b$,则 $\lg b^a$ 等于

(A) a^2.　　(B) $-2a$.　　(C) $-a^a$.　　(D) $-a^2$.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1986 年）

[解]　由　$a = \log_{0.1} b = \dfrac{\lg b}{\lg 0.1} = -\lg b$;

又　$\lg b^a = a \lg b$,　得　$\lg b^a = a \cdot (-a) = -a^2$.

故选(D).

6·42　设 $F = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$,将式中的每一 x 代之以 $\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$ 可得一新函数 G,此 G 化简后可等于

(A) $-F$.　(B) F.　(C) $3F$.　(D) F^2.　(E) $F^3 - F$.

（第 14 届美国高中数学考试,1963 年）

[解]　由

$$\frac{1+\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1-\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}} = \frac{1+3x+3x^2+x^3}{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$= \frac{(1+x)^3}{(1-x)^3},$$

则

$$G = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 3\lg\frac{1+x}{1-x} = 3F.$$

故选(C).

6·43　若 $b > 1$,　$\sin x > 0$,　$\cos x > 0$ 且 $\log_b \sin x = a$,那么 $\log_b \cos x$ 等于

(A) $2\log_b(1 - b^{\frac{a}{2}})$.　　(B) $\sqrt{1-a^2}$.　　(C) b^{a^2}.

(D) $\dfrac{1}{2}\log_b(1-b^{2a})$.　　(E) 这些都不对.

（第 31 届美国高中数学考试,1980 年）

[解]　由设 $\log_b \sin x = a$,　则　$\sin x = b^a$,因而 $\sin^2 x = b^{2a}$.

故　$\cos x = (1-b^{2a})^{\frac{1}{2}}$,　从而　$\log_b \cos x = \dfrac{1}{2}\log_b(1-b^{2a})$.

故选(D).

6·44 A 为锐角，$\lg(1+\sin A)=m$，$\lg\frac{1}{1-\sin A}=n$，则 $\lg\cos A$ 的值是

(A) $m+\frac{1}{n}$.　　(B) $m-n$.　　(C) $\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{n}\right)$.

(D) $\frac{1}{2}(m-n)$.　　(E) $2(m-n)$.

（北京市初中数学竞赛，1983 年）

[解]　由 $\lg(1+\sin A)=m$，及

$$\lg\frac{1}{1-\sin A}=\lg(1-\sin A)^{-1}=-\lg(1-\sin A),$$

$\therefore$ $$\lg(1-\sin A)=-n.$$

$\therefore$ $$\begin{aligned}\lg\cos A&=\frac{1}{2}\lg\cos^2 A=\frac{1}{2}\lg(1-\sin^2 A)\\&=\frac{1}{2}\lg(1+\sin A)(1-\sin A)\\&=\frac{1}{2}[\lg(1+\sin A)+\lg(1-\sin A)]\\&=\frac{1}{2}(m-n).\end{aligned}$$

故选(D).

6·45　如果 $a>1$，$b>1$，$p=\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$，那么 a^p 等于

(A) 1.　(B) b.　(C) $\log_a b$.　(D) $\log_b a$.　(E) $a\log_b a$.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

[解]　由题设有　$p(\log_b a)=\log_b(\log_b a)$，

即 $$\log_b(a^p)=\log_b(\log_b a).$$

因而　$a^p=\log_b a$.

故选(D).

6·46　已知正数 M 的常用对数的尾数是 $\frac{1}{a}$，则 $\frac{1}{M}$ 的常用对数的尾数是

(A) $\frac{1}{a}$.　　(B) $\frac{a-1}{a}$.　　(C) $\frac{-1}{a}$.　　(D) a.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1984 年）

[解] $\lg\frac{1}{M}=\lg 1-\lg M=-\lg M$.

由$\frac{1}{a}$是$\lg M$的尾数,则 $0<\frac{1}{a}<1$.

又设其首数b,则 $\lg M=b+\frac{1}{a}$.

而 $-\lg M=-b-\frac{1}{a}=(-b-1)+\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

故由 $0<\frac{1}{a}<1$知 $0<1-\frac{1}{a}<1$,

从而 $\lg\frac{1}{M}$尾数是$1-\frac{1}{a}$, 即 $\frac{a-1}{a}$.

故选(B).

6·47 $\lg M$的首数是a,则$\lg\frac{1000}{M}$的首数是

(A) $2-a$. (B) $3-a$.

(C) $2-a$或$3-a$. (D) 以上都不对.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1989年)

[解] 由 $\lg\frac{1000}{M}=3-\lg M=3-a$(若$\lg M=a$),

或 $(2-a)+[1-(\lg M-a)]$(若$a<\lg M<a+1$),

所以$\lg\frac{1000}{M}$的首数为

$3-a$(若$\lg M=a$) 或 $2-a$(若$a<\lg M<a+1$).

故选(C).

6·48 已知一个正数M的倒数$\frac{1}{M}$的常用对数的首数为a,尾数为$b(b\neq 0)$,则M的常用对数的首数与尾数应是

(A) 首数$-a$,尾数$-b$. (B) 首数$1-a$,尾数$-1-b$.

(C) 首数$\frac{1}{a}$,尾数$\frac{1}{b}$. (D) 首数$-a-1$,尾数$-b+1$.

(中国福建省初中数学竞赛,1983年)

[解] 由设 $\lg\frac{1}{M}=a+b$, 即 $-\lg M=a+b$,则

$$\lg M=-a-b,$$

又 $1>b>0$, 则 $0<1-b<1$.

$\therefore \qquad \lg M=-(a+1)+(1-b)$.

则 $-(a+1)$ 为 $\lg M$ 的首数,$1-b$ 为其尾数.

故选(D).

6·49 已知$10^{-221}<M<10^{-220}$, $10^{-2}<n<10^{-1}$, M 的常用对数的尾数是 n,则$\frac{1}{M^9}$ 的常用对数的尾数是

(A) $\frac{1}{n^9}$. (B) $-9n$. (C) $9n-1$. (D) $1-9n$.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年)

[解] 由 $\lg\frac{1}{M^9}=-9\lg M=-9(-221+n)$

$$=1988+(1-9n).$$

又知 $\qquad 10^{-2}<n<10^{-1}$,

$\therefore \quad 0.09<9n<0.9$, 即 $-0.09>-9n>-0.9$.

则 $\quad 0.1<1-9n<0.91$, 有 $0<1-9n<1$,

即 $1-9n$ 是对数的尾数.

故选(D).

6·50 若47^{100} 是 168 位数,则 47^{17} 的位数是

(A) 27. (B) 28. (C) 29. (D) 30.

(中国陕西省西安市初中数学竞赛,1990 年)

[解 1] 由设 47^{100}是 168 位数, 则 $\lg 47^{100}=167+a$, 其中 $0\leqslant a<1$. 即

$$\lg 47=\frac{167}{100}+\frac{a}{100}.$$

因而 $\quad \lg 47^{17}=17\lg 47=\frac{17\cdot 167}{100}+\frac{17a}{100}$

$$=\frac{2839}{100}+\frac{17a}{100}=28+\frac{39+17a}{100},$$

注意到 $0\leqslant a<1$, 则 $39\leqslant 39+17a<56$,

因而 $0\leqslant\frac{39+17a}{100}<1$,这样由前式知 47^{17} 是 29 位数.

故选(C).

[解 2] 令 $47^{100}=a\cdot 10^{167}$,其中 $1\leqslant a<10$.

又 $47^{17}=(47^{100})^{\frac{17}{100}}=(a\cdot 10^{167})^{\frac{17}{100}}=a^{\frac{17}{100}}\cdot 10^{28}\cdot 10^{\frac{39}{100}}$,

而 $$a^{\frac{17}{100}}\cdot 10^{\frac{39}{100}}<10^{\frac{17}{100}}\cdot 10^{\frac{39}{100}}=10^{\frac{56}{100}}<10,$$

且 $$a^{\frac{17}{100}}\cdot 10^{\frac{39}{100}}\geqslant 10^{\frac{39}{100}}>1,$$

$\therefore\ 1<a^{\frac{17}{100}}\cdot 10^{\frac{39}{100}}<10$. 则 47^{17} 是 29 位数.

故选(C).

6·51 已知 $\lg a=\overline{1}.02$, 则 $0.01^{0.01}$ 的值等于

(A) a. (B) $\frac{1}{a}$. (C) $10a$. (D) $\frac{1}{10a}$.

(中国广州,武汉,福州等五市初中数学联赛,1985 年;中国上海市初中数学竞赛,1986 年)

[解] 令 $x=0.01^{0.01}$,则有

$$\lg x=0.01\lg 0.01=0.01\lg 10^{-2}=-0.02,$$

又 $\lg a=\overline{1}.02=-1+0.02$,则

$$1+\lg a=0.02,\quad 即\quad \lg 10a=0.02.$$

$$\therefore\quad \lg x=-\lg 10a,\quad 则\quad x=\frac{1}{10a}.$$

故选(D).

6·52 若 $\lg 2=0.3010$ 与 $\lg 3=0.4771$. 当 $3^{x+3}=135$ 时,x 的值约为

(A) 5. (B) 1.47. (C) 1.67. (D) 1.78. (E) 1.63.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解] 由 $3^{x+3}=3^3\cdot 3^x=135$,有 $3^x=5$,两边取对数有

$$x\lg 3=\lg 5,\quad 则\quad x=\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{\lg\frac{10}{2}}{\lg 3}=\frac{1-\lg 2}{\lg 3}\approx 1.47.$$

故选(B).

6·53 精确到千分之一位,$\lg 2$ 是 0.301, $\lg 3$ 是 0.477. $\log_5 10$ 的最好近似值是

(A) $\frac{8}{7}$. (B) $\frac{9}{7}$. (C) $\frac{10}{7}$. (D) $\frac{11}{7}$. (E) $\frac{12}{7}$.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 因为 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$,则

$$\log_5 10 = \frac{1}{\lg 5} = \frac{1}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{1}{0.699} \approx \frac{10}{7}.$$

故选(C).

6·54 只使用下述简表:$10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$,试判定lg2介于下列一组数中的最佳选择是

(A) $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{4}{11}$.　　(B) $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{4}{12}$.　　(C) $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{4}{13}$.

(D) $\frac{3}{10}$ 与 $\frac{40}{132}$.　　(E) $\frac{3}{11}$ 与 $\frac{40}{132}$.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解] 由题目所给知

$$10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}, \quad 2^{13} = 8192 < 10^4,$$

因而 $$3 < 10\lg 2, \quad 13\lg 2 < 4.$$

即 $$\frac{3}{10} < \lg 2 < \frac{4}{13}.$$

注意到 $\lg 2 < \frac{40}{132}$ 即 $2^{132} < 10^{40}$ 无法从题设中判定,又(A),(B)结论较(C)弱.

故选(C).

6·55 已知$b \in N$, a^{100}是一个120位数, a^b是一个10位数,则b的值是

(A) 7.　　(B) 8.　　(C) 9.　　(D) 10.

(中国东北三省数学邀请赛,1989年)

[解] 由题设知 $119 \leqslant 100\lg a < 120$, 即

$$1.19 \leqslant \lg a < 1.2, \quad 且 \quad 9 \leqslant b\lg a < 10,$$

则 $$\frac{9}{1.2} < b < \frac{10}{1.19}, \quad 即 \quad 7.5 < b < 8.4.$$

又 $b \in N$, 则 $b = 8$.

故选(B).

6·56 已知$\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$,那么$\left(\frac{6}{25}\right)^{100}$出现非零的数字时,在小数点后的位数是

(A) 61.　　(B) 62.　　(C) 63.　　(D) 都不是.

(中国上海市初中数学竞赛,1984年)

[解] 设 $x=\left(\frac{6}{25}\right)^{100}$,取对数有

$$\lg x=100\lg\frac{6}{25}=100\lg\frac{2^3\cdot 3}{100}=100(3\lg2+\lg3-\lg100)$$

$$=-61.99=\overline{62}.01,$$

知 x 在小数点后第 62 位才出现非零数字.

故选(B).

6·57 若$(\log_3 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y)=\log_x x^2$,则 y 等于

(A) $\frac{9}{2}$. (B) 9. (C) 18. (D) 27. (E) 81.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解] 由对数性质题设等式可变形为

$$\frac{\lg x}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 2x}{\lg x}\cdot\frac{\lg y}{\lg 2x}=\frac{\lg x^2}{\lg x},$$

即 $\frac{\lg y}{\lg 3}=2$ 或 $\log_3 y=2$ 得 $y=3^2=9$.

故选(B).

6·58 若 3^{1987} 的个位数字是 A,最高位数字是 B,整数位数是 C(已知 $\lg3=0.47712$),则 $A+B+C$ 的值是

(A) 965. (B) 964. (C) 962. (D) 以上答案都不对.

(中国北京市高中数学竞赛,1987 年)

[解] 由 $\lg3^{1987}=1987\cdot\lg3=1987\cdot0.47712=948.03744$.

所以 3^{1987} 的整数位数 $C=949$.

又 $3^{1987}=3^{4\cdot496+3}$, 所以 3^{1987} 末位数字与 3^3 的末位数字相同,

即 $$A=7.$$

由于 $\lg3^{1987}=948.03744$,可判定最高位数字 $B=1$.

$$A+B+C=949+7+1=957.$$

故选(D).

6·59 若 $\log_M N=\log_N M$,且 $M\neq N$, $MN>0$,又 $M\neq1$, $N\neq1$,则 MN 等于

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) 2.

(D) 10. (E) 一个大于 2 而小于 10 的数.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解] 由 $\log_M N = \frac{1}{\log_N M}$，故由题设有 $(\log_N M)^2 = 1$，即

$$\log_N M = \pm 1.$$

若 $\log_N M = 1$，则 $M = N$，与题设矛盾；

若 $\log_N M = -1$，则 $M = N^{-1}$，即 $MN = 1$.

故选 (B).

6·60 若 $x = (\log_8 2)^{\log_2 8}$，则 $\log_3 x$ 等于

(A) -3. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) 3. (E) 9.

（第 17 届美国高中数学考试，1966 年）

[解] 由设 $x = (\log_8 2)^{\log_2 8} = (\log_8 2)^3 = \left(\frac{1}{\log_2 8}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$，

$$\therefore \quad \log_3 x = \log_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3\log_3 3^{-1} = -3.$$

故选 (A).

6·61 若 $x > \frac{2}{3}$，则 $\lg(x^2+3) - 2\lg x$ 的值为

(A) 负数. (B) 0. (C) 1.

(D) 小于任何指定的正数. (E) 大于任何指定的正数.

（第 16 届美国高中数学考试，1965 年）

[解] 由 $\lg(x^2+3) - 2\lg x = \lg\frac{x^2+3}{x^2} = \lg(1+\frac{3}{x^2})$，

由于 $x > \frac{2}{3}$，当 x 充分大时，$\frac{3}{x^2}$ 可小于任何给定的正数 ε，则 $\lg(1+\frac{3}{x^2})$ 可小于 $\lg(1+\varepsilon)$，即小于任何给定的正数.

故选 (D).

6·62 对于一切不等于 1 的正数 x，代数式 $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x}$ 等于

(A) $\frac{1}{\log_{60} x}$. (B) $\frac{1}{\log_x 60}$.

(C) $\frac{1}{(\log_3 x)(\log_4 x)(\log_5 x)}$. (D) $\frac{12}{(\log_3 x)+(\log_4 x)+(\log_5 x)}$.

(E) $\frac{\log_2 x}{(\log_3 x)(\log_5 x)} + \frac{\log_3 x}{(\log_2 x)(\log_5 x)} + \frac{\log_5 x}{(\log_2 x)(\log_3 x)}$.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

[解] 由 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$，那么

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_5 x}=\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5=\log_x 60=\frac{1}{\log_{60} x}.$$

故选(A).

6·63 将 $y=\lg x$ 的图形 G 绕原点逆时针旋转 $90°$ 而得到一个新图形 G'.下列方程中为 G' 的是

(A) $y=\lg\left(\frac{x+90}{9}\right)$.　　(B) $y=\log_x 10$.　　(C) $y=\frac{1}{x+1}$.

(D) $y=10^{-x}$.　　(E) $y=10^{x}$.

（第 42 届美国高中数学考试,1991 年）

[解 1] 显然 $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称

又　函数 $-x=f(y)$ 与 $x=f(y)$ 的图像关于 y 轴对称.

因而,函数 $-x=f(y)$ 的图像可视为函数 $y=f(x)$ 的图像在 xOy 平面绕原点 O 逆时针旋 $90°$ 的结果.

而 $-x=f(y)$ 常写作 $y=f^{-1}(-x)$.

∴　所求方程为　$y=10^{-x}$.

故选(D).

[解 2] 由复数在高斯平面性质知:

点$(x,\lg x)$的复数表示为 $x+i\lg x$,其绕原点沿逆时针旋转 $90°$ 后得新点

$Z=(x+i\lg x)i=-\lg x+ix$,　或　$(-\lg x,x)$.

令　$X=-\lg x$,　　$Y=x$,则

$Y=x=10^{-X}$.

故选(D).

6·64 若 $a>1,b>1$,且 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$,则 $\lg(a-1)+\lg(b-1)$ 的值

(A) 等于 lg2.　　(B) 等于 1.

(C) 等于 0.　　(D) 不是与 a、b 无关的常数.

（中国高中数学联赛,1998 年）

[解] ∵　$\lg(a+b)=\lg a+\lg b$,

∴　$a+b=ab$,　即　$(a-1)(b-1)=1$.

因此 $\lg(a-1)+\lg(b-1)=0.$

故选(C).

6·65 直线 $x=k$ 分别交曲线 $y=\log_5 x$ 和 $y=\log_5(x+4)$ 的两交点距离为0.5.若给定 $k=a+\sqrt{b}$,其中 a,b 是整数,则 $a+b=$

(A)6. (B)7. (C)8. (D)9. (E)10.

(第48届美国高中数学考试,1997年)

[解] 由题设知:

$$\log_5(k+4)-\log_5 k=0.5,$$

即 $\frac{k+4}{k}=\sqrt{5}$ 得 $k=\sqrt{5}+1$, 从而 $a+b=6$.

故选(A).

第七章　初等超越函数(二)

第1节　三角函数

7·1　若 $\sin\alpha \cdot \sec\alpha \sqrt{\csc^2\alpha - 1} = -1$.则 α 的取值范围是

(A) 第 Ⅰ 象限和第 Ⅲ 象限.　　(B) 第 Ⅲ 象限和第 Ⅳ 象限.

(C) 第 Ⅱ 象限和第 Ⅳ 象限.　　(D) 第 Ⅰ 象限和第 Ⅳ 象限.

(北京市高中数学竞赛,1990 年)

[解]　由 $\sin\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \sqrt{\csc^2\alpha - 1} = \mathrm{tg}\alpha \cdot |\mathrm{ctg}\alpha|$,

则 $\mathrm{tg}\alpha \cdot |\mathrm{ctg}\alpha| = -1$, 知 α 在 Ⅱ,Ⅳ 象限.

故选(C).

7·2　如果 $\sin x = 3\cos x$,那么 $\sin x\cos x$ 等于

(A) $\frac{1}{6}$.　(B) $\frac{1}{5}$.　(C) $\frac{2}{9}$.　(D) $\frac{1}{4}$.　(E) $\frac{3}{10}$.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解]　由设有　$\mathrm{tg}x = 3$.

$$\therefore\quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{3}{10}.$$

故选(E).

7·3　如果 x 是满足 $\sec x - \mathrm{tg}x = 2$ 实数,那么 $\sec x + \mathrm{tg}x$ 的值是

(A)0.1.　(B)0.2.　(C)0.3.　(D)0.4.　(E)0.5.

(第 50 届美国高中数学考试,1999 年)

选择题卷

[解1] 由设有 $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=2$，两边同乘 $1+\sin x$ 得

$$\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}=2(1+\sin x)$$

即 $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{2}=0.5$，注意到 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$.

故选(*E*).

[解2] 由 $\sec^2 x=1+\mathrm{tg}^2 x$,

则 $\sec^2 x-\mathrm{tg}^2 x=1$,

有 $(\sec x-\mathrm{tg}x)(\sec x+\mathrm{tg}x)=1$.

从而 由 $\sec x-\mathrm{tg}x=2$，知 $\sec x+\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{2}$.

故选(*E*).

7·4 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, $0<\alpha<180°$. 则 $\mathrm{tg}\alpha$ 的值为

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $-\dfrac{3}{4}$.　　(C) $\dfrac{4}{3}$.　　(D) $-\dfrac{4}{3}$.

（中国山西省太原市初中数学竞赛,1996 年）

[解] $\because$ $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, $\therefore$ $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{25}$,

即 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{25}$, $2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$, $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{49}{25}$,

$\therefore$ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{49}{25}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\dfrac{7}{5}$.

由 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\\ \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5};\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$.

由 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\\ \sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{7}{5};\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\\ \cos\alpha=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

$\because$ $0<\alpha<180°$,此解舍去.

故选(*C*).

7·5 化简 $\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y$,其值为

(A) 1.　　(B) $\sin x$.　　(C) $\cos x$.

(D) $\sin x\cos y$.　　(E) $\cos x\cos 2y$.

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

[解]　设 $w = x - y$，则题设式子可化为

$\sin w\cos y + \cos w\sin y = \sin(w + y) = \sin(x - y + y) = \sin x$.

故选(B).

7·6　$\operatorname{ctg}10 + \operatorname{tg}5$ 的值为

(A) csc5.　(B) csc10.　(C) sec5.　(D) sec10.　(E) sin15.

（第 40 届美国高中数学考试，1989 年）

[解]　由 $\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \csc 2\alpha,$$

$\therefore$　$\operatorname{ctg}10 + \operatorname{tg}5 = \csc 10$.

故选(B).

7·7　若 $\angle A = 20°$，$\angle B = 25°$，则 $(1 + \operatorname{tg}A)(1 + \operatorname{tg}B)$ 的值是

(A) $\sqrt{3}$.　　(B) 2.　　(C) $1 + \sqrt{2}$.

(D) $2(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B)$.　　(E) 以上结论都不对.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

[解]　由 $\operatorname{tg}(20° + 25°) = \operatorname{tg}45° = 1$，又

$$\operatorname{tg}(20° + 25°) = \frac{\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25°}{1 - \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25°},$$

则
$$\operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25° = 1 - \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25°,$$

或
$$1 - \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25° - \operatorname{tg}20° - \operatorname{tg}25° = 0.$$

而　$(1 + \operatorname{tg}20°)(1 + \operatorname{tg}25°) = 1 + \operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25° + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25°$,

$\therefore$
$$2 - (1 - \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25° - \operatorname{tg}20° - \operatorname{tg}25°) = 2,$$

即
$$1 + \operatorname{tg}20°\operatorname{tg}25° + \operatorname{tg}20° + \operatorname{tg}25° = 2.$$

故选(B).

7·8　$\dfrac{\sin 10° + \sin 20°}{\cos 10° + \cos 20°}$ 可化简为

(A) $\operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}20°$.　　(B) $\operatorname{tg}30°$.　　(C) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}20°)$.

(D) $\operatorname{tg}15°$.　　(E) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}60°$.

（第 35 届美国高中数学考试，1984 年）

[解] 由 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

及 $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

$\therefore \quad \frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ}=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ$.

故选(D).

7·9 若 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,且 $0\leqslant x<\pi$,那么 $\operatorname{tg}x$ 是

(A) $-\frac{4}{3}$. (B) $-\frac{3}{4}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{4}{3}$.

(E) 按已知条件不能完全确定.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解] 若 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,那么由 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 有

$$1-\sin^2 x=(\frac{1}{5}-\sin x)^2,$$

即
$$25\sin^2 x-5\sin x-12=0.$$

同样,$\cos x$ 满足方程 $25t^2-5t-12=0$,它的解是$\frac{4}{5}$ 和 $-\frac{3}{5}$.

因为 $\sin x\geqslant 0$, 得 $\sin x=\frac{4}{5}$;

又因为 $\cos x=\frac{1}{5}-\sin x$,

得 $\cos x=-\frac{3}{5}$. 因此 $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$.

故选(A).

7·10 设 $\sin 10^\circ-\cos 10^\circ=a$,下面三个式子

(1) $3a>2a$; (2) $\log_{(-a)}a^2=2$;

(3) $\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=-a$.

中成立的是

(A) (1) 与(2) 是正确的. (B) (1) 与(3) 是正确的.

(C) (2) 与(3) 是正确的. (D) 都是正确的.

(E) 没有正确的.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由设 $\sin 10° - \cos 10° = a$,则 $a < 0$.

这样(1)显然不正确.

由 $\log_{(-a)} a^2 = \log_{(-a)}(-a)^2 = 2\log_{(-a)}(-a) = 2$,知其正确.

又 $1 - 2\sin 10°\cos 10° = \sin^2 10° + \cos^2 10° - 2\sin 10°\cos 10°$

$$= (\sin 10° - \cos 10°)^2,$$

则
$$\sqrt{1 - 2\sin 10°\cos 10°} = |\sin 10° - \cos 10°| = -a.$$

综上,知(2),(3)正确.

故选(C).

7·11 设 $x = \cos 36° - \cos 72°$.那么 x 等于

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $3 - \sqrt{6}$.

(D) $2\sqrt{3} - 3$. (E) 这些都不对.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 设 $u = \cos 36°$, 且 $v = \cos 72°$.

由 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 和 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$,用 $\theta = 36°$ 代入第一式,$\theta = 18°$ 代入第二式,可有

$$v = 2u^2 - 1 \text{ 和 } u = 1 - 2v^2.$$

上两等式相加有 $u + v = 2(u^2 - v^2)$,

即
$$u - v = \frac{1}{2}.$$

故选(B).

7·12 若 θ 是一个锐角,$\sin 2\theta = a$,那么 $\sin\theta + \cos\theta$ 等于

(A) $\sqrt{a+1}$. (B) $(\sqrt{2} - 1)a + 1$.

(C) $\sqrt{a+1} - \sqrt{a^2 - a}$. (D) $\sqrt{a+1} + \sqrt{a^2 - a}$.

(E) $\sqrt{a+1} + a^2 - a$.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 由 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 1 + \sin 2\theta = 1 + a,$$

又因为 θ 是锐角, $\sin\theta + \cos\theta > 0$,

$$\therefore \quad \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1+a}.$$

故选(A).

7·13 若 θ 是一个锐角且 $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$,那么 $\operatorname{tg}\theta$ 等于

选择题卷

(A) x.　　(B) $\frac{1}{x}$.　　(C) $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$.

(D) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.　　(E) $\sqrt{x^2-1}$.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解] 由 $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-2\left(\frac{x-1}{2x}\right)=\frac{1}{x}$,

又 $$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = x,$$

则 $\mathrm{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1 = x^2-1$, 所以 $\mathrm{tg}\theta = \sqrt{x^2-1}$.

故选(E).

7·14 条件甲:$\sqrt{1+\sin\theta}=a$. 条件乙:$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$.则

(A) 甲是乙的充分必要条件.

(B) 甲是乙的必要条件.

(C) 甲是乙的充分条件.

(D) 甲不是乙的必要条件,也不是充分条件.

(中国高中数学联赛,1981 年)

[解] 在条件甲中,$a\geqslant 0$,而在条件乙中 a 可能取负值,所以由甲推不出乙;且由乙也推不出甲.

故选(D).

7·15 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$ 的充要条件是

(A) $\alpha+\beta=0$.

(B) $\alpha=\beta=2k\pi\ (k\in Z)$.

(C) α,β 中至少有一个是 $2k\pi\ (k\in Z)$.

(D) $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 中至少有一个是 $2k\pi\ (k\in Z)$.

(中国湖北省黄冈地区高中数学竞赛,1989 年)

[解 1] 若 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$ 成立,

而 $\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta)$,则有

$$\alpha+\beta=2k\pi(k\in Z).$$

又 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha+\sin\beta$,则有

$$\alpha=2k\pi \text{ 或 } \beta=2k\pi\ (k\in Z).$$

即若题设式子成立,则 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 至少之一为 $2k\pi\quad(k\in Z)$.

反之,若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 至少之一是 $2k\pi$ $(k\in Z)$,

若$\alpha=2k\pi(k\in Z)$,则 $\sin\alpha=0$,且$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta$,题设式子成立;

同理 $\beta=2k\pi$ $(k\in Z)$ 亦然;

又若 $\alpha+\beta=2k\pi$ $(k\in Z)$,则 $\sin\beta=\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$,

即
$$\sin\alpha+\sin\beta=0,$$

而 $\sin(\alpha+\beta)=\sin2k\pi=0$,则题设式子成立.

故选(D).

[**解 2**] $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=0$

$$\Longleftrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \text{ 或 } \sin\frac{\alpha}{2}=0 \text{ 或 } \sin\frac{\beta}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha+\beta=2k\pi \text{ 或 } \alpha=2k\pi \text{ 或 } \beta=2k\pi\ (k\in Z)$$

$\Longleftrightarrow$ α, β, $\alpha+\beta$ 中至少之一为 $2k\pi$ $(k\in Z)$.

故选(D).

7·16 如果,对于 $x\neq0,1$ 的一切实数有
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{x},$$
而 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,那么 $f(\sec^2\theta)$ 等于

(A) $\sin^2\theta$. (B) $\cos^2\theta$. (C) $\mathrm{tg}^2\theta$. (D) $\mathrm{ctg}^2\theta$. (E) $\csc^2\theta$.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[**解**] 令 $t=\frac{x}{x-1}$, 于是 $x=\frac{t}{t-1}$, 由题设有
$$f(t)=\frac{t-1}{t}=1-\frac{1}{t}.$$

则
$$f(\sec^2\theta)=1-\frac{1}{\sec^2\theta}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta.$$

故选(A).

7·17 若 $a=\frac{1}{2}$,$(a+1)(b+1)=2$,那么 $\mathrm{arctg}a+\mathrm{arctg}b$ 的弧度等于

(A) $\frac{\pi}{2}$.　(B) $\frac{\pi}{3}$.　(C) $\frac{\pi}{4}$.　(D) $\frac{\pi}{5}$.　(E) $\frac{\pi}{6}$.

（第 30 届美国高中数学考试，1979 年）

[解]　设 $x=\operatorname{arctg}a,\quad y=\operatorname{arctg}b$.

由
$$(a+1)(b+1)=2,$$
有
$$(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}y+1)=2.$$
即
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y,$$
或
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=1.$$

$\because\quad a=\frac{1}{2}>0,$　可知　$b>0$.

从而　$x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，　则有　$x+y\in[0,\pi]$.

$$\therefore\qquad x+y=\frac{\pi}{4}.$$

故选(*C*).

7·18　函数 $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$ 的值域是

(A) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.　　(B) $(0,\frac{\pi}{2})$.

(C) $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.　(D) $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　设 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，则当 $|x|>1$ 时，$f(x)$ 取一切正实数；当 $|x|<1$ 时，$f(x)\leqslant-1$.

即 $f(x)$ 的值域为　$(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$.

$$\therefore\qquad y\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

故选(*D*).

7·19　函数 $f(x)=\arcsin\cos x+\arccos\sin x$ 的值域是

(A) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.　　(B) $[0,\frac{3\pi}{2}]$.

(C) $[-\frac{\pi}{2},\pi]$.　　(D) $[0,\pi]$.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解] (1) 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时:

有 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < 0$, 且 $0 < x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$. 这样

$$\arcsin\cos x = \arcsin\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} - x,$$

$$\arccos\sin x = \arccos\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = x - \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(2) 当 $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$ 时:

有 $\frac{\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi - x \leqslant \pi$, 且 $0 < x - \frac{3}{2}\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$, 这时

$$\arcsin\cos x = \arcsin\sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) = x - \frac{3}{2}\pi,$$

$$\arccos\sin x = \arccos\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \frac{5\pi}{2} - x,$$

$$\therefore \quad f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\pi\right) + \left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \pi.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x$ 是减函数, $\arcsin x$ 是 $[-1,1]$ 上的增函数, 因而 $\arcsin\cos x$ 是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的减函数.

同理, $\arccos\sin x$ 也是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的减函数.

故 $$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \pi.$$

当 $\pi < x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ 时, $\cos x$ 是增函数, $\arcsin x$ 是 $[-1,1]$ 上的增函数, 故 $\arcsin\cos x$ 是 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上的增函数.

同理, $\arccos\sin x$ 也是 $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上的增函数.

故 $$0 = f(\pi) < f(x) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \pi.$$

综上, $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的值域是 $[0, \pi]$.

又 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数, 则 $f(x)$ 的值域 $[0, \pi]$.

故选 (D).

7·20 函数 $f(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\arcsin x$ 的值域是

(A) $(-\pi,\pi)$.　　(B) $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

(C) $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.　　(D) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

（中国高中数学联赛，1989 年）

[解] 由于 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，在此区间上有

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant \operatorname{arctg}x\leqslant\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{1}{2}\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

注意到 $\operatorname{arctg}x$ 和 $\frac{1}{2}\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上都是递增的，则 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

故选 (D).

7·21 设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1,x>0\}$,

$$N=\{(x,y)\mid \operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\},$$

那么

(A) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1\}$.

(B) $M\cup N=M$.

(C) $M\cup N=N$.

(D) $M\cup N=\{(x,y)\mid |xy|=1$ 且 x,y 不同时为负数$\}$.

（中国高中数学联赛，1982 年）

[解] 在 M 中 $|xy|=1$ 相当于 $xy=1$ 和 $xy=-1$，但 $x>0$，故代表反比函数图像在 Ⅰ，Ⅳ 象限内的两支.

在 N 中，由 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi$，得

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y)=\frac{x+\frac{1}{y}}{1-\frac{x}{y}}=0,$$

则

$$xy=-1.$$

但由已知条件及 $0<\operatorname{arcctg}y<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$，

若 $x<0$，则 $y>0$ （$\because\ xy=-1$），于是

$$0<\operatorname{arcctg}y<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<0.$$

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcctg} y + \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$，与上矛盾.

从而 $x > 0$， 因此 $N \subset M$， $M \cup N = M$.

故选(B).

7·22 若设 $S = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 奇数, x, y \in \mathrm{R}\}$， 又设 $T = \{(x,y) \mid \sin(2\pi x^2) - \sin(2\pi y^2) = \cos(2\pi x^2) - \cos(2\pi y^2)$，这里 $x, y \in \mathrm{R}\}$.则

(A) $S \subset T$. (B) $T \subset S$. (C) $S = T$. (D) $S \cap T = \varnothing$.

（中国高中数学联赛,1991 年）

[解 1] 当 $x^2 - y^2$ 为奇数时,易见

$\sin(2\pi x^2) - \sin(2\pi y^2) = \cos(2\pi x^2) - \cos(2\pi y^2)$ 成立.

故当$(x,y) \in S$ 时,它必属于 T,于是 $S \subseteq T$.

又满足 $x = y$ 的点$(x,y) \in T$,但不属于 S.则 $S \subset T$.

故选(A).

[解 2] 取 $A(0,0)$ 和 $B(1,0)$,显然 $A \in T$,且 $A \notin S$;

又 $B \in S$， 且 $B \in T$， 可排除(B),(C),(D).

故选(A).

7·23 若 $M = \{(x,y) \mid |\operatorname{tg}\pi y| + \sin^2 \pi x = 0\}$,$N = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$,则 $M \cap N$ 的元素个数是

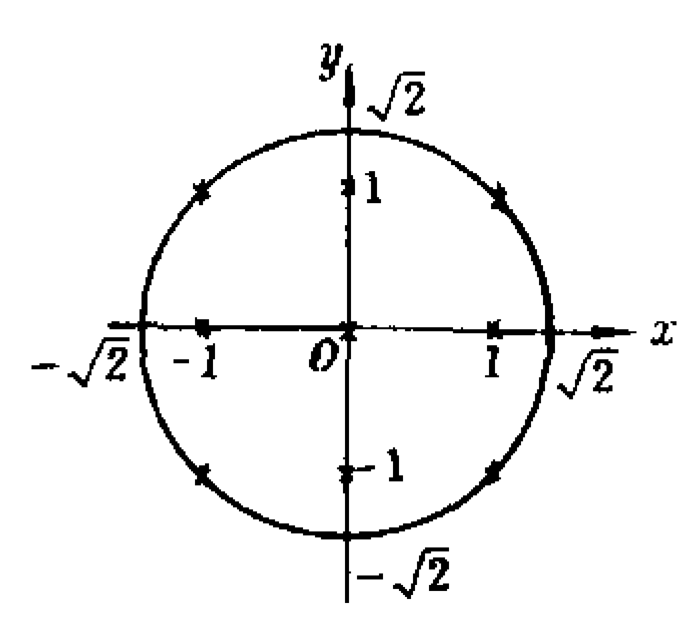
(A) 4 (B) 5. (C) 8. (D) 9.

（中国高中数学联赛,1993 年）

[解] 由非负整数和为 0 的条件,对于 M 有

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\pi y = 0, \\ \sin^2 \pi x = 0, \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x = k & (k \in Z), \\ y = m & (m \in Z). \end{cases}$$

即集合 M 为坐标平面上的整点(格点)全体.又对于 N,由 $x^2 + y^2 \leqslant 2 = (\sqrt{2})^2$,则 N 是以原点为中心,$\sqrt{2}$ 为半径的闭圆内全体点集.



不难算得 $k = -1, 0, 1$， $m = -1, 0, 1$,如图,闭圆内有 9 个整点.

故选(D).

第2节　解三角形

7·24　若 $\operatorname{tg}x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$，其中 $a > b > 0$ 且 $0° < x < 90°$，那么 $\sin x$ 等于

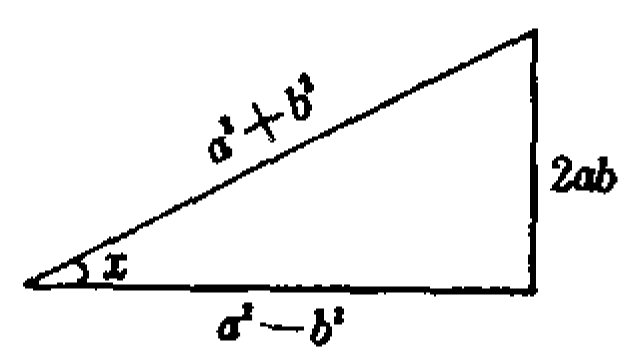
(A) $\dfrac{a}{b}$.　　(B) $\dfrac{b}{a}$.　　(C) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$.

(D) $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$.　　(E) $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

（第23届美国高中数学考试，1972年）

[解]　如图，角 x 是直角三角形中边长是 $2ab$ 的边所对的锐角，另一条边长为 $a^2 - b^2$，那么斜边是

$$\sqrt{(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2}$$
$$= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = a^2 + b^2,$$



因此根据正弦的定义 $\sin x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

故选(E).

7·25　直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角．如果 $\sin A = \dfrac{2}{3}$，那么 $\operatorname{tg}B$ 是

(A) $\dfrac{3}{5}$.　(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.　(C) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.　(E) $\dfrac{5}{3}$.

（第34届美国高中数学考试，1983年）

[解1]　在图中，因为 $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{3}$，

故可令

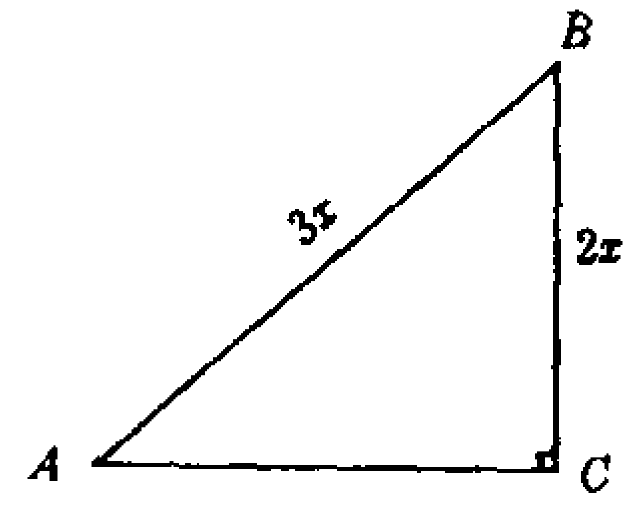
$BC = 2x$，$AB = 3x$，这里 $x > 0$.

且　$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$= \sqrt{5}x$.

这样　$\operatorname{tg}B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

故选(D).



[解 2] $\mathrm{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

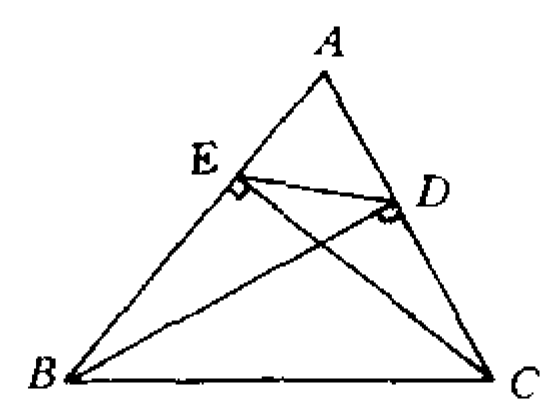
故选(D).

7·26 在$\triangle ABC$中，BD，CE 分别是边 AC，AB 上的高,则 $\frac{DE}{BC}$ 等于

(A) $\frac{AE}{AB}$. (B) $\sin A$. (C) $\cos A$. (D) $|\cos A|$.

（"祖冲之杯"初中数学邀请赛,1988 年）

[解] 考虑到$\angle A$为钝角时,$\cos A$为负值.由直角三角形性质,有

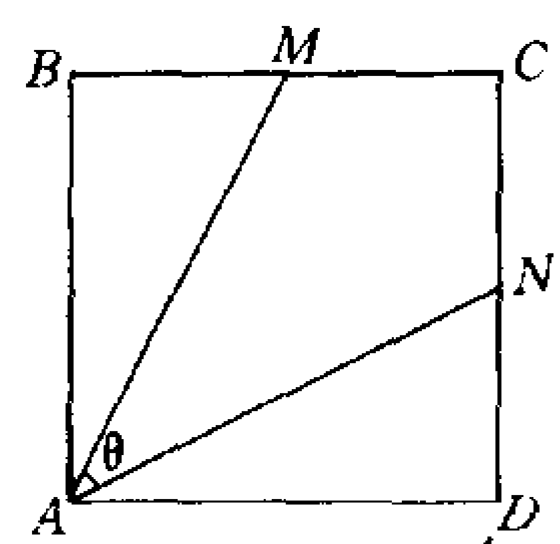


$$AD = AB \cdot |\cos A|,$$
$$AE = AC \cdot |\cos A|.$$

从而$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,其相似比为$|\cos A|$.

故选(D).

7·27 下图中,$ABCD$为正方形,M,N分别是BC和CD的中点,则$\sin\theta$等于



(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{3}{5}$.

(C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(E) 以上全不是.

（第 38 届美国高中数学考试,1987 年）

[解] 设$\angle BAM = \alpha$，则$\angle DAN = \alpha$.再设正方形边长为 1,则

$$AM = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

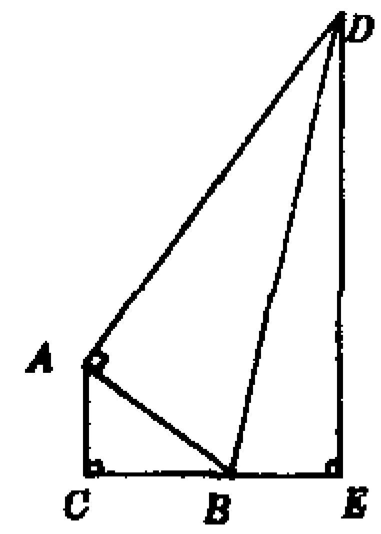
$$\therefore \quad \sin\theta = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \frac{AB^2 - BM^2}{AM^2} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

故选(B).

7·28 $\triangle ABC$中$\angle C$是直角,$AC = 3$且$BC = 4$.$\triangle ABD$中$\angle A$是直角,而$AD = 12$.点C和点D位于AB的两侧,过点D而平行于AC

的直线交 CB 于 E. 如果 $\frac{DE}{DB}=\frac{m}{n}$, 其中 m 和 n 为互质的正整数, 那么 $m+n$ 等于



(A) 25. (B) 128. (C) 153. (D) 243.

(E) 256.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解] 设 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ABD=\beta$, $\angle DBE=\gamma$.

又由题设知

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

且 $$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13.$$

则 $$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65},$$

而 $$\sin\gamma=\frac{DE}{DB}=\frac{m}{n}=\frac{63}{65},$$

则 $$m+n=128.$$

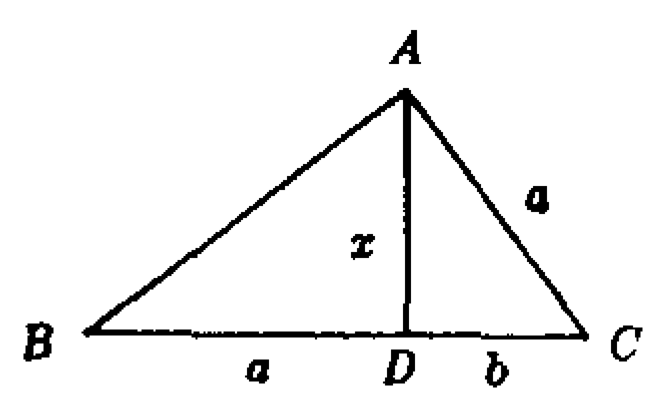
故选 (B).

7·29 直角三角形的一边是其他两边的比例中项,它的最小内角 α 的某个三角函数值等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 则这个三角函数是

(A) $\mathrm{ctg}\alpha$. (B) $\mathrm{tg}\alpha$. (C) $\cos\alpha$. (D) $\sin\alpha$.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991 年)

[解 1] 在 Rt$\triangle ABC$ 中,斜边上高 AD 为 BD,DC 的比例中项(如图).



若三角形的一条直角边等于 BD,DC 之一的长,无妨设 $AC=BD$,则 Rt$\triangle ADC$ 为符合题设的三角形.

设 $BD=a$,$DC=b$,则 $AC=a$,且

$$AD=x=\sqrt{ab},$$

同时 $AB=\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+ab}.$

在 Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定理有

$$(\sqrt{a^2+ab})^2+a^2=(a+b)^2,$$

即 $b^2 + ab - a^2 = 0$，或 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$，

解得 $\frac{b}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$（舍去负值）.

注意到 $a > b$，且 $x = \sqrt{ab} > \sqrt{b^2} = b$，知 b 最短，则其对角最小.

而在 Rt△ADC 中，$\frac{b}{a} = \sin\angle CAD$，

即 $$\sin\angle CAD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

故选(D).

[解 2] 设 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，且设 $\angle A < \angle B$，又 a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边.依题意有

$$b^2 = ac,$$

又 $a^2 + b^2 = c^2$，则

$c^2 - a^2 = ac$， 或 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{a}{c} - 1 = 0$.

解得 $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ （已舍负值）.

由定义知 $\frac{a}{c} = \sin A$， 则最小角 $\angle A$ 的正弦为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选(D).

7·30 在△ABC 中，若 $3\sin A + 4\cos B = 6$ 且 $4\sin B + 3\cos A = 1$，那么 $\angle C$ 的度数是

(A)30. (B)60. (C)90. (D)120. (E)150.

（第 50 届美国高中数学考试，1999 年）

[解] 将题设两式两边平方后分别相加得：

$$9(\sin^2 A + \cos^2 A) + 24(\sin A\cos B + \cos A\sin B) + 16(\sin^2 B + \cos^2 B) = 37,$$

化简后得 $\sin(A + B) = \frac{1}{2}$.

解得 $A + B = 30°$ 或 $150°$，前者不妥，知 $A + B = 150°$，推得 $C = 30°$.

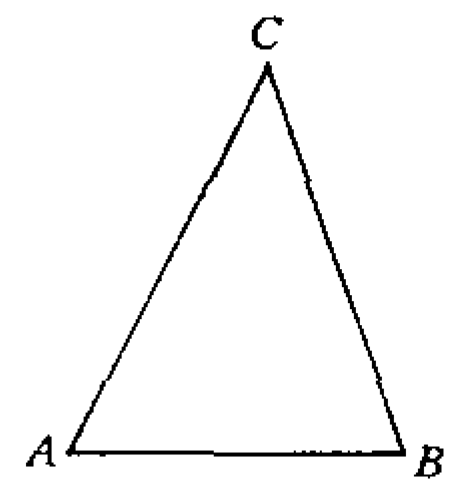
故选(A).

7·31　若$\triangle ABC$的面积是64平方英寸,边AB和AC的等比中项(比例中项)是12英寸,那么$\sin A$等于

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) $\frac{3}{5}$.　(C) $\frac{4}{5}$.　(D) $\frac{8}{9}$.　(E) $\frac{15}{17}$.

(第23届美国高中数学考试,1972年)

[解]　如图,$S_{\triangle ABC}=64=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$,



令　$AB\cdot AC=144$,

因此　$$\sin A=\frac{2\cdot 64}{144}=\frac{8}{9}.$$

故选(D).

7·32　已知等腰$\triangle ABC$的底边BC及高AD的长都是整数,那么$\sin A$和$\cos A$中,

(A) 一个是有理数,另一个是无理数.

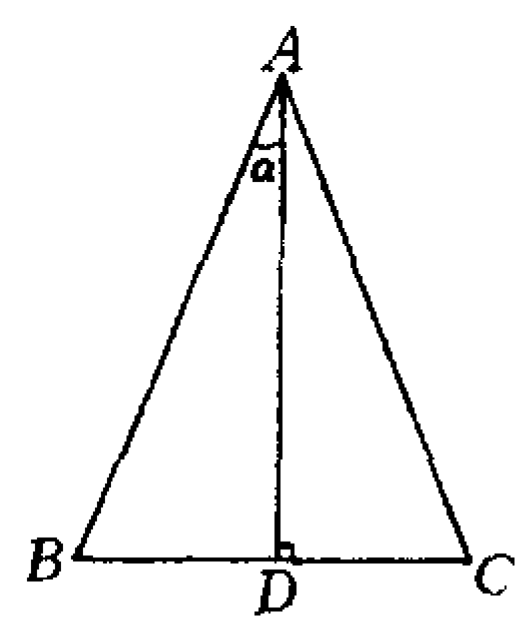
(B) 两个都是有理数.

(C) 两个都是无理数.

(D) 是有理数还是无理数要根据BC和AD的数值来确定.

(中国高中数学联赛,1983年)

[解]　如图所示,记$\alpha=\frac{1}{2}A$,则



$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{2\cdot AD}$$

是有理数.

而$\sin A=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$,又$\cos A=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$,

知$\sin A,\cos A$都是有理数.

故选(B).

7·33　等腰三角形两腰上的高之和等于底边上的高,那么底角的正弦值为

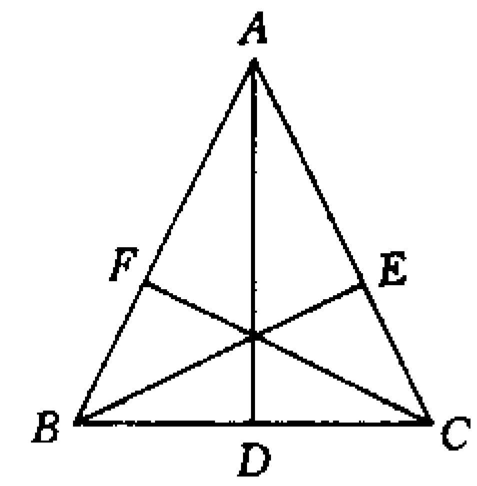
(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$.　(D) $\frac{1}{4}$.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988年)

[解]　如图,设$AB=AC=m$,则$AD=m\sin C$,且$CD=m\cos C,BC=2m\cos C$.

又 $BE = BC\sin C = 2m\sin C\cos C$.

据题意可知 $BE + CF = AD$，且 $BE = CF$，



$\therefore \quad 4m\sin C\cos C = m\sin C$.

即 $\quad \sin C(4\cos C - 1) = 0$.

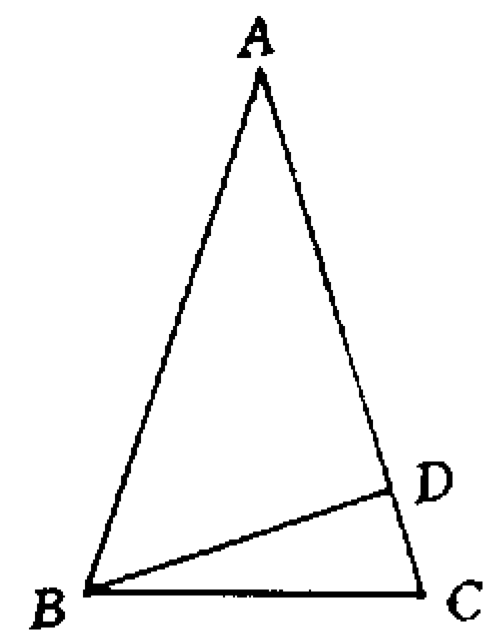
$\because$ C 是锐角，

$\therefore$ $\sin C \neq 0$，故 $\cos C = \dfrac{1}{4}$.

$\therefore$ $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

故选(C).

7·34 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$. 要使 $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$，需添加的条件是



(A) $BC = CD$. (B) $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{CD}{BC}$.

(C) $AD = DC$. (D) $\dfrac{BC}{\sin A} = \sin 18°$.

（中国山西省初中数学竞赛，1990 年）

[解] 当 $\angle BDC = \angle C = 72°$，即 $BD = BC$ 时，若有 $BD : AC = CD : BC$，则有 $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$.

$\because$ $\angle A = 36°$，则 $\angle C = 72°$，$\angle B = 72°$.

若 $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{CD}{BC}$，再由正弦定理有 $\dfrac{\sin 72°}{\sin\angle DBC} = \dfrac{\sin 72°}{\sin 36°}$，

$\because$ $\angle DBC$ 为锐角，$\therefore$ $\angle DBC = 36°$.

则 $\angle BDC = \angle C = 72°$.

故选(B).

7·35 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边边长分别是 a, b, c. 若 $c - a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\dfrac{C-A}{2} + \cos\dfrac{C+A}{2}$ 的值是

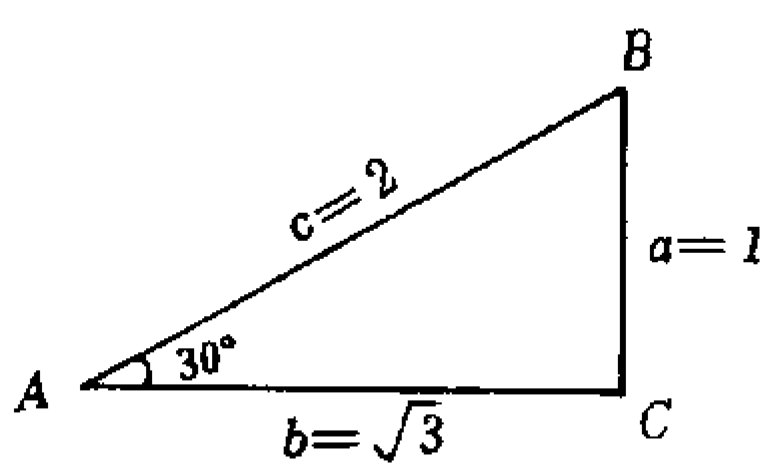
(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) -1.

（中国高中数学联赛，1993 年）

[解 1] 作右图，显然

$1 = c - a = h = a$.

此时 $\sin\dfrac{C-A}{2} + \cos\dfrac{C+A}{2}$



$= \sin 30° + \cos 60° = 1.$

故选(A).

[**解 2**] $\because\ c > a,\ \therefore\ \angle C > \angle A.$

又 $\because\ h = c - a = \dfrac{h}{\sin A} - \dfrac{h}{\sin C},$

$\therefore\ \sin C - \sin A = \sin A \cdot \sin C,$

即 $2\cos\dfrac{C+A}{2}\sin\dfrac{C-A}{2} = \dfrac{1}{2}[\cos(A-C) - \cos(A+C)].$ ⊛

但 上式右 $= \dfrac{1}{2}[1 - 2\sin^2\dfrac{C-A}{2} - 2\cos^2\dfrac{A+C}{2} + 1]$

$= 1 - \sin^2\dfrac{C-A}{2} - \cos^2\dfrac{C+A}{2}.$

故从⊛得 $\left(\sin\dfrac{C-A}{2} + \cos\dfrac{C+A}{2}\right)^2 = 1,$

即 $\sin\dfrac{C-A}{2} + \cos\dfrac{C+A}{2} = \pm 1.$

由于 $0 < \dfrac{C-A}{2} < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < \dfrac{C+A}{2} < \dfrac{\pi}{2},$

故 $\sin\dfrac{C-A}{2} + \cos\dfrac{C+A}{2} = 1.$

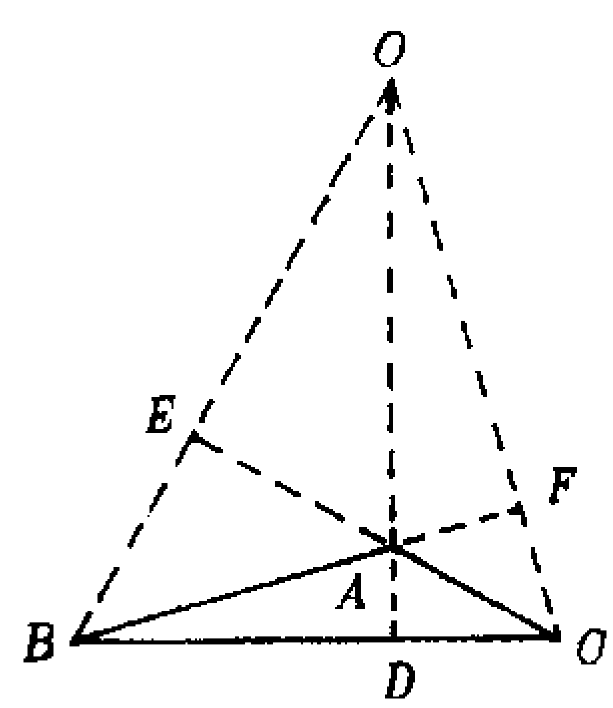
故选(A).

7·36 在$\triangle ABC$中,$\angle A$是钝角,O是垂心,$AO = BC$.则$\cos(\angle OBC + \angle OCB)$的值是

(A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) $-\dfrac{1}{2}$.

(中国初中数学联赛,1993年)



[**解**] 由题设知 $\angle ADB = \angle AFO = 90°,$

又 $\angle BAD = \angle OAF,$

故 $\angle AOF = \angle ABC.$

在Rt$\triangle OAF$和Rt$\triangle BCF$中,$AO = BC$,$\angle AOF = \angle FBC$,

则 $\triangle OAF \cong \triangle BCF$. 知 $BF = FO$.

即 Rt$\triangle BFO$为等腰直角三角形.

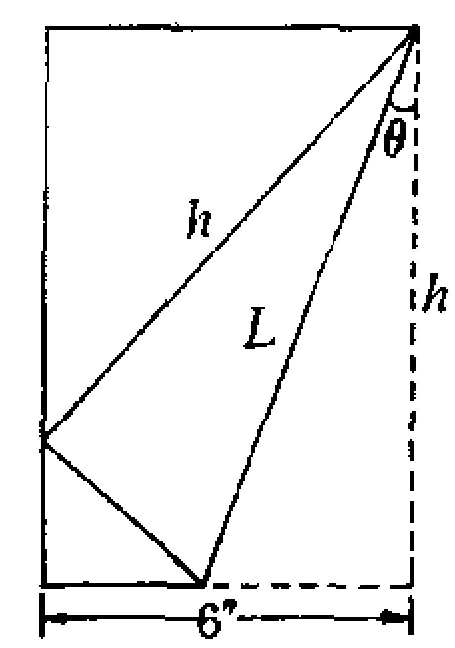
因而 $\cos(\angle OBC + \angle OCB)$

$= -\cos[\pi - (\angle OBC + \angle OCB)]$

$$= -\cos\angle BOC = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选(A).

7·37　一张宽是 6 英寸的长方形纸按图所示加以折叠,使得一角与对边接触.用角 θ 来表示,折痕 L 长度的英寸数是



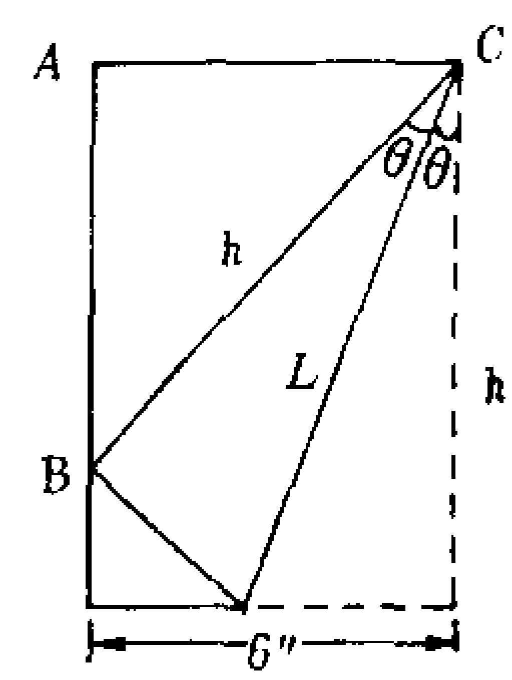
(A) $3\sec^2\theta\csc\theta$.　　(B) $6\sin\theta\sec\theta$.

(C) $3\sec\theta\csc\theta$.　　(D) $6\sec\theta\csc^2\theta$.

(E) 这些都不对.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解]　设 h 为纸的长,那么在 Rt△ABC 中



$$\begin{aligned} h &= \frac{6}{\cos(90^\circ - 2\theta)} = \frac{6}{\sin 2\theta} \\ &= 3\sec\theta\csc\theta, \\ L &= h\sec\theta \\ &= 3\sec^2\theta\csc\theta. \end{aligned}$$

故选(A).

7·38　从直角三角形的直角顶点作斜边的三等分点的连线,这二条线段分别长 $\sin x$ 和 $\cos x$,其中 x 是 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的一个实数.斜边的长是

(A) $\frac{4}{3}$.　　(B) $\frac{3}{2}$.　　(C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.　　(D) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(E) 按已知条件无惟一的解.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

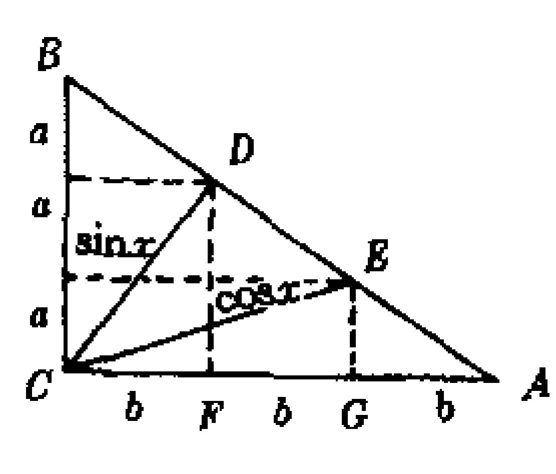
[解]　如图,在 △CDF 和 △CEG 中运用勾股定理得

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = \sin^2 x, & ① \\ a^2 + 4b^2 = \cos^2 x. & ② \end{cases}$$

① + ② 有　　$5(a^2 + b^2) = 1$.

因而　$AB = 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{\frac{1}{5}}$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$



故选(C).

7·39 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle A = 60°, AC = 16$,又三角形的面积为 $220\sqrt{3}$,则 BC 长度为

(A) $\sqrt{2400}$. (B) 25. (C) 51. (D) $49\sqrt{3}$. (E) 49.

(中国北京市初中数学竞赛,1982 年)

[解] 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin A$ 得

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot AB\sin 60° = 220\sqrt{3},$$

$$\therefore \quad AB = 55.$$

由余弦定理得

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB\cos 60°$$
$$= 16^2 + 55^2 - 16 \cdot 55 = 2401.$$

$$\therefore \quad BC = \sqrt{2401} = 49.$$

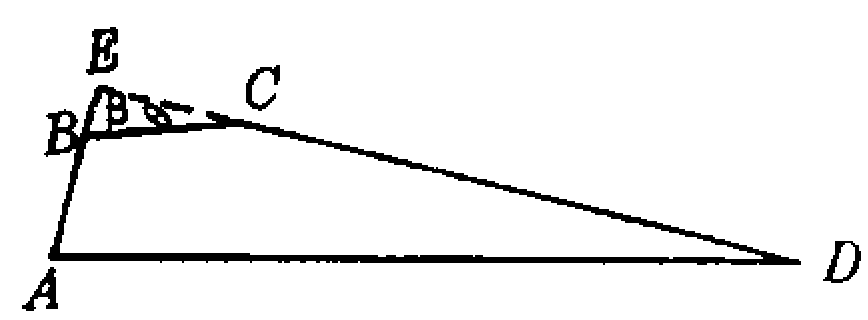
故选(E).

7·40 简单(即对边不相交的)四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC 和 CD 的长分别为4,5 和 20.若顶角 B 和 C 是钝角,且 $\sin C = -\cos B = \frac{3}{5}$,那么边 AD 的长是

(A) 24. (B) 24.5. (C) 24.6. (D) 24.8. (E) 25.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 设直线 AB 和 DC 延长线的交点为 E,且用 β 和 θ 分别表示 $\angle EBC$ 和 $\angle ECB$.因为



$$\cos\beta = -\cos B = \sin C = \sin\theta,$$

又 β, θ 均为锐角,则 $\beta + \theta = 90°$.

故 $\angle BEC$ 是直角.

又 $\quad BE = BC\sin\theta = 3, \quad CE = BC\sin\beta = 4,$

所以 $AE = 7, \quad DE = 24$, 且 AD 是 $\text{Rt}\triangle ADE$ 的斜边,则

$$AD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25.$$

故选(E).

7·41 D 是 $\triangle ABC$ 中 CB 边上的一点.如果 $\angle CAD = \angle DAB = 60°, AC = 3$ 且 $AB = 6$,那么 AD 的长为

(A) 2. (B) 2.5. (C) 3. (D) 3.5. (E) 4.

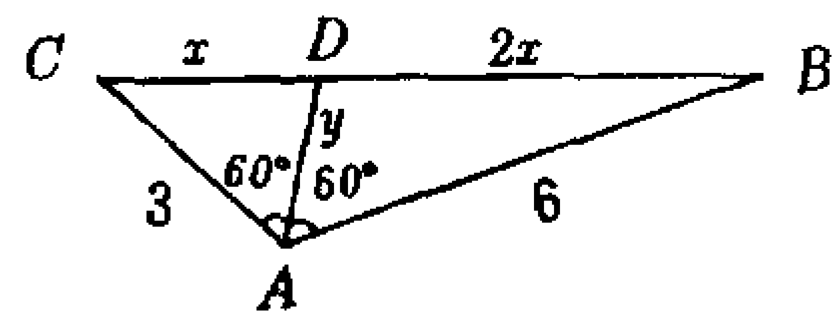
(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解 1] 设 $AD = y$,因为 AD 平分 $\angle BAC$,由三角形角平分线性

质,有
$$\frac{DB}{CD}=\frac{AB}{AC}=2.$$
所以,如图①,我们设 $CD=x,\quad DB=2x$.

在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle DAB$ 中运用余弦定理,有

$$\begin{cases}x^2=3^2+y^2-3y, & ①\\(2x)^2=6^2+y^2-6y. & ②\end{cases}$$

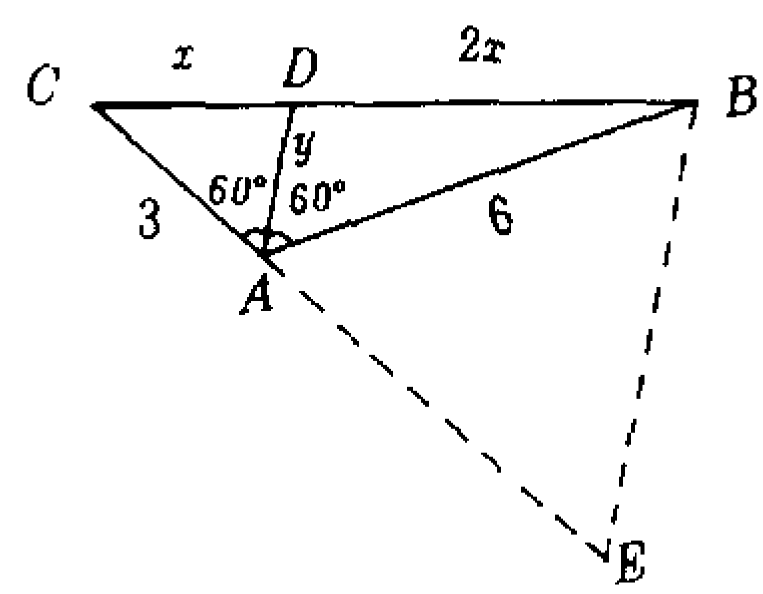


图①

② - ① × 4 得
$$0=-3y^2+6y=-3y(y-2),$$
因为 $y\neq 0$, 所以 $y=2$.

故选(A).

[**解 2**] 如图②,延长 CA 到 E,使得 $BE\,/\!/\,DA$.



图②

由 $\angle ABE=\angle BAD$,及 $\angle BEA=\angle DAC$,

有 $\quad\angle EAB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

所以 $\triangle ABE$ 是等边三角形. 又因为

$\triangle BEC\backsim\triangle DAC$,

我们有 $\dfrac{DA}{BE}=\dfrac{CA}{CE}$, 或者 $\dfrac{DA}{6}=\dfrac{3}{9}$, 所以 $DA=2$.

故选(A).

[**解 3**] 由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAD}+S_{\triangle DAB}$, 有
$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot AD\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot AD\cdot\sin 60^\circ,$$
解得 $\quad AD=2$.

故选(A).

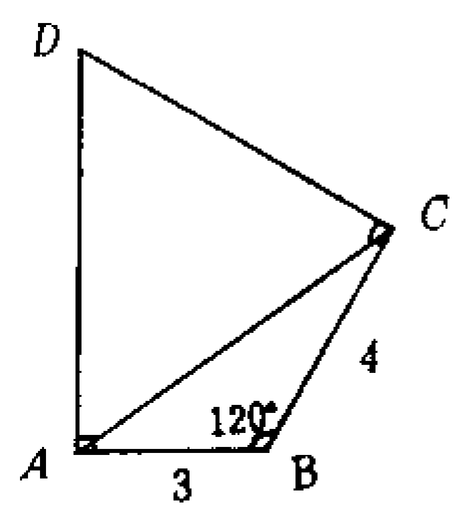
7·42 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=120^\circ$, $AB=3$, $BC=4$. 如果过 A 点作 AB 的垂线与过 C 点作 BC 的垂线交于 D,则 CD 等于

(A) 3. (B) $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. (C) 5. (D) $\dfrac{11}{2}$. (E) $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[**解**] 由余弦定理在 $\triangle ABC$ 中有
$$AC^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 120^\circ=37.$$

则 $AC = \sqrt{37}$.



若R为$\triangle ABC$外接圆半径,则 $AC = 2R\sin 120°$,

即 $$2R = \frac{AC}{\sin 120°} = \sqrt{37}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{37}}{\sqrt{3}}.$$

由 $\angle DAB = \angle BCD = 90°$,从而 BD 为三角形外接圆直径,即

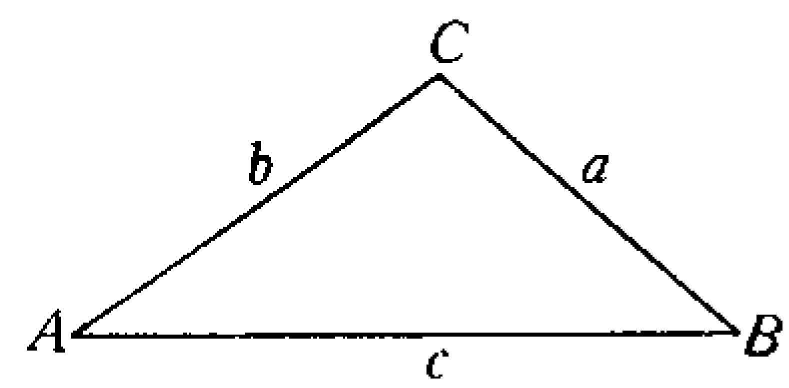
$$BD = 2R.$$

$$\therefore \quad CD^2 = BD^2 - BC^2 = \frac{4\cdot 37}{3} - 4^2 = \frac{100}{3}.$$

即 $$CD = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

故选(E).

7·43 在$\triangle ABC$中,$\angle C = 3\angle A$, $a = 27$,且 $c = 48$.则 b 等于



(A) 33. (B) 35. (C) 37.

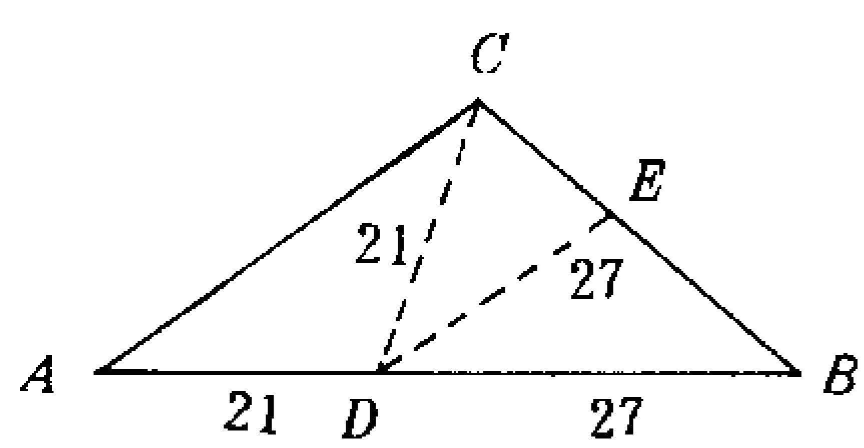
(D) 39. (E) b 的值不惟一.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解 1] 作 $\angle ACD = \angle A$, 则 $\angle BCD = \angle BDC = 2\angle A$.

$\therefore \quad BD = BC = 27$, 且 $CD = AD = 48 - 27 = 21$.

作 $\angle CDB$ 的平分线DE,则在$\triangle BDC$中,$\angle CDB$ 的平分线



$$DE = \sqrt{21\cdot 27\left[1 - \left(\frac{27}{21+27}\right)^2\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{21\cdot 27\cdot(16^2 - 9^2)}{16^2}}$$
$$= \frac{5\cdot 7\cdot 9}{16}.$$

又 $$\angle EDC = \angle ACD = \angle A,$$

$$\therefore \quad DE \,//\, AC.$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BD},$$

即 $$AC = \frac{DE\cdot AB}{BD} = \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 48}{16\cdot 27} = 35.$$

故选(B).

[解 2] 由正弦定理及题设有

$$\frac{\sin A}{27}=\frac{\sin 3A}{48},\quad 即\quad \frac{\sin A}{9}=\frac{\sin 3A}{16},$$

而 $$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A,$$

则 $$\frac{\sin A}{9}=\frac{\sin 3A}{16}\quad 化为\quad \frac{1}{9}=\frac{3-4\sin^2 A}{16}.$$

即 $36\sin^2 A=11$, $\therefore\ \sin A=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$ （$\because$ A 是锐角）.

由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即

$$27^2=b^2+48^2-2\cdot 48\cdot b\cdot\sqrt{1-\sin^2 A},$$

则 $$b^2-2\cdot 48\cdot b\cdot\frac{5}{6}+48^2-27^2=0,$$

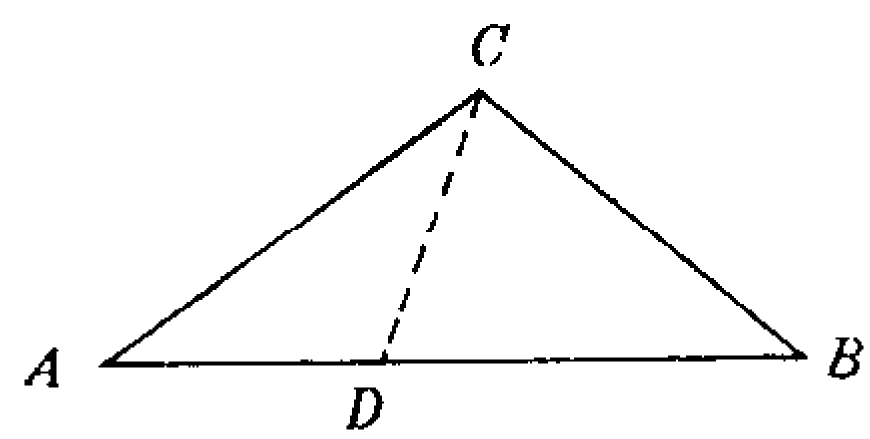
即 $$b^2-80b+1575=0,$$

解得 $$b_1=45,\quad b_2=35.$$

由 $CD+AD>AC$，知 45 不合，应舍去. 从而 $b=35$.

故选(B).

[解 3] 作 $\angle ACD=\angle A$，于是



$\angle DCB=2\angle A$, $\angle CDB=2\angle A$,

$\therefore$ $BD=BC=27$,

且 $CD=AD=21$.

则 $\cos\angle CDB=\dfrac{21^2+27^2-27^2}{2\cdot 21\cdot 27}=\dfrac{21}{54}=\dfrac{7}{18}$,

$\therefore$ $\cos\angle ADC=-\dfrac{7}{18}$，又由余弦定理得

$$\begin{aligned}b^2&=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC\\&=21^2+21^2+7^3=7^2(3^2+3^2+7)\\&=7^2\cdot 5^2,\end{aligned}$$

$\therefore$ $$b=35.$$

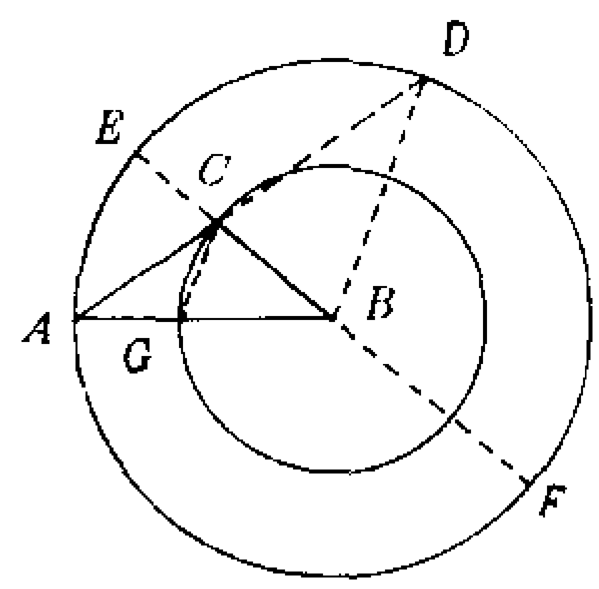
故选(B).

[解 4] 如图，以 B 为圆心，BC 为半径作圆，连 GC.

易证 $$\begin{aligned}\angle BGC=\angle BCG&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)\\&=\frac{1}{2}[180^\circ-(180^\circ-4\angle A)]\\&=2\angle A.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \angle GCA = \angle A$.

再以 B 为圆心，以 BA 为半径作圆，延长 AC，BC 与大圆相交于 D,E,F 点，连 BD. 可得 $\angle D = \angle A = \angle GCA$， 则有 $GC \parallel BD$.



$$\therefore \quad \frac{AC}{AD} = \frac{AG}{AB}, \quad 即 \quad \frac{b}{b+CD} = \frac{21}{48},$$

解得 $\quad CD = \dfrac{9}{7}b$.

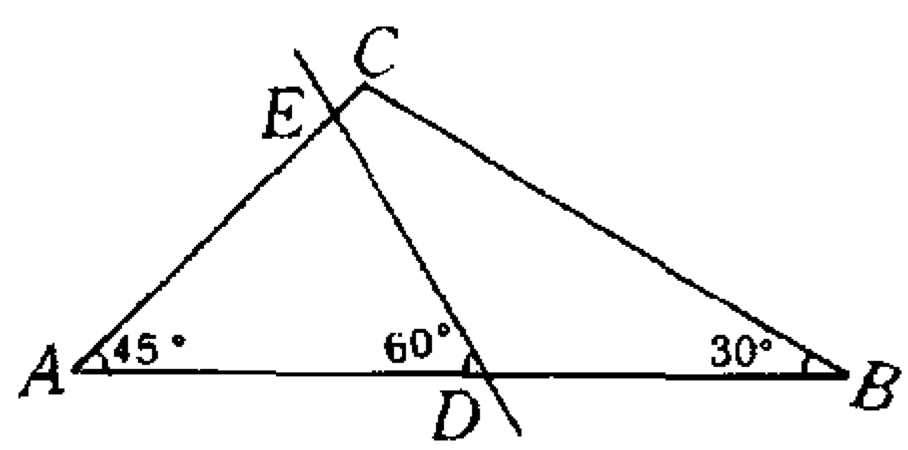
又 $\quad EC = 21, \quad CF = 75$. 由相交弦定理有

$$AC \cdot CD = EC \cdot CF, \quad 即 \quad CD = \frac{EC \cdot CF}{AC} = \frac{21 \cdot 75}{b}.$$

$$\therefore \quad \frac{9}{7}b = \frac{21 \cdot 75}{b}, \quad 得 \quad b^2 = 7^2 \cdot 5^2, \quad 即 \quad b = 35.$$

故选(B).

7·44　如右图，$\triangle ABC$ 中 $\angle A = 45^\circ$，$\angle B = 30^\circ$. 直线 DE 将 $\triangle ABC$ 分成等积的两部分，其中 D 在 AB 上且 $\angle ADE = 60^\circ$（注意：图不一定准确，E 也可能在 CB 上）. 那么比值 $\dfrac{AD}{AB}$ 是



(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.　　(B) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$.　　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$.　　(E) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}$.

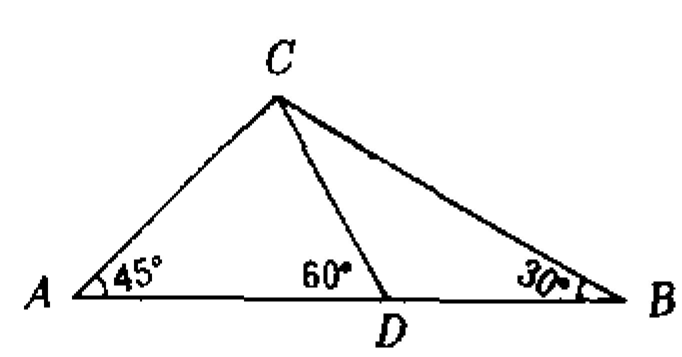
（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）

[解]　首先证明，将 $\triangle ABC$ 分成等积两部分的直线 DE 必与 AC 相交.

若不然，过 C 作 CD 使 $\angle CDA = 60^\circ$.

则 $\angle DCB = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$，

知 $\qquad CD = DB$.



又由 $\quad \angle ACD = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ > \angle CAD$，

则
$$AD > CD.$$

由 $S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{2} CD \cdot AD\sin 60^\circ$，

$$S_{\triangle CDB}=\frac{1}{2}CD\cdot DB\sin(180^\circ-60^\circ),$$

则 $\quad S_{\triangle ACD}>S_{\triangle CDB}$. 矛盾.

如题图,再设 $AB=1,\quad AD=\lambda,\quad$ 则

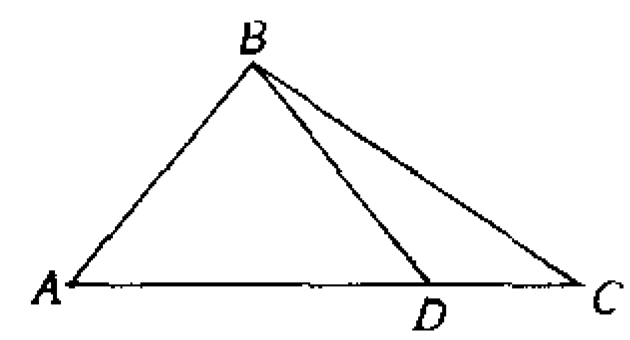
$$S_{\triangle ADE}=\frac{\sin45^\circ\sin60^\circ}{2\sin75^\circ}\lambda^2,\quad \text{且}\quad S_{\triangle ABC}=\frac{\sin45^\circ\sin30^\circ}{2\sin105^\circ}\cdot1^2,$$

又 $\quad\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{2},\quad$ 则 $\quad\dfrac{\sin45^\circ\sin60^\circ}{2\sin75^\circ}\cdot\dfrac{2\sin105^\circ}{\sin45^\circ\sin30^\circ}\lambda^2=\dfrac{1}{2}.$

即 $\quad\lambda^2=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{12}},\quad$ 则 $\quad\lambda=\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}.$

故选(E).

7·45 在$\triangle ABC$中,$AB=5,\quad BC=7,\quad AC=9,\quad D$为$AC$上一点且$BD=5$,于是$AD:DC$为



(A) 4 : 3. (B) 7 : 5.

(C) 11 : 6. (D) 13 : 5.

(E) 19 : 8.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 由题设及余弦定理在$\triangle BDC$和$\triangle ABC$中,有

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle C,$$

即 $\quad CD^2-14CD\cos\angle C+(7^2-5^2)=0,\qquad$ ①

同理 $\quad AC^2-14AC\cos\angle C+(7^2-5^2)=0.\qquad$ ②

由 ①,② 两式知,CD,AC 为方程

$$x^2-14\cos\angle C+24=0$$

的两个根,则由韦达定理知

$$AC\cdot CD=24,\quad \text{又 } AC=9,\quad \text{则 } CD=\frac{24}{9}=\frac{8}{3},$$

从而 $\qquad AD=9-\dfrac{8}{3}=\dfrac{19}{3}.$

$\therefore\qquad AD:CD=19:8.$

故选(E).

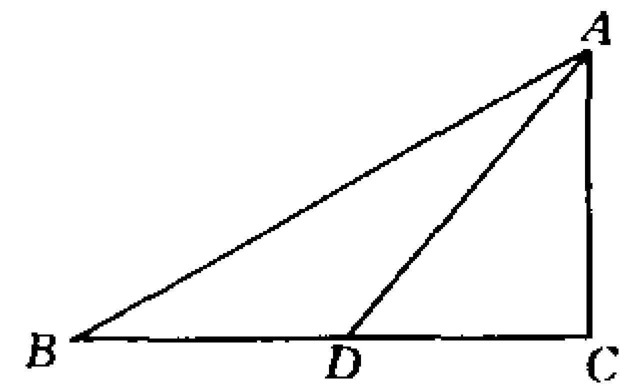
7·46 $\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,又$CB>CA$,点D在BC上且$\angle CAD=2\angle DAB$.若$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{2}{3}$,又$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{m}{n}$,其中$m,n$互质正整数,则$m+n=$

选择题卷

(A)10.　(B)14.　(C)18.　(D)22.　(E)26.

（第49届美国高中数学考试，1998年）

[解]　设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle DAC=2\alpha$，$\angle BAC=3\alpha$.



$$\frac{CD}{BD}=\frac{S_{\triangle}ACD}{S_{\triangle}ABD}=\frac{AC\sin2\alpha}{AB\sin\alpha}=\frac{AC}{AB}2\cos\alpha$$

$$=2\cos3\alpha\cos\alpha=8\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha,$$

$\because$　$\cos2\alpha=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{2}{3}$，即 $2\cos^2\alpha-1=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$　$\cos^2\alpha=\dfrac{5}{6}$.

则 $\dfrac{CD}{BD}=8\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-6\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{5}{9}=\dfrac{m}{n}$，知 $m+n=14$.

故选(B).

7·47　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，则 $\dfrac{AB-AC}{CD}$ 等于

(A) $\sin A$.　(B) $\cos A$.　(C) $\operatorname{tg}A$.　(D) $\operatorname{ctg}A$.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1985年）

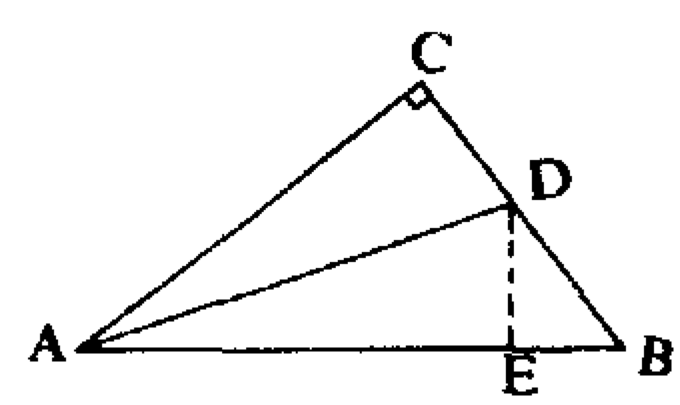
[解]　如图，作 $DE\perp AB$. 易证 $\triangle ACD\cong\triangle AED$.

由 $AC=AE$，知 $EB=AB-AC$.

且 $\angle EDB=\angle A$.

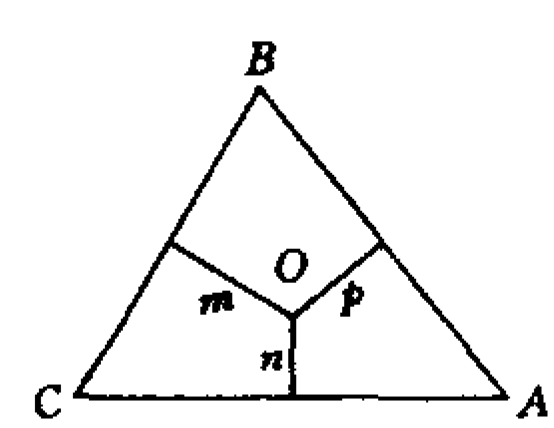
在 Rt$\triangle DEB$ 中，有

$$\frac{EB}{ED}=\operatorname{tg}\angle EDB=\operatorname{tg}A.$$



故选(C).

7·48　锐角 $\triangle ABC$ 的三边是 a,b,c，它的外心到三边的距离分别为 m,n,p. 那么，$m:n:p$ 等于



(A) $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$.

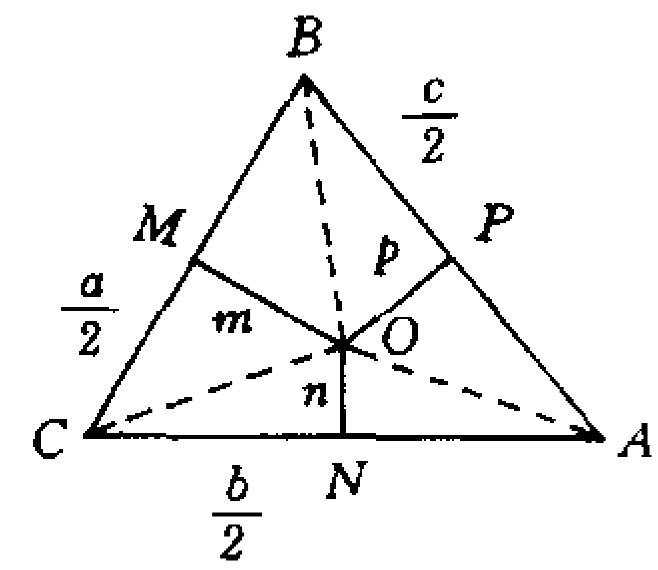
(B) $a:b:c$.

(C) $\cos A:\cos B:\cos C$.

(D) $\sin A : \sin B : \sin C$.

（中国初中数学联赛，1993 年）

[解 1] 连 OA, OB, OC，则 $OA = OB = OC = R$（外接圆半径）. 显然，由勾股定理我们有



$$m^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$n^2 = R^2 - \frac{b^2}{4},$$

$$p^2 = R^2 - \frac{c^2}{4},$$

故 $$m : n : p = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} : \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} : \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

（同除以 R）

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} : \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} : \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 A} : \sqrt{1 - \sin^2 B} : \sqrt{1 - \sin^2 C}$$

$$= \cos A : \cos B : \cos C.$$

这里注意到 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$，且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形即可.

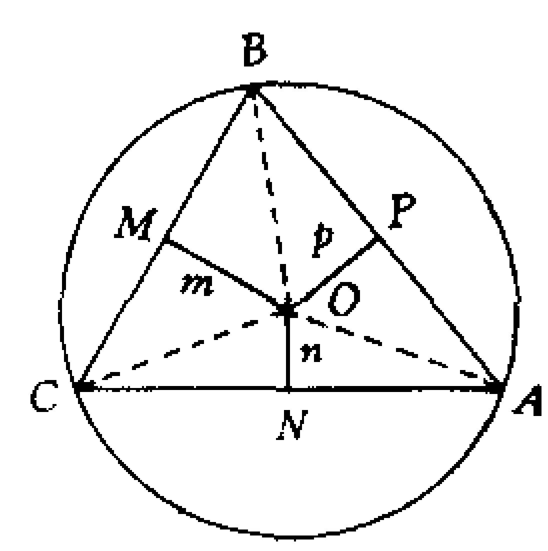
故选(C).

[解 2] 连 OA, OB, OC，显然

$$OA = OB = OC = R \text{（外接圆半径）}.$$

又 $\angle COB = 2\angle A$，而 OM 垂直且平分 BC，则 OM 平分 $\angle COB$.

在 $\text{Rt}\triangle COM$ 中，$\angle COM = \frac{1}{2}\angle COB = \angle A$，



则 $m = R\cos A$.

同理 $n = R\cos B$， $p = R\cos C$.

$\therefore$ $m : n : p = R\cos A : R\cos B : R\cos C$

$= \cos A : \cos B : \cos C$.

故选(C).

7·49 半径为 r 的圆，弦 AB, CD 的长分别为 10 和 7. AB 和 CD 的延长线交于圆外一点 P. 如果 $\angle APD = 60°$，$BP = 8$，则 r^2 为

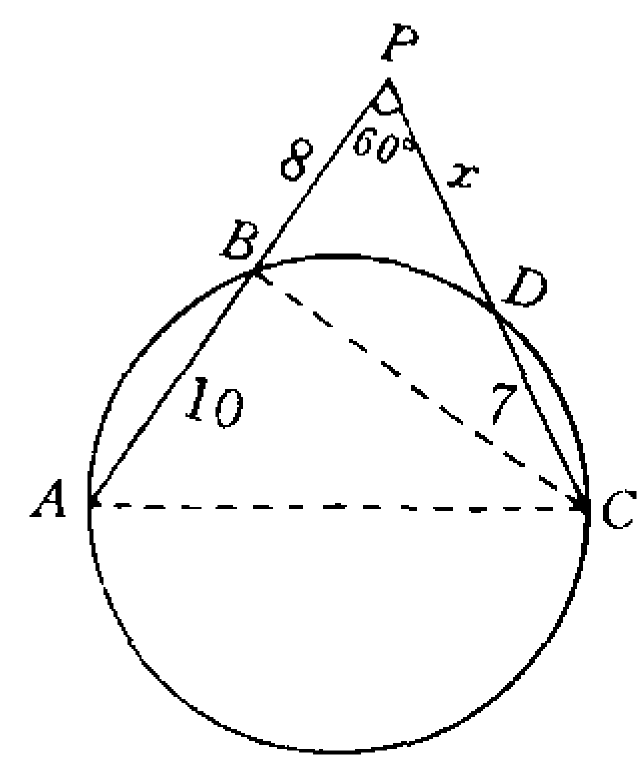
(A) 70.　　(B) 71.　　(C) 72.　　(D) 73.　　(E) 74.

（第43届美国高中数学考试，1992年）

[解]　设 $PD = x$. 由割线定理有

$$8 \cdot 18 = x \cdot (x+7),$$

得　$x = 9$(已舍负值).



连 BC，在 $\triangle PBC$ 中由余弦定理有

$$BC^2 = PC^2 + PB^2 - 2PC \cdot PB \cdot \cos 60°$$
$$= 16^2 + 8^2 - 16 \cdot 8 = 192.$$

连 AC，在 $\triangle APC$ 中再由余弦定理有

$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC \cdot \cos 60°$$
$$= 18^2 + 16^2 - 16 \cdot 18 = 292.$$

于是　$AC^2 = BC^2 + AB^2$，　则

$$\angle ABC = 90°.$$

知 AC 为圆的直径，因而　$r^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{292}{4} = 73.$

故选(D).

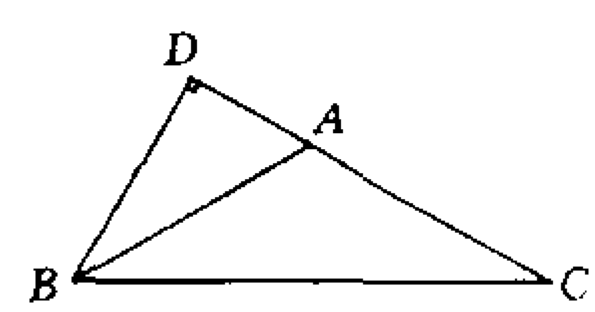
7·50　等腰 $\triangle ABC$ 中，一腰上的高线长为$\sqrt{3}$，这个高线与底边的夹角是60°，$\triangle ABC$ 的面积是

(A) $\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) 2.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(E) 非以上答案.

（中国北京市初中数学竞赛，1983年）

[解]　如图，由高 BD 与底BC 夹角为60°，可知，底角 $\angle C = 30°$，D 在CA 延长线上，



且　$BC = 2BD = 2\sqrt{3}$，同时 $AB = 2$.

所以　$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle ABC$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 30°$$
$$= \sqrt{3}.$$

故选(A).

7·51　$\angle A$ 为 $\triangle ABC$ 的一个内角，且 $\sin A + \cos A = \frac{7}{12}$. 则 $\triangle ABC$ 是

(A) 钝角三角形. (B) 锐角非等边三角形.

(C) 直角三角形. (D) 正三角形.

(E) 形状不能确定.

(中国北京市高中数学竞赛,1984 年)

[解] 由 $\sin A+\cos A=\frac{7}{12}$,两边平方,化简得:

$$2\sin A\cos A=-\frac{95}{144},$$

由于 $0^\circ<A<180^\circ$, 知 $\sin A>0$,

$\therefore$ $\cos A<0$, A 为钝角,$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选(A).

7·52 三角形中有一条边是另一条边的 2 倍,并且有一个角是 30°,那么这个三角形

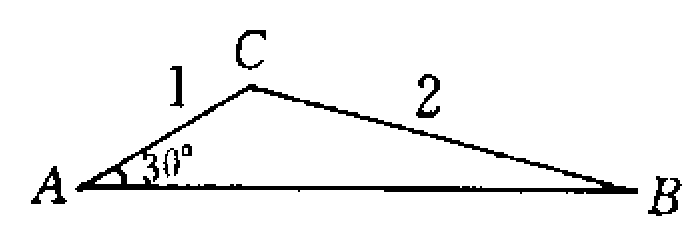
(A) 一定是直角三角形. (B) 一定是钝角三角形.

(C) 可能是锐角三角形. (D) 以上结论都不对.

(中国上海市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 设 $\triangle ABC$ 中,$a=2$, $b=1$.

(1) 若 $\angle A=30^\circ$,



$\because$ $b<a$, $\therefore$ $\angle B<\angle A$, 知

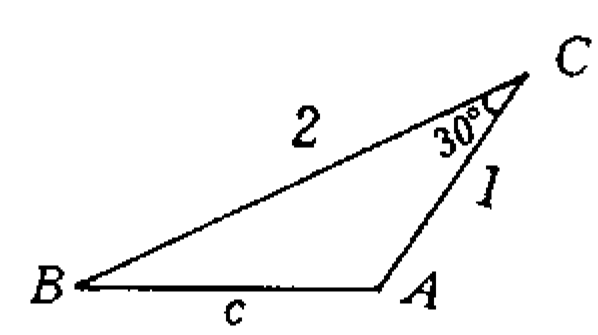
$\angle B<30^\circ$.

因而 $\angle C>120^\circ$,即 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,则否(A).

(2) 若 $\angle B=30^\circ$, 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin A=1$,

知 $\angle A=90^\circ$. 可否(B).

(3) 若 $\angle C=30^\circ$,由余弦定理可求得 $c>b$,



因而 $\angle B<\angle C$. 有 $\angle A>120^\circ$.

综上,$\triangle ABC$ 不能是锐角三角形.则否(C).

故选(D).

7·53 在 $\triangle ABC$ 中,若 $2\sin A\cos B=\sin C$,则此三角形是

(A) 等腰三角形. (B) 直角三角形.

(C) 不等边三角形. (D) 等边三角形.

(中国安徽省芜湖市初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由 $A+B+C=180^\circ$, 则 $\sin C=\sin(A+B)$.

又由题设则有 $\sin(A+B)=2\sin A\cos B$,即

$$\sin A\cos B=\cos A\sin B,\quad 或\quad \text{tg}A=\text{tg}B.$$

$\because \quad 0°<A,B<180°,\ \therefore\quad A=B.$

故选(A).

7·54　在$\triangle ABC$中,若$AB=2BC$,$\angle B=2\angle A$,则$\triangle ABC$是

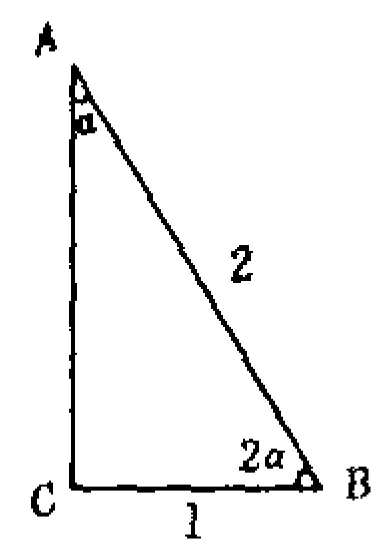
(A) 锐角三角形.　　　　(B) 直角三角形.

(C) 钝角三角形.　　　　(D) 不能确定.

(中国四川省初中数学竞赛,1992年)

[解]　由设及正弦定理有

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{2}{\sin(180°-3A)},$$



即　　$2\sin A=\sin 3A$,

或　　$2\sin A=3\sin A-4\sin^3 A$,

则　　$\sin A(1-4\sin^2 A)=0$,

有　　$\sin A=0\quad 或\quad 1-4\sin^2 A=0.$

解得　$\angle A=0°$(舍去)　或　$\angle A=30°$.

则　$\angle B=60°$,因而$\triangle ABC$是$30°$-$60°$-$90°$的直角三角形.

故选(B).

7·55　若三个实数$x<y<z$,满足$y-x=z-y$,则称x,y,z为一个"等差数组".对$\triangle ABC$中,记$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,又a,b,c的对角依次记为A、B、C,已知a,b,c是一个"等差数组",则必有

(A) A,B,C是"等差数组".

(B) $\cos A,\cos B,\cos C$是"等差数组".

(C) $\sin A,\sin B,\sin C$是"等差数组".

(D) $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$是"等差数组".

(中国北京市高中数学竞赛,1990年)

[解]　由正弦定理有　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore\quad a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C,$

又　由设知　$2b=a+c$,

则　$4R\sin B=2R\sin A+2R\sin C$,

即　　$$2\sin B=\sin A+\sin C.$$

故选(C).

7·56　如果三角形三边 a,b,c 所对的角分别是 A,B,C,且满足 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$,那么这个三角形一定是

(A) 等边三角形.　　　　　　　(B) 以 a 为斜边的直角三角形.

(C) 以 b 为斜边的直角三角形.　(D) 非上述答案.

(上海市初中数学竞赛,1983 年)

[解 1]　由题设及余弦定理有

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab},$$

即　$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$,

则　$(a^2-b^2)^2=c^4$,　或　$a^2=b^2\pm c^2$.

若 $a^2=b^2+c^2$,则三角形是以 a 为斜边的直角三角形;

若　$a=b^2-c^2$,则三角形是以 b 为斜边的直角三角形.

故选(D).

[解 2]　由题设等式知其关于 a,A 和 b,B 对称,则若(B)对,(C)也对,不妥.

又若(A)对,则 $A=B=C=60°$,且 $a=b=c$,这样题设等式变为 $2=1$,矛盾.

故选(D).

7·57　在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别记为 $a,b,c(b\neq 1)$,且 $\frac{C}{A},\frac{\sin B}{\sin A}$ 都是方程 $\log_{\sqrt{b}}x=\log_b(4x-4)$ 的根,则 $\triangle ABC$

(A) 是等腰三角形,但不是直角三角形.

(B) 是直角三角形,但不是等腰三角形.

(C) 是等腰直角三角形.

(D) 不是等腰三角形,也不是直角三角形.

(中国高中数学联赛,1992 年)

[解]　由已知方程得 $\log_b x^2=\log_b(4x-4)$,

故有　$x^2-4x+4=0$,　解得　$x_1=x_2=2$.

$\therefore$　$C=2A$,　而且　$\sin B=2\sin A$,　有　$b=2a$.

又 $\because$　$A+B+C=180°$,

$\therefore$　$3A+B=180°$,

则 $\sin B = \sin 3A = 2\sin A$,

$\therefore$ $3\sin A - 4\sin^3 A = 2\sin A$, 即 $\sin A(1 - 4\sin^2 A) = 0$.

$\because$ $\sin A \neq 0$,

$\therefore$ $1 - 4\sin^2 A = 0$, 得 $\sin A = \dfrac{1}{2}$ (注意到 $\sin A > 0$).

$\therefore$ $A = 30°$, $C = 60°$, $B = 90°$.

故选(B).

7·58 某三角形三边长分别为 a,b,c,且$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$.那么长度为 c 的边所对的角的角度为

(A) 15°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 60°. (E) 150°.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年;
"祖冲之杯"初中数学邀请赛,1988 年)

[解] 设 θ 是此三角形中长度为 c 的边所对的角.

由题设$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$,

即 $$(a+b)^2 - c^2 = 3ab,$$

或 $$a^2 + b^2 - ab = c^2.$$

又由余弦定理有 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$,

所以 $$ab = 2ab\cos\theta.$$

即 $$\cos\theta = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \theta = 60°.$$

故选(D).

7·59 在 $\triangle ABC$ 中,若$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$,且 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$,则 $\triangle ABC$ 的各角为

(A) 40°,60°,80°. (B) 60°,60°,60°.

(C) 30°,60°,90°. (D) 45°,45°,90°.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1990 年)

[解 1] 由 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 及

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R},$$

故 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$,

因而 $a^2 = b^2 + c^2$.

又由题设$(a+b)^2-c^2=3ab$,将上式代入化简后得

$$2b^2=ab,\quad 即\quad b=\frac{1}{2}a.$$

因而此三角形为 30°-60°-90° 的三角形.

故选(C).

[解 2] 由题设得 $(a+b)^2-c^2=3ab$,

即有 $a^2+b^2-c^2=ab$.

$$\therefore\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2},$$

得 $C=60°$, 故 $A+B=120°$.

又 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C=\sin^2B+(1-\cos^2C)=\sin^2B+\frac{3}{4}$,

即
$$(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)=\frac{3}{4},$$

或
$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\therefore\quad 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{3}{4},$$

得
$$\sin(A-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$ $A-B=60°$,又 $A+B=120°$, 得 $A=90°,B=30°$.

故选(C).

7·60 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle A=45°,\angle B=60°,BC=1$,则 $\triangle ABC$ 的面积是

(A) $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$. (B) $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$. (C) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

(D) $\frac{3+\sqrt{3}}{8}$. (E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{8}$.

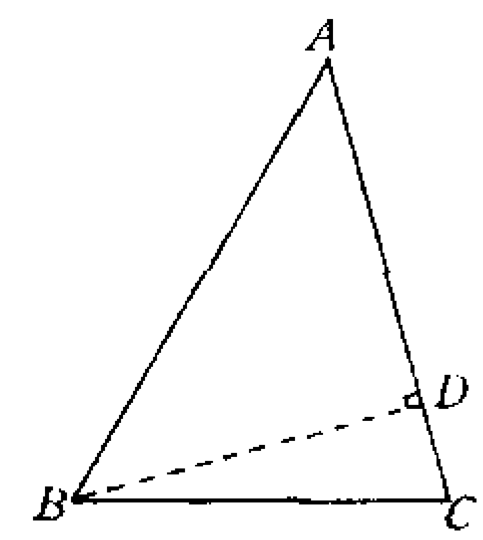
(中国部分省、市初中数学通讯赛,1986 年)

[解] 作 $BD\perp AC$,D 为垂足,在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得

$$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

在 Rt$\triangle BDC$ 中,

$$BD=\sin 75°=\cos 15°=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$



$$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{3(4+2\sqrt{3})}}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{3(\sqrt{3}+1)^2}}{8} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$$
$$= \frac{3+\sqrt{3}}{8}.$$

故选(D).

7·61 设 a,b,c 和 d 分别是四边形 $MNPQ$ 的边 MN,NP,PQ 和 QM 的边长.若 A 是 $MNPQ$ 的面积,那么

(A) 当且仅当 $MNPQ$ 是凸四边形时,$A = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

(B) 当且仅当 $MNPQ$ 是矩形时,$A = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

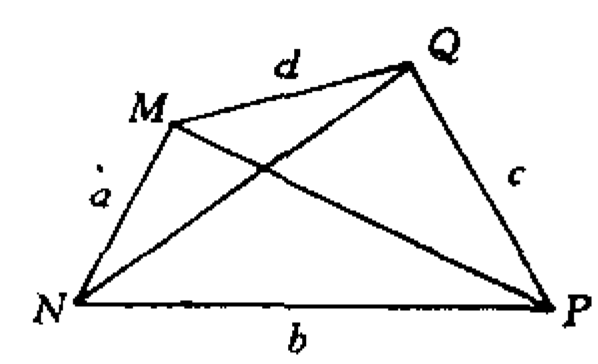
(C) 当且仅当 $MNPQ$ 是矩形时,$A \leqslant \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

(D) 当且仅当 $MNPQ$ 是平行四边形时,$A \leqslant \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

(E) 当且仅当 $MNPQ$ 是平行四边形时,$A \geqslant \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 因为 A 是对角线 MP 将 $MNPQ$ 分成的两个三角形的面积之和,即



$$A = \frac{1}{2}ab\sin N + \frac{1}{2}cd\sin Q,$$

同样 $A = \frac{1}{2}ad\sin M + \frac{1}{2}bc\sin P.$

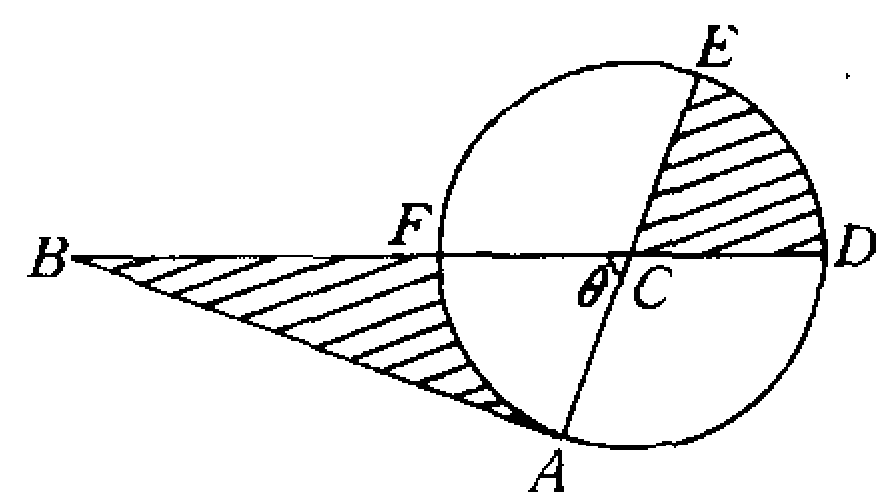
上两式相加,且注意到 $0 < \sin Q \leqslant 1 \quad (0° < Q < 180°)$.

所以 $A \leqslant \frac{1}{4}(ab+cd+ad+bc) = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$.

当且仅当 $\sin M = \sin N = \sin P = \sin Q = 1$ 时,等号成立.也就是说当且仅当 $MNPQ$ 是矩形时等式成立.

故选(B).

7·62　在图示的图形中，θ 按弧度测量，C 是圆心，BCD 和 ACE 是直线段，而 AB 是圆在点 A 的切线. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，则两块阴影区域面积相等的必要充分条件是



(A) $\mathrm{tg}\theta = \theta$.　　(B) $\mathrm{tg}\theta = 2\theta$.　　(C) $\mathrm{tg}\theta = 4\theta$.

(D) $\mathrm{tg}2\theta = \theta$.　　(E) $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \theta$.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

[解]　依题意有

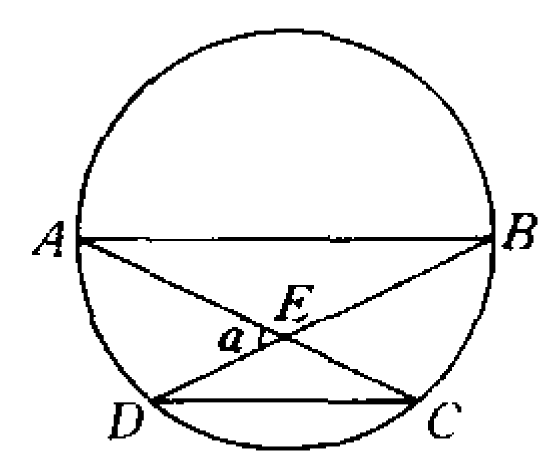
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2}\cdot r \cdot r\mathrm{tg}\theta = \frac{1}{2}r^2\mathrm{tg}\theta,$$

$$S_{阴影ABF} = \frac{1}{2}r^2\mathrm{tg}\theta - \frac{1}{2}r^2\theta, \quad S_{阴影ECD} = \frac{1}{2}r^2\theta,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}r^2\mathrm{tg}\theta - \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\theta \Longleftrightarrow \mathrm{tg}\theta = 2\theta.$$

故选(B).

7·63　如图，AB 是圆的直径，CD 是与 AB 平行的一条弦，而 AC 与 BD 相交于 E，且 $\angle AED = \alpha$，$\triangle CDE$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之比是



(A) $\cos\alpha$.　　(B) $\sin\alpha$.　　(C) $\cos^2\alpha$.

(D) $\sin^2\alpha$.　　(E) $1 - \sin\alpha$.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

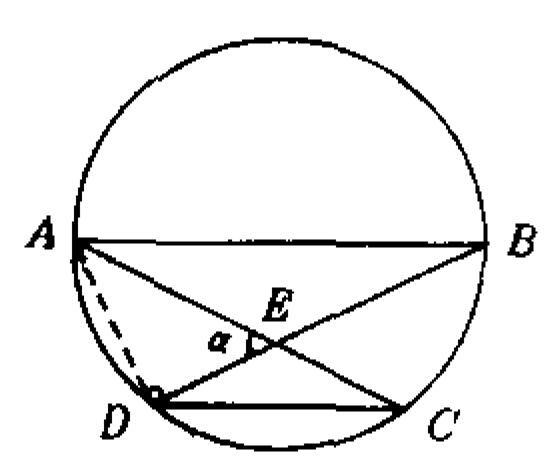
[解]　由题设 $\triangle CDE \backsim \triangle ABE$，

$\therefore \quad S_{\triangle CDE} : S_{\triangle ABE} = ED^2 : EB^2$，

注意到 $EB = AE$（$\because AB$、CD 是平行弦），

$\therefore \quad S_{\triangle CDE} : S_{\triangle ABE} = ED^2 : AE^2$.

连 AD，　则 $\angle ADE = 90°$，



$$\therefore \quad \frac{DE}{AE} = \cos\alpha,$$

则
$$S_{\triangle CDE} : S_{\triangle ABE} = \cos^2\alpha.$$

故选(C).

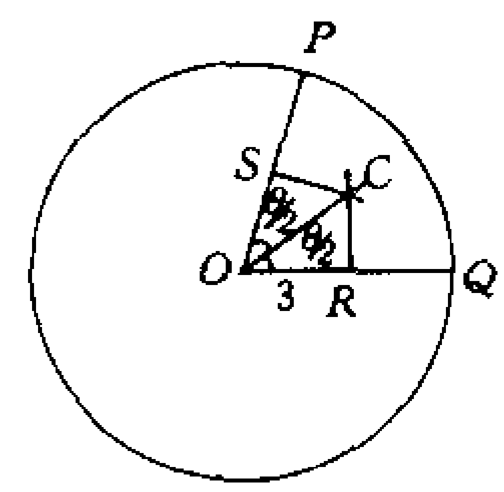
7·64　从一个半径是 6 的圆中截得一个圆心角是锐角 θ 的扇形.

关于这个扇形外接圆的半径是

(A) $3\cos\theta$. (B) $3\sec\theta$. (C) $3\cos\frac{1}{2}\theta$. (D) $3\sec\frac{1}{2}\theta$. (E) 3.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解] C 是扇形 POQ 外接圆的圆心,即 OP,OQ 的垂直平分线 SC 和 RC 的交点.



在 $\triangle ORC$ 中可有

$$\sec\frac{\theta}{2}=\frac{OC}{3}\quad 或\quad OC=3\sec\frac{\theta}{2}.$$

故选(D).

7·65 半径为 13 和半径为 5 的两个圆相交,圆心距为 12,则这两圆公共弦长为

(A) $3\sqrt{11}$. (B) $\frac{65}{6}$. (C) $4\sqrt{6}$.

(D) 10. (E) 以上结论都不对.

(中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 设大圆的半径(两圆交点到圆心)与连心线的夹角为 α,显然 $\alpha<90^\circ$,于是

$$\cos\alpha=\frac{13^2+12^2-5^2}{2\cdot12\cdot13}=\frac{12}{13},\quad \sin\alpha=\frac{5}{13}.$$

从而公共弦长为 $2\cdot13\cdot\sin\alpha=2\cdot13\cdot\frac{5}{13}=10.$

故选(D).

7·66 如图,点 A,B,C,D 在一直径为 1 的圆上,点 X 在直径 AD 上,如果 $BX=CX$, $3\angle BAC=\angle BXC=36^\circ$,那么,$AX$ 等于

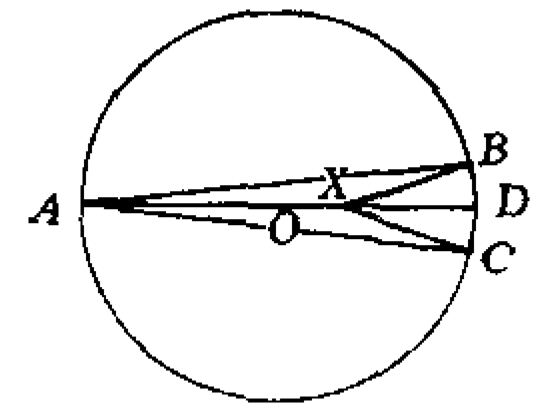
(A) $\cos6^\circ\cos12^\circ\sec18^\circ$.

(B) $\cos6^\circ\sin12^\circ\csc18^\circ$.

(C) $\cos6^\circ\sin12^\circ\sec18^\circ$.

(D) $\sin6^\circ\sin12^\circ\csc18^\circ$.

(E) $\sin6^\circ\sin12^\circ\sec18^\circ$.



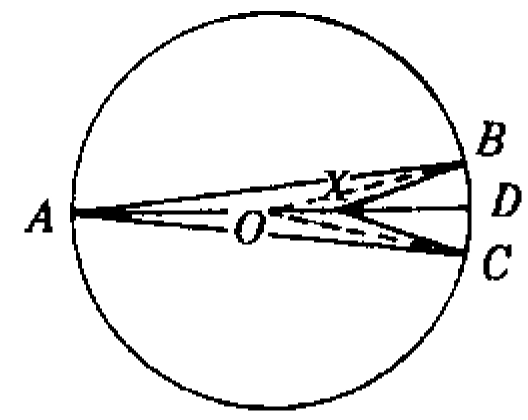
(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解] 因为 $2\angle BAC\neq\angle BXC$,所以 X 不是圆心.设圆心为 O,连 OB,OC,则

$\triangle OXB\cong\triangle OXC$.从而可得

$\angle BXD = \angle CXD$,

$\angle BAX = \angle CAX$.



因为 $\angle ABD = 90^\circ, AD = 1$,

则 $AB = AD\cos\angle BAD = \cos\frac{1}{2}\angle BAC = \cos 6^\circ$.

注意到 $\angle AXB = 162^\circ, \angle ABX = 12^\circ$,由正弦定理,有

$$\frac{AB}{\sin\angle AXB} = \frac{AX}{\sin\angle ABX}.$$

所以 $\dfrac{\cos 6^\circ}{\sin 162^\circ} = \dfrac{AX}{\sin 12^\circ}$.

因为 $\sin 162^\circ = \sin 18^\circ$,

则有 $$AX = \frac{\cos 6^\circ \sin 12^\circ}{\sin 18^\circ} = \cos 6^\circ \sin 12^\circ \csc 18^\circ.$$

故选(*B*).

第3节　一般函数

7·67　已知 $\sqrt{(2-3|x|)^2} = 2+3x$,则 x 的取值范围是

(A) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$.　　(B) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 0$.

(C) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$.　　(D) $x \leqslant -\frac{2}{3}$ 或 $x \geqslant \frac{2}{3}$.

(中国湖北黄冈地区初中数学竞赛,1991 年)

[解]　由已知有 $|2-3|x|| = 2+3x$,

故 $$2+3x \geqslant 0.$$

即 $x \geqslant -\frac{2}{3}$,　且　$x \leqslant 0$ 时有　$2-3|x| = 2+3x$.

而　$x > 0$ 时,　$2-3|x| \neq 2+3x$,　$3|x|-2 \neq 2+3x$.

综上 $$-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 0,$$

故选(*B*).

7·68　已知 $y = ax^5 + bx^3 + cx - 5$,当 $x = -3$ 时,$y = 7$,那么当 $x = 3$ 时 y 的值是

(A) -3.　　(B) -7.　　(C) -17.　　(D) 7.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1984 年;
中国安徽省初中数学竞赛,1997 年)

［解］ 令 $f(x)=ax^5+bx^3+cx$，则

$$f(-x)=-f(x).$$

由 $x=-3$ 时，$y=7$，即 $f(-3)-5=7$，知 $f(-3)=12$，

而
$$f(3)=-f(-3)=-12.$$

所以 $x=3$ 时，$y=f(3)-5=-17$.

故选(C).

7·69 若方程 $\sqrt{x-p}=x$ 有两个不相等的实根，则实数 p 的取值范围是

(A) $p\leqslant 0$.　　(B) $p<\frac{1}{4}$.

(C) $0\leqslant p<\frac{1}{4}$.　　(D) $p\geqslant\frac{1}{4}$.

(中国初中数学联赛，1994年)

［解］ 令取 $p=-1$，代入原方程得 $\sqrt{x+1}=x$，

即 $x^2-x-1=0$. 此时方程有一个负根，于是可排除(A)，(B).

取 $p=1$，代入原方程得 $x^2-x+1=0$，其无解，故排除(D).

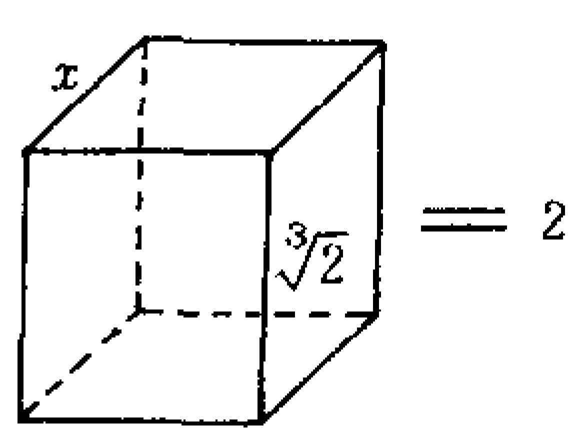
故选(C).

7·70 若 x,y 都是实数，且 $x^3+y^3=2$，则 $x+y$ 的取值范围是

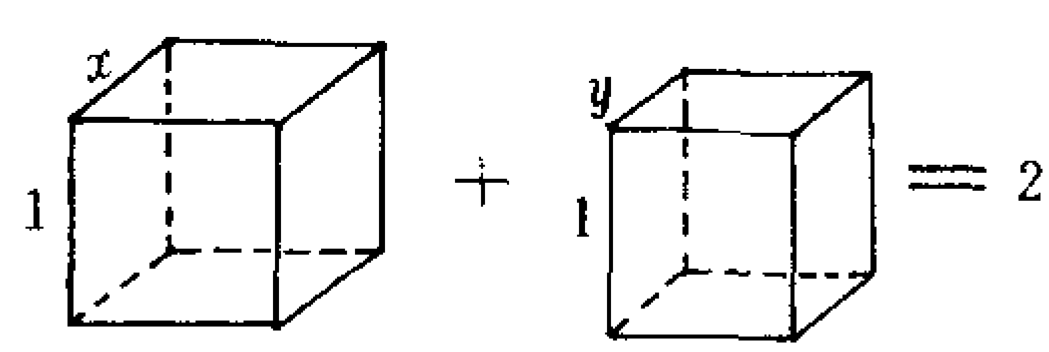
(A) $(-\infty,\ 2)$.　　(B) $[-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}]$.

(C) $(0,\ 2]$.　　(D) $(2,\ +\infty)$.

(中国北京市高中数学竞赛，1993年)



①



②

[**解 1**]　分两种情况考虑:

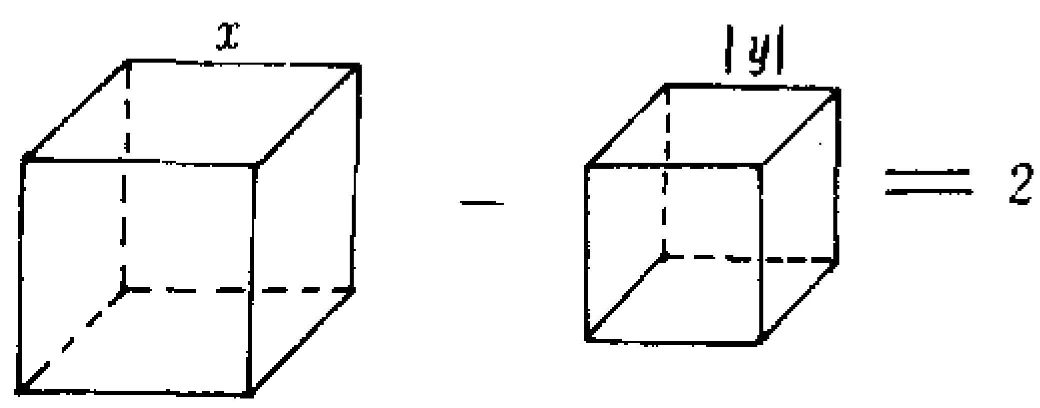
(1)若 $x \geqslant y \geqslant 0$，$x^3, y^3$ 相当于棱长分别为 x, y 的立方体体积，对于它们体积和为 2 的立方体来讲，再考察两种极端的情形:

①$x = \sqrt[3]{2}$，$y = 0$，此时 $x + y = \sqrt[3]{2}$;

②$x = y = 1$，此时 $x + y = 2$.

这样　$x + y$ 界于 $\sqrt[3]{2}$ 与 2 之间变化.

(2) 若 $x > 0, y < 0$，此时 $x^3 + y^3$ 相当于棱长分别为 x，$|y|$ 的两个立方体体积之差.



容易分析到：当 x，$|y|$ 很大时，$x - |y| = x + y$ 可以很小，但 $x + y > 0$.

综上，$x + y \in (0,2]$.

故选(C).

[**解 2**]　由设 $x^3 + y^3 = 2$,

即　$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2,$$

所以　$$x + y = \frac{2}{x^2 - xy + y^2}.$$

若 $x > 0, y > 0$，则当 $x = y = 1$ 时，$(x + y)_{\max} = 2$.

若 $x > 0, y < 0$，由设 $x = \sqrt[3]{2 - y^3}$,

又　$$\lim_{y \to -\infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{2 - y^3})^2 - y(\sqrt[3]{2 - y^3}) + y^2} = 0.$$

故　$x + y \in (0,2]$.

故选(C).

[**解 3**]　记 $x + y = t$，由设有 $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2$,

即　$$3tx^2 - 3xt^2 + t^3 - 2 = 0,$$

$\because$ $x \in R$，$\therefore$ $\Delta = 9t^4 - 4 \cdot 3 \cdot t(t^3 - 2) \geqslant 0$,

即　$3t^4 - 4t^4 + 8t \geqslant 0$，或　$t(t^3 - 8) \leqslant 0$,

$\therefore$　$$t(t - 2)(t^2 + 2t + 4) \leqslant 0.$$

而　$t^2 + 2t + 4 > 0$ 恒成立 $(t \in R)$,

$\therefore \quad t(t-2) \leqslant 0, \quad$ 即 $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2.$

而 $\quad t=0 \quad$ 时 $\quad x=-y, \quad$ 则 $\quad x^3+y^3=0$ 与题设矛盾.

从而 $\quad 0<t \leqslant 2.$

故选(C).

[解 4] 易推得 $x+y=\dfrac{2}{x^2-xy+y^2}$,

$\because \quad x^2-xy+y^2>0, \quad \therefore \quad x+y>0$,从而可否$(A)$,$(B)$.

又若取 $x=0, y=\sqrt[3]{2}$ 时, $\quad x+y=\sqrt[3]{2} \in (0,2]$ 可否(D).

故选(C).

7·71 定义在区间$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(A) 是增函数. (B) 是减函数.

(C) 是先减后增的函数. (D) 是先增后减的函数.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 设 $0<x_1<x_2$,则由

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=(x_2-x_1)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right),$$

当 $\quad 0<x_1<x_2 \leqslant 1$ 时, $\quad f(x_2)<f(x_1)$;

而 $\quad 1 \leqslant x_1<x_2$时, $\quad f(x_2)>f(x_1)$.

因此 在区间$(0,1]$上,$f(x)$是减函数;在区间$[1,+\infty)$上,$f(x)$是增函数.

故选(C).

7·72 $f(x)$是定义在全体实数上的非常数函数,则

$$F(x)=f(x)-f(-x)$$

(A) 是奇函数. (B) 是偶函数.

(C) 既是奇函数也是偶函数. (D) 既不是奇函数也不是偶函数.

(中国北京市高中数学竞赛,1990 年)

[解] 由 $F(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)$

$$=-[f(x)-f(-x)]=-F(x),$$

$\therefore \quad F(x)$是奇函数.

故选(A).

7·73 若函数$f(x)$对所有实数x满足:$f(2+x)=f(2-x)$且$f(5+x)=f(5-x)$,则函数$f(x)$的周期为

(A)2.　　(B)5.　　(C)6.　　(D)7.

（中国四川省高中数学竞赛，1993 年）

[解]　由设当 $x=2$ 和 $x=5$ 时分别有

$f(2+2)=f(2-2)$ 即 $f(4)=f(0)$，

$f(5+5)=f(5-5)$ 即 $f(10)=f(0)$.

从而 $f(10)=f(4)$，即 $f(4+6)=f(4)$，

知 6 是函数 $f(x)$ 的周期，又 $f(x)$ 无更小的周期（$\because 6=2\times 3$，显然 2,3 均不是 $f(x)$ 的周期），

则 $f(x)$ 的周期为 6.

故选(C).

7·74　对于 $x\in R$，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$，则它是周期函数，对这类函数的共同最小周期是

(A)8.　　(B)12.　　(C)16.　　(D)24.　　(E)32.

（第 48 届美国高中数学考试，1997 年）

[解]　将 $x-4$ 视为 x 代入题设等式有：

$$f(x)+f(x-8)=f(x-4)$$

将上式代回题设式子可有

$$f(x+4)+f(x)+f(x-8)=f(x)$$

$$\therefore \quad f(x+4)=-f(x-8), \tag{*}$$

用 $x+8$ 代入(*)式 x 这样有　$f(x)=-f(x+12)$.

同样将 x 用 $x+20$ 代入(*)式有

$$f(x+24)=-f(x+12).$$

综上　$f(x)=-f(x+12)=f(x+24)$.

若 $f(x)$ 有更小的周期 T，它应为 24 的约数，代入题设式子均不妥. 知最小周期为 24.

故选(D).

7·75　设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，且满足下列关系：

$$f(10+x)=f(10-x),\ f(20-x)=-f(20+x).$$

则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数，又是周期函数.　(B) 偶函数，但不是周期函数.

(C) 奇函数，又是周期函数.　(D) 奇函数，但不是周期函数.

（中国高中数学联赛，1992 年）

[**解 1**] 由题设有 $f[10+(10-x)]=f[10-(10-x)]$,

即 $$f(x)=f(20-x).$$

又 $$f(20-x)=-f(20+x)=f(x),$$

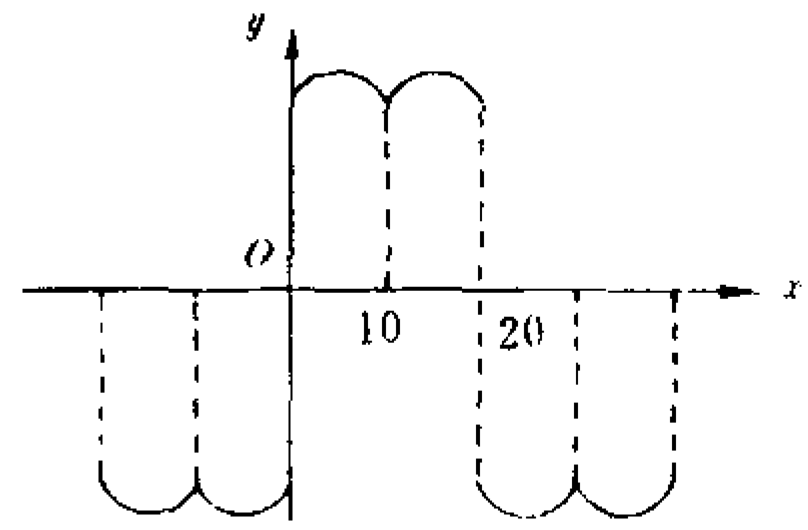
则 $$f(40+x)=f[20+(20+x)]$$
$$=-f(20+x)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是以 40 为周期的周期函数.

又 $f(-x)=f(20+x)=-f(x)$,

知 $f(x)$ 是奇函数.

故选(C).



[**解 2**] 题设函数图像如右图.

显然 $f(x)$ 是奇周期函数.

故选(C).

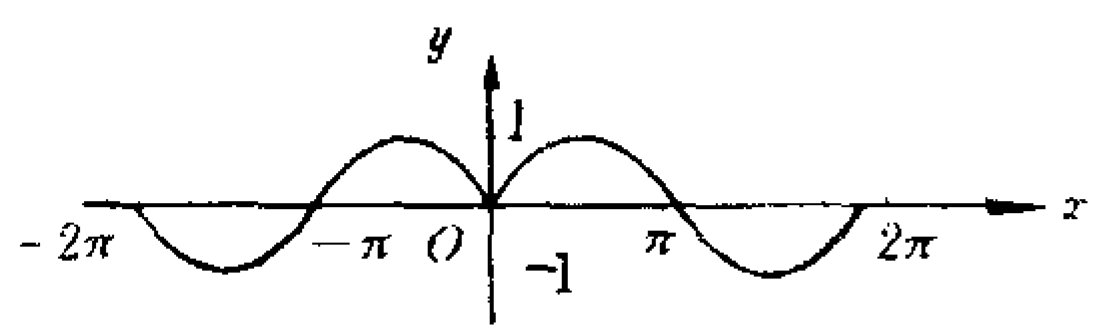
7·76 下列四个函数中,既是偶函数又是周期函数的函数是

(A) $|\sin x|$. (B) $|\log_2 x|$. (C) $\sin|x|$. (D) $\log_2|x|$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[**解**] 由 $|\log_2 x|$,$\log_2|x|$ 均不是周期函数,故否(B),(D).

注意到(C)的图像如图,知其亦非周期函数.



故选(A).

7·77 给出五个函数:

(1)$f(x)=0, x\in R$;

(2)$f(x)=x^2, -3<x\leqslant 3$;

(3)$f(x)=\log_2|x|,\quad x\neq 0,\quad x\in R$;

(4)$f(x)=(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n},\quad x\in R,\ n\in N$;

(5)$f(x)=\sin(\sin x),\ x\in R$.

其中,奇函数的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[**解**] 对于(1):由 $f(-x)=-f(x)=0$,则(1)可看成奇函数;

又对于(4) $f(-x)=[1+(-x)]^{2n}-[1-(-x)]^{2n}$

$$=-[(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}]$$

$$=-f(x),\ (x\in R,\quad n\in N)$$

则(4)是奇函数.

且对于(5) $f(-x)=\sin[\sin(-x)]=\sin(-\sin x)$

$$=-\sin\sin x=-f(x),$$

则(5)是奇函数.

同时,(2),(3)均非奇函数.

故选(C).

7·78 若 $a>0$, $a\neq 1$, $F(x)$是一奇函数,则下面函数

$$G(x)=F(x)\cdot\left[\frac{1}{a^{x}-1}+\frac{1}{2}\right]$$

的奇偶性结论是

(A) 奇函数. (B) 偶函数.

(C) 不是奇函数也不是偶函数.

(D) 奇偶性与 a 的具体数值有关.

(中国高中数学联赛,1984年)

[解] $\because$ $F(x)$是奇函数, $\therefore$ $F(-x)=-F(x)$.故

$$G(-x)=F(-x)\left[\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right]=-F(x)\left[\frac{1}{\frac{1}{a^{x}}-1}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=-F(x)\left[\frac{a^{x}}{1-a^{x}}+\frac{1}{2}\right]=-F(x)\left[\frac{2a^{x}+1-a^{x}}{2(1-a^{x})}\right]$$

$$=-F(x)\left[\frac{a^{x}+1}{2(1-a^{x})}\right]=F(x)\left[\frac{a^{x}-1+2}{2(a^{x}-1)}\right]$$

$$=F(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a^{x}-1}\right)=G(x).$$

故选(B).

7·79 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(x为自变量,k为非零非1常数)的图像是轴对称图形,它的对称轴是下列哪个正比例函数

(A) $y=\frac{-k}{|k|}x$. (B) $y=|k|x$.

(C) $y=-kx$. (D) $y=kx$.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年)

[解] ∵ $y=\frac{k}{x}$ 的对称轴有两条 $y=\pm x$.

又∵ $$y=\frac{-k}{|k|}x=\pm x,$$

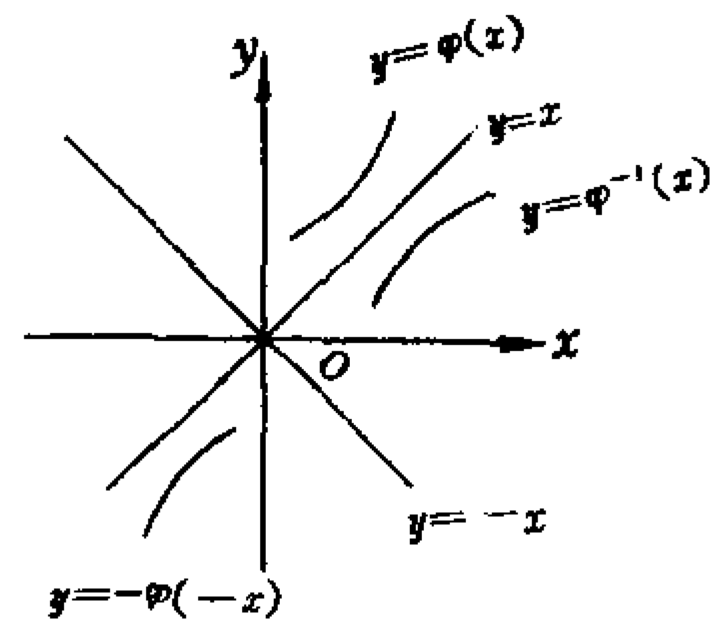
故选(A).

7·80 设有三个函数,第一个是 $y=\varphi(x)$,它的反函数就是第二个函数,而第三个函数的图像与第二个函数的图像关于直线 $x+y=0$ 对称,那么第三个函数是

(A) $y=-\varphi(x)$. (B) $y=-\varphi(-x)$.

(C) $y=-\varphi^{-1}(x)$. (D) $y=-\varphi^{-1}(-x)$.

(中国高中数学联赛,1988 年)



[解] 第二个函数是 $y=\varphi^{-1}(x)$,由图易知,第三个函数与第一个函数关于原点成中心对称.

即 $$y=-\varphi(-x).$$

故选(B).

7·81 下列命题:

① 分式 $\frac{x^2-4}{x-2}$,当 $x=\pm 2$ 时,其值为零.

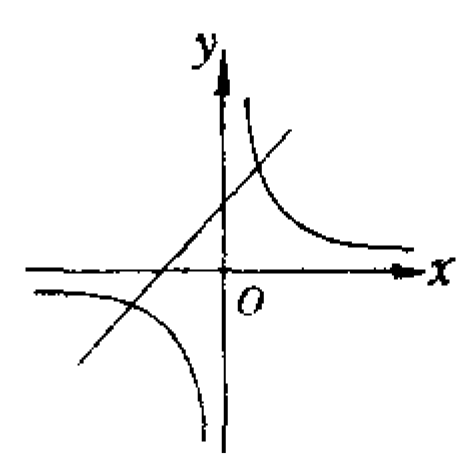
② 若 $(a+1)^0=1$,则 $a\neq 0$.

③ 函数 $y=\sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}$ 中,自变量的取值范围是 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

④ 在同一坐标系中,$y=x+m$ 和 $y=\frac{m}{x}$(其中 $m>0$)的图像大致如右图.

其中正确的命题的个数有

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1991 年)

[解] (1) $x=2$ 时,分式分母为 0,不妥. ① 不真.

(2) 由 $(a+1)^0=1$,推不出 $a\neq 0$,则 ② 不真.

(3) 函数定义域中还应有 $x \neq 0$(分式分母不为 0),故 ③ 不真.

易知 ④ 真.

故选(A).

7·82　与函数 $y = f(x-a)+b$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称的图像所对应的函数是

(A) $y = f^{-1}(x-a)+b$.　　(B) $y = f^{-1}(x+a)-b$.

(C) $y = f^{-1}(x-b)+a$.　　(D) $y = f^{-1}(x-b)-a$.

(中国北京市高中数学竞赛,1992 年)

[解]　与函数 $y = f(x-a)+b$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称的图像所对应的函数应为

$$x = f(y-a)+b, \quad \text{即} \quad x-b = f(y-a),$$

则　$y-a = f^{-1}(x-b)$, 或 $y = f^{-1}(x-b)+a$ 为所求.

故选(C).

7·83　函数 $y = f(x)$ 的图像为 c.而 c 关于直线 $x = 1$ 对称的图形为 c_1,将 c_1 向左平移一个单位后得到的图形为 c_2,则 c_2 所对应的函数是

(A) $y = f(-x)$.　　(B) $y = f(1-x)$.

(C) $y = f(2-x)$.　　(D) $y = f(3-x)$.

(中国北京市高中数学竞赛,1992 年)

[解]　设 c_1 的对应函数为 $f_1(x)$,由题设 c_1 与 c 关于直线 $x = 1$ 对称,故有　$f(1-x) = f_1(1+x)$,

则
$$f[1-(x-1)] = f_1[1+(x-1)],$$
即
$$f_1(x) = f(2-x).$$

因而 c_1 的表达式为　$y = f(2-x)$.

又 c_2 系 c_1 向左平移一个单位,则 c_2 对应的函数为

$$y = f_1(x+1) = f(1-x).$$

故选(B).

7·84　对任意的函数 $y = f(x)$,在同一个直角坐标系中,函数 $y = f(x-1)$ 与函数 $y = f(-x+1)$ 的图像

(A) 关于 x 轴对称.　　(B) 关于直线 $x = 1$ 对称.

(C) 关于直线 $x = -1$ 对称.　　(D) 关于 y 轴对称.

(中国高中数学联赛,1989 年)

[解] 因为函数 $f(z)$ 与 $f(-z)$ 的图像关于直线 $z=0$ 对称,所以函数 $f(x-1)$ 与 $f(-x+1)$ 的图像关于直线 $x-1=0$, 即关于 $x=1$ 对称.

故选(B).

7·85 把函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在坐标平面内以原点为旋转中心按逆时针方向旋转 90°,得到的图像的函数是

(A) $y=-f(x)$. (B) $y=f(-x)$.

(C) $y=-f^{-1}(x)$. (D) $y=-f(-x)$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 考虑以下两个相继作图步骤:

(1) 作出 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 x 轴对称的图形;

(2) 作出上述图形关于 $y=x$ 的对称图形.

此即为所求函数图像.这样,所求函数为 $y=f(-x)$.

故选(B).

7·86 函数 $y=f(x)$ 定义在 R 上,它有反函数,把它的图像绕坐标原点 在 xOy 平面上按逆时针方向旋转 90°,新的图像所表示的函数是

(A) $y=-f^{-1}(-x)$. (B) $y=-f^{-1}(x)$.

(C) $y=f^{-1}(x)$. (D) $y=f^{-1}(-x)$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 注意到函数 $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

函数 $-x=f(y)$ 与 $x=f(y)$ 的图像关于 y 轴对称.

因而,函数 $-x=f(y)$ 的图像可视为函数 $y=f(x)$ 的图像在 xOy 平面上绕原点 O 按逆时针方向旋转 90° 的结果.

又 $-x=f(y)$ 通常写作 $y=f^{-1}(-x)$.

故选(D).

7·87 设 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数,且是偶函数.已知当 $x\in[2,3]$ 时,$f(x)=x$,则当 $x\in[-2,0]$ 时,$f(x)$ 的解析式是

(A) $f(x)=x+4$. (B) $f(x)=2-x$.

(C) $f(x)=3-|x+1|$. (D) $f(x)=2+|x+1|$.

(中国高中数学联赛,1990 年)

[解 1] ① 由 $f(x)=x$, $2\leqslant x\leqslant 3$,及周期为 2,有

$$f(x)=\begin{cases}x+4, & -2\leqslant x\leqslant -1;\\ x+2, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

② 由于 $f(x)$ 是偶函数,得

$$f(x)=-x+2,\ -1\leqslant x\leqslant 0.$$

综合 ① 和 ② 得

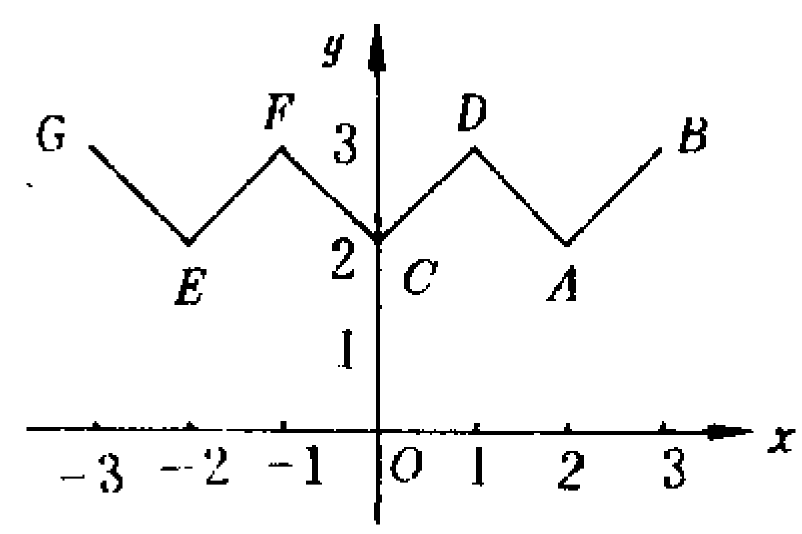
$$f(x)=\begin{cases}x+4, & -2\leqslant x\leqslant -1;\\ -x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

即 $$f(x)=3-|x+1|.$$

故选(C).

[解 2] 先作出 $f(x)=x$ 的图像,这里 $x\in[2,3]$,即线段 AB.

$\because$ $f(x)$ 是周期为 2 的函数,则可作出 $y=f(x)$ 在 $x\in[0,1]\cup[-2,-1]$ 的图像,即线段 CD, EF.



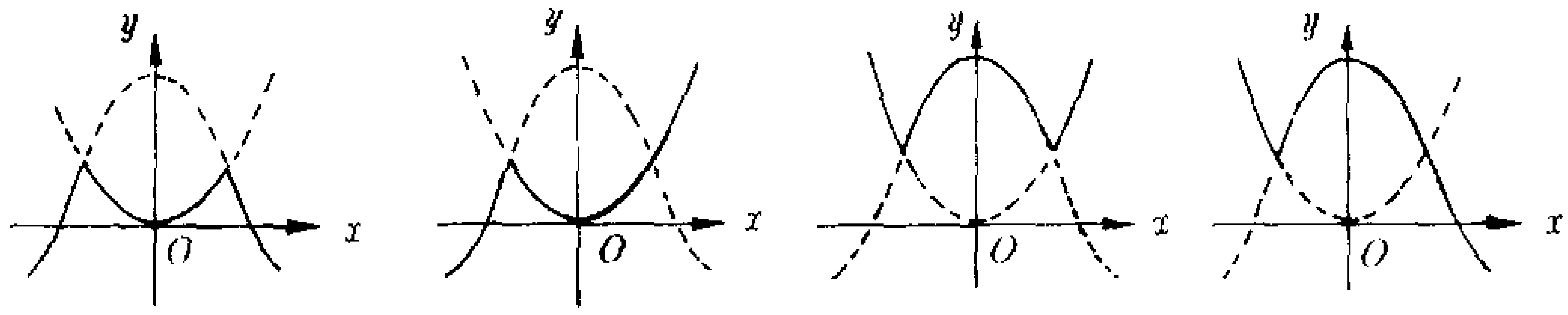
又 $f(x)$ 是偶函数,其图像关于 y 轴对称,可知 $f(x)$ 在$[-1,0]$上的图像为线段 FC.

从而 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的图像为折线段 EFC.

易见其解析式为 $$f(x)=3-|x+1|.$$

故选(C).

7·88 函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+\cos x-|x^2-\cos x|)$ 的图像是下列图中(实线部分)的



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

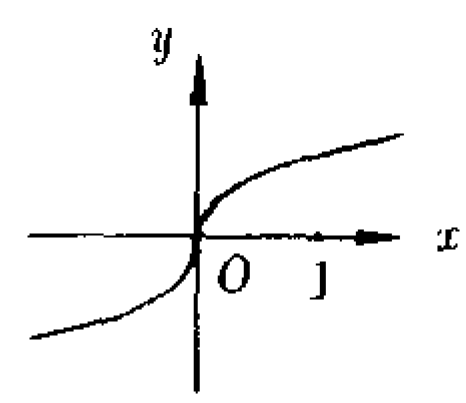
（中国四川省高中数学竞赛,1989 年）

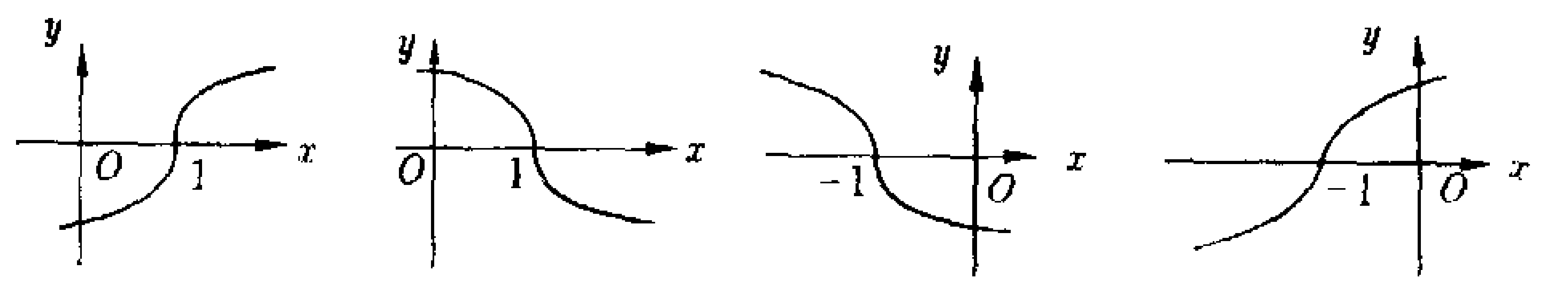
[解]　由 $|x^2-\cos x|=\begin{cases}x^2-\cos x, & x^2\geqslant\cos x \text{ 时};\\ \cos x-x^2, & x^2<\cos x \text{ 时}.\end{cases}$ 则

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}[x^2+\cos x-(x^2-\cos x)]=\cos x, & x^2\geqslant\cos x \text{ 时};\\ \frac{1}{2}[x^2+\cos x-(\cos x-x^2)]=x^2, & x^2<\cos x \text{ 时}.\end{cases}$$

故选(A).

7·89　函数 $y=f(1-x)$ 的图像如右图所示,则函数 $f(x)$ 的图像是下面四种图形中的

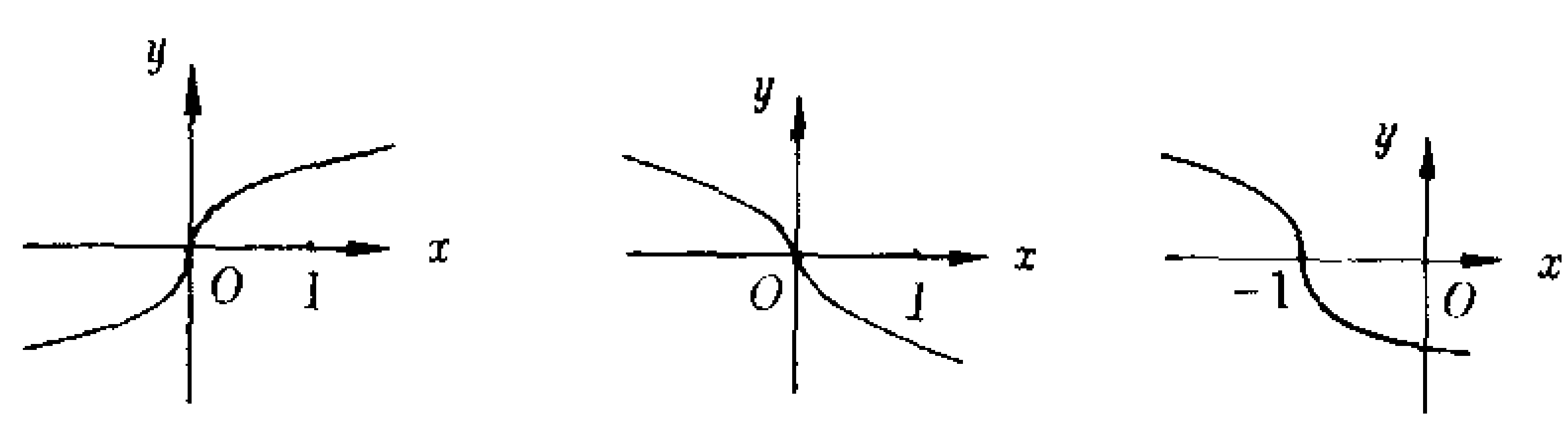




(A)　　(B)　　(C)　　(D)

（中国北京市高中数学竞赛,1991 年）

[解]　注意到下面图形的演化:



$y=f(1-x)$　　$y=f(x-1)$　　$y=f(x)$

故选(C).

7·90　设 $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$,其中 a,b 和 c 是常数,如果 $f(-7)=7$,那么 $f(7)$ 等于

(A) -17.　(B) -7.　(C) 14.　(D) 21.　(E) 不能惟一确定.

（第33届美国高中数学考试，1982年）

［解］　注意所给函数 $f(x)$ 的特点为：x 的次数均为奇数，故有

$$f(-x)=-ax^7-bx^3-cx-5,$$

因此 $f(x)+f(-x)=-10$,

且　$f(7)+f(-7)=-10$.

又由　$f(-7)=7$,　所以　$f(7)=-17$.

故选(A).

注　本题解法与7·68无异，显然它只是本题的特例.

7·91　设 $f(x)=ax^4-bx^2+x+5$，又 $f(-3)=2$，则 $f(3)$ 等于

(A) -5.　(B) -2.　(C) 1.　(D) 3.　(E) 8.

（第46届美国高中数学考试，1995年）

［解］　$f(-3)=a(-3)^4-b(-3)^2+(-3)+5$

$$=a\cdot 3^4-b\cdot 3^2+2,$$

$\because$　$f(-3)=2$,　$\therefore$　$a\cdot 3^4-b\cdot 3^2=0$.

$\therefore$　$f(3)=a\cdot 3^4-b\cdot 3^2+3+5=8$.

故选(E).

7·92　设 $f(x)$ 是满足下面两个性质的函数：

(a) 对任意两个实数 x 和 y，总有 $f(x+y)=x+f(y)$，且

(b) $f(0)=2$.

则 $f(1998)$ 的值是

(A) 0.　(B) 2.　(C) 1996.　(D) 1998.　(E) 2000.

（第49届美国高中数学考试，1998年）

［解］　由题设知 $f(x)=f(x+0)=x+f(0)=x+2$，

因而　$f(1998)=1998+2=2000$.

故选(E).

7·93　如果 $F(n)$ 是一个函数，其中 $F(1)=F(2)=F(3)=1$，同时 $F(n+1)=\dfrac{F(n)\cdot F(n-1)+1}{F(n-2)}$，那么 $F(6)$ 等于

(A) 2.　(B) 3.　(C) 7.　(D) 11.　(E) 26.

（第21届美国高中数学考试，1970年）

[解]　由设可计算 $F(4)$, $F(5)$, 进而可得 $F(6)$.

$$F(4)=\frac{F(3)F(2)+1}{F(1)}=2,$$

$$F(5)=\frac{F(4)F(3)+1}{F(2)}=3,$$

$$F(6)=\frac{F(5)F(4)+1}{F(3)}=7.$$

故选(C).

7·94　在自然数集 N 上定义的函数

$$f(n)=\begin{cases} n-3, & 若\ n\geqslant 1000, \\ f[f(n+7)], & 若\ n<1000. \end{cases}$$

则 $f(90)$ 的值是

(A) 997.　　(B) 998.　　(C) 999.　　(D) 1000.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　由题设可知

$$\begin{aligned} &f(1000)=1000-3=997,\\ &f(999)=f[f(1006)]=f(1003)=1000,\\ &f(998)=f[f(1005)]=f(1002)=999,\\ &f(997)=f[f(1004)]=f(1001)=998,\\ &f(996)=f[f(1003)]=f(1000)=997,\\ &f(995)=f[f(1002)]=f(999)=1000,\\ &f(994)=f[f(1001)]=f(998)=999,\\ &f(993)=f[f(1000)]=f(997)=998,\\ &f(992)=f[f(999)]=f(1000)=997,\\ &f(991)=f[f(998)]=f(999)=1000,\\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

递归地可有

$$f(1000-k)=\begin{cases} 997, & k=4m, \\ 1000, & k=4m+1, \\ 999, & k=4m+2, \\ 998, & k=4m+3. \end{cases}\quad (m\in N)$$

则　$f(90)=f(1000-910)=f[1000-(4\cdot 227+2)]=999.$

故选(C).

7·95　设 $f(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，其中 n 是一正整数.如果 $x_k=(-1)^k,k=1,2,\cdots,n$，则 $f(n)$ 的可能值集为

(A) $\{0\}$.　　(B) $\{\frac{1}{n}\}$.　　(C) $\{0,-\frac{1}{n}\}$.

(D) $\{0,\frac{1}{n}\}$.　　(E) $\{1,\frac{1}{n}\}$.

（第 19 届美国高中数学考试,1968 年）

[解]　由设有

$x_k+x_{k+1}=(-1)^k+(-1)^{k+1}=(-1)^k(1-1)=0.$

故
$$\sum_{k=1}^{n}x_k=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数};\\ -1, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

从而　$f(2k)=0,\quad f(2k+1)=-\frac{1}{2k+1}$，

则　$f(n)$ 的值集含于 $\{0,-\frac{1}{n}\}$ 中.

故选(C).

7·96　若 $F(n+1)=\frac{2F(n)+1}{2},n=1,2,\cdots$，且 $F(1)=2$，则 $F(101)$ 等于

(A) 49.　(B) 50.　(C) 51.　(D) 52.　(E) 53.

（第 17 届美国高中数学考试,1966 年）

[解]　由设有　$F(n+1)=F(n)+\frac{1}{2},\ n=1,2,\cdots$.知其为公差是 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.且 $F(1)=2$ 即首项为 2.

故　$F(n)=2+\frac{n-1}{2}$.

因而有　$F(101)=2+\frac{101-1}{2}=52.$

故选(D).

7·97　若 k 是正数,并且对于每个正数 x,函数 f 满足

$$[f(x^2+1)]^{\sqrt{x}}=k;$$

那么对于每个正数 y,式 $\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}}$ 等于

(A) $\sqrt{k}$.　(B) $2k$.　(C) $k\sqrt{k}$.　(D) k^2.　(E) $k^{\sqrt{k}}$.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

[解] $\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}}=\left\{[f((\frac{3}{y})^2+1)]^{\sqrt{\frac{3}{y}}}\right\}^2$

$=\left\{[f(t^2+1)]^{\sqrt{t}}\right\}^2=k^2.$

这里　$t=\frac{3}{y}$.

故选(D).

7·98　设 $f(n)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，则 $f(n+1)-f(n-1)$，用 $f(n)$ 表示为

(A) $\frac{1}{2}f(n)$.　(B) $f(n)$.　(C) $2f(n)+1$.

(D) $f^2(n)$.　(E) $\frac{1}{2}[f^2(n)-1]$.

（第 15 届美国高中数学考试，1964 年）

[解] 设　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$，　$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\beta$，　则

$f(n+1)-f(n-1)$

$=\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{n+1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\beta^{n+1}\right)-\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^{n-1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\beta^{n-1}\right)$

$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^n(\alpha-\frac{1}{\alpha})+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\beta^n(\beta-\frac{1}{\beta})$

$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\alpha^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\beta^n=f(n).$

注意到　$\alpha-\frac{1}{\alpha}=1$，　$\beta-\frac{1}{\beta}=1$.

故选(B).

7·99　若函数 f 定义为$f(x)=ax^2-\sqrt{2}$，其中 a 为一个正常数，如果$f(f(\sqrt{2}))=-\sqrt{2}$，那么 a 等于

(A) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $2-\sqrt{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

（第 41 届美国高中数学考试，1990 年）

[解]　由设 $f(\sqrt{2}) = a(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} = 2a - \sqrt{2}$,

又　$f(f(\sqrt{2})) = a(2a - \sqrt{2})^2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$,

∴　$a(2a - \sqrt{2})^2 = 0$.

∵　$a > 0$,　∴　$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选(D).

7·100　若函数 f 定义为

$$f(x) = \frac{cx}{2x+3}, \qquad x \neq -\frac{3}{2}.$$

并且对于除去 $-\frac{3}{2}$ 的一切实数 x,满足 $f[f(x)] = x$,那么 c 是

(A) -3.　　(B) $-\frac{3}{2}$.　　(C) $\frac{3}{2}$.

(D) 3.　　(E) 按已知条件无惟一解.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解]　对于所有的 $x \neq -\frac{3}{2}$ 的实数由题设有

$$x = f[f(x)] = \frac{c\left(\frac{cx}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x+3}\right)+3} = \frac{c^2x}{2cx+6x+9},$$

由之可有　$(2c+6)x + (9-c^2) = 0$.

所以由 x 的任意性有　$2c+6=0$,　$9-c^2=0$.

解得　$c = -3$.

故选(A).

7·101　若 $g(x) = 1 - x^2$, 且当 $x \neq 0$ 时, $f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2}$,

那么 $f(\frac{1}{2})$ 等于

(A) $\frac{3}{4}$.　(B) 1.　(C) 3.　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(E) $\sqrt{2}$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解]　由　$g(x) = \frac{1}{2}$,　即　$1 - x^2 = \frac{1}{2}$, 得 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

因而 $f(\frac{1}{2}) = f[g(\pm\sqrt{\frac{1}{2}})] = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$

故选(B).

7·102 已知 x 的线性分式变换为$f_1(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.对于 $n = 1, 2, 3, \cdots$,若定义$f_{n+1}(x) = f_1[f_n(x)]$. 假定 $f_{35}(x) = f_5(x)$, 则 $f_{28}(x)$ 等于

(A) x. (B) $\frac{1}{x}$. (C) $\frac{x-1}{x}$.

(D) $\frac{1}{1-x}$. (E) 这些都不对.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解] 如果 $g(x)$ 是变换 $f_1(x)$ 的反函数,那么

$$g[f_{n+1}(x)] = f_n(x).$$

因为 $f_{35}(x) = f_5(x)$,连续运用这个公式,得到

$$g[f_{35}(x)] = f_{34}(x) = g[f_5(x)] = f_4(x),$$

则

$$f_{34}(x) = f_4(x).$$

类似地有 $f_{33}(x) = f_3(x), \quad \cdots, f_{31}(x) = f_1(x).$

故 $f_{30}(x) = g[f_1(x)] = x$, 且 $f_{29}(x) = g(x)$,

这样 $f_{28}(x) = g[g(x)]$. 但是 $g(x) = \frac{x+1}{2-x}$,

所以 $f_{28}(x) = g[g(x)] = \frac{1}{1-x}$.

故选(D).

7·103 定义在 R 上的函数 $y = f(x)$ 具有下述性质:

① 对任何 $x \in R$,都有 $f(x^3) = f^3(x)$;

② 对任何 $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$,都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

则 $f(0) + f(1) + f(-1)$ 的值是

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) 不确定.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 由设注意到 $f(0) = f^3(0)$,知

$$f(0)[f(0)-1][f(0)+1] = 0.$$

从而

$$f(0) = 0, 1, \text{ 或 } -1.$$

又　$f(1)=f^3(1)$,　同理知　$f(1)=0,1$,或 -1.
再由 $f(-1)=f^3(-1)$,　亦知 $f(-1)=0,1$,或 -1.
但　$f(-1),f(0),f(1)$ 两两各不相等,因而

$$\{f(-1),f(0),f(1)\}=\{-1,0,1\}.$$

这样　$$f(-1)+f(0)+f(1)=0.$$

故选(A).

7·104　若 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$,且 $f(1)=1$.则

$$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(3)}{f(2)}+\frac{f(4)}{f(3)}+\cdots+\frac{f(1988)}{f(1987)}$$

的值是

(A) 1986.　(B) 1987.　(C) 1988.　(D) 不能确定.

(中国江苏省苏州市高中数学竞赛,1988年)

[解]　令 $a=1$,　$b=1$,有 $f(2)=f(1)\cdot f(1)$,又 $f(1)=1$,

$\therefore$　$\dfrac{f(2)}{f(1)}=f(1)=1$.

令 $a=2$,　$b=1$,　有 $f(3)=f(2)\cdot f(1)$,

$\therefore$　$\dfrac{f(3)}{f(2)}=f(1)=1$.

归纳地可有　$$\frac{f(1988)}{f(1987)}=f(1)=1,$$

$\therefore$　原式 $=1987$.

故选(B).

7·105　设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-3x}$,又　$f_1(x)=f[f(x)]$,　$f_2(x)=f[f_1(x)]$,　$\cdots$,　$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],\cdots$,则 $f_{1991}(4.7)$ 的值等于

(A) $-\dfrac{57}{131}$.　(B) $\dfrac{37}{151}$.　(C) 1991.　(D) 4.7.

(中国北京市高中数学竞赛,1991年)

[解]　由设知 $f_1(x)=\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}=\dfrac{x-1}{1+x}$,

$$f_2(x)=\frac{1+\dfrac{x-1}{1+x}}{1-3\cdot\dfrac{x-1}{1+x}}=x,$$

选择题卷

因而 $f_3(x)=f(x),\ f_4(x)=f_1(x),\ f_5(x)=f_2(x),\cdots$

即 $f_{3n+r}(x)=f_r(x)(r=0,1,2,$且 $n\in N)$,

这里 $f_0(x)=f(x)$.

所以 $f_{1991}(x)=f_{663\cdot 3+2}(x)=f_2(x)=x$,

则 $$f_{1991}(4.7)=4.7.$$

故选(D).

7·106 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4(a,b$ 为实数)且 $f(\lg\log_3 10)=5$. 则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是

(A) -5. (B) -3. (C) 3. (D) 随 a,b 取不同值而取不同值.

(中国高中数学联赛,1993年)

[解1] $\because$ $f(x)-4$ 是奇函数,故 $f(-x)-4=-(f(x)-4)$.

即 $f(-x)=-f(x)+8$, 而 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10$.

$$\therefore\quad f(\lg\lg 3)=f(-\lg\log_3 10)=-f(\lg\log_3 10)+8=-5+8=3.$$

故选(C).

[解2] 取 $a=0$,为使 $f(\lg\log_3 10)=5$,则有

$$b=\frac{5-4}{\sqrt[3]{\lg\log_3 10}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\lg\log_3 10}},$$

因而 $$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{\lg\log_3 10}}+4,$$

所以 $$f(\lg\lg 3)=\sqrt[3]{\frac{\lg\lg 3}{\lg\log_3 10}}+4=-1+4=3,$$

故可否$(A),(B)$.

仿上取 $b=0$, 仍得 $f(\lg\lg 3)=3$.

故选(C).

7·107 若 $f(a)=a-2$ 且 $F(a,b)=b^2+a$,则 $F[3,f(4)]$ 是

(A) a^2-4a+7. (B) 28. (C) 7. (D) 8. (E) 11.

(第4届美国高中数学考试,1953年)

[解] 由设有 $F[3,f(4)]=[f(4)]^2+3=(4-2)^2+3=7$.

故选(C).

7·108 对任意实数 x,y,函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x+y)=f(x^2)+f(2y).$$

则 $f(1985)$ 的值是

(A) 1985. (B) $\sqrt{1985}$. (C) 3990. (D) 非以上答案.

（中国北京市高中数学竞赛,1985 年）

[解] 令 $y = x$, 得 $f(2x) = f(x^2) + f(2x)$,

即 $f(x^2) = 0$.

令 $x = \sqrt{1985}$ 代入得 $f(1985) = 0$.

显然(A),(B),(C) 均不真.

故选(D).

7·109 如果对一切 $x > 0, f(2x) = \dfrac{2}{2+x}$,那么 $2f(x)$ 等于

(A) $\dfrac{2}{1+x}$. (B) $\dfrac{2}{2+x}$. (C) $\dfrac{4}{1+x}$.

(D) $\dfrac{4}{2+x}$. (E) $\dfrac{8}{4+x}$.

（第 44 届美国高中数学考试,1993 年）

[解] $2f(x) = 2f(2 \cdot \dfrac{x}{2}) = 2\left[\dfrac{2}{2+\dfrac{x}{2}}\right] = \dfrac{8}{x+4}$.

故选(E).

7·110 下面列举的四个函数中,满足关系式

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

的函数 $f(x)$ 是

(A) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3x}$. (B) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2}x$.

(C) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3x}$. (D) $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{3x}$.

（中国北京市高中数学竞赛,1987 年）

[解] 令 $y = \dfrac{1}{x}$, 得 $2f\left(\dfrac{1}{y}\right) - f(y) = y$.

将 y 换为 x 得 $-f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$. ①

将原式各项乘以 2 得 $4f(x) - 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{x}$. ②

① + ② 得 $3f(x) = \dfrac{2}{x} + x$.

所以 $$f(x)=\frac{2}{3x}+\frac{x}{3}.$$

故选(A).

7·111 下面列举的四个函数中,满足性质

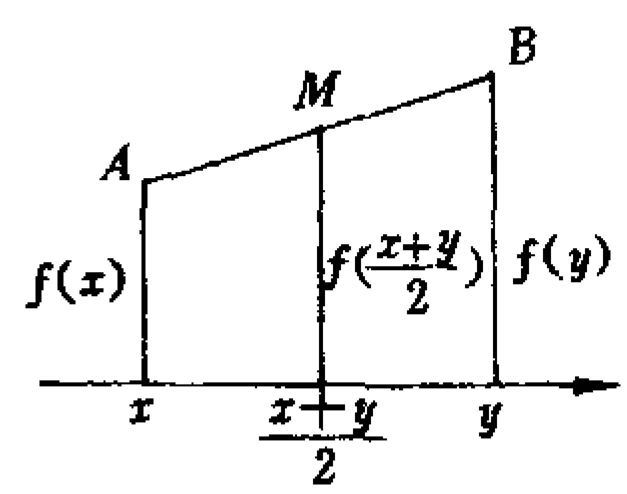
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$$

的函数 $f(x)$ 是

(A) $\lg x$. (B) $\frac{1}{x}$. (C) $3x$. (D) 3^x.

(中国北京市高中数学竞赛,1986 年)

[解] 由图中直观可见:曲线上 A 点纵坐标为$f(x)$,B 点纵坐标为 $f(y)$,M 点纵坐标为$f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.



则 A,M,B 应为共线三点,只有线性函数才能满足这一要求,所以排除(A),(B),(D),而选择(C).

另外也可直接通过代入检验的方法来解本题.

故选(C).

7·112 若 $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$,则 $f(x+2)$ 等于

(A) $f(x)+f(2)$. (B) $(x+2)f(x)$.

(C) $x(x+2)f(x)$. (D) $\frac{xf(x)}{x+2}$.

(E) $\frac{(x+2)f(x+1)}{x}$.

(第 4 届美国高中数学考试,1953 年)

[解] 由 $$f(x+2)=\frac{(x+2)[(x+2)-1]}{2}=\frac{(x+1)(x+2)}{2},$$

又 $$f(x+1)=\frac{(x+1)[(x+1)-1]}{2}=\frac{x(x+1)}{2},$$

从而 $$f(x+2)=\frac{x+2}{x}f(x+1).$$

故选(E).

7·113 设$f\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=x$,则$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$等于

(A) $\frac{1-x}{1+x}$或$\frac{x-1}{1+x}$. (B) $\frac{1+x}{1-x}$或$\frac{1+x}{x-1}$.

(C) $\frac{x-1}{x+1}$. (D) $\frac{x+1}{x-1}$.

(中国四川省高中数学联赛,1991年)

[解] 令$\frac{1-x^2}{1+x^2}=t$, 则$x^2=\frac{1-t}{1+t}$.

这样题设函数即为 $f(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

从而 $$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{2x}{1+x^2}}}=\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$
$$=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$
$$=\frac{1-x}{1+x}\text{ 或 }\frac{x-1}{1+x}.$$

故选(A).

注 本题亦可用三角变换即令$x=\mathrm{tg}\theta$去做.

7·114 设f是这样的多项式函数,对于所有的实值x,有$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$.那么对所有的实值x,$f(x^2-1)$是

(A) x^4+5x^2+1. (B) x^4+x^2-3.

(C) x^4-5x^2+1. (D) x^4+x^2+3.

(E) 非以上这些结果.

(第34届美国高中数学考试,1983年)

[解1] 因为$f(x)$是一个多项式函数,且$f(x^2+1)$的次数为4,那么$f(x)$的次数是2.

设$f(x)=ax^2+bx+c$,其中a,b,c为常数,则有
$$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$$
$$=a(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c$$

$$= ax^4 + (2a+b)x^2 + (a+b+c),$$

我们有 $\quad a = 1,\quad 2a + b = 5 \quad$ 及 $\quad a + b + c = 3.$

解得 $\quad a = 1,\quad b = 3,\quad c = -1,$

即得 $\quad f(x) = x^2 + 3x - 1.$

于是

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2 + 3(x^2-1) - 1 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 - 3 - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3. \end{aligned}$$

故选(B).

[解 2] 将 $x^4 + 5x^2 + 3$ 写成 $x^2 + 1$ 幂的形式：

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 + 3 &= (x^4 + 2x^2 + 1) + (3x^2 + 3) - 1 \\ &= (x^2+1)^2 + 3(x^2+1) - 1. \end{aligned}$$

设 $w = x^2 + 1$,则有 $f(w) = w^2 + 3w - 1$.因此对于一切 x,有

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2 + 3(x^2-1) - 1 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 - 3 - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3. \end{aligned}$$

故选(B).

7·115　若 $f(x) = \lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$,那么函数式 $f\left(\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$用 $f(x)$ 来表示是

(A) $-f(x)$.　　(B) $2f(x)$.　　(C) $3f(x)$.

(D) $[f(x)]^2$.　　(E) $[f(x)]^3 - f(x)$.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

[解]

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right) &= \lg\frac{1+\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1-\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}} = \lg\frac{1+3x^2+3x+x^3}{1+3x^2-3x-x^3} \\ &= \lg\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3} = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 3\lg\frac{1+x}{1-x} \\ &= 3f(x). \end{aligned}$$

故选(C).

7·116　设$f(t) = \dfrac{t}{1-t}$,　$t \neq 1$,如果 $y = f(x)$,则 x 可表示为

(A) $f\left(\frac{1}{y}\right)$. (B) $-f(y)$. (C) $-f(-y)$.

(D) $f(-y)$. (E) $f(y)$.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解] 由设 $y=\frac{x}{1-x}$, 可解得 $x=\frac{y}{1+y}$.

而 $$x=\frac{y}{1+y}=-\frac{-y}{1-(-y)}=-f(-y).$$

故选(C).

7·117 若 $f(x)$ 是实变量 x 的实值函数,且 $f(x)$ 不恒等于零,又对于所有的 a 和 b,

$$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b),$$

那么对于一切 x 和 y

(A) $f(0)=1$. (B) $f(-x)=-f(x)$.

(C) $f(-x)=f(x)$. (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(E) 有一个正数 T 满足 $f(x+T)=f(x)$.

(第28届美国高中数学考试,1977年)

[解] 设 $a=b=0$ 代入题设式有 $2f(0)=4f(0)$,即

$$f(0)=0.$$

再设 $a=0$, $b=-x$,代入题设式有

$$f(x)+f(-x)=2f(0)+2f(-x),$$

即 $$f(x)=f(-x).$$

故选(C).

7·118 假设 $f(x)$ 对一切实数 x 有定义;对所有 x,$f(x)>0$;对所有 a 和 b,$f(a)f(b)=f(a+b)$.下列的说法正确的是

Ⅰ. $f(0)=1$

Ⅱ. $f(-a)=1/f(a)$,对所有 a

Ⅲ. $f(a)=\sqrt[3]{f(3a)}$,对所有 a

Ⅳ. $f(b)>f(a)$,若 $b>a$

(A) 仅Ⅲ和Ⅳ. (B) 仅Ⅰ,Ⅲ和Ⅳ.

(C) 仅Ⅰ,Ⅱ和Ⅳ. (D) 仅Ⅰ,Ⅱ和Ⅲ.

(E) 所有都正确.

(第26届美国高中数学考试,1975年)

[解] 在题设 $f(a)f(b)=f(a+b)$ 中令 $a=0$ 得

$$f(0)f(b)=f(b),\quad \text{或}\quad f(0)=1.$$

又设 $b=-a$ 得

$$f(a)f(-a)=f(0),\quad \text{或}\quad f(-a)=1/f(a);$$

并且 $f(a)f(a)f(a)=f(a)f(2a)=f(3a)$,

或 $$f(a)=\sqrt[3]{f(3a)}.$$

函数 $f(x)=2^{-x}$ 满足题设定义,但其不满足条件Ⅳ.

故选(D).

7·119 若 $F\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$,则下列等式中正确的是

(A) $F(-2-x)=-2-F(x)$. (B) $F(-x)=F\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

(C) $F(x^{-1})=F(x)$. (D) $F(F(x))=-x$.

(中国高中数学联赛,1984 年)

[解] 令 $\dfrac{1-x}{1+x}=y$, 则 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,

$\therefore$ $$F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=F(y)=x.$$

由题设知 $$F(y)=\frac{1-y}{1+y}.$$

$\therefore$ $$F(-2-x)=\frac{1-(-2-x)}{1+(-2-x)}=-\frac{x+3}{x+1}.$$

而 $$-2-F(x)=-2-\frac{1-x}{1+x}=-\frac{x+3}{x+1}.$$

故选(A).

7·120 满足条件 $f(x^2)=[f(x)]^2=f(f(x))$ 的次数 $\geqslant 1$ 的多项式 f 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 大于 2 的有限整数. (E) 无限多.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解] 首先证明满足 $f(x^2)=[f(x)]^2$ 的多项式具有 $f(x)=x^n(n\geqslant 1)$ 形式.

若不然,设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$,则由题设 $f(x^2)=[f(x)]^2$ 我们有

$$a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1x^2+a_0$$

$$= a_n^2x^{2n} + 2a_na_{n-1}x^{2n-1} + (a_{n-1}^2 + 2a_na_{n-2})x^{2n-2} + \cdots + a_0^2,$$

由多项式恒等的条件有

$$\begin{cases} a_n = a_n^2, \\ 2a_na_{n-1} = 0, \\ a_{n-1}^2 + 2a_na_{n-2} = a_{n-1}, \\ 2a_na_{n-3} = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_0 = a_0^2. \end{cases}$$

由 $a_n \neq 0$ 有 $a_{n-1} = a_{n-3} = \cdots = 0$，且 $a_{n-2} = a_{n-4} = \cdots = 0$.

且 $a_n = 1$. 于是 $f(x) = x^n$.

又由 $f(x^2) = f(f(x))$，有 $x^{2n} = (x^n)^n = x^{n^2}$，

则 $2n = n^2$.

又 $n \geqslant 1$，

$\therefore$ $n = 2$，即仅有 $f(x) = x^2$ 适合题设.

故选(B).

第八章 初等超越方程

第1节 指数方程

8·1 满足方程 $2^{2x}-8\cdot 2^x+12=0$ 的 x 值为

(A) lg3. (B) $\frac{1}{2}\lg 6$. (C) $1+\lg\frac{3}{2}$.

(D) $1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$. (E) 非上述答案.

(第20届美国高中数学考试,1969年)

[解] 题设方程即 $(2^x)^2-8\cdot 2^x+12=0$,

得 $2^x=2$ 或 6.

当 $2^x=2$ 时, $x=1$;

当 $2^x=6$ 时, 有 $x\lg 2=\lg 2+\lg 3$, 则 $x=1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$.

故选(E).

8·2 若 $3^{2x}+9=10\cdot 3^x$,那么 (x^2+1) 的值是

(A) 只为1. (B) 只为5. (C) 1或5. (D) 2. (E) 10.

(第23届美国高中数学考试,1972年)

[解] 设 $y=3^x$,那么已知方程与下列方程等价.

$$y^2-10y+9=0, \quad 即 \quad (y-9)(y-1)=0.$$

因此 $y=3^x=9$ 或 1, $x=2$ 或 0. 所以 $x^2+1=5$ 或 1.

故选(C).

8·3 若 $4^x-4^{x-1}=24$,则 $(2x)^x$ 等于

(A) $5\sqrt{5}$.　(B) $\sqrt{5}$.　(C) $25\sqrt{5}$.　(D) 125.　(E) 25.

（第 9 届美国高中数学考试，1958 年）

[解]　由 $4^x - 4^{x-1} = 24$，　得　$4^{x-1}(4-1) = 24$，

即　$4^{x-1} = 8$，　可化为　$2^{2(x-1)} = 2^3$，

则　$2(x-1) = 3$，　得　$x = \frac{5}{2}$.

$$\therefore \quad (2x)^x = \left(2 \cdot \frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}.$$

故选(C).

8·4　满足方程 $3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0$ 的实数 x 的个数是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 4.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

[解]　将方程变形

由　$$3^{2x+2} - 3^{x+3} - 3^x + 3 = 0,$$

有　$$3^2(3^x)^2 - 3^x \cdot (3^3 + 1) + 3 = 0,$$

即　$$9(3^x)^2 - 28(3^x) + 3 = 0,$$

或　$$(3^x - 3)[9(3^x) - 1] = 0.$$

所以有　$3^x = 3$，　或　$3^x = \frac{1}{9}$.

因而　$x = 1$，或 $x = -2$.

故选(C).

8·5　满足方程$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ 的整数 x 的个数是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.　(E) 以上结论都不对.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

[解]　由指数函数性质及题设，x 应满足

$$\begin{cases} x + 2 = 0, \\ x^2 - x - 1 \neq 0; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2 - x - 1 = -1, \\ x + 2 \text{ 为偶数}; \end{cases} \quad \text{或 } x^2 - x - 1 = 1.$$

分别解得　$x = -2$，　$x = 0$，　$x = 2$ 及 -1.

故选(C).

8·6　满足$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ 的全部实数 x 之和是

(A) $\frac{3}{2}$.　(B) 2.　(C) $\frac{5}{2}$.　(D) 3.　(E) $\frac{7}{2}$.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

选择题卷

[解]　设 $2^x = u$,则 $u > 0$,且题设方程化为:

$$(u-4)^3+(u^2-2)^3=(u^2+u-6)^3,$$

则　$[(u-4)+(u^2-2)][(u-4)^2-(u-4)(u^2-2)+(u^2-2)^2]$

$=(u^2+u-6)^3,$

移项,提取公因式,化简后有:

$$(u^2+u-6)(u^3-4u^2-2u+8)=0,$$

则　$u^2+u-6=0$,　得　$u=2$(已舍负值),

则　$x=1$.　且　$u^3-4u^2-2u+8=0$,

即　$(u^2-2)(u-4)=0$,　得　$u=4$　或　$u^2=2$.

则　$2^x=4$,　得　$x=2$,

或　$2^x=\sqrt{2}$,　得　$x=\dfrac{1}{2}$ ($2^x=-\sqrt{2}$ 舍去).

$\therefore$　方程实根之和为　$2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$.

故选(E).

8·7　若 x,y 为整数,方程$(x-8)(x-10)=2^y$解的个数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 多于 3.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解]　题设方程可化为

$$x^2-18x+80-2^y=0.$$

视为 x 的方程可有

$$x=9\pm\sqrt{1+2^y},$$

当且仅当 $1+2^y$ 为完全平方数时,x 是整数.

即　$1+2^y=n^2$　或　$n^2-1=2^y$.　㊀

而　$n^2-1=(n-1)(n+1)$,故知它们必为两连续偶数(它们之积为 2^y),且它们之积为 2 的方幂,则其每个因子也均为 2 的方幂.

显然适合者仅有(2,4)或$(-4,-2)$两组,即　$n=\pm 3$.

代入方程(＊)得 $y=3$;再代入原方程得

$$x=9\pm\sqrt{9}=9\pm 3,\quad 即\quad x=6 或 12.$$

故原方程仅有两组解(6,3)和(12,3).

故选(C).

8·8　设$2^x=8^{y+1}$且$9^y=3^{x-9}$,则 $x+y$ 的值为

(A) 18.　(B) 21.　(C) 24.　(D) 27.　(E) 30.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解]　由设 $2^{x}=8^{y+1}=2^{3(y+1)}$，又　$3^{x-9}=9^{y}=3^{2y}$，则

$$\begin{cases}x=3(y+1),\\x-9=2y,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=21,\\y=6.\end{cases}$$

故选 (D).

8·9　一实数 x，使得 64^{x-1} 除以 4^{x-1} 时等于 256^{2x}，则 x 等于

(A) $-\frac{2}{3}$.　(B) $-\frac{1}{3}$.　(C) 0.　(D) $\frac{1}{4}$.　(E) $\frac{3}{8}$.

（第 19 届美国高中数学考试，1978 年）

[解]　由题设 $\frac{64^{x-1}}{4^{x-1}}=256^{2x}$，而

$$\frac{64^{x-1}}{4^{x-1}}=\left(\frac{64}{4}\right)^{x-1}=16^{x-1},$$

又　$$256^{2x}=16^{2\cdot 2x}=16^{4x},$$

∴　$$4x=x-1,\quad 得\quad x=-\frac{1}{3}.$$

故选 (B).

8·10　当 x 取正有理数时，如果

$$\frac{a}{10^{x}-1}+\frac{b}{10^{x}+2}=\frac{2\cdot 10^{x}+3}{(10^{x}-1)(10^{x}+2)}$$

是一恒等式，则 $a-b$ 的值为

(A) $\frac{4}{3}$.　(B) $\frac{5}{3}$.　(C) 2.　(D) $\frac{11}{4}$.　(E) 3.

（第 18 届美国高中数学考试，1967 年）

[解]　题设式左通分后分子为

$$a(10^{x}+2)+b(10^{x}-1)=(a+b)10^{x}+2a-b,$$

由恒等式性质，比较两边分子系数有

$$\begin{cases}a+b=2,\\2a-b=3.\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}a=\frac{5}{3},\\b=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

故选 (A).

8·11　在方程 $z^{x}=y^{2x}$ ①，$2^{z}=2\cdot 4^{x}$ ②，$x+y+z=16$ ③ 中，x,y,z 之整数根依次为

(A) 3,4,9.　(B) 9，-5,12.　(C) 12，-5,9.

(D) 4,3,9.　　　(E) 4,9,3.

（第 3 届美国高中数学考试,1952 年）

[解]　由①得 $z = y^2$.

由②有　$2^z = 2 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+1}$　得 $z = 2x + 1$.

$\therefore\quad x = \frac{z-1}{2} = \frac{y^2-1}{2}$ 代入③ 有

$$\frac{y^2-1}{2} + y + y^2 = 16,\quad \text{即}\quad 3y^2 + 2y - 33 = 0.$$

解得　y 只有整根 3，　且 $x = 4$，　$z = 9$.

故选(D).

8·12　设 $75^x = 0.75^y = 10^{-2}$，　则　$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 等于

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $-\frac{1}{4}$.　　(C) 1.　　(D) -1.

（中国部分省、市初中数学通讯赛,1987 年）

[解]　由已知得　$75^{xy} = 10^{-2y}$,　①

且　$$(0.75)^{xy} = \left(\frac{75}{100}\right)^{xy} = 10^{-2x},$$

即　$$75^{xy} = 100^{xy} \cdot 10^{-2x}.\quad ②$$

由①,②得　$$100^{xy} \cdot 10^{-2x} = 10^{-2y},$$

即　$$10^{2xy-2x} = 10^{-2y},$$

则　$$xy = x - y,$$

即　$$1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

所以　$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1.$$

故选(D).

8·13　若 $a^x = b^y = 1994^z$(其中 a, b 是自然数),且有$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$,则 $2a + b$ 的一切可能的取值是

(A)1001.　　(B)1001 或 3989.

(C)1001 或 1996.　　(D)1001 或 1996 或 3989.

（中国初中数学联赛,1994 年）

[解]　由 $a^x = 1994^z$ 及 $b^y = 1994^z$ 可得

$$a^{\frac{1}{z}} = 1994^{\frac{1}{x}} \text{ 及 } b^{\frac{1}{z}} = 1994^{\frac{1}{y}}.$$

故 $(ab)^{\frac{1}{z}} = 1994^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1994^{\frac{1}{z}}$.

因此　$ab = 1994 = 1 \times 1994 = 2 \times 997$.

但 a,b 均不为 1,故有 $a = 2$, $b = 997$ 或 $a = 997$, $b = 2$.

于是　$2a + b = 1001$ 或 1996.

故选(C).

8·14　若$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8$ 及$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$,其中 x,y 为实数,则 xy 等于

(A) $\frac{12}{5}$.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 12.　　(E) -4.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解]　由题设可有

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = \frac{2^{2x}}{2^{x+y}} = 2^{x-y} = 8 = 2^3, \quad \therefore \quad x - y = 3,$$

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = \frac{3^{2(x+y)}}{3^{5y}} = 3^{2x-3y} = 243 = 3^5, \quad \therefore \quad 2x - 3y = 5.$$

由上方程组解得　$x = 4$,　$y = 1$.　则　$xy = 4$.

故选(B).

8·15　若$2^a + 2^b = 3^c + 3^d$,则整数 a,b,c,d 中负数的个数为

(A) 4.　　(B) 3.　　(C) 2.　　(D) 1.　　(E) 0.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解]　分下面几种情形讨论:

(1) 若 a,b,c,d 中仅有一个负数,则等式一端为分数,另一端为整数,不妥;

(2) 若四个数中恰有两个负数:

(i) 若 $a < 0$,　$b < 0$,且 $c \geqslant 0$,　$d \geqslant 0$,则 式右 $\geqslant 2$,而式左 $\leqslant 1$(当 $a = b = -1$ 时 $2^a + 2^b$ 值最大为 1),亦不妥;

(ii) 若 $c < 0$,　$d < 0$,且 $a \geqslant 0$,　$b \geqslant 0$,

则式左 $\geqslant 2$,而式右 $\leqslant \frac{2}{3}$,仍不妥;

(iii) 若 $a < 0$, $c < 0$,且 $b \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, 令 $-a = \alpha$, $-c = \gamma$,

则
$$\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\gamma}=\frac{3^\gamma-2^\alpha}{2^\alpha 3^\gamma}=3^d-2^b=n,$$
或
$$3^\gamma-2^\alpha=2^\alpha 3^\gamma n,$$
注意到上式式左为奇数,而式右为偶数,不妥;

(iv) 若 $b<0$, $d<0$,且 $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ 情况同上.

(3) 若四个数中仅有一个数非负时:

(i) 仅 $a\geqslant 0$,再令 $-b=\beta$, $-c=\gamma$, $-d=\delta$,则有
$$2^a=\frac{1}{3^\gamma}+\frac{1}{3^\delta}-\frac{1}{2^\beta}=\frac{2^\beta 3^\delta+2^\beta 3^\gamma-3^{\gamma+\delta}}{2^\beta 3^{\gamma+\delta}}=n,$$
或
$$2^\beta(3^\delta+3^\gamma)-3^{\gamma+\delta}=2^\beta 3^{\gamma+\delta}n,$$
上式式左为奇数,而式右为偶数不妥;

(ii) 考虑仅 $c\geqslant 0$ 的情形,令 $-a=\alpha$, $-b=\beta$, $-d=\delta$,这时有
$$3^c=\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}-\frac{1}{3^\delta}=\frac{2^\beta 3^\delta+2^\alpha 3^\delta-2^{\alpha+\beta}}{2^{\alpha+\beta}3^\delta}=n,$$
或
$$3^\delta(2^\alpha+2^\beta)-2^{\alpha+\beta}=2^{\alpha+\beta}3^\delta n,$$
上式式右为 3 的倍数,而式左不是,不妥.

(4) 若 a,b,c,d 皆为负数,这时有
$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}=\frac{1}{3^\gamma}+\frac{1}{3^\delta},$$
或
$$(2^\alpha+2^\beta)3^{\gamma+\delta}=(3^\gamma+3^\delta)2^{\alpha+\beta},$$
(i) 若 $\alpha\neq\beta$,且 $\alpha>\beta$ 上式可化为:
$$(2^{\alpha-\beta}+1)3^{\gamma+\delta}=(3^\gamma+3^\delta)2^\alpha,$$
上式式左为奇数,而式右为偶数,不妥;

(ii) 若 $\alpha=\beta$,则前式变为:
$$2^{\alpha+1}3^{\gamma+\delta}=(3^\gamma+3^\delta)2^{2\alpha}.$$
当 $\alpha=1$,即 $3^\gamma\cdot 3^\delta=3^\gamma+3^\delta$,这对所有 γ,δ 不真;

当 $\alpha>1$,则 $\alpha-1>0$,则前式变为:
$$3^{\gamma+\delta}=2^{\alpha-1}(3^\gamma+3^\delta).$$
上式式左为奇数,而式右为偶数,亦不妥.

综上,a,b,c,d 中负数个数只能为 0.

故选(E).

8·16　满足 方程 $7^x-3\cdot 2^y=1$ 的正整数对(x,y)的组数有

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 无穷多.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1993 年)

[解]　题设方程可变形为

$\frac{7^x-1}{7-1}=2^{y-1}$，即 $7^{x-1}+7^{x-2}+\cdots+1=2^{y-1}$.　①

若 $y=1$,则 $x=1$,即(1,1)适合方程.

若 $y>1$,因①式右为偶数,故式左奇数个数为偶数,即 x 为偶数,因而方程可改写为

$$(7+1)(7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1)=2^{y-1},$$

即

$$7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1=2^{y-4}.\quad ②$$

则　$y\geqslant 4$.　有　$x=2$,　$y=4$.

又当 $y>4$ 时,方程②右端是偶数,左端为 $\frac{x}{2}$ 个奇数和,则 $4\mid x$. 这样方程②又可改写

$$(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\cdots+1)=2^{y-4},$$

$\because$　$7^2+1=50$,　则　$50\mid 2^{y-4}$,　这不可能.

因而 $y>4$ 时方程无解.

综上原方程仅有(1,1)和(2,4)两组解.

故选(C).

第2节　对数方程

8·17　已知 $\log_x a=a$(a 为大于1的正整数),则 x 的值为

(A) $10^{a\lg a}$.　(B) $10^{\frac{\lg a}{a^2}}$.　(C) $10^{\frac{\lg a}{a}}$.　(D) $10^{a\lg\frac{1}{a}}$.

(中国初中数学联赛,1986年)

[解]　$\because$　$\log_x a=a$,　则　$x^a=a$,

因而　$\lg x=\frac{\lg a}{a}$,　$\therefore$　$x=10^{\frac{\lg a}{a}}$.

故选(C).

8·18　若 $\log_{2x}216=x$,其中 x 是实数,那么 x 是

(A) 一非平方,非立方的整数.

(B) 一非平方,非立方,非整数的有理数.

(C) 一无理数.

(D) 一完全平方数.

(E) 一完全立方数.

（第 11 届美国高中数学考试，1960 年）

[解]　由 $\log_{2x}216 = x$，有 $216 = (2x)^x$，

而　$216 = 2^3 \cdot 3^3$，　故　$(2 \cdot 3)^3 = (2x)^x$，　得　$x = 3$.

故选(A).

8·19　如果 $\log_7[\log_3(\log_2 x)] = 0$，那么 $x^{-\frac{1}{2}}$ 等于

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.　　(C) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.　　(D) $\frac{1}{\sqrt{42}}$.

(E) 以上结果全不对.

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

[解]　欲求 $x^{-\frac{1}{2}}$ 之值，先将 x 从原方程中解出.

由　$\log_7[\log_3(\log_2 x)] = 0$，有　$\log_3(\log_2 x) = 1$，

即　$\log_2 x = 3$，故　$x = 2^3 = 8$.

所以
$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

故选(E).

8·20　如果 $\log_2[\log_2(\log_2 x)] = 2$，那么 x 的十进位制表示中数字的个数是

(A) 5.　　(B) 7.　　(C) 9.　　(D) 11.　　(E) 13.

（第 44 届美国高中数学考试，1993 年）

[解]　由
$$\log_2[\log_2(\log_2 x)] = 2,$$
有
$$\log_2(\log_2 x) = 2^2 = 4,$$
且
$$\log_2 x = 2^4 = 16,$$
则
$$x = 2^{16} = 2^6 \cdot 2^{10} \approx 64 \cdot 1000 = 6.4 \cdot 10^4.$$

故选(A).

8·21　若$\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11$，则 N 的不同素因子个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　(E)7.

（第 49 届美国高中数学考试，1998 年）

[解]　由题设有 $\log_3(\log_5(\log_7 N)) = 2^{11}$，

且　$\log_5(\log_7 N) = 3^{2^{11}}$，

及 $\log_7 N=5^{3^{2^{11}}}$，得 $N=7^{5^{3^{2^{11}}}}$

显然 N 仅有一个素因子 7.

故选(A).

8·22 方程 $x^{\lg x}=10$ 所有实根的积是

(A) 1. (B) -1. (C) 10. (D) 10^{-1} (E) 非以上的值.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解] 将所给的方程两边取以 10 为底的对数

$$(\lg x)(\lg x)=1,$$

即
$$(\lg x)^2=1,$$

则
$$\lg x=\pm 1,$$

得
$$x=10 \text{ 或 } 10^{-1}.$$

可以验证,它们都是原方程的根,因此它们的积是 1.

故选(A).

8·23 $a>1$, a 为常数,$x^{\lg x}=a$ 的全部实根之积是

(A) 1. (B) ± 1. (C) $\lg^2 a$. (D) $\pm\lg a$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 由设知 $\lg x\cdot\lg x=\lg a$ 即 $\lg^2 x=\lg a$,

$\therefore$ $\lg x=\pm\sqrt{\lg a}$, 得 $\lg x_1=\sqrt{\lg a}$, $\lg x_2=-\sqrt{\lg a}$.

因而 $\lg x_1x_2=\lg x_1+\lg x_2=\sqrt{\lg a}-\sqrt{\lg a}=0$.

则
$$x_1x_2=1.$$

故选(A).

8·24 满足方程$(\log_3 x)(\log_x 5)=\log_3 5$ 的正数 x

(A) 仅 3 和 5.

(B) 仅 3,5 和 15.

(C) 仅形如 $5^n\cdot 3^m$ 的数,其中 n 和 m 是正整数.

(D) 所有正数 $x\neq 1$.

(E) 这些都不对.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 若 $x>0$ 且 $x\neq 1$,设 $a=\log_3 x$, $b=\log_x 5$ 和 $c=\log_3 5$,

那么
$$x=3^a,\quad 5=x^b \text{ 和 } 5=3^c.$$

这样 $3^{ab} = 3^c$ 或 $ab = c$.

即当 $x \neq 1$ 时, $ab = c$.

故选(D).

8·25 设 a, b 为不等于 1 的正的常数,则满足等式$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ 的实数 x 的个数有

(A) 0. (B) 1. (C) 2.

(D) 大于 2 的一个整数. (E) 不是有限个.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解 1] 令 $\log_b x = y$, 则 $x = b^y$. 由题设等式有

$$(\log_a b^y) y = \log_a b, \quad 即 \quad y^2 \log_a b = \log_a b,$$

$\therefore \quad y^2 = 1$, 得 $y = \pm 1$. 即 $x = b$ 或 b^{-1}.

故选(C).

[解 2] 令 $\log_a x = y$, 则 $z = a^y$. 由题设有

$$y \log_b a^y = \log_a b, \quad 即 \quad y^2 = (\log_a b)^2,$$

得 $$y = \pm \log_a b, \quad 即 \quad x = b 或 b^{-1}.$$

故选(C).

8·26 满足方程 $x^{\lg x} = \dfrac{x^3}{100}$ 的 x 值所成的集合的元素

(A) 仅$\frac{1}{10}$. (B) 仅 10. (C) 仅 100.

(D) 仅 10 或 100. (E) 多于两实数.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 方程两边取对数(常用对数)有

$$\lg x \cdot \lg x = 3\lg x - \lg 100,$$

即 $$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0, 得 \lg x = 1 或 2.$$

则 $$x = 10 或 100.$$

故选(D).

8·27 如果 $b > 1, x > 0$, 且$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, 那么 x 是

(A) $\frac{1}{216}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) 1. (D) 6. (E) 不能惟一确定.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 题设方程等价于下列方程:

$$(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3},$$

或 $\dfrac{2^{\log_b 2}}{3^{\log_b 3}}=\dfrac{x^{\log_b 3}}{x^{\log_b 2}}$,即 $\dfrac{2^{\log_b 2}}{3^{\log_b 3}}=x^{\log_b 3-\log_b 2}$.

上等式两边取以 b 为底的对数有

$$\log_b 2^{\log_b 2}-\log_b 3^{\log_b 3}=(\log_b 3-\log_b 2)\log_b x,$$

即 $$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=(\log_b 3-\log_b 2)\log_b x.$$

因而 $$-(\log_b 2+\log_b 3)=\log_b x,$$

或 $$-\log_b(2\cdot 3)=\log_b x,$$

所以 $\log_b\dfrac{1}{6}=\log_b x$, 得 $x=\dfrac{1}{6}$.

故选(B).

8·28 设 a,b 和 x 是不等于 1 的正实数.那么,下式

$$4(\log_a x)^2+3(\log_b x)^2=8(\log_a x)(\log_b x)$$

成立的条件是

(A) 对于 a,b 和 x 的一切值. (B) 当且仅当 $a=b^2$.

(C) 当且仅当 $b=a^2$. (D) 当且仅当 $x=ab$.

(E) 这些都不对.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 已知方程可写成下列形式

$$4(\log_a x)^2-8(\log_a x)(\log_b x)+3(\log_b x)^2=0,$$

即 $$(2\log_a x-\log_b x)(2\log_a x-3\log_b x)=0.$$

因而 $\log_a x^2=\log_b x$, 或 $\log_a x^2=\log_b x^3$.

若设 $r=\log_a x^2$,那么由上式则有

$$a^r=x^2 \quad 及 \quad b^r=x, \quad 或 \quad a^r=x^2 \quad 及 \quad b^r=x^3,$$

即 $$a^r=b^{2r}, \quad 或 \quad a^{3r}=b^{2r},$$

因而 $a=b^2$ 或 $a^3=b^2$.

故选(E).

8·29 如果 $x,y>0$, $\log_y x+\log_x y=\dfrac{10}{3}$ 并且 $xy=144$,那么 $\dfrac{x+y}{2}$ 等于

(A) $12\sqrt{2}$. (B) $13\sqrt{3}$. (C) 24. (D) 30. (E) 36.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解] $\because$ $\log_y x = \dfrac{1}{\log_x y}$，则题设方程可化为

$$\log_x^2 y - \frac{10}{3}\log_x y + 1 = 0.$$

解得 $\log_x y = 3$ 或 $\frac{1}{3}$，即 $y = x^3$ 或 $x^{\frac{1}{3}}$.

又 $xy = 144$，则 $x^4 = 144$ 或 $x^{\frac{4}{3}} = 144$，

当 $x^4 = 144$ 时，$x^2 = 12$，则 $x = 2\sqrt{3}$ ($\because$ $x > 0$)，

又 $$y = x^3 = x^2 \cdot x = 24\sqrt{3},$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2}(x + y) = 13\sqrt{3};$$

当 $x^{\frac{4}{3}} = 144$ 时，$x = \sqrt{12^3} = 24\sqrt{3}$，

而 $$y = x^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{12^3})^{\frac{1}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2}(x + y) = 13\sqrt{3}.$$

故选(B).

8·30 若 $\log_{b^2} x + \log_{x^2} b = 1$，$b > 0$，$b \neq 1$，$x \neq 1$，则 x 等于

(A) $\dfrac{1}{b^2}$. (B) $\dfrac{1}{b}$. (C) b^2. (D) b. (E) $\sqrt{b}$.

（第15届美国高中数学考试，1964年）

[解] 令 $\log_{b^2} x = m$，$\log_{x^2} b = n$，则

$$x = b^{2m}, \quad b = x^{2n}.$$

$\therefore$ $(x^{2n})^{2m} = b^{2m}$，即 $x^{4mn} = x$.

$\therefore$ $4mn = 1$，有 $n = \dfrac{1}{4m}$.

又由题设 $m + n = 1$，即 $m + \dfrac{1}{4m} = 1$，

化简后为 $4m^2 - 4m + 1 = 0$，得 $m = \dfrac{1}{2}$，即 $x = b$.

故选(D).

8·31 若 $x > 0$，$y > 0$，且 $2\lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$，那么 $x : y$ 的值是

(A) 4. (B) 1. (C) 1 或 4. (D) $\dfrac{1}{4}$.

（中国天津市初中数学竞赛，1983年）

[解]　由设有 $\lg(x-2y)^2=\lg xy$,则
$$(x-2y)^2=xy,\quad 即\quad x^2-5xy+4y^2=0.$$
由 $y>0$,上方程可化为　$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0$,

解得 $\frac{x}{y}=4$ 或 1. 但 $\frac{x}{y}=1$,即 $x=y$ 时 $x-2y<0$ 不妥,故舍去.

综上　$x:y=4$,

故选(A).

8·32　若互素的整数 A,B,C 满足 $A\log_{200}5+B\log_{200}2=C$, 则 $A+B+C=$

(A)6.　(B)7.　(C)8.　(D)9.　(E)10.

(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解]　由题设有 $\log_{200}5^A+\log_{200}2^B=C$,知

$5^A\cdot 2^B=200^C$, 而 $200^C=(8\times 25)^C=2^{3C}\cdot 5^{2C}$.

得　$A=2C$, $B=3C$, 而 $(A,B,C)=1$,

$\therefore$　$C=1$, $A=2$, $B=3$. 即 $A+B+C=6$.

故选(A).

8·33　已知只有一个 x 的值满足方程
$$(1-\lg^2 a)x^2+(3+\lg a)x+2=0,$$
则实数 a 等于

(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.　(B) 10.　(C) $\frac{1}{10}$.　(D) 非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛,1985 年)

[解]　由 $\Delta=(3+\lg a)^2-8(1-\lg^2 a)=9\lg^2 a+6\lg a+1=0$,

解得 $\lg a=-\frac{1}{3}$,即 $a=10^{-\frac{1}{3}}$. 此时 $1-\lg^2 a\neq 0$ 知方程有两相等实根.

当 $1-\lg^2 a=0$,即 $\lg a=\pm 1$ 或 $a=10$ 及 $\frac{1}{10}$ 时,原方程化为
$$4x+2=0\quad 或\quad 2x+2=0,$$
此时原方程各只有一实根.

故选(D).

8·34　设 p,q 满足 $\log_9 p=\log_{12}q=\log_{16}(p+q)$. 则 $\frac{q}{p}$ 等于

(A) $\frac{4}{3}$.　(B) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.　(C) $\frac{8}{5}$.

(D) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.　　　(E) $\frac{16}{9}$.

（第 39 届美国高中数学考试,1988 年）

[解]　由设及换底公式有

$$\frac{\lg p}{\lg 9}=\frac{\lg q}{\lg 12}=\frac{\lg(p+q)}{\lg 16}.$$

由等比定理有

$$\frac{\lg p+\lg q+\lg(p+q)}{\lg 9+\lg 12+\lg 16}=\frac{\lg q}{\lg 12},$$

即
$$\frac{\lg pq(p+q)}{\lg 12^3}=\frac{\lg q}{\lg 12},$$

或
$$\lg pq(p+q)=3\lg q,$$

$\therefore\quad \lg pq(p+q)-\lg q^3=0,\quad$ 即 $\quad \lg\frac{pq(p+q)}{q^3}=0.$

有 $\quad \frac{pq(p+q)}{q^3}=1,\quad$ 则 $\quad q^2-pq-p^2=0,$

$\therefore$
$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-\left(\frac{q}{p}\right)-1=0.$$

解得
$$\frac{q}{p}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\text{（舍去负值）}.$$

故选(D).

8·35　若下面等式成立

$$\log_2[\log_3(\log_4 x)]=\log_3[\log_4(\log_2 y)]=\log_4[\log_2(\log_3 z)]=0,$$

那么 $x+y+z$ 的和等于

(A) 50.　(B) 58.　(C) 89.　(D) 111.　(E) 1296.

（第 22 届美国高中数学考试,1971 年）

[解]　若 $\log_a b=0$,则 $b=1$.

所以　$\log_3(\log_4 x)=\log_4(\log_2 y)=\log_2(\log_3 z)=1.$

因此　　$\log_4 x=3,\quad \log_2 y=4,\quad \log_3 z=2.$

$\therefore\quad x+y+z=4^3+2^4+3^2=89.$

故选(C).

8·36　若 $|x-\lg y|=x+\lg y$,其中 x 和 $\lg y$ 是实数,那么

(A) $x=0$.　　(B) $y=1$.　　(C) $x=0$ 与 $y=1$.

(D) $x(y-1)=0$.　　(E) 这些都不对.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

[解]　若 $x-\lg y\geqslant 0$,则已知方程化为

$$x-\lg y=x+\lg y,$$

所以　$-\lg y=\lg y=0,\quad y=1.$

另一方面,若　$x-\lg y\leqslant 0$, 则

$$-(x-\lg y)=x+\lg y,$$

所以　$2x=0.$

注意到　$x(y-1)=0$, 有 $x=0$ 或 $y=1$.

故选(D).

8·37　点集 $\{(x,y)\mid \lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\}$ 中元素的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 多于 2.

（中国高中数学联赛,1990 年）

[解]　由 $\lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y$,　有

$$\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy.\end{cases}$$

又由均值不等式

$$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{(x^3)(\frac{1}{3}y^3)(\frac{1}{9})}=xy,$$

当且仅当　$\begin{cases}x^3=\frac{1}{9},\\ \frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9},\end{cases}$　上式等号成立.

解此二方程得　$x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}},\quad y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$(虚根舍去).

则点集中有惟一点　$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}},\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$.

故选(B).

8·38 如果$(8y-1)^2+|x-16y|=0$,那么$\log_2 y^x$的值是

(A) -6. (B) 0. (C) $\frac{1}{64}$. (D) $\frac{1}{8}$.

(中国上海市初中数学竞赛,1983年)

[解] 由题设及$(8y-1)^2\geqslant 0$, $|x-16y|\geqslant 0$,则有

$$\begin{cases}8y-1=0,\\ x-16y=0.\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=2,\\ y=\frac{1}{8}.\end{cases}$$

$$\therefore \qquad \log_2 y^x = 2\log_2\frac{1}{8} = -6.$$

故选(A).

8·39 若$|x-8y|+(4y-1)^2=0$,则$\log_2 y^x$的值为

(A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{16}$. (D) -4. (E) $\sqrt{2}$.

(中国北京市初中数学竞赛,1982年)

[解] 由题设知 $x-8y=0$,且$4y-1=0$得$x=2, y=\frac{1}{4}$.

所以 $$\log_2 y^x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -4.$$

故选(D).

8·40 设$\frac{\lg a}{p}=\frac{\lg b}{q}=\frac{\lg c}{r}=\lg x$, $x\neq 1$,若$\frac{b^2}{ac}=x^y$,则y等于

(A) $\frac{q^2}{p+r}$. (B) $\frac{p+r}{2q}$. (C) $2q-p-r$.

(D) $2q-pr$. (E) q^2-pr.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解] 由设有$a=x^p$, $b=x^q$, $c=x^r$,因此

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{x^{2q}}{x^p\cdot x^r}=x^{2q-p-r}=x^y,$$

$$\therefore \qquad y=2q-p-r.$$

故选(C).

第3节 三角方程

8·41 已知方程$\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin x$,则

(A) $x=\frac{24}{25}$.　　　(B) $x=-\frac{24}{25}$.

(C) $x=0$.　　　(D) 这样的 x 不存在.

（中国高中数学联赛，1985 年）

[解]　原方程可改写为 $2\arccos\frac{4}{5}-\pi=\arcsin x$.

因
$$0<\arccos\frac{4}{5}<\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},$$
故
$$0<2\arccos\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2}.$$
而　$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，　则所给方程无解.

故选(D).

8·42　设 $f(x)=\arccos x+2\arcsin x$，则 $f^{-1}(x)$ 是

(A) $\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.　　　(B) $\cos x, x\in[0,\pi]$.

(C) $-\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.　　　(D) $-\cos x, x\in[0,\pi]$.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　若令 $y=f(x)$，由设可有
$$y=(\arcsin x+\arccos x)+\arcsin x=\frac{\pi}{2}+\arcsin x,$$
故
$$x=\sin(y-\frac{\pi}{2})=-\cos y.$$
注意到 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，有 $0\leqslant\frac{\pi}{2}+\arcsin x\leqslant\pi$，

则
$$f^{-1}(x)=-\cos x,\quad x\in[0,\pi].$$
故选(D).

8·43　如果 $\sin2x\sin3x=\cos2x\cos3x$，那么 x 的一个值是

(A) 18°.　(B) 30°.　(C) 36°.　(D) 45°.　(E) 60°.

（第 35 届美国高中数学考试，1984 年）

[解 1]　由　$\sin2x\sin3x=\cos2x\cos3x$，

有
$$\cos2x\cos3x-\sin2x\sin3x=0,$$
即
$$\cos(2x+3x)=0.$$
得
$$5x=90°+k\cdot180°,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$
或
$$x=18°+k\cdot36°,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

第八章　初等超越方程

所以五个答案中只有 18° 是其中的一个解.

故选(A).

[解 2] 观察原方程,我们看到只要求出

$$\sin 2x = \cos 3x \text{ 和 } \sin 3x = \cos 2x$$

的解,那么这个解一定满足原三角方程.进而,当 $2x$ 和 $3x$ 互余时,以上两式都成立.

于是 $2x + 3x = 90°$, 即 $x = 18°$.

故选(A).

8·44 方程 $\frac{x}{100} = \sin x$ 实根的个数为

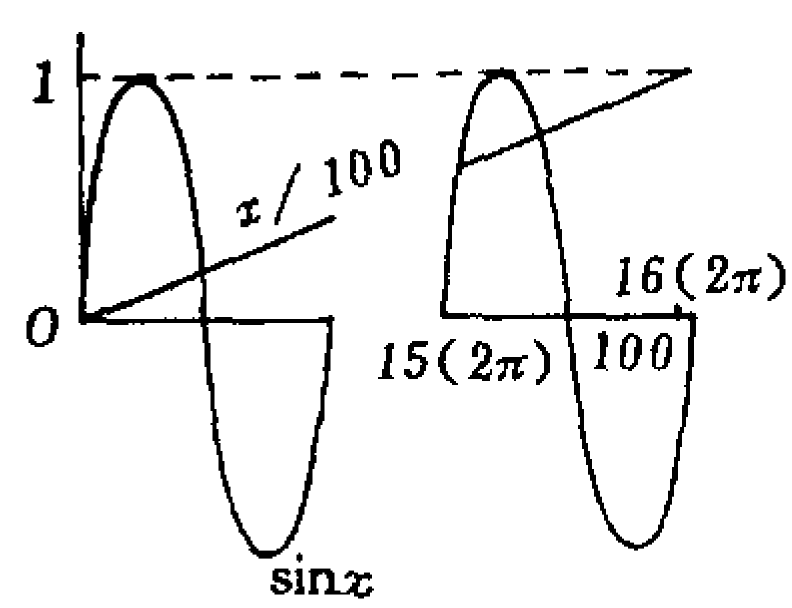
(A) 91. (B) 62. (C) 63. (D) 64. (E) 65.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 因为 $\frac{-x}{100} = \sin(-x)$,所以这个方程有多少个正数解,就有多少个负数解.并且由直接验证,可知 $x = 0$ 是它的一个解.

又因为 $|\sin x| \leqslant 1$,所以 $|x| = 100|\sin x| \leqslant 100$,

此式说明:解的绝对值不大于 100.



在直角坐标系中,作出 $\frac{x}{100}$ 和 $\sin x$ 的图像,因为 $15.5 < \frac{100}{2\pi} < 16$,即

$$15.5 \cdot 2\pi < 100 < 16 \cdot 2\pi.$$

如图,从图像上直观地看出方程在 0 和 π 之间有一解,并且每一个 $(2k-1)\pi$ 到 $(2k+1)\pi$ 之间有两个解,其中 $1 \leqslant k \leqslant 15$.

故方程解的个数为 $1 + 2(1 + 2 \cdot 15) = 63$.

故选(C).

8·45 一个任意的圆与曲线 $y = \sin x$ 能相交于

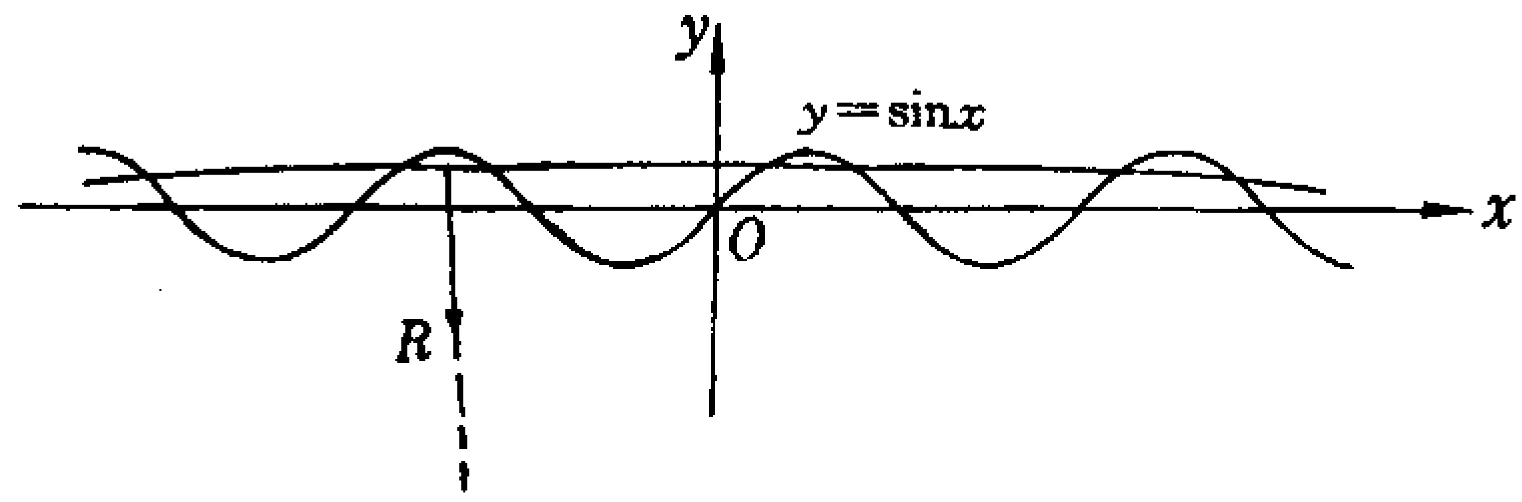
(A) 最多 2 点. (B) 最多 4 点. (C) 最多 6 点.

(D) 最多 8 点. (E) 多于 16 个点.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解] 对于圆心在 y 轴上,半径极大(此时圆弧近乎于直线)且可与 $y = \sin x$ 相交的圆来讲,其交点个数可以是无穷多个(如图).

故选(E).



8·46　在平面直角坐标系内，有圆心角为 30°，圆心在 y 轴上的圆弧，它与曲线 $y = \sin x$ 的交点的个数是

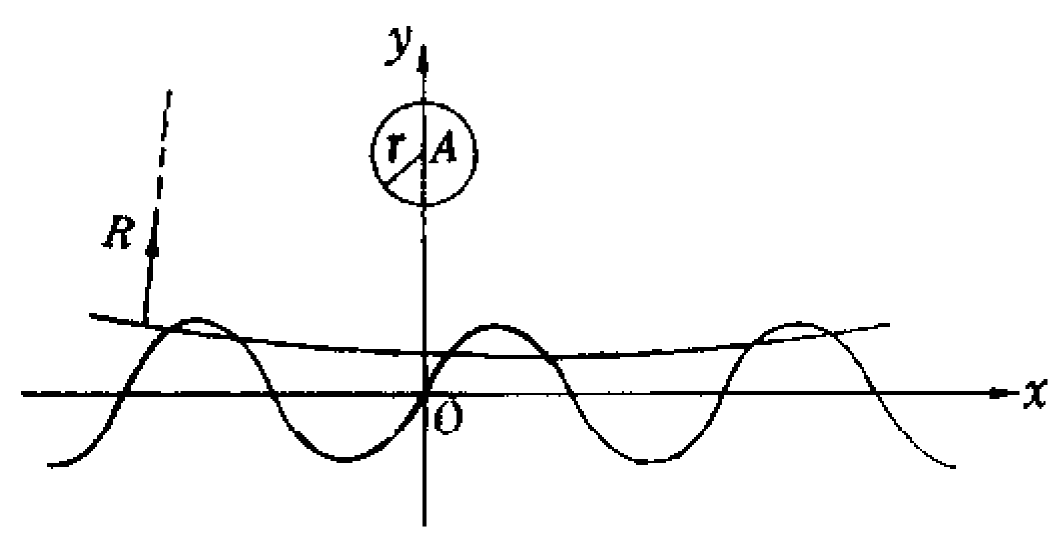
(A) 0 或 1.　　　　(B) 0 或 1 或 2.

(C) 任意自然数.　　　　(D) 0 或任意自然数.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

［解］　因题设圆弧圆心在 y 轴上，但其半径不限，这样：

当圆半径足够小，且圆心离原点又足够远时，圆弧与曲线 $y = \sin x$ 无交点；



又当圆半径足够大，且圆心离原点足够远时，二者可有有限或无穷多个交点.

故选 (D).

8·47　方程 $x = \sin x + 1993$ 的实根的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 大于 2.

（中国江苏省苏州市高中数学竞赛，1993 年）

［解］　由于方程的根是直线 $y = x$ 与曲线 $y = \sin x + 1993$ 的交点的横坐标，所以方程至少有一实根.

假设方程有两个实根 x_1, x_2，且 $x_1 \neq x_2$，则

$$x_1 = \sin x_1 + 1993, \quad x_2 = \sin x_2 + 1993.$$

$$\therefore \quad x_1 - x_2 = \sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$$\because \quad \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| < \frac{|x_1 - x_2|}{2},$$

$$\therefore \quad |x_1 - x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right|\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right|$$

$$< |x_1 - x_2|\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right|.$$

则有 $\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|>1$，与 $\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant 1$ 矛盾.

因而原方程仅有一实根.

故选(B).

8·48　方程 $\sin x=\lg x$ 的实根个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 大于 3.

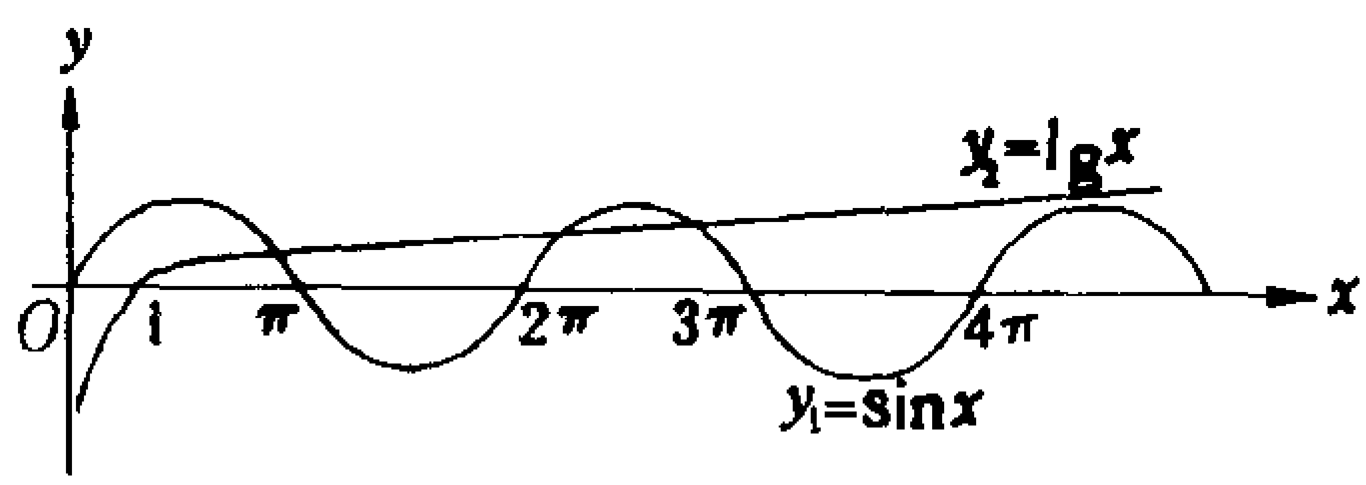
（中国高中数学联赛，1984 年）

[解]　在同一坐标系内画出函数 $y_1=\sin x$，$y_2=\lg x$ 的图像（如图）得出 y_1 与 y_2 交点的个数即为方程 $\sin x=\lg x$ 的实根个数.

从图像上看有三个交点，即所求方程实根的个数为 3，(C) 对.

事实上，$y_1=\sin x$ 是周期函数，$y_2=\lg x$ 是增函数，我们可以分区间讨论如下：

由于 $y_2=\lg x$ 的定义域为 $x>0$，故只考虑 $x>0$ 的情况.



当 $x\in(0,1)$ 时 $\sin x>0$，$\lg x<0$，y_1 与 y_2 不相交，原方程在此区间无解.

当 $x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\sin x$ 与 $\lg x$ 都为增函数，但

$$\sin 1>0.8,\lg 1=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \lg\frac{\pi}{2}<0.7$$

$\therefore\ \sin x>\lg x$，即在此区间内 y_1 与 y_2 不相交，原方程无解.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\sin x$ 为单减函数，$\lg x$ 为单增函数，

但 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\lg\frac{\pi}{2}<1$，$\sin\pi=0$，$\lg\pi>0$，所以在此区间内 y_1 与 y_2 必有一个交点.

当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$\sin x\leqslant 0$，$\lg x>0$，故在此区间内 y_1 与 y_2 无交点.

当 $x\in\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x$ 是增函数，且 $\sin 2\pi=0$，$\sin\frac{5\pi}{2}=1$；而

$\lg x$ 是增函数,且 $\lg 2\pi > 0$, $\lg\frac{5\pi}{2} < 1$,

$\therefore$ y_1 与 y_2 在此区间有一个交点.

当 $x \in [\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$ 时,$\sin x$ 是减函数,且 $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$, $\sin 3\pi = 0$,

而 $\lg x$ 是增函数,且 $\lg\frac{5\pi}{2} < 1$, $\lg 3\pi < 1$,

$\therefore$ y_1 与 y_2 在此区间内有一个交点.

当 $x \in [3\pi, 4\pi)$ 时,$\sin x < 0$, $\lg x > 0$,显然 y_1 与 y_2 没有交点.

当 $x \in [4\pi, +\infty)$ 时,$|\sin x| \leqslant 1$,而 $\lg x > \lg 10 = 1$,此时 y_1 与 y_2 不会再有交点.

综上所述知 y_1 与 y_2 共有 3 个交点,即原方程有三个实根.

故选(C).

8·49 如果 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的根,且 $\operatorname{ctg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\beta$ 是方程 $x^2 - rx + s = 0$ 的根,那么 rs 一定是

(A) pq. (B) $\frac{1}{pq}$. (C) $\frac{p}{q^2}$. (D) $\frac{q}{p^2}$. (E) $\frac{p}{q}$.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解 1] 由韦达定理有

$p = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta, q = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$,及 $r = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta, s = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

因此有 $$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

和 $$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

所以 $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{1}{q}$, 即 $rs = \frac{p}{q^2}$.

故选(C).

[解 2] 因为这两个方程的根是互为倒数,而一般地讲,如果 $x^2 - px + q = 0$ 有根 m 和 n,则 $qx^2 - px + 1 = 0$ 就有根 $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$.

用 q 去除 $qx^2 - px + 1 = 0$ 的两边,得方程 $x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$,则 $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$ 是此方程的根.

所以 $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{1}{q}$, 而 $rs = \frac{p}{q^2}$.

故选(C).

8·50　对 $x \in [0,2\pi]$,且满足方程 $\mathrm{tg}^2 x - 9\mathrm{tg}x + 1 = 0$ 的所有根的和为

(A) $\frac{\pi}{2}$.　　(B) π.　　(C) $\frac{3\pi}{2}$.　　(D) 3π.　　(E) 4π.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解]　由韦达定理及题设知方程两根满足

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x_1 + \mathrm{tg}x_2 = 9, & ① \\ \mathrm{tg}x_1 \cdot \mathrm{tg}x_2 = 1. & ② \end{cases}$$

因而 $\mathrm{tg}x_1 > 0$,　$\mathrm{tg}x_2 > 0$.　又 $x_1, x_2 \in [0,2\pi]$,

知　x_1, x_2 在 Ⅰ,Ⅲ 象限,即 $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$,　$0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$,

且　$x_3 = \pi + x_1$,　$x_4 = \pi + x_2$.

又
$$\mathrm{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\mathrm{tg}x_1 + \mathrm{tg}x_2}{1 - \mathrm{tg}x_1 \mathrm{tg}x_2},$$

将①,②代入,知其分母为 0,又 $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$,　$0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$,

故　$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$,　则　$x_3 + x_4 = 2\pi + (x_1 + x_2) = \frac{5\pi}{2}$,

从而
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\pi.$$

故选(D).

第 4 节　函数方程

8·51　设函数 $y = f(x)$ 对一切实数 x 都满足

$$f(3 + x) = f(3 - x),$$

且方程 $f(x) = 0$ 恰有 6 个不同的实根,则这 6 个实根的和为

(A) 18.　　(B) 12.　　(C) 9.　　(D) 0.

(中国高中数学联赛,1991 年)

[解]　若 $3 + \alpha$ 为 $f(x) = 0$ 的根,则由题设知

$$f(3 - \alpha) = f(3 + \alpha) = 0.$$

即 $3 - \alpha$ 也是 $f(x) = 0$ 的根.故可设此 6 个根为

$$3 \pm \alpha_1,\quad 3 \pm \alpha_2,\quad 3 \pm \alpha_3.$$

于是其和为 18.

故选(A).

8·52　设函数 $f(x)$ 对一切实数都有 $f(1+x)=f(1-x)$. 若方程 $f(x)=0$ 有且仅有两个不等的实根. 则此两根之差的绝对值是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) 不确定.

(中国四川省高中数学竞赛,1990 年)

[解 1]　设 $f(x_1)=f(x_2)=0$,即 x_1,x_2 为 $f(x)=0$ 的两个不等根.

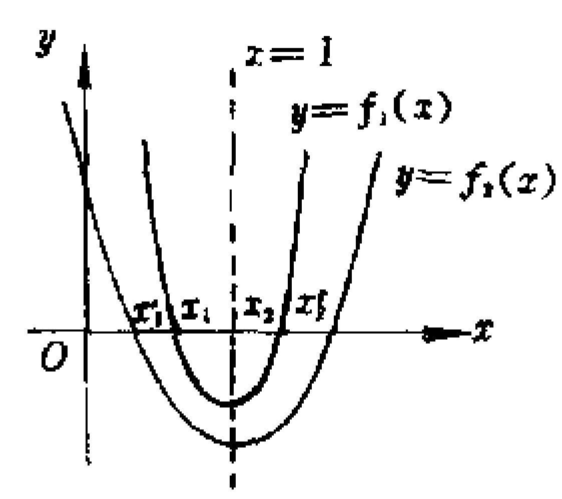
令　$x_1=1+x_0$,由题设有　$f(1+x_0)=f(1-x_0)$,

得
$$x_2=1-x_0.$$

$$\therefore\quad |x_1-x_2|=|(1+x_0)-(1-x_0)|=2|x_0|.$$

故选(D).

[解 2]　以 $x=1$为对称轴,且与 x 轴有两个交点的抛物线,是有题设性质的函数(如图).



从图像上看,$|x_1-x_2|$ 不确定(因其与抛物线形状有关).

故选(D).

8·53　函数 $f(x)$ 对于一切实数 x 都满足$f(2+x)=f(2-x)$. 如果方程 $f(x)=0$ 恰好有四个不同的实根,那么这些根的和是

(A) 0.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D) 6.　　(E) 8.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解]　由题设 $f(2+x)=f(2-x)$,因此若 $r_1=2+a$ 是$f(x)=0$ 的根,那么 $r_2=2-a$ 也一定是它的根,且可以断定其所有不同的根都是成对地出现,而每一对实根的和均为 4.

又因为它恰好有四个不同的根,则 2 一定不是它的根(若 $r_1=2+a=2$,则 $a=0$,推出 $r_2=2$,于是 $r_1=r_2$,并且仅当 $a=0$ 时,$r_1=r_2$. 这样与此函数恰有四个不同的根的条件矛盾),知这四个根的和是 8.

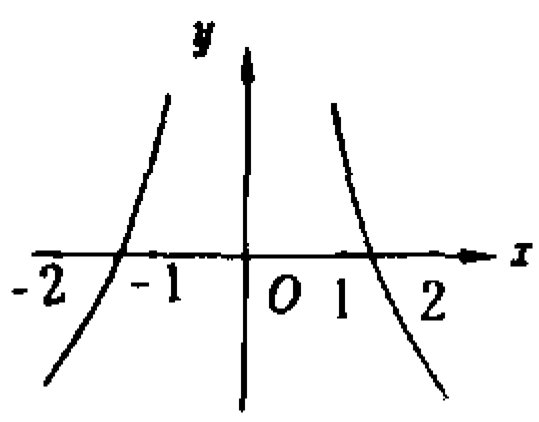
故选(E).

8·54　在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上连续的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$,$x\neq0$. 且当 $x>0$时,$f(x)$ 是减函数,并且 $f(1)>0>f(2)$,则方程 $f(x)=0$ 的实根的个数是

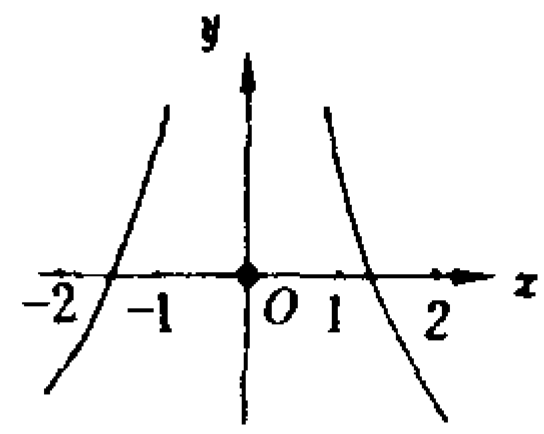
(A) 1 或 2.　　(B) 2.　　(C) 2 或 3.　　(D) 3.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　函数 $f(x)$ 图像当为下面两种情形之一(注意到图②中 $f(0)=0$):



图①



图②

知 $f(x)=0$ 有2或3个实根.

故选(C).

8·55　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义,但对于所有的非零实数 x,都有 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$,则方程 $f(x)=f(-x)$ 解的情况是

(A) 恰有一个实数解.　(B) 恰有两个实数解.

(C) 没有实数解.　(D) 无穷多个,但不是所有的非零实数.

(E) 所有非零实数.

(第32届美国高中数学考试,1981年)

[解]　将 $\frac{1}{x}$ 代入方程 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$,　①

得
$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}.\quad ②$$

②×2-①有　$f(x)=\frac{2-x^2}{x}$.

于是,当且仅当　$\frac{2-x^2}{x}=\frac{2-(-x)^2}{-x}$,　即　$x^2=2$　时,有 $f(x)=f(-x)$.

由上方程解得　$x=\pm\sqrt{2}$.

故选(B).

8·56　记 $f(x)=x^2+bx+c$.若方程 $f(x)=x$ 没有实数根,则方程 $f(f(x))=x$

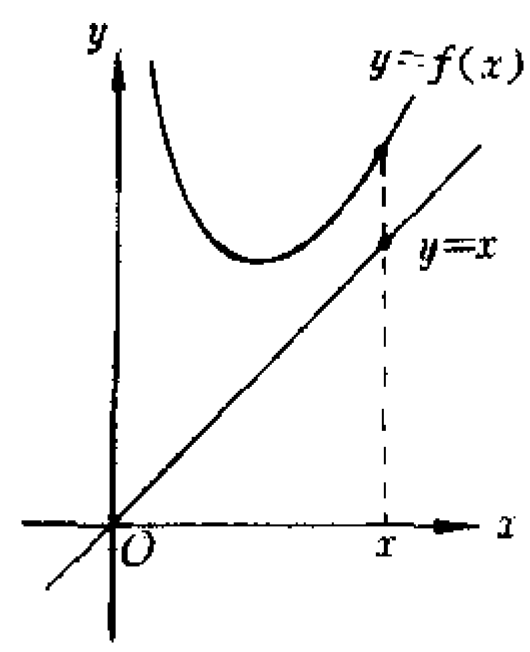
(A) 有4个实数根.　(B) 有2个实数根.

(C) 有1个实数根.　(D) 没有实数根.

(中国江苏省初中数学竞赛,1991年)

[解]　由设方程　$f(x)=x$　无实根,即说明直线　$y=x$　与抛物线 $y=f(x)$ 无交点,又 $f(x)$ 中二次项系数为正知其开口向上.

这样，$y=f(x)$的图像位于直线$y=x$的上方．即对任何实数x，均有$f(x)>x$．



因此 $f(f(x))>f(x)>x$， 此即说$f(f(x))=x$无实根．

故选(D)．

8·57 f是$R\rightarrow R$上的一一映射，函数$y=f(x)$严格递增，方程$x=f(x)$的解集为P，方程$x=f(f(x))$的解集为Q，则

(A) $P\subset Q$. (B) $P=Q$.

(C) $Q\subset P$. (D) $P\not\subseteq Q$，且$Q\not\subseteq P$.

（第1届"希望杯"数学竞赛，1990年）

［解］ 若$x\in P$，即x满足$x=f(x)$，

考虑到 $f(f(x))=f(x)=x$，知$x\in Q$，则$P\subset Q$；

假设$Q\not\subset P$，即存在$x_0\in Q$，且$x_0\notin P$，使

$$f(f(x_0))=x_0, f(x_0)\neq x_0.$$

若 $f(x_0)<x_0$，因$f(x)$是增函数，那么有$f(f(x_0))<f(x_0)$，即有 $x_0<f(x_0)$，矛盾！

若 $f(x_0)>x_0$， 因$f(x)$是增函数，那么有$f(f(x_0))>f(x_0)$，即有$x_0>f(x_0)$，矛盾！

从而 $Q\subset P$．综上有 $P=Q$．

故选(B)．

8·58 若m,n,p和q是实数且$f(x)=mx+n$， $g(x)=px+q$，那么方程$f(g(x))=g(f(x))$有解的条件是

(A) m,n,p和q为任意实数时．

(B) 当且仅当$m=p$且$n=q$．

(C) 当且仅当$mq-np=0$．

(D) 当且仅当$n(1-p)-q(1-m)=0$．

(E) 当且仅当$(1-n)(1-p)-(1-q)(1-m)=0$．

（第27届美国高中数学考试，1976年）

［解］ 对于任何实数x，下列方程是同解的：

$$f(g(x))=g(f(x)),$$
$$m(px+q)+n=p(mx+n)+q,$$

或　　$mpx + mq + n = mpx + np + q.$

因而　　$n(1-p) = q(1-m),$

故选(D).

8·59　对于每一对实数 x, y,函数 f 满足函数方程

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1.$$

若 $f(1) = 1$,那么满足 $f(n) = n$(其中 $n \neq 1$) 的整数数目共有

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 无穷多.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解]　把 $x = 1$ 代入函数方程得

$$f(y+1) = f(y) + y + 2. \qquad ⊛$$

因为 $f(1) = 1$,用 $y = 2,3,4,\cdots$ 连续代入,可以看出对 y 为正整数时都有 $f(y) > 0$. 所以,对于 y 是正整数时,

$$f(y+1) > y+2 > y+1;$$

从而对于 $n > 1$ 的整数,$f(n) = n$ 无解. 对 $f(y)$ 解上述方程:

由 ⊛ 式有

$$f(y) = f(y+1) - (y+2),$$

连续代入　$y = 0, -1, -2, \cdots$ 到此方程中,得到

$f(0) = -1$,　$f(-1) = -2$,　$f(-2) = -2$,　$f(-3) = -1$,

$f(-4) = 1$.

由于 $f(-4) > 0$ 以及对 $y < -4$,有 $-(y+2) > 0$.

这样,对于 $y < -4$,　$f(y) > 0$.

所以,对　$n < -4$,　$f(n) \neq n$.

因此　$f(n) = n$　仅有解　$n = 1, -2$.

故选(B).

第九章　初等超越不等式

第1节　指数不等式

9·1　如果 $a = 2^{55}$, $b = 3^{44}$, $c = 5^{33}$, $d = 6^{22}$,那么 a,b,c,d 从小到大的顺序 是

(A) $a < b < c < d$.　　(B) $a < b < d < e$.

(C) $b < a < c < d$.　　(D) $a < d < b < c$.

（第2届中国天津市“中华少年杯”数学邀请赛,1988年）

[解]　由 $a = (2^5)^{11} = 32^{11}$, $b = (3^4)^{11} = 81^{11}$,

$$c = (5^3)^{11} = 125^{11}, \quad d = (6^2)^{11} = 36^{11},$$

由　$32^{11} < 36^{11} < 81^{11} < 125^{11}$,有　$a < d < b < c$.

故选(D).

9·2　已知 $a = 3^{55}, b = 4^{44}, c = 5^{33}$,则有

(A) $a < b < c$.　　(B) $c < b < a$.

(C) $c < a < b$.　　(D) $a < c < b$.

（中国初中数学联赛,1995年）

[解]　∵　$a = 3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$,

且　$b = 4^{44} = (4^4)^{11} = 256^{11}$,

及　$c = 5^{33} = (5^3)^{11} = 125^{11}$,

∴　$c < a < b$,

故选(C).

9·3　若 $a = (-1989)^{-1990}$, $b = -1989^{1990}$, $c = -1989^{-1990}$.

选择题卷

那么，a,b,c 的大小关系是

(A) $a=b=c$.　　(B) $a>b=c$.

(C) $a>b>c$.　　(D) $b<c<a$.

（"祖冲之杯"初中数学邀请赛，1990年）

[解] 首先由 $a=(-1989)^{-1990}=\dfrac{1}{(-1989)^{1990}}>0$，

而 $b<0$，$c<0$，知 $a>b$，且 $a>c$.

又 $1989^{1990}>1989^{-1990}$，因而 $-1989^{1990}<-1989^{-1990}$，

即

$$b<c.$$

从而

$$b<c<a.$$

故选(D).

9·4 设 $m=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$，$n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，$p=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$. 则它们的大小关系是

(A) $m<n<p$.　　(B) $m<p<n$.

(C) $n<p<m$.　　(D) $p<n<m$.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1989年）

[解1] 由 $m=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{1}{3^4}\right)^{\frac{1}{20}}$，及

$$p=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{5^5}\right)^{\frac{1}{20}},$$

因为 $3^4<5^5$，从而 $p<m$.

由 $n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{4^4}\right)^{\frac{1}{12}}$，及 $p=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{12}}$，

因为 $4^4>5^3$，从而 $n<p$.

所以 $n<p<m$.

故选(C).

[解2] 由设 $\lg m=\dfrac{1}{5}(\lg1-\lg3)=-\dfrac{1}{5}\lg3$，且

$$\lg n=-\frac{2}{3}\lg2,\quad \lg p=\frac{1}{4}(\lg2-1).$$

由 $\lg2=0.3010\cdots$，$\lg3=0.4771\cdots$.

知 $\lg n<\lg p<\lg m$，则 $n<p<m$.

故选(C).

9·5　若 $0<a<b$，　$x=0.1993^{b}\cdot 0.1997^{a}$，且 $y=0.1993^{a}\cdot 0.1997^{b}$. 则 x,y 的大小关系是

(A) $x>y$.　　(B) $x<y$.　　(C) $x=y$.　　(D) 不确定.

（中国北京市高中数学竞赛，1993 年）

［解］　由设 $0<a<b$，考虑

$$\frac{x}{y}=(0.1993)^{b-a}(0.1997)^{a-b}=\left(\frac{0.1993}{0.1997}\right)^{b-a},$$

$\because$　　$\frac{0.1993}{0.1997}<1$，又 $b-a>0$，

$\therefore$　　$\left(\frac{0.1993}{0.1997}\right)^{b-a}<1$，

又　$x>0$，　$y>0$，则　$x<y$.

故选(B).

9·6　对 $a>b>c>0$，　$m>n>0$（m,n 是整数）下面诸关系式中成立关系式是

(A) $a^{m}b^{n}>b^{m}c^{n}>c^{n}a^{m}$.　　(B) $a^{m}b^{n}>c^{n}a^{m}>b^{n}c^{m}$.

(C) $a^{m}c^{n}>a^{m}b^{n}>b^{n}c^{m}$.　　(D) $b^{n}c^{m}>c^{n}a^{m}>a^{m}b^{n}$.

(E) $a^{m}c^{n}>b^{n}c^{m}>a^{m}b^{n}$.

（中国北京初中数学竞赛，1983 年）

［解］　由 $a>b>c>0$，　$m>n>0$，

得

$$a^{m}c^{n}<a^{m}b^{n}.$$

故(C)，(D)，(E) 均不成立.

取 $c=1$，　则对 $a>b>1=c$，　有

$$b^{m}c^{n}=b^{m}\cdot 1^{n}=b^{m}<a^{m}\cdot 1^{n}=a^{m}c^{n}.$$

故(A) 也不成立. 于是判定(B) 成立.

事实上，当 $a>b>c>0$，　$m>n>0$ 时，有

$$a^{m}b^{n}>a^{m}c^{n}>b^{m}c^{n}>b^{n}c^{m}.$$

故选(B).

9·7　若　$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$，　$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，　$c=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，则下式中成立的式子是

(A) $a<b<c$.　　(B) $b<c<a$.

(C) $a<c<b$.　　(D) $c<b<a$.

（第 2 届“缙云杯”初中数学邀请赛，1985 年）

[解] 由 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{1}{12}}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3^6}\right)^{\frac{1}{12}}$,

及 $$c=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4^4}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

因 $\frac{1}{3^6}<\frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^3}$, 则 $b<c<a$.

故选(B).

9·8 给出三个数 x, $y=x^x$, $z=x^{x^x}$,此处 $0.9<x<1.0$,将它们按增加的次序的排列是

(A) $x<z<y$. (B) $x<y<z$. (C) $y<x<z$.
(D) $y<z<x$. (E) $z<x<y$.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解] 由设 $0<x<1$, 则 $y=x^x<1$.

又 $1-x>0$, 故 $\frac{x}{y}=\frac{x}{x^x}=x^{1-x}<1$, 有 $x<y$.

由 $y-x>0$, 则 $\frac{z}{y}=\frac{x^y}{x^x}=x^{y-x}<1$, 有 $z<y$.

最后由 $1-y>0$, 有 $\frac{x}{z}=\frac{x}{x^y}=x^{1-y}<1$, 有 $x<z$.

所以 $x<z<y$.

故选(A).

第 2 节 对数不等式

9·9 已知 M 为正数,则 $\lg M$ 与 $\sqrt[10]{M}$ 的大小关系是

(A) $\lg M\geqslant\sqrt[10]{M}$. (B) $\lg M\leqslant\sqrt[10]{M}$.
(C) $\lg M$ 必不等于 $\sqrt[10]{M}$. (D) 以上均不正确.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1989 年)

[解] 因 $\lg 10=1<\sqrt[10]{10}$,又

$$\lg 10^5=5>\sqrt[10]{10^5}=\sqrt{10},$$

及 $$\lg 10^{10}=10=\sqrt[10]{10},$$

所以(A),(B),(C) 均不成立.

故选(D).

9·10　若 $\log_a b$ 的尾数是 0，且 $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$，那么下列四个结论：

① $\frac{1}{b} > \sqrt{b} > a^2$.　　② $\log_a b + \log_b a = 0$.

③ $0 < a < b < 1$.　　④ $ab - 1 = 0$.

中，正确的结论的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（中国初中数学联赛，1990 年）

[解]　由 $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b}$，　得 $-\log_a b > \frac{1}{2}\log_a b$，

所以　$\log_a b < 0$.

得 $a < 1$，　$b > 1$ 或 $a > 1$，　$b < 1$ 且 $\log_b a < 0$.

所以结论 ③ 与结论 ② 都是错误的.

在结论 ① 中，若 $\frac{1}{b} > \sqrt{b}$，得 $b < 1$，

从而 $a > 1$，得 $\sqrt{b} < a^2$，所以结论 ① 也是错误的.

这样，只有结论 ④ 是正确的. 事实上，

由 $\log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$，　可得 $\frac{1}{2}\log_a b > 2\log_b a = \frac{2}{\log_a b}$，

又因为 $\log_a b < 0$，所以 $(\log_a b)^2 < 4$，即 $-2 < \log_a b < 0$.

因为　$\log_a b$ 为整数，所以 $\log_a b = -1$，即 $b = \frac{1}{a}$，从而 $ab = 1$. 结论 ④ 正确.

故选(A).

9·11　若 $\lg^2 x \lg 10x < 0$，　则 $\frac{1}{\lg 10x}\sqrt{\lg^2 x + \lg 10x^2}$ 的值为

(A) ± 1.　　(B) 1.

(C) -1.　　(D) 不同于(A)－(C)的解答.

（中国部分省、市初中数学通讯赛；
中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1984 年）

[解]　由 $\lg^2 x \lg 10x < 0$，　知 $\lg 10x < 0$，即

$$1 + \lg x < 0.$$

而　$\lg^2 x + \lg 10x^2 = \lg^2 x + 2\lg x + 1 = (\lg x + 1)^2$，

选择题卷

由 $1+\lg x<0$， 则 $\sqrt{\lg^2 x+\lg 10x^2}=-(1+\lg x)$.

又 $\lg 10x=1+\lg x$， 有 $\dfrac{1}{\lg 10x}\sqrt{\lg^2 x+\lg 10x}=-1$.

故选(C).

9·12 设 $m>n>1$， $a=(\lg mn)^{\frac{1}{2}}-(\lg m)^{\frac{1}{2}}$， $b=(\lg m)^{\frac{1}{2}}-\left(\lg\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$. 则 a 与 b 的大小关系是

(A) $a>b$. (B) $a=b$. (C) $a<b$. (D) 不确定.

（中国四川省初中数学竞赛，1990 年）

[解] 由题设有

$$\frac{1}{a}=\frac{(\lg mn)^{\frac{1}{2}}+(\lg m)^{\frac{1}{2}}}{\lg mn-\lg m}=\frac{(\lg m+\lg n)^{\frac{1}{2}}+(\lg m)^{\frac{1}{2}}}{\lg n},$$

同理 $$\frac{1}{b}=\frac{(\lg m-\lg n)^{\frac{1}{2}}+(\lg m)^{\frac{1}{2}}}{\lg n},$$

由 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$， 且 $a>0$， $b>0$， 则 $a<b$.

故选(C).

9·13 若$(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$，则

(A)$x-y\geqslant 0$ (B)$x+y\geqslant 0$ (C)$x-y\leqslant 0$ (D)$x+y\leqslant 0$

（中国高中数学联赛，1999 年）

[解] 记 $f(t)=(\log_2 3)^t-(\log_5 3)^t$，则 $f(t)$ 在实数域 R 上是严格增函数.

原不等式即 $f(x)\geqslant f(-y)$，故 $x\geqslant -y$，即 $x+y\geqslant 0$.

故选(B).

9·14 若 $m>n>1$， 则必有

(A) $\log_m n>\log_n m>\log_{\frac{1}{n}} m$. (B) $\log_{\frac{1}{n}} m>\log_n m>\log_m n$.

(C) $\log_n m>\log_m n>\log_{\frac{1}{n}} m$. (D) $\log_n m>\log_{\frac{1}{n}} m>\log_m n$.

（中国北京市高中数学竞赛，1992 年）

[解] $\log_n m-\log_m n=\log_n m-\dfrac{1}{\log_n m}=\dfrac{\log_n^2 m-1}{\log_n m}$,

$\because$ $m>n>1$， $\therefore$ $\log_n m>1$,

因而 $\log_n m-\log_m n>0$， 即 $\log_n m>\log_m n$.

又 $\log_m n - \log_{\frac{1}{n}} m = \log_m n - \dfrac{1}{\log_m \dfrac{1}{n}} = \dfrac{\log_m^2 n + 1}{\log_m n}$,

$\because \quad m > n > 1, \quad \therefore \quad 0 < \log_m n < 1$,

因而 $\log_m n - \log_{\frac{1}{n}} m > 0$, 即 $\log_m n > \log_{\frac{1}{n}} m$.

故选(C).

9·15 若关系式

$$\log_3[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)] = \log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)] = \log_3[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)] = 0.$$

则 x, y, z 的大小关系是

(A) $x < y < z$. (B) $y < z < x$.

(C) $z < x < y$. (D) $z < y < x$.

(中国高中数学联赛,1982 年;
中国部分省、市初中数学通讯赛,1988 年)

[解 1] 由 $\log_3[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)] = 0$,可得

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) = 1, \log_2 x = \frac{1}{2},$$

所以 $$x = 2^{\frac{1}{2}}.$$

类似地可得 $y = 3^{\frac{1}{3}}, \quad z = 5^{\frac{1}{5}}$.化为同次根式得

$$x = \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} = \sqrt[30]{32768};$$

$$y = \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}} = \sqrt[30]{59049};$$

$$z = \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} = \sqrt[30]{15625}.$$

$\therefore \quad z < x < y$.

故选(C).

[解 2] 由对数性质及题设有

$$x = 2^{\frac{1}{2}}, \quad y = 3^{\frac{1}{3}}, \quad z = 5^{\frac{1}{5}}.$$

又由 $\begin{cases} x^6 = 2^3 = 8, \\ y^6 = 3^2 = 9, \end{cases}$ 得 $x < y$.

且由 $\begin{cases} x^{10} = 2^5 = 32, \\ z^{10} = 5^2 = 25, \end{cases}$ 得 $z < x$.

综上可得 $$z < x < y.$$

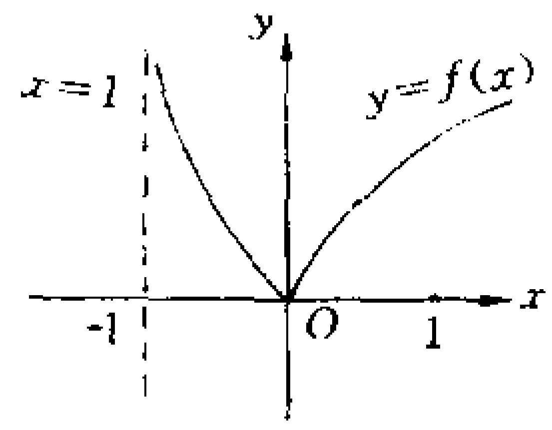
故选(C).

9·16　设函数 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}(x+1)|$，当 $-1<a<b<c$ 时，有 $f(a)>f(c)>f(b)$，则

(A) $ac<0$.　(B) $ab<0$.　(C) $ac>0$.　(D) $bc>0$.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

［解］　函数 $y=f(x)$ 的图像大致如右图.



且　$f(x)$ 在$(-1,0]$上递减，在$(0,+\infty)$上递增.

由 $-1<a<b<c$ 时，

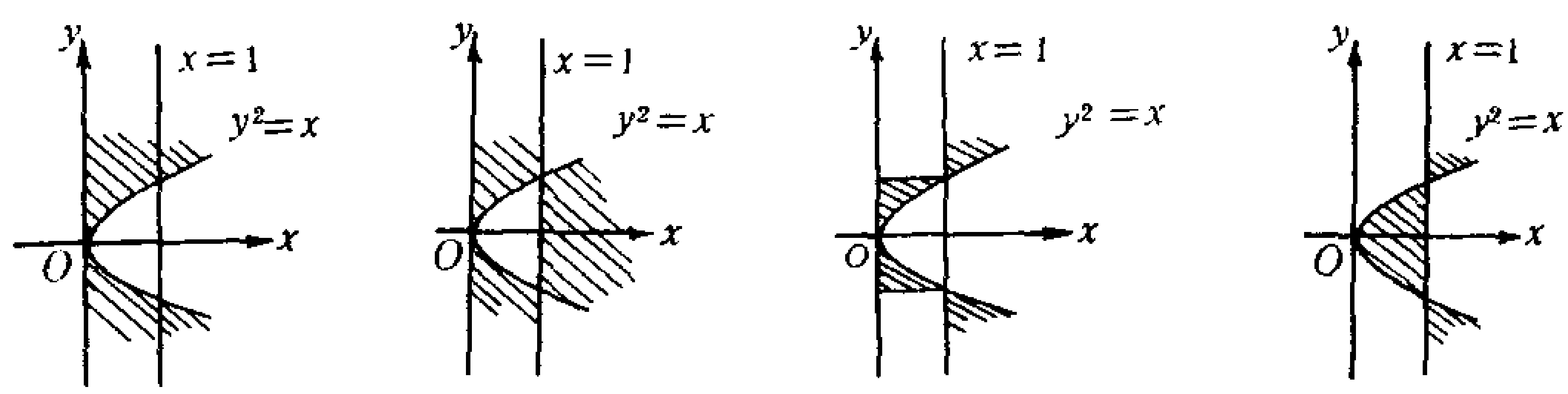
$$f(a)>f(c)>f(b),$$

知 a,b,c 不同在上述两区间内.

则　$a<0$，且 $c>0$，　因而　$ac<0$.

故选(A).

9·17　下图中阴影部分(不包括边界)满足 $\log_x(\log_x y^2)>0$ 的是



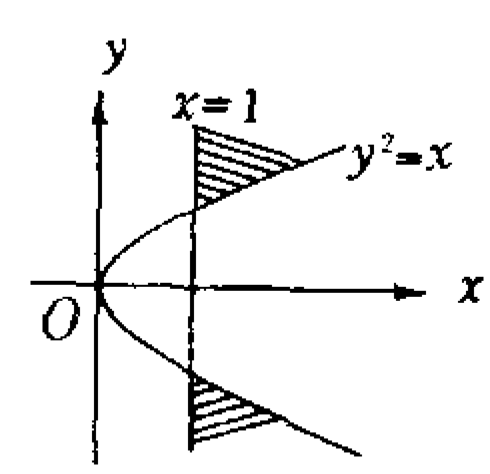
(A)　(B)　(C)　(D)

（中国高中数学联赛，1984 年）

［解］　$\log_x(\log_x y^2)>0$ 即为 $\log_x(\log_x y^2)>\log_x 1$，

$\therefore$　$\log_x(\log_x y^2)>0$ 的充要条件是

① $\begin{cases}x>1,\\ \log_x y^2>1;\end{cases}$　和　② $\begin{cases}0<x<1,\\ \log_x y^2<1,\\ \log_x y^2>0.\end{cases}$



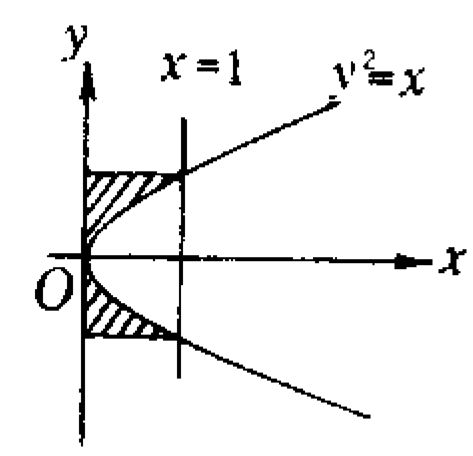
由不等式组 ① 可得

$\begin{cases}x>1,\\ \log_x y^2>\log_x x;\end{cases}$　解得　$\begin{cases}x>1,\\ y^2>x.\end{cases}$

其图形如上图(不包括边界).

由不等式组 ② 可得

$$\begin{cases}0<x<1,\\ \log_x y^2<\log_x x,\\ \log_x y^2>\log_x 1.\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}0<x<1,\\ y^2>x,\\ y^2<1.\end{cases}$$



$$\therefore \quad \begin{cases}0<x<1,\\ x<y^2<1.\end{cases}$$

其图形如右图(不包括边界),将两图合起来即为所求.

故选(C).

第3节　三角不等式及应用

9·18　设数的集合 $M=\{x\mid \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1\}$, 则

(A) $\log_{\frac{1}{2}}3\in M$.　　(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}\in M$.

(C) $(\sin 1+\cos\frac{1}{10})\in M$.　　(D) $10^{\lg\frac{\pi}{4}}\in M$.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　由 $\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}1=0$,知$(A)$不真;

又　$\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}=\sqrt{\frac{1}{64}}<\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则(B)不真;

再　$\sin 1+\cos\frac{1}{10}>\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}>1$,

知(C)不真.

而　$10^{\lg\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$,而$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}<\frac{\pi}{4}<1$, 知$(D)$真.

故选(D).

9·19　已知 $-\frac{7}{4}\pi<x<-\frac{3}{2}\pi$,则在以下四个式子中一定成立的是

(A) $\log_{\frac{\pi}{4}}|x|>0$.　　(B) $\sin(x+\frac{9}{4}\pi)>\cos x$.

(C) $2^{\sin x}<2^{\cos x}$.　　(D) $\cos x>\sin^2 x$.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年)

选择题卷

[解] 当 $-\frac{7}{4}\pi < x < -\frac{3}{2}\pi$ 时，

有 $\frac{3}{2}\pi < |x| < \frac{7}{4}\pi$，且 $\frac{\pi}{2} < x + \frac{9}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi$.

所以 $\log_{\frac{\pi}{4}}|x| < 0$, $\sin(x + \frac{9}{4}\pi) > \cos x$, $2^{\sin x} > 2^{\cos x}$,

而 $0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2} < \sin^2 x < 1$,

则 $\cos x > \sin^2 x$ 不一定成立.

故选(B).

9·20 若 α 为锐角，又代数式 $P = \log_{\sin\alpha}(\sin 50° + \cos 50°)$, $Q = \log_{\sin\alpha}(\sin 65° + \cos 65°)$，则 P 与 Q 的关系是

(A) $P < Q$. (B) $P > Q$. (C) $P = Q$. (D) 不确定.

(中国四川省高中数学竞赛，1990年)

[解] 由设 $0 < \alpha < 90°$, 则 $0 < \sin\alpha < 1$，又

$$\sin 50° + \cos 50° = \sqrt{2}\sin(50° + 45°) = \sqrt{2}\sin 95°,$$

而

$$\sin 65° + \cos 65° = \sqrt{2}\sin(65° + 45°) = \sqrt{2}\sin 110°,$$

$\because$

$$\sin 95° > \sin 110°,$$

$\therefore$

$$\sin 50° + \cos 50° > \sin 65° + \cos 65°.$$

$\therefore$

$$P < Q.$$

故选(A).

9·21 设 $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，且

$$T = \frac{\sin\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha + \mathrm{ctg}\alpha},$$

则 T 的取值情况是

(A) T 取负值. (B) T 取非负值.

(C) T 取正值. (D) T 取值可正可负.

(中国高中数学联赛，1981年)

[解] 作恒等变形，易得 $T = \mathrm{tg}^2\alpha \frac{1 + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$,

$\because$

$$\alpha \neq \frac{k\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$\therefore$

$$T > 0.$$

故选(C).

9·22　若$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<1$,且函数$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$. 又设 $x=f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $y=f(\arcsin\alpha,\arcsin\beta,\arcsin\gamma)$, 及 $z=\arcsin f(\alpha,\beta,\gamma)$, $w=\sin f(\alpha,\beta,\gamma)$, $t=f(\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma)$,它们之间的数量关系是

(A) $x>y>z>w>t$.　　(B) $y>z>x>w>t$.

(C) $z>y>w>t>x$.　　(D) $t>w>z>y>x$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　由 $x>0$ 时,$\sin x<x$.则有

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

即 $t<x$,则(C),(D)不真.

又　$x>0$ 时, $\arcsin x>x$, 则有

$$\frac{\arcsin\alpha+\arcsin\beta+\arcsin\gamma}{3}>\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

即 $y>x$.则(A)不真.

故选(B).

9·23　下面四个数中最大的是

(A) $\mathrm{tg}48^\circ+\mathrm{ctg}48^\circ$.　　(B) $\sin48^\circ+\cos48^\circ$.

(C) $\mathrm{tg}48^\circ+\cos48^\circ$.　　(D) $\mathrm{ctg}48^\circ+\sin48^\circ$.

(中国初中数学联赛,1988 年)

[解]　因为　$0<\cos48^\circ<1$, $0<\sin48^\circ<1$, 因而

$$\sin48^\circ+\cos48^\circ<\frac{\sin48^\circ}{\cos48^\circ}+\frac{\cos48^\circ}{\sin48^\circ}=\mathrm{tg}48^\circ+\mathrm{ctg}48^\circ,$$

$$\mathrm{tg}48^\circ+\cos48^\circ<\mathrm{tg}48^\circ+\frac{\cos48^\circ}{\sin48^\circ}=\mathrm{tg}48^\circ+\mathrm{ctg}48^\circ,$$

$$\mathrm{ctg}48^\circ+\sin48^\circ<\mathrm{ctg}48^\circ+\frac{\sin48^\circ}{\cos48^\circ}=\mathrm{ctg}48^\circ+\mathrm{tg}48^\circ.$$

所以四数中最大的是 $\mathrm{tg}48^\circ+\mathrm{ctg}48^\circ$.

故选(A).

注 1　若题中 48° 改为锐角 α,结论仍成立.

注 2　题中四数还可有关系:

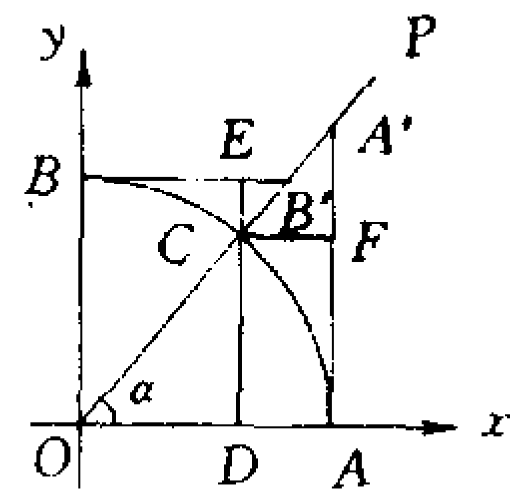
(A) > (C) > (D) > (B),　当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$ 时;

(A) > (C) = (D) > (B),　当 $\alpha=45^\circ$ 时;

$(A)>(D)>(C)>(B)$, 当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$ 时.

这一点可利用三角函数线证明. 如当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$ 时, 如图知

$AA'=\mathrm{tg}\alpha$, $BB'=\mathrm{ctg}\alpha$, $DC=\sin\alpha$, $OD=\cos\alpha$.



由 $AA'>DC$, $BB'>OD$,

有 $AA'+BB'>BB'+DC>DC+OD$,

且 $AA'+BB'>AA'+OD>DC+OD$.

即 $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha>\mathrm{ctg}\alpha+\sin\alpha>\sin\alpha+\cos\alpha$,

且 $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha>\mathrm{tg}\alpha+\cos\alpha>\sin\alpha+\cos\alpha$.

此外, 由 $\triangle B'EC\backsim\triangle CFA'$, 且 $CB'<CA'$,

有 $EB'<CF<FA'$, 故 $EB'<FA'$.

即 $\mathrm{ctg}\alpha-\cos\alpha<\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha$, 或 $\mathrm{tg}\alpha+\cos\alpha>\mathrm{ctg}\alpha+\sin\alpha$.

从而 $(A)>(C)>(D)>(B)$.

9·24 对任何 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$ 都有

(A) $\sin\sin\varphi<\cos\varphi<\cos\cos\varphi$. (B) $\sin\sin\varphi>\cos\varphi>\cos\cos\varphi$.

(C) $\sin\cos\varphi>\cos\varphi>\cos\sin\varphi$. (D) $\sin\cos\varphi<\cos\varphi<\cos\sin\varphi$.

(中国高中数学联赛,1982 年)

[解] 由在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中 $\sin x,\cos x$ 有如下性质:

(1) $\sin x<x$, (2) $\cos x$ 单调减少, (3) $\cos x$ 与 x 大小不确定,

因此可知 $\sin\cos\varphi<\cos\varphi$.

又由(1)知 $\varphi>\sin\varphi$, 再由(2)有 $\cos\varphi<\cos\sin\varphi$.

从而 $\sin\cos\varphi<\cos\varphi<\cos\sin\varphi$.

故选(D).

9·25 设 a,b,c 是实数. 那么, 对任何实数 x, 不等式

$$a\sin x+b\cos x+x>0$$

都成立的充分必要条件是

(A) a,b 同时为 0, 且 $c>0$. (B) $\sqrt{a^2+b^2}=c$.

(C) $\sqrt{a^2+b^2}<c$. (D) $\sqrt{a^2+b^2}>c$.

(中国高中数学联赛,1994 年)

[解] 当 a,b 不同时为零时, 有

$$a\sin x+b\cos x+c>0 \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)+c>0$$

$$\Longleftrightarrow \sin(x+\varphi) > -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

(2) 式成立的充分必要条件是

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} < -1, \quad 即 \quad \sqrt{a^2+b^2} < c.$$

当 a,b 同时为零时,不等式成立的充要条件是 $c>0$,这一结论含于(C) 中.

故选(C).

9·26　设 $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$,则 $a_1=\cos(\sin x\pi)$, $a_2=\sin(\cos x\pi)$, $a_3=\cos(x+1)\pi$ 的大小关系是

(A)$a_3<a_2<a_1$.　　(B)$a_1<a_3<a_2$.

(C)$a_3<a_1<a_2$.　　(D)$a_2<a_3<a_1$.

(中国高中数学联赛,1996 年)

[解]　设 $y=-x$,于是 $y\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 且

$$a_1=\cos(\sin y\pi), \quad a_2=\sin(\cos y\pi), \quad a_3=\cos(1-y)\pi<0.$$

$$\because \quad \sin y\pi+\cos y\pi=\sqrt{2}\sin\left(y\pi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad 0<\cos y\pi<\frac{\pi}{2}-\sin y\pi<\frac{\pi}{2}.$$

于是 $0<\sin(\cos y\pi)<\cos(\sin y\pi)$.

故选(A).

9·27　已知 $0<b<1$, $0<a<\frac{\pi}{4}$,则下列三数:

$$x=(\sin\alpha)^{\log_b^{\sin\alpha}}, \quad y=(\cos\alpha)^{\log_b^{\cos\alpha}}, \quad z=(\sin\alpha)^{\log_b^{\cos\alpha}}$$

的大小关系是

(A)$x<z<y$.　　(B)$y<z<x$.

(C)$z<x<y$.　　(D)$x<y<z$.

(中国高中数学联赛,1994 年)

[解]　由题设 $\because\ 0<b<1$, $\therefore\ f(x)=\log_b x$ 是减函数.

$$\because \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}, \quad \therefore \quad 0<\sin\alpha<\cos\alpha<1.$$

于是 $\log_b\sin\alpha>\log_b\cos\alpha>0$.

$\therefore \qquad (\sin\alpha)^{\log_b \sin\alpha} < (\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$, 即 $\quad x < z$.

又 $\qquad (\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$, 即 $\quad z < y$.

故有 $\qquad x < z < y$.

故选(A).

注 本题也可以通过取特殊值解答.例如,取 $b = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6}$.

9·28 设 $f(x) = x^2 - \pi x$, 且设 $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$, $\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\delta = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{4}\right)$.则

(A)$f(\alpha) > f(\beta) > f(\delta) > f(\gamma)$.

(B)$f(\alpha) > f(\delta) > f(\beta) > f(\gamma)$.

(C)$f(\delta) > f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$.

(D)$f(\delta) > f(\alpha) > f(\gamma) > f(\beta)$.

(中国高中数学联赛,1997 年)

[解] 依题意,$f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 且在 $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$单调减少,在$\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$单调增加.

所以,当 $\left|x_1 - \frac{\pi}{2}\right| > \left|x_2 - \frac{\pi}{2}\right|$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$.

又易知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4} < \delta < \frac{5\pi}{6}$.

$$\therefore \quad 0 < \left|\gamma - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{6} < \left|\beta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4} < \left|\delta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{3} < \left|\alpha - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

因而 $\qquad f(\alpha) > f(\delta) > f(\beta) > f(\gamma)$.

故选(B).

9·29 $\log_{\sin 1}\cos 1$, $\log_{\sin 1}\operatorname{tg} 1$, $\log_{\cos 1}\sin 1$, $\log_{\cos 1}\operatorname{tg} 1$ 的大小关系是

(A)$\log_{\sin 1}\cos 1 < \log_{\cos 1}\sin 1 < \log_{\sin 1}\operatorname{tg} 1 < \log_{\cos 1}\operatorname{tg} 1$.

(B)$\log_{\cos 1}\sin 1 < \log_{\cos 1}\operatorname{tg} 1 < \log_{\sin 1}\cos 1 < \log_{\sin 1}\operatorname{tg} 1$.

(C)$\log_{\sin 1}\operatorname{tg} 1 < \log_{\cos 1}\operatorname{tg} 1 < \log_{\cos 1}\sin 1 < \log_{\sin 1}\cos 1$.

(D) $\log_{\cos 1}\text{tg}1 < \log_{\sin 1}\text{tg}1 < \log_{\sin 1}\cos 1 < \log_{\cos 1}\sin 1$.

（中国高中数学联赛，1995 年）

[解] 由 $\frac{\pi}{4} < 1$ 知 $\cos 1 < \sin 1 < 1 < \text{tg}1$,

从而 $\log_{\sin 1}\text{tg}1 < 0$，且 $\log_{\cos 1}\text{tg}1 < 0$.

而 $\log_{\sin 1}\cos 1 > 0$, 且 $\log_{\cos 1}\sin 1 > 0$，于是可排除(A)和(B).

只剩(C)和(D)，又 $\log_{\cos 1}\sin 1 < \log_{\cos 1}\cos 1 = \log_{\sin 1}\sin 1 < \log_{\sin 1}\cos 1$，可排除(D)，应选(C).

故选(C).

9·30 设 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，则 $(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$, $(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$, $(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$ 的大小顺序是

(A) $(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha}$.

(B) $(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$.

(C) $(\sin\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha}$.

(D) $(\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$.

（中国高中数学联赛，1990 年）

[解] $\because\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore\ 0 < \cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\alpha < 1$.

因而 $(\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$, $(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$.

故选(D).

9·31 若 $x > 0$, $y > 0$. 又 α 为任意实数. 令 $M = x^{\sin^2\alpha}y^{\cos^2\alpha}$, $N = x + y$. 则一定有

(A) $M > N$. (B) $M = N$.

(C) $M < N$. (D) 以上结论都不对.

（中国北京高中数学竞赛，1985 年）

[解] 不失一般性，设 $x \geqslant y > 0$.

$\because\ \cos^2\alpha > 0$，则有 $y^{\cos^2\alpha} \leqslant x^{\cos^2\alpha}$.

又 $x^{\sin^2\alpha} > 0$,

$\therefore\ x^{\sin^2\alpha}y^{\cos^2\alpha} \leqslant x^{\sin^2\alpha}x^{\cos^2\alpha} = x^{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = x < x + y$.

因此 $M < N$.

故选(C).

9·32 设 $-1 < a < 0$, $\theta = \arcsin a$,那么不等式 $\sin x < a$ 的解集为

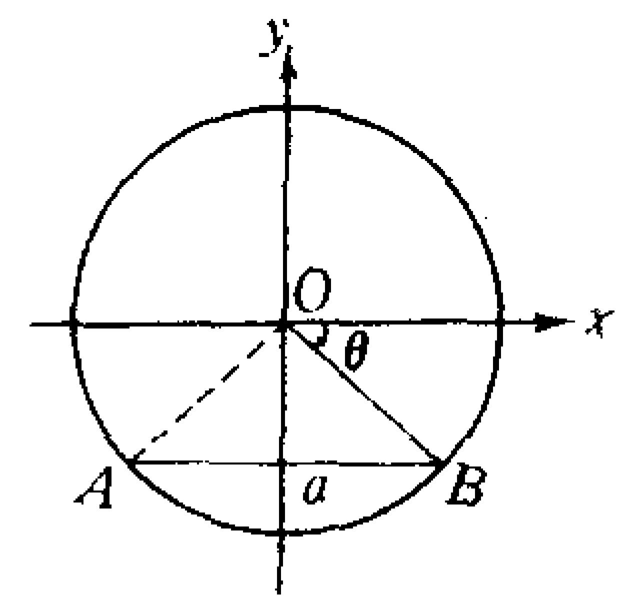
(A) $\{x \mid 2n\pi + \theta < x < (2n+1)\pi - \theta, n \in Z\}$.

(B) $\{x \mid 2n\pi - \theta < x < (2n+1)\pi + \theta, n \in Z\}$.

(C) $\{x \mid (2n-1)\pi + \theta < x < 2n\pi - \theta, n \in Z\}$.

(D) $\{x \mid (2n-1)\pi - \theta < x < 2n\pi + \theta, n \in Z\}$.

(中国高中数学联赛,1986 年)



[解] 如右图,利用三角函数线即正弦线的图像知 $\sin x < a$ 的解集为

$\{x \mid (2n-1)\pi - \theta < x < 2n\pi + \theta, n \in Z\}$.

故选(D).

9·33 设 α 为某三角形的一个内角,且 $\alpha \neq 90°$. 又 $x = \dfrac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha$, $y = \sin\alpha - |\operatorname{tg}\alpha|$, 则点 (x,y) 在

(A) 第一象限. (B) 第二象限.

(C) 第三象限. (D) 第四象限.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由设知 $0 < \sin\alpha < 1$, 则 $\dfrac{1}{\sin\alpha} > 1$, 又 $\cos\alpha < 1$.

$$\therefore \quad x = \frac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha > 0.$$

$$\text{又} \because \quad |\operatorname{tg}\alpha| = \left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right| > |\sin\alpha| = \sin\alpha,$$

$$\therefore \quad y = \sin\alpha - |\operatorname{tg}\alpha| < 0.$$

因而 (x,y) 在第四象限.

故选(D).

9·34 钝角三角形三条边长分别为 x, $x+1$, $x+2$,则短边 x 的范围是

(A) $3 < x < 5$. (B) $2 < x < 4$. (C) $1 < x < 3$. (D) $x > 1$.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988 年)

[解 1] 三边中 $(x+2)$ 最长, 设边 $(x+2)$ 所对的角为 α, 则 α 是一个钝角. 由余弦定理得

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2}{2x(x+1)} = \frac{x-3}{2x}.$$

$\because \quad -1 < \cos\alpha < 0, \quad \therefore \quad -1 < \dfrac{x-3}{2x} < 0.$

即 $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2x} < 0, \\ \dfrac{x-3}{2x} > -1. \end{cases}$ 解得 $1 < x < 3.$

故选(C).

[解 2] 由题设 $x, x+1, x+2$ 应满足

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + (x+1) > x+2, \\ x^2 + (x+1)^2 > (x+2)^2, \end{cases} \quad \text{解得} \quad 1 < x < 3.$$

故选(C).

9·35 已知锐角三角形的边长分别是2, 3, x,则第三边 x 的取值范围是

(A) $1 < x < 5$.　　(B) $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$.

(C) $\sqrt{13} < x < 5$.　　(D) $1 < x < \sqrt{5}$.

(E) $\sqrt{5} < x < 5$.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1983 年)

[解] 由余弦定理知:锐角三角形任意两边平方和大于第三边的平方,即

$$\begin{cases} 2^2 + 3^2 > x^2, \\ 2^2 + x^2 > 3^2, \\ 3^2 + x^2 > 2^2. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \sqrt{5} < x < \sqrt{13}.$$

故选(B).

9·36 已知钝角三角形的三边长分别是3,4,x,则 x 的取值范围是

(A) $1 < x < 7$.　　(B) $5 < x < 7$.

(C) $1 < x < \sqrt{7}$.　　(D) $5 < x < 7$ 或 $1 < x < \sqrt{7}$.

(第 6 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1989 年)

[解] 设 x 为最长边,其对角为 α,则 $\cos\alpha < 0$. 又由余弦定理,则

$\dfrac{3^2+4^2-x^2}{2\cdot 3\cdot 4} < 0$, 即 $x^2 > 25$, 有 $x > 5$.

又 $x < 3+4 = 7$, 故 $5 < x < 7$.

令 4 为最长边,其对角为 β,则 $\cos\beta < 0$.

则 $\dfrac{3^2 + x^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot x} < 0$, 即 $x^2 < 7$, 有 $x < \sqrt{7}$,

又 $x > 4 - 3 = 1$, $\therefore$ $1 < x < \sqrt{7}$.

故选(D).

9·37 存在整数 x,使具有边长为 10, 24, x 的三角形的所有角都是锐角,问 x 的个数是

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7. (E) 多于 7 个.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解] 若三角形为锐角三角形,由余弦定理知

$$\begin{cases} 24^2 < 10^2 + x^2, \\ x^2 < 10^2 + 24^2. \end{cases}$$

即 $476 < x^2 < 676$, 得 $x = 22, 23, 24, 25$.

故选(A).

9·38 $\triangle ABC$ 中,$\sin A\cos C < 0$,则这个三角形必定是

(A) 锐角三角形. (B) 直角三角形.

(C) 钝角三角形. (D) 以上答案都不对.

(中国北京市高中数学竞赛,1987 年)

[解] 由 $0 < \angle A < \pi$,知 $\sin A > 0$.

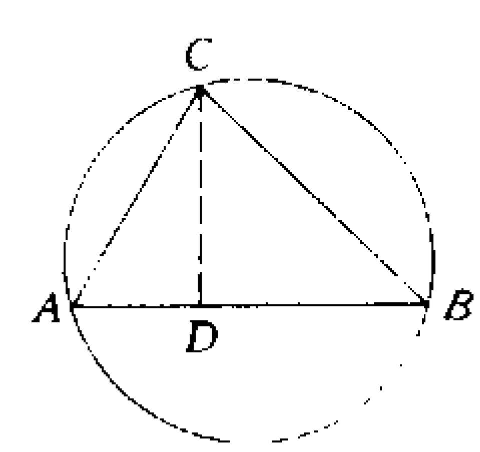
但 $\sin A\cos C < 0$,所以 $\cos C < 0$.

由于 $\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 内角,$\cos C < 0$ 可知 $\angle C$ 为钝角.

即 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选(C).

9·39 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AC = 1$, $AB = c$,$\angle A = 60°$,$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R \leqslant 1$.则



(A) $\dfrac{1}{2} < c < 2$. (B) $0 < c \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(C) $c > 2$. (D) $c = 2$.

(中国初中数学联赛,1991 年)

[解 1] 作 $CD \perp AB$, 由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 因此,D 在 AB 内,

从而 $c = AB > AD = AC\cos A = \cos A = \dfrac{1}{2}$. ①

再由正弦定理得

$$c = AB = 2R\sin C < 2R \leqslant 2. \qquad ②$$

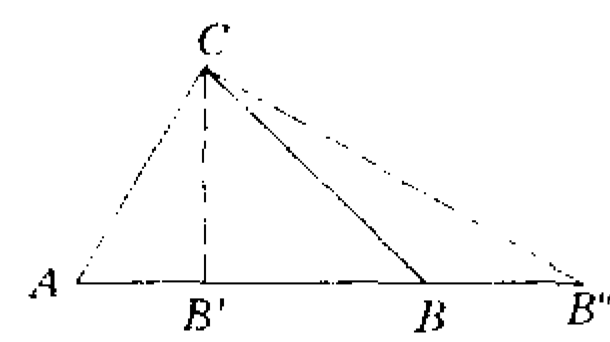
综合①,②得 $\frac{1}{2} < c < 2$.

故选(A).

[**解 2**] 考虑满足题设的等边三角形,则有 $c = 1$.

故选(A).

[**解 3**] 如图,过 C 作 $CB' \perp AB$,则



$$AB' = AC \cdot \cos A = \cos A = \frac{1}{2}.$$

又过 C 作 $CB'' \perp AC$, 则有

$$AB'' = \frac{AC}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} = 2.$$

因 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,则 B 应落在 $B'B''$ 之间(不包括端点).从而 $\frac{1}{2} < c < 2$.

故选(A).

注 从解法 3 发现,"$\triangle ABC$ 外接圆半径 $R \leqslant 1$" 条件多余.

事实上,由题设 $\angle A = 60°$,又三角形为锐角三角形,故 $30° < B < 90°$.

从而 $\frac{1}{2} < \sin B < 1$. 又 $R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{1}{2\sin B} < 1$.

即从题设可推出 $R < 1$. 此外,$R = 1$ 时,$\triangle ABC$ 是直角三角形,与题设矛盾!

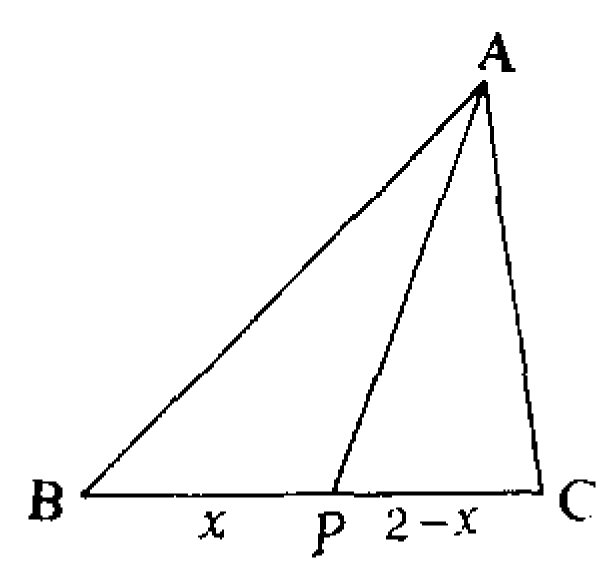
9·40 $\triangle ABC$ 中,$AB = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 设 P 为 BC 边上任一点,则

(A) $PA^2 < PB \cdot PC$. (B) $PA^2 = PB \cdot PC$.

(C) $PA^2 > PB \cdot PC$. (D) PA^2 与 $PB \cdot PC$ 的大小并不确定.

(中国初中数学联赛,1990 年)

[**解 1**] 如图,设 $BP = x$, 则 $PC = 2 - x$.



在 $\triangle ABP$ 中, 由余弦定理有

$$PA^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP\cos B.$$
$$= 8 + x^2 - 4\sqrt{2}x\cos B,$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理有

$$\cos B = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 2^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{10}{8\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

∴ $PA^2 = x^2 - 5x + 8.$

而 $PB \cdot PC = x(2-x) = 2x - x^2.$

令 $y = PA^2 - PB \cdot PC = x^2 - 5x + 8 - 2x + x^2$

$$= 2x^2 - 7x + 8 = 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0,$$

∴ $PA^2 > PB \cdot PC.$

故选(C).

[解 2] 由 $PB \cdot PC = x(2-x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$,

∴ $\{PB \cdot PC\}_{\max} = 1.$

又 P 是BC上任一点， 且 $AC = \sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{2}$,

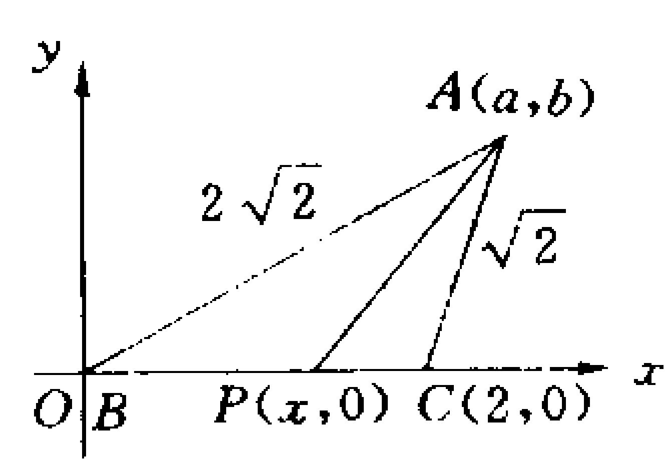
∵ $(2\sqrt{2})^2 > 2^2 + (\sqrt{2})^2$, ∴$\angle C$ 为钝角.

∴ $\sqrt{2} < AP < 2\sqrt{2}$, 则 $2 < AP^2 < 8.$

∴ AP^2 的最小值大于 2，即 $AP^2 > BP \cdot PC.$

故选(C).

[解 3] 如图建立坐标系,则 $B(0,0)$, $C(2,0)$. 若设 $A(a,b)$, $P(x,0)$,则



$$|AB| = \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{2},$$

且 $$|AC| = \sqrt{(a-2)^2+b^2} = \sqrt{2},$$

解得 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

即 A 点坐标为$\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

∴ $$|PA| = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2},$$

即 $$PA^2 = x^2 - 5x + 8.$$

又∵ $$PB \cdot PC = x(2-x),$$

∴ $$AB^2 - PB \cdot PC = 2x^2 - 7x + 8 = 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0,$$

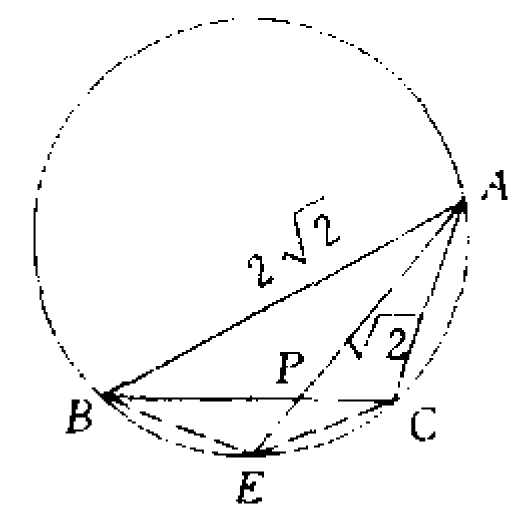
即 $$AB^2 > PB \cdot PC.$$

故选(C).

[解 4] 作 $\triangle ABC$ 外接圆,且延长 AP 交外接圆于 E,连 BE,EC,

有 $\triangle BAP \backsim \triangle PEC$, 故 $\dfrac{2\sqrt{2}}{AP}=\dfrac{EC}{PC}$, 则

$$AP=\frac{2\sqrt{2}PC}{EC}, \quad ①$$



同理 由 $\triangle APC \backsim \triangle BPE$,

有 $$AP=\frac{\sqrt{2}BP}{BE}, \quad ②$$

①·②有 $AP^2=\dfrac{4BP\cdot PC}{BE\cdot EC}$,

即 $$\frac{AP^2}{BP\cdot PC}=\frac{4}{BE\cdot EC},$$

而 $\angle A<90^\circ$,知 $\angle E>90^\circ$,则 $\triangle BEC$ 中 BC 为最大边.

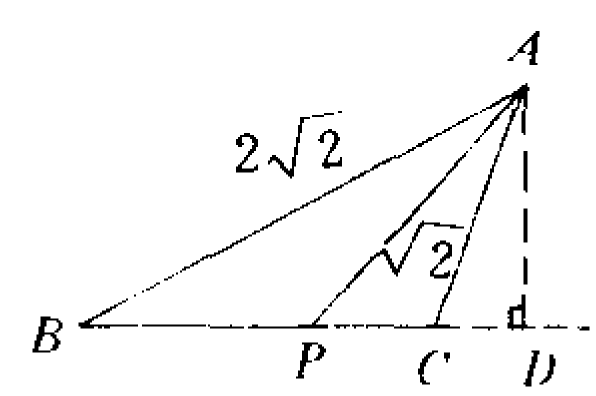
$\therefore$ $EC<2=BC$, $BE<2=BC$, 即 $EC\cdot BE<4$.

从而 $\dfrac{AP^2}{BP\cdot PC}>1$, 即 $AP^2>BP\cdot PC$.

故选(C).

[解 5] 由海伦-秦九韶公式,有

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{\sqrt{7}}{2},$$



延长 BC,作 $AD\perp BC$ 于 D, 则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AD=\frac{\sqrt{7}}{2},$$

$\therefore$ $AD=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, 则 $CD=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$,

又 $$AP^2=AD^2+PD^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(PC+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=2+PC^2+PC,$$

而 $BP\cdot PC=(2-PC)PC=2PC-PC^2$,

$$\therefore\ AP^2-BP\cdot PC=2+PC^2+PC-2PC+PC^2$$
$$=2PC^2-PC+2$$
$$=2\left(PC-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0,$$

第九章 初等超越不等式

$\therefore \quad AP^2 > BP \cdot PC$.

故选(C).

注 此题中"$AC=\sqrt{2}$"的题设可以除去,结论仍真.解法如:

设 $AC=a$, $PC=x$,则 $\cos C=\dfrac{a^2+2^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2a}=\dfrac{a^2-4}{4a}$.

又 $PA^2-PB\cdot PC=x^2+a^2-2ax\cos C-x(2-x)$

$$=2x^2-\frac{a^2}{2}x+a^2,$$

其判别式 $\Delta=\dfrac{a^4}{4}-8a^2=\dfrac{a^2}{4}(a^2-32)$,

由 $AC<AB+BC$,即 $a<2\sqrt{2}+2$,有

$a^2-32<(2\sqrt{2}+2)^2-32<0$,则 $\Delta<0$.结论(C)真.

第十章　数列与极限

第1节　数列的项

10·1　移动一质点，行至第二英里和以后的英里数时，其速度同所行的英里数成反比．而在以后的每一英里中速度是固定的．如果行第二英里要用2小时，那么行第 n 英里所需的时间（以小时计算）是

(A) $\dfrac{2}{n-1}$．　(B) $\dfrac{n-1}{2}$．　(C) $\dfrac{2}{n}$．　(D)$2n$．　(E)$2(n-1)$．

（第20届美国高中数学考试，1969年）

［解］　质点速度依题设知是一个分段的常数值，记 v_n 为在第 n 英里时的速度，t_n 为所需时间，则

$$v_n=\frac{1}{t_n}.$$

又　v_n 与 $n-1$ 成反比，则 t_n 与 $n-1$ 成正比．

因而　$t_n=k(n-1)$，　k 待定．

由 $n=2$ 时，　$t_2=k(2-1)=2$，　知 $k=2$．

∴　$$t_n=2(n-1).$$

故选(E)．

10·2　在100，101，…，999这些数中，各位数字按严格递增或严格递减顺序排列的数的个数是

(A) 120．　(B) 168．　(C) 204．　(D) 216．　(E) 240．

（第41届美国高中数学考试，1990年）

[解] 先看各位数字严格递增的情形:

数字1打头的情形表

区间	123 ~ 129	134 ~ 139	145 ~ 149	156 ~ 159	167 ~ 169	178 ~ 179	189
个数	7	6	5	4	3	2	1

仿上数字 2 打头的相应的各有 6,5,4,3,2,1 个;

数字 3 打头的相应的各有 5,4,3,2,1 个;

数字 4 打头的相应的各有 4,3,2,1 个;

数字 5 打头的相应的各有 3,2,1 个;

数字 6 打头的相应的各有 2,1 个;

数字 7 打头的仅有 1 个.

总计有 $1+3+6+10+15+21+28=84$ 个;

由于对称性,数字按严格递减顺序的(不包括 0 结尾的情形)亦有 84 个.

考虑 980,970,…,910;870,860,…,810;…;210. 分别又有 8,7,6,5,4,3,2,1 个,总计 36 个.

这样题设数的个数有 $84\cdot 2+36=204$ 个.

故选(C).

10·3 如果数列$\{a_n\}$定义为 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2n(n\geqslant 1)$, 那么 a_{100} 等于

(A) 9900. (B) 9902. (C) 9904.

(D) 10100. (E) 10102.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解] 这个数列既非等差数列,又非等比数列.将数列后项减前项

$$a_2-a_1=2\cdot 1,$$
$$a_3-a_2=2\cdot 2,$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$a_{100}-a_{99}=2\cdot 99.$$

把这些等式两边加起来,有

$$a_{100}-a_1=2(1+2+\cdots+99)=99\cdot 100=9900.$$

所以 $$a_{100}=9902.$$

故选(B).

10·4 递增的正整数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}(n \geqslant 1)$. 如果 $a_7 = 120$, 那么 a_8 等于

(A) 128. (B) 168. (C) 193. (D) 194. (E) 210.

(第 43 届美国高中数学考试, 1992 年)

[解] 设 $a_1 = a, a_2 = b$, 递推地可知该数列为:

$a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b, \quad 3a+5b, \quad 5a+8b, \quad \cdots$

因而 $$a_7 = 8b + 5a = 120.$$

由之有 $a = \frac{120}{5} - \frac{8b}{5} = 24 - \frac{8b}{5}$, 这里 a, b 为正整数.

因而 $b = 5, 10, 15$ 时, $a = 16, 8, 0$.

$a = 0$ 不合题设. 又 $a = 16, b = 5$ 与递增数列假设相抵.

因此 $a = 8, \quad b = 10$,

又 $a_8 = a_7 + a_6 = 8a + 13b$, 则 $a_8 = 8 \cdot 8 + 13 \cdot 10 = 194$.

故选(D).

10·5 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}(n \geqslant 2)$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, 记 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. 则下列结论正确的是

(A) $x_{100} = -a$, $S_{100} = 2b - a$. (B) $x_{100} = -b$, $S_{100} = 2b - a$.

(C) $x_{100} = -b$, $S_{100} = b - a$. (D) $x_{100} = -a$, $S_{100} = b - a$.

(中国高中数学联赛, 1997 年)

[解] 经计算知数列 $\{x_n\}$ 的前几项是

$a, \quad b, \quad b-a, \quad -a, \quad -b, \quad a-b, \quad a, \quad b, \quad b-a, \quad -a, \quad -b, \quad a-b, \quad \cdots$

由此看出 $x_{n+6} = x_n$, 即 $\{x_n\}$ 是周期为 6 的数列.

$\therefore \quad x_{100} = x_{6\times16+4} = x_4 = -a$.

$$\begin{aligned}
\text{又} \quad & x_{6k+1} + x_{6k+2} + x_{6k+3} + x_{6k+4} + x_{6k+5} + x_{6k+6} \\
&= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
&= a + b + (b-a) + (-a) + (-b) + (a-b) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad S_{100} &= S_{6\times16+4} = S_4 = a + b + (b-a) + (-a) \\
&= 2b - a.
\end{aligned}$$

故选(A).

10·6 数列 $\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$, 则这数

列第 1989 项 a_{1989} 是

(A) $0 < a_{1989} < \frac{1}{2}$.　　(B) $\frac{1}{2} \leqslant a_{1989} < 1$.

(C) $1 \leqslant a_{1989} \leqslant 2$.　　(D) $a_{1989} > 2$.

(中国湖北省黄冈地区高中数学竞赛,1989 年)

[解]　数列分母系按 1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; … 规律出现,分子是每组数(分号隔开者)中的倒序;这些组中项数依次为 1,2,3,4,….

$\because \quad \frac{62 \cdot 63}{2} = 1953, \quad \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016,$

$\therefore \quad a_{1989}$ 在第 63 组.

即　分母为　$1989 - 1953 = 36$,　分子是　$64 - 36 = 28$.

$\therefore \quad a_{1989} = \frac{28}{36}$,　则　$\frac{1}{2} < a_{1989} < 1$.

故选(B).

10·7　考虑正整数的非减序列

$$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\cdots$$

其中正整数 n 出现 n 次,将第 1993 项除以 5 所得余数是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 4.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解]　由所给数列可得:正整数 n 在序列中出现的最后位置是

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

由于　$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$,　又　$\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$,

这表明第 1993 项的数字是 63. 它除以 5 所得的余数为 3.

或由不等式

$$\frac{n(n+1)}{2} \leqslant 1993 < \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

式左即　$n^2 + n - 3986 \leqslant 0$,　解得　$62 < n$.

式右即　$n^2 + 3n - 3984 > 0$,　解得　$n < 64$.

$\therefore$　其 1993 项为 63.

故选(D).

10·8　给出两列数

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 1991;$$
$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\cdots,1991.$$

则同时出现在这两列数中的数的个数为

(A) 201.　　(B) 200.　　(C) 199.　　(D) 198.

（第3届“五羊杯”初中数学竞赛,1991年）

［解］　两个数列分别可表示为 $2m+1$ 和 $5n+1$（m,n 为非负整数),质数 5,2 的最小公倍数是 10.

则同时出现在两列数中的数有

$$1,\ 11,\ 21,\ 31,\ \cdots,\ 1991,$$

共 200 个数.

故选(B).

10·9　已知两列数：

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \cdots,\ 2+(200-1)\cdot 3$$
$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ \cdots,\ 5+(200-1)\cdot 4$$

它们都有 200 项,这两列数中相同的项数有

(A) 49 项.　　(B) 50 项.　　(C) 51 项.　　(D) 149 项.

（中国浙江省初中数学竞赛,1991年）

［解1］　由设若两列数中项相同则有

$2+3(n-1)=5+4(m-1),\quad m,n=1,2,\cdots,199,200.$

即　　$4m-3n=-2.$　　㊟

令 $m=3k+x,\quad x=0,1,2;$　且 $n=4k+y,\quad y=0,1,2,3,$ 代入上式有

$4x-3y=-2,$　得　$x=1,\quad y=2.$

则　$m=3k+1,\quad n=4k+2.$（k 为整数）

又　　$1\leqslant m,n\leqslant 200,$

则　　$1\leqslant 3k+1\leqslant 200,$　且　$1\leqslant 4k+2\leqslant 200,$

得　$0\leqslant k\leqslant 49$.即满足方程㊟的 m,n 有 50 对.

故选(B).

［解2］　依题设两数列可分别表示为

$$2+(n-1)\cdot 3\quad 和\quad 5+(m-1)\cdot 4.$$

要使　$2+(n-1)\cdot 3=5+(m-1)\cdot 4,$　则　$n=\dfrac{4m+2}{3}.$

即 $$1 \leqslant \frac{4m+2}{3} \leqslant 200,$$

故 $1 \leqslant m \leqslant 149$. 又 $3 \mid (m-1)$.

因而 $m = 1,4,7,\cdots,145,148$ 等共 50 项.

故选(B).

10·10 循环数列$\{u_n\}$, $u_1 = a$(a 为任意正数), $u_{n+1} = -\frac{1}{u_n+1}$, $n = 1,2,3,\cdots$, 下列数值中能使 $u_n = a$ 的n 值是

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17. (E) 18.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 由设知 $u_1 = a$, $u_2 = -\frac{1}{a+1}$,

$$u_3 = -\frac{1}{1-\frac{1}{a+1}} = -1-\frac{1}{a}, \quad u_4 = -\frac{1}{1-1-\frac{1}{a}} = a.$$

$\therefore$ $\{u_n\}$ 的周期是 3,又 $3 \mid (16-1)$,

故选(C).

10·11 设 $0 < a < 1$,若 $x_1 = a$, $x_2 = a^{x_1}$, $x_3 = a^{x_2}$, $\cdots$, $x_n = a^{x_{n-1}}$, $\cdots$ 则数列$\{x_n\}$

(A) 是递增的.

(B) 是递减的.

(C) 奇数项是递增的,偶数项是递减的.

(D) 偶数项是递增的,奇数项是递减的.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[解] 因 $0 < a < 1$,故函数 $y = a^x$ 是递减的.

所以由 $a < 1$,得 $x_1 = a = a^1 < a^a = x_2$,从而 $x_2 = a^{x_1} > a^{x_2} = x_3$. 由此可否定($A$)与($B$).

又由 $1 > a^a = x_2$,得 $x_1 = a^1 < a^{x_2} = x_3$,从而否定了($D$).

故选(C).

注 严格论证(C)正确,可用数学归纳法.

10·12 数列$\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}$($n = 1,2,3,\cdots$)是

(A) 递增数列. (B) 递减数列.

(C) 从第 1993 项以后有减、有增的数列.

(D) 能够找到一项,从这项以后是递减的.

（中国山西省太原市高中数学竞赛,1993 年）

[解] 由题设 $a_n = \frac{100^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\therefore$ $\{a_n\}$ 递减 $\Longleftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (其中 $n = 1,2,3,\cdots$).

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} < 1$, 有 $n > 99$.

即从第 99 项以后 $\{a_n\}$ 递减.

故选(D).

10·13 给定 $0 \leqslant x_0 < 1$,对一切整数 $n > 0$,令

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{如果 } 2x_{n-1} < 1, \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{如果 } 2x_{n-1} \geqslant 1. \end{cases}$$

使 $x_0 = x_5$ 成立的 x_0 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 5. (D) 31. (E) 无穷多个.

（第 44 届美国高中数学考试,1993 年）

[解] 数 $x_0 \in [0,1)$,用二进制表示时具有形式

$$x_0 = 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7\cdots (\text{每个 } d_k = 0 \text{ 或 } 1).$$

由题设的递推关系可得:将二进制小数点从一个位置向右移一个位置,然后省略掉小数点前面的各位.即

$$x_0 = 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7\cdots.$$

则 $$x_1 = 0.d_2d_3d_4d_5d_6d_7\cdots.$$

因此,由 $x_0 = x_5$,有

$$0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7\cdots = 0.d_6d_7d_8d_9d_{10}d_{11}d_{12}\cdots.$$

当且仅当 x_0 以 $d_1d_2d_3d_4d_5$ 为一个循环节扩展下去,共有 $2^5 = 32$ 个这样的节.

但当 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 1$ 时有 $x_0 = 1$.因此,对于 $x_0 \in [0,1)$ 中使 $x_0 = x_5$ 的共有 $32 - 1 = 31$ 个值.

故选(D).

10·14 令 $R_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$, $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$, $n = 0$,

$1,2,\cdots$ 则 R_{12345} 是一个整数,它的个位数字是

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7. (E) 9.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解 1] 由设知 $ab=1,\quad a+b=6$,

又 $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})$

$=6(a^{n-1}+b^{n-1})-(a^{n-2}+b^{n-2})$.

设 $x_n \doteq a^n+b^n \pmod 5$,则由上式知

$$x_n \equiv x_{n-1}-x_{n-2} \pmod 5.$$

上述数列(加模运算后)是周期为 6 的纯周期数列,这只须注意到

$$x_{n+3}\equiv x_{n+2}-x_{n+1}\equiv(x_{n+1}-x_n)-x_{n+1}\equiv -x_n \pmod 5,$$

则 $$x_{n+6}\equiv -x_{n+3}\equiv -(-x_n)\equiv x_n \pmod 5,$$

而易算得 $\{x_n \pmod 5\}$ 的前 6 项是

$$1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2.$$

而 $12345=6\cdot 2057+3$,知 $x_{12345} \pmod 5=3$,知其尾数可能是 3 或 8.

又 $R_n=\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)$ 是整数,则 $a^{12345}+b^{12345}$ 的尾数只能是 8,这样可知 $R_{12345}=\dfrac{1}{2}(a^{12345}+b^{12345})$ 的尾数是 9 或 4.

故选(E).

[解 2] 由 $a=3+2\sqrt{2},\quad b=3-2\sqrt{2}$,则

$$a+b=6,\quad ab=1,$$

从而,它们是方程 $x^2-6x+1=0$ 的两个根.

由牛顿恒等式:

若 u,v 是 $Ax^2+Bx+C=0(A\neq 0)$ 的两根,记 $S_n=u^n+v^n(n=1,2,\cdots)$,则恒有

$$AS_{n+2}+BS_{n+1}+CS_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

它的证明不难,只须代入化简即可.

由 $R_n=\dfrac{1}{2}S_n$,则 R_n 亦满足牛顿恒等式,即

$R_{n+2}-6R_{n+1}+R_n=0$ 或 $R_{n+2}=6R_{n+1}-R_n(n=1,2,\cdots)$.

余下解法同解 1.

故选(E).

10·15　令 $f(x) = 4x - x^2$. 给定 x_0，考察由 $x_n = f(x_{n-1})$ 对所有 $n \geqslant 1$ 定义的数列，有多少个实数 x_0，使得数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 只取有限多个不同的值

(A) 0.　　　　　　　(B) 1 或 2.　　　(C) 3,4,5 或 6.

(D) 比 6 大但有限多.　　(E) 无限多.

（第 39 届美国高中数学考试，1988 年）

[解]　注意到 $x_0 = 0$ 时，由 $f(0) = 4 \cdot 0 - 0^2 = 0$，且 $x_n = f(x_{n-1})$ 则有 $\{x_n\} = \{0\}$.

解 $4x - x^2 = 0$，得 $x = 0$ 或 $x = 4$；

当 $x_0 = 4$ 时，得数列　$4,0,0,0,0,\cdots$

解 $4x - x^2 = 4$，得 $x = 2$；

当 $x_0 = 2$ 时，得数列　$2,4,0,0,0,\cdots$

解 $4x - x^2 = 2$，得 $x = 2 \pm \sqrt{2}$；

当 $x_0 = 2 + \sqrt{2}$ 时，得数列　$2+\sqrt{2},2,4,0,0,\cdots$

当 $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ 时，得数列　$2-\sqrt{2},2,4,0,0,\cdots$

如此下去，一般的假设 $x_0 = a_n$ 得一个由 n 个不同的值组成的数列

$$a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_3,\ a_2,\ a_1, \cdots$$

则当　x_0 满足 $4x_0 - x_0^2 = a_n$ 时，得 $x_0 = 2 \pm \sqrt{4 - a_n}$，

注意到　当 $0 \leqslant a_n \leqslant 4$ 时，x_0 是实数，且 $0 \leqslant x_0 \leqslant 4$，

这时可令 $a_{n+1} = x_0$，则得到由 $n+1$ 不同值组成的数列

$$a_{n+1},\ a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_2, a_1,\ \cdots$$

显然，这样的 x_0 有无穷多个.

故选(E).

10·16　如果计算机执行以下程序：

(1) 初始值 $x = 3, S = 0$.

(2) $x = x + 2$.

(3) $S = S + x$.

(4) 如果 $S \geqslant 10000$，则进行 5；否则从 2 继续进行.

(5) 打印 x.

(6) stop.

那么由语句 5 而打印出的数值为

(A) 19. (B) 21. (C) 23. (D) 199. (E) 201.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解] $n=1,2,\cdots$ 时,x,S 值分别为

n	1	2	3	4	$\cdots$	n	$\cdots$
x	$3+2$	$3+2\cdot2$	$3+3\cdot2$	$3+4\cdot2$	$\cdots$	$3+n\cdot2$	$\cdots$
S	$3+2$	$2\cdot3+3\cdot2$	$3\cdot3+6\cdot2$	$4\cdot3+10\cdot2$	$\cdots$	$n\cdot3+\frac{n(n+1)}{2}\cdot2$	$\cdots$

$\therefore\quad 3\cdot n+\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\geqslant 10000,\quad n$ 是正整数,

解得 $n=99$, 这时 $x=3+99\cdot2=201$.

故选(E).

10·17 一数列递归地定义为: $t_1=1$,对 $n>1$, n 为偶数时 $t_n=1+t_{\frac{n}{2}}$; n 为奇数时,$t_n=\frac{1}{t_{n-1}}$.若已知 $t_n=\frac{19}{87}$,则 n 的各位数字之和为

(A) 15. (B) 17. (C) 19. (D) 21. (E) 23.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解] 我们采用倒推法(逆推法).

由题设知 n 为偶数时,$t_n=1+t_{\frac{n}{2}}>1$,从而奇数项 $t_n=\frac{1}{t_{n-1}}<1$.则知$\frac{19}{87}$为奇数项.其上一项为$\frac{87}{19}$,注意到

$$\frac{87}{19}\to1+\frac{68}{19}\to1+1+\frac{49}{19}\to1+1+1+\frac{30}{19}\to1+1+1+1+\frac{11}{19};$$

$\frac{11}{19}$为奇数项,故其上一项为$\frac{19}{11}$,注意到

$$\frac{19}{11}\to1+\frac{8}{11},$$

$$\frac{11}{8}\to1+\frac{3}{8},$$

$$\frac{8}{3}\to1+\frac{5}{3}\to1+1+\frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{2}\to1+\frac{1}{2}.$$

而$\frac{1}{2}$恰为第 3 项.我们倒推回去知:

数 t_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{11}{19}$	$\frac{30}{19}$	$\frac{49}{19}$	$\frac{68}{19}$	$\frac{87}{19}$	$\frac{19}{87}$
项数 n	3	6	7	14	28	29	58	59	118	119	238	476	952	1904	1905

$\therefore\quad n=1905$,其各位数字和 15.

故选(A).

10·18　对数列 $u_1,u_2,\cdots$,定义 $\Delta^1(u_n)=u_{n+1}-u_n$,并对所有整数 $k>1$,定义 $\Delta^k(u_n)=\Delta^1[\Delta^{k-1}(u_n)]$.若 $u_n=n^3+n$,那么对所有 $n,\Delta^k(u_n)=0$ 的条件是

(A) 当 $k=1$.　　(B) 当 $k=2$,但不当 $k=1$.

(C) 当 $k=3$,但不当 $k=2$.　　(D) 当 $k=4$,但不当 $k=3$.

(E) 对 k 无值适合.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解]　对于一切正整数 n 有

$\Delta^1(u_n)=[(n+1)^3+(n+1)]-(n^3+n)=3n^2+3n+2,$

$\Delta^2(u_n)=[3(n+1)^2+3(n+1)+2]-(3n^2+3n+2)$
$=6n+6,$

$\Delta^3(u_n)=[6(n+1)+6]-(6n+6)=6,$

$\Delta^4(u_n)=0.$

故选(D).

第 2 节　等差数列

10·19　一个等差数列的前四项是 $a,x,b,2x$,则 a 与 b 之比等于

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{2}{3}$.　(E)2.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解]　由题设可有　$x-a=b-x=2x-b$,即

$$b=\frac{3x}{2},\quad 且\quad x=b-a.$$

$$\therefore\quad \frac{b-a}{b}=\frac{x}{\frac{3x}{2}},\quad 即\quad 1-\frac{a}{b}=\frac{2}{3},因而\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{3}.$$

故选(B).

选择题卷

10·20　若 $x \neq y$ 并且两个数列 x, a_1, a_2, y 和 x, b_1, b_2, b_3, y 各自都成等差数列,那么 $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ 等于

(A) $\frac{2}{3}$.　(B) $\frac{3}{4}$.　(C) 1.　(D) $\frac{4}{3}$.　(E) $\frac{3}{2}$.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解]　若 a_1, d, a_n 分别为等差数列首项,公差和通项,则

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}.$$

$$\therefore \qquad \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{\frac{y - x}{3}}{\frac{y - x}{4}} = \frac{4}{3}.$$

故选(D).

10·21　一个等差数列的前 10 项之和以及前 100 项之和分别为 100 和 10,那么前 110 项的和是

(A) 90.　(B) -90.　(C) 110.　(D) -110.　(E) -100.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解]　等差数列前 n 项和 S_n 的公式是

$2S_n = n[2a + (n-1)d]$, 其中第一项是 a,公差是 d.

由题则有

$$200 = 10(2a + 9d) \quad 和 \quad 20 = 100(2a + 99d),$$

则
$$2S_{110} = 110(2a + 109d).$$

由前两式可得　$2a + 109d = -2$.

因此 $2S_{110} = 110 \cdot (-2)$,　所以　$S_{110} = -110$.

故选(D).

10·22　一等差数列的 n 项和为 153,公差为 2,首项为整数,且 $n > 1$,则 n 的可能值共有

(A) 2 个.　(B) 3 个.　(C) 4 个.　(D) 5 个.　(E) 6 个.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解]　设 a 为等差数列的首项,由题设有

$$\frac{n}{2}\{a + [a + 2(n-1)]\} = 153,$$

或
$$n^2 + (a-1)n - 153 = 0.$$

此二次方程两根之积为 -153,则其大于 1 的因子中,n 的可能值为:3,9,17,51,153.

故选(D).

10·23　如果前 $3n$ 个正整数的和比前 n 个正整数的和多150,那么前 $4n$ 个正整数的和是

(A) 300.　(B) 350.　(C) 400.　(D) 450.　(E) 600.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解]　由设
$$S_{3n}-S_n=\frac{1}{2}\cdot 3n(3n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=4n^2+n=150,$$

又
$$S_{4n}=\frac{1}{2}\cdot 4n(4n+1)=2\cdot n(4n+1)$$
$$=2\cdot(4n^2+n)=300.$$

故选(A).

10·24　首项为 a,公差为 d 的等差数列的前 n 项,$2n$ 项,$3n$ 项的和依次记为 S_1,S_2,S_3,设 $R=S_3-S_2-S_1$,则 R 与下列有关的是

(A) a 和 d.　(B) d 和 n.　(C) a 和 n.

(D) a,d 和 n.　(E) 与 a,d,n 均无关.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解]　由题设及等差数列前 n 项和公式有
$$S_1=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d],$$
$$S_2=\frac{2n}{2}[2a+(2n-1)d],$$
$$S_3=\frac{3n}{2}[2a+(3n-1)d].$$

则　$R=S_3-S_2-S_1=2n^2d$,

故选(B).

10·25　一个项数是偶数的等差数列.奇数项和偶数项的和分别是 24 和 30.若最后一项超过第一项 10.5,则该等差数列的项数是

(A) 20.　(B) 18.　(C) 12.　(D) 10.　(E) 8.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解]　设 a,d 和 $2n$ 分别表示数列的首项,公差和项数.若 S_1 和 S_2 分别表示所有奇数项和所有偶数项的和,那么

$$S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n-1) \cdot 2d] = 24,$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[2(a+d) + (n-1) \cdot 2d] = 30.$$

差 $S_2 - S_1 = \frac{n}{2} \cdot 2d = 6$，即 $nd = 6$.

若 l 表示最后一项,则 $l - a = a + (2n-1)d - a = 10.5$.

$\therefore$ $2nd - d = 10.5$，即 $12 - d = 10.5$，得 $d = 1.5$.

$\therefore$ $n = \frac{6}{d} = \frac{6}{1.5} = 4$，或 $2n = 8$.

故选(E).

10·26 设等差数列的首项及公差均为非负整数,项数不少于 3,且各项的和为 97^2.则这样的数列共有

(A)2 个. (B)3 个. (C)4 个. (D)5 个.

(中国高中数学联赛,1997 年)

[解] 设等差数列的首项为 a,公差为 d.则依题意有

$$na + \frac{n(n-1)}{2}d = 97^2,$$

即
$$[2a + (n-1)d]n = 2 \times 97^2. \quad (*)$$

因 n 为不小于 3 的自然数,97 为素数,故 n 的值只可能为 97,$2 \times 97, 97^2$，2×97^2 四者之一.

若 $d > 0$,则由(*)知 $2 \times 97^2 \geqslant n(n-1)d \geqslant n(n-1)$.故只可能有 $n = 97$.

(*)化为 $a + 48d = 97$,这时(*)有两组解:

$$\begin{cases} n = 97, \\ d = 1, \\ a = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 97, \\ d = 2, \\ a = 1. \end{cases}$$

若 $d = 0$,则(*)化为 $an = 97^2$.这时(*)有两组解:

$$\begin{cases} n = 97, \\ d = 0, \\ a = 97; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 97^2, \\ d = 0, \\ a = 1. \end{cases}$$

故符合题设条件的等差数列共 4 个.

故选(C).

10·27 设 S_1 为等差数列 8,12,… 的前 n 项之和,S_2 为等差数列

17,19,⋯ 的前 n 项之和,若 $n \neq 0$,则 $S_1 = S_2$

(A) 对任一 n 值都不可能.　　(B) 对某一 n 值成立.

(C) 对某两个 n 值成立.　　(D) 对某四个 n 值成立.

(E) 对多于四个 n 值成立.

（第 17 届美国高中数学考试,1966 年）

[解]　由题设及首项为 a,公差为 d 的等差数列前 n 项和公式有

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

有
$$S_1 = \frac{n}{2}(12 + 4n) = 2n^2 + 6n,$$

$$S_2 = \frac{n}{2}(32 + 2n) = n^2 + 16n.$$

故由 $S_1 = S_2$, 即 $2n^2 + 6n = n^2 + 16n$, 有 $n^2 - 10n = 0$.

又 $n \neq 0$, 故 $n - 10 = 0$,得 $n = 10$.

故选(B).

10·28　设 $a_1, a_2, \cdots a_k$ 是一个有穷的等差数列,且

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17,$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 77.$$

如果 $a_k = 13$,那么 k 等于

(A) 16.　(B) 18.　(C) 20.　(D) 22.　(E) 24.

（第 44 届美国高中数学考试,1993 年）

[解 1]　在一个有奇数项的等差数列中,中间一项是它们的平均值.因为 a_4, a_7, a_{10} 本身是一个等差数列且和为 17,则　$a_7 = \frac{17}{3}$.

因为 $a_4, a_5, \cdots, a_{14}$ 是一个等差数列的和为 77 的 11 项,中间项 $a_9 = \frac{77}{11} = 7$.

令 d 是等差数列的公差,因为 a_7 和 a_9 相差 $2d$,所以　$d = \frac{2}{3}$.

因为　$a_7 = a_1 + 6d$,　则得　$a_1 = \frac{5}{3}$.

从 $a_k = a_1 + (k-1)d = \frac{5}{3} + (k-1)\frac{2}{3} = 13$,可得 $k = 18$.

故选(B).

[解 2]　由设 $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ 有　$3a_7 = 17$.若设公差为 d,

又由 $a_4+a_5+\cdots+a_{14}=77$,有 $11a_7+22d=77$,

即 $a_7+2d=7$, 则 $a_9=7$, 且 $d=\frac{2}{3}$.

令 $a_9+xd=13$, 即 $7+x\cdot\frac{2}{3}=13$,

解得 $x=9$, 则 $a_{18}=13$, 即 $k=18$.

故选(B).

10·29 设 S_n 和 T_n 分别为两个等差数列的前 n 项和,如果对所有的 n,有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$,则第一个数列与第二个数列的第11项的比是

(A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) $\frac{78}{71}$. (E) 不能决定.

(第20届美国高中数学考试,1969年)

[解] 设 S_n,T_n 首项,公差分别为 $a_1,a_2;d_1,d_2$,且 u_n,t_n 为两数列通项,则

$$S_n=n\left(a_1+\frac{n-1}{2}d_1\right),\quad T_n=n(a_2+\frac{n-1}{2}d_2).$$

故 $$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}.$$

又 $$\frac{u_{11}}{t_{11}}=\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}=\frac{2a_1+20d_1}{2a_2+20d_2},$$

与上式比较可发现,$n=21$ 时恰好为后一式.

所以 $$\frac{u_{11}}{t_{11}}=\frac{7\cdot 21+1}{4\cdot 21+27}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}.$$

故选(A).

10·30 若 $x_{k+1}=x_k+\frac{1}{2}$,其中 $k=1,2,\cdots,n-1$,且 $x_1=1$,则 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 为

(A) $\frac{n+1}{2}$. (B) $\frac{n+3}{2}$. (C) $\frac{n^2-1}{2}$.

(D) $\frac{n^2+n}{4}$. (E) $\frac{n^2+3n}{4}$.

(第13届美国高中数学考试,1962年)

[解] 由设知 $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{4}{2}$, $\cdots$, $x_n=$

$\frac{n+1}{2}$.

则 $$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{n^2+3n}{4}.$$

故选(E).

10·31 设 $a_1, a_2, \cdots$ 和 $b_1, b_2, \cdots$ 是等差数列,其中 $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ 和 $a_{100} + b_{100} = 100$. 数列 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots$ 的前 100 项之和是

(A) 0. (B) 100. (C) 10000. (D) 505000.

(E) 已知条件不足以解这个问题.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 两等差数列的和仍是等差数列. 以 d 表示数列 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots$ 的公差,那么 $99d = (a_{100} + b_{100}) - (a_1 + b_1) = 0$;这样 $d = 0$.

$\therefore$ $\{a_n + b_n\}$ 前 100 项之和为 $100(a_1 + b_1) = 10000$.

故选(C).

10·32 下面诸数中能为 100 个连续正整数和的是

(A)1627384950. (B)2345678910. (C)3579111300.

(D)4692581470. (E)5815937260.

(第 48 届美国高中数学考试,1997 年)

[解] 首项为 k 的连续 100 个自然数和为

$$S_{100} = \frac{[n + (n+99)] \cdot 100}{2} = 50(2n+99).$$

显然 $50 \mid S_{100}$, 但 $100 \nmid S_{100}$.

故选(A).

10·33 对于 $p = 1, 2, \cdots, 10$, 设 S_p 为首项是 p, 公差是 $2p-1$ 的等差数列前 40 项和,那么 $S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}$ 是

(A) 80000. (B) 80200. (C) 80400.

(D) 80600. (E) 80800.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 对于每一个 $p = 1, 2, \cdots 10$, 均有

$$\begin{aligned} S_p &= p + [p + (2p-1)] + [p + 2(2p-1)] + \cdots \\ &\quad + [p + 39(2p-1)] \\ &= 40p + \frac{40 \cdot 39}{2}(2p-1) \end{aligned}$$

$$= (40 + 40 \cdot 39)p - 20 \cdot 39$$
$$= 40^2 p - 20 \cdot 39.$$

则 $$\sum_{p=1}^{10} S_p = 40^2 \sum_{p=1}^{10} p - (10 \cdot 20 \cdot 39)$$
$$= 40^2 \frac{10 \cdot 11}{2} - (10 \cdot 20 \cdot 39)$$
$$= 80200.$$

故选(B).

10·34　将一组以 1 开头的连续的正整数写在黑板上，擦去其中的一个数，则余下数的算术平均值为 $35\frac{7}{17}$. 问擦去的那个数是

(A) 6.　(B) 7.　(C) 8.　(D) 9.　(E) 不能被确定.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

［解］　设 n 是写在黑板上的最大的一个整数. 若 1 是被擦去的那个数，则可以得到最大的算术平均值

$$\frac{2+3+\cdots+n}{n-1} = \frac{\frac{(n+1)n}{2} - 1}{n-1} = \frac{n+2}{2};$$

若 n 是被擦去的那个数，则得到最小的算术平均值

$$\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}.$$

于是有 $$\frac{n}{2} \leqslant 35\frac{7}{17} \leqslant \frac{n+2}{2},$$

即 $$n \leqslant 70\frac{14}{17} \leqslant n+2,$$

因而　$68\frac{14}{17} \leqslant n \leqslant 70\frac{14}{17}$. 由此 $n = 69$ 或 70.

因为 $35\frac{7}{17}$ 是以 $n-1$ 个整数的算术平均值，所以 $(35\frac{7}{17})(n-1)$ 一定是个整数. 而当 $n = 70$ 时，这是不可能的，所以 $n = 69$.

如果 x 是被擦去的那个数，那么

$$\frac{\frac{69 \cdot 70}{2} - x}{68} = 35\frac{7}{17},$$

即 $$69 \cdot 35 - x = 35\frac{7}{17} \cdot 68 = 35 \cdot 68 + 28,$$

或 $35 - x = 28,$ 得 $x = 7.$

故选(B).

10·35 两人同时从相距72英里的M,N相向而行.第一人以每小时4英里的速度步行,第二人第1小时步行2英里,第2小时步行$2\frac{1}{2}$英里,第3小时步行3英里等等(成等差数列),那么两人将相遇于

(A) 7小时以内. (B) $8\frac{1}{4}$小时以内. (C) 较M近.
(D) 较N近. (E) 在MN的中点处.

(第8届美国高中数学考试,1957年)

[解] 设两人自出至相遇经历t小时,由题设有

$$4t + \{2 + 2\frac{1}{2} + \cdots + [2 + \frac{1}{2}(t-1)]\} = 72,$$

即
$$4t + \frac{t}{2}[2 \cdot 2 + \frac{1}{2}(t-1)] = 72,$$

或
$$t^2 + 23t - 288 = 0,$$

解得$t = 9$(已舍去负值).

则相遇时第一人走$4 \cdot 9 = 36$英里.

故选(E).

第3节 等比数列

10·36 某数加上20,50,100成等比数列,则公比为

(A) $\frac{5}{3}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) $\frac{1}{3}$.

(第10届美国高中数学考试,1959年)

[解] 设该数为c,且等比数列公比为r,由题设有

$(20 + c)(100 + c) = (50 + c)^2,$ 得 $c = 25.$

$$\therefore \quad r = \frac{50 + c}{20 + c} = \frac{5}{3}.$$

故选(A).

10·37 三个不等于0的数a,b,c成等差数列,当a增加1或c增加2时,此三数成等比数列,则b等于

(A) 16. (B) 14. (C) 12. (D) 10. (E) 8.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解]　由设知 $2b=a+c$，且 $b^2=c(a+1)$，又 $b^2=a(c+2)$.

$\therefore\quad c=2a,\quad$ 则 $\quad a=\frac{2}{3}b.$

$\therefore\quad b^2=\frac{8}{9}b^2+\frac{4}{3}b$，解得 $b=12$.

故选(C).

10·38　各项均为实数的等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和记为 S_n. 若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，则 S_{40} 等于

(A)150.　　(B) -200.

(C)150 或 -200.　　(D)400 或 -50.

（中国高中数学联赛，1998 年）

[解]　记 $b_1=S_{10}, b_2=S_{20}-S_{10}, b_3=S_{30}-S_{20}, b_4=S_{40}-S_{30}$. 设 q 为 $\{a_n\}$ 的公比，则 b_1,b_2,b_3,b_4 构成以 $r=q^{10}$ 为公比的等比数列.

于是 $70=S_{30}=b_1+b_2+b_3=b_1(1+r+r^2)=10(1+r+r^2)$.

$\therefore\quad r^2+r-6=0$，解得 $r=2$（$\because\ r=q^{10}>0$，$\therefore\ r=-3$ 应舍去）.

故　$S_{40}=10(1+2+2^2+2^3)=150$.

故选(A).

10·39　在 3 和 9 之间插入两个正数，使得前三个数成等比数列而后三个数成等差数列. 这两个正数的和是

(A) $13\frac{1}{2}$.　(B) $11\frac{1}{4}$.　(C) $10\frac{1}{2}$.　(D) 10.　(E) $9\frac{1}{2}$.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

[解]　设 $3,x,y$ 是前面三个数，那么 $\frac{x}{3}=\frac{y}{x}$，　$x^2=3y$.

后三个数是 $x,y,9$，　所以　$y-x=9-y$，　$x+9=2y$.

消去 y 得到　$2x^2-3x-27=0$，　即　$(x+3)(2x-9)=0$，

解得　$x=4\frac{1}{2}$（已舍去负值），　故　$y=\frac{x^2}{3}=6\frac{3}{4}$，

$\therefore\quad x+y=11\frac{1}{4}$.

故选(B).

10·40　若 x,y,z 是公比为 r 的等比数列，且 $x\neq y$；又 $x,2y,3z$ 成等差数列. 则 $r=$

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D)2.　(E)4.

（第 45 届美国高中数学考试,1994 年）

[解]　由设 $y = rx$, $z = r^2x$, 且 $r \neq 1$.

又 $x,2y,3z$ 成等差数列,则 $2y = \frac{1}{2}(x + 3z)$,

即　$rx = \frac{1}{2}(x + 3r^2x)$　或　$3r^2 - 4r + 1 = 0$

解得　$r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{3}$. 但 $r \neq 1$, 知 $r = \frac{1}{3}$.

故选(B).

10·41　如果在 8 与 5832 中间插入 5 个数,使其成为等比级数,那么第五项是

(A) 648.　　(B) 832.　　(C) 1168.

(D) 1944.　　(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

[解]　设该等比级数首项为 a_1,公比为 q,

由 $a_k = a_1q^{k-1}(k = 1,2,\cdots,6,7)$ 及题设知

$a_1 = 8$,　$a_7 = 8q^6 = 5832$,　得　$q^6 = 729$.

故　$q = \pm 3$,　$a_5 = 8q^4 = 648$.

故选(A).

10·42　若 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个正数数列并对所有正整数 n 满足 $a_{n+2} = a_na_{n+1}$,那么这个数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个等比数列的条件是

(A) a_1 和 a_2 是任意正数.　　(B) 当且仅当 $a_1 = a_2$.

(C) 当且仅当 $a_1 = 1$.　　(D) 当且仅当 $a_2 = 1$.

(E) 当且仅当 $a_1 = a_2 = 1$.

（第 28 届美国高中数学考试,1977 年）

[解]　由题设,数列$\{a_n\}$的第二至第五项分别是

$$a_2,\ a_1a_2,\ a_1a_2^2,\ a_1^2a_2^3.$$

若它们成等比数列,那么连续项的比必须相等:

$$\frac{a_1a_2}{a_2} = \frac{a_1a_2^2}{a_1a_2} = \frac{a_1^2a_2^3}{a_1a_2^2},\ 即\ a_1 = a_2 = a_1a_2.$$

因为 a_1 和 a_2 是正数,必然 $a_1 = a_2 = 1$.

另一方面,若 $a_1 = a_2 = 1$,那么$\{a_n\}$是等比数列 1,1,1,…

故选(E).

10·43　若相异非零数 $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ 构成公比是 r 的等比数列,那么 r 满足方程

(A) $r^2+r+1=0$.　　(B) $r^2-r+1=0$.

(C) $r^4+r^2-1=0$.　　(D) $(r+1)^4+r=0$.

(E) $(r-1)^4+r=0$.

（第 29 届美国高中数学考试,1978 年）

[解]　设 $a = x(y-z)$ 并注意下列恒等式

$$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0.$$

因而
$$a+ar+ar^2=0,$$
即
$$1+r+r^2=0.$$

故选(A).

10·44　若 a,b 和 c 成等比数列,其中 $0<a<b<c$ 且 $n>1$ 是一个整数,那么 $\log_a n$, $\log_b n$, $\log_c n$ 形成的数列为

(A) 等比数列.

(B) 等差数列.

(C) 在该数列中,每项的倒数组成一个等差数列.

(D) 在该数列中,第二、三项分别是第一、二项的 n 次幂.

(E) 这些都不是.

（第 29 届美国高中数学考试,1973 年）

[解]　设 $r>1$ 表示等比数列 a,b,c 的公比,

所以 $b=ar$, $c=ar^2$ 以及 $\lg b=\lg a+\lg r$, $\lg c=\lg a+2\lg r$.

由
$$\log_a n=\lg n\cdot\frac{1}{\lg a},$$
且
$$\log_b n=\lg n\cdot\frac{1}{\lg b}=\lg n\cdot\frac{1}{\lg a+\lg r},$$
及
$$\log_c n=\lg n\cdot\frac{1}{\lg c}=\lg n\cdot\frac{1}{\lg a+2\lg r},$$
则它们的倒数形成一等差数列.

故选(C).

10·45　已知一等比数列的首项不等于 0,公 比不等于 0,又有一等差数列的首项等于 0,第三数列由前两数列对应项相加而得,为 1,1,

2,⋯ 此第三数列的前十项之和为

(A) 978.　　(B) 557.　　(C) 467.

(D) 1068.　　(E) 由已知条件无法决定.

（第 6 届美国高中数学考试,1955 年）

[解]　设等比数列为　$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad \cdots$

且等差数列为　$0, \quad d, \quad 2d, \quad \cdots\cdots$

则第三个数列为　$a, \quad aq+d, \quad aq^2+2d, \quad \cdots\cdots$

由设有　$a=1, \quad aq+d=1, \quad aq^2+2d=2.$

由　$q+d=1, \quad q^2+2d=2$ 及 $q\neq 0$, 解得

$$q=2, \quad d=-1.$$

故

$$S'_{10}=\frac{a(q^{10}-1)}{q-1}=1023,$$

$$S''_{10}=\frac{10}{2}[0+(10-1)d]=-45,$$

则

$$S_{10}=1023-45=978.$$

故选(A).

10·46　在一个实数等比数列中,前两项的和是 7,前六项的和是 91,前四项的和是

(A) 28.　(B) 32.　(C) 35.　(D) 49.　(E) 84.

（第 32 届美国高中数学考试,1981 年）

[解]　设 a 和 r 分别是此数列的第一项和公比,于是有

$$\begin{cases} a+ar=7, & ① \\ \dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=91. & ② \end{cases}$$

② ÷ ① 有

$$\frac{\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}}{a(1+r)}=\frac{91}{7},$$

即　$\dfrac{r^6-1}{r^2-1}=13$, 或 $r^4+r^2-12=0$,

亦即

$$(r^2+4)(r^2-3)=0.$$

因为 r 是实数,则 $r^2=3$.

所以　$a+ar+ar^2+ar^3$

$=(a+ar)+r^2(a+ar)$

$=(a+ar)(1+r^2)=7\cdot 4=28.$

故选(A).

10·47　在正项等比数列中,第五项和第四项的差是576,第二项与第一项的差是9.这个数列前五项的和是

(A) 1061.　　(B) 1023.　　(C) 1024.

(D) 768.　　(E) 这些都不对.

(第25届美国高中数学考试,1974年)

[解]　首项 a,公比 r 的等比数列的前五项之和是

$$S_5 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = \frac{a(1-r^5)}{1-r}.$$

由假设 $ar^4 - ar^3 = 576$,且 $ar - a = 9$.

第一个方程除以第二个方程得到 $\frac{r^4 - r^3}{r-1} = 64$,

所以　$r^3 = 64$,　即　$r = 4$.

因为　$ar - a = 9$, $r = 4$, 因此 $a = 3$, $S_5 = \frac{3(1-4^5)}{-3} = 1023$.

故选(B).

10·48　设有一个 n 项的等比数列,首项是1,公比是 r,和是 s,其中 r 和 s 是非零数.原数列每一项都用它的倒数取代后所得到的新的等比数列的和是

(A) $\frac{1}{s}$.　(B) $\frac{1}{r^n s}$.　(C) $\frac{s}{r^{n-1}}$.　(D) $\frac{r^n}{s}$.　(E) $\frac{r^{n-1}}{s}$.

(第27届美国高中数学考试,1976年)

[解]　在新数列中各项的和是

$$1 + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} = \frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1}{r^{n-1}} = \frac{s}{r^{n-1}}.$$

故选(C).

10·49　一含有五项的等比数列,其中每一项都是小于100的正整数,这五项的和为211,如果 s 是数列中为平方数的各项之和,则 s 等于

(A) 0.　(B) 91.　(C) 133.　(D) 195.　(E) 211.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解1]　设数列中项为 a,公比为 r.由设有

$$\frac{a}{r^2} + \frac{a}{r} + a + ar + ar^2 = 211.$$

因式中每项皆为正整数,故 r 为有理数. 令其为 $\frac{c}{d}$(既约分数),代入上式有

$$\frac{ad^2}{c^2}+\frac{ad}{c}+a+\frac{ac}{d}+\frac{ac^2}{d^2}=211,$$

而式中每项仍为正整数,故 c^2,d^2 皆为 a 的因子,故可设 $a=kc^2d^2$.

将 $a=kc^2d^2$ 代入上式可知式左有公因子 k,而式右 211 是质数,故 $k=1$. 这样上面方程可化为

$$d^4+cd^3+c^2d^2+c^3d+c^4=211.$$

由 $4^4=256>211$,再由对称性知 c,d 皆小于 4.

又 c,d 皆不为 1. 否则,若其中一个为 1,则另一个将满足

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}=211.$$

但 $x=2,3$ 时上式皆不为 211,即不成立.

由于 $\frac{c}{d}$ 为既约分数,即 c,d 无公因子. 故它们只能一为 2,一为 3. 这时 $2^4+3\cdot 2^3+3^2\cdot 2^2+3^3\cdot 2+3^4$ 恰好为 211.

故 $\quad a=36,\quad r=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$.

而上式第一,三,五项皆为完全平方项. 因此

$$S=4^2+6^2+9^2=133.$$

故选(C).

[解 2] 设数列的各项分别为 $\frac{a}{q^2},\ \frac{a}{q},\ a,\ aq,\ aq^2$,由题设知上诸数皆大于 0,这样

$$\sqrt[5]{\frac{a}{q^2}\cdot\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq\cdot aq^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{5}\left(\frac{a}{q^2}+\frac{a}{q}+a+aq+aq^2\right)=\frac{211}{5},$$

即
$$a\leqslant\frac{211}{5}<43.$$

另设 $q=\frac{x}{y}$(因诸项皆正整数,故公比应为有理数),代入和式有

$$a\frac{y^2+xy^2+x^2y^2+x^2y+x^2}{x^2y^2}=211,$$

而211是质数，且 $a<211$，则分子为211的倍数，从而

$$x^2y^2 \leqslant a < 43,$$

则知 $x=3, y=2$（或 $x=2, y=3$）时，分子恰为211.

这样 $a=2^2\cdot 3^2=36$，则此数列的五项是：

$$16,\ 24,\ 36,\ 54,\ 81,$$

$\therefore\ S=16+36+81=133.$

故选 (B).

10·50 若 n 个量形成等比数列，P 是它们的乘积，S 是它们的和，S' 是它们的倒数的和，那么以 S, S' 和 n 来表示，P 为

(A) $(SS')^{\frac{1}{2}n}$.　　(B) $\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{1}{2}n}$.　　(C) $(SS')^{n-2}$.

(D) $\left(\frac{S}{S'}\right)^{n}$.　　(E) $\left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$.

（第22届美国高中数学考试，1971年）

[解] 设该数列是 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}$，那么

$$P=a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n},$$

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r},$$

$$S'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-r^{-n}}{1-r^{-1}}=\frac{r^{-(n-1)}}{a}\cdot\frac{1-r^n}{1-r}.$$

$$\therefore\quad \frac{S}{S'}=a^2r^{n-1},\quad \therefore\quad \left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{1}{2}n}=a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}=P.$$

故选 (B).

10·51 给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，设 $b_1=a_1+a_2+a_3$，$b_2=a_4+a_5+a_6$，$\cdots$，$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$，$\cdots$，则数列 $\{b_n\}$

(A) 是等差数列.　　(B) 是公比为 q 的等比数列.

(C) 是公比为 q^3 的等比数列.　　(D) 既非等差数列又非等比数列.

（中国高中数学联赛，1999年）

[解] 由题设 $a_n=a_1q^{n-1}$，

则 $$\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3}}{a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}}=\frac{a_1q^{3n}+a_1q^{3n+1}+a_1q^{3n+2}}{a_1q^{3n-3}+a_1q^{3n-2}+a_1q^{3n-1}}$$

$$=\frac{a_1q^{3n}(1+q+q^2)}{a_1q^{3n-3}(1+q+q^2)}=q^3,$$

因此$\{b_n\}$是公比为q^3的等比数列.

故选(C).

第4节　某些数列的和与积

10·52　$1990-1980+1970-1960+\cdots-20+10$等于

(A) -990.　(B) -10.　(C) 990.

(D) 1000.　(E) 1990.

（第6届美国初中数学考试,1990年）

[解]　只须注意到

$$\text{原式}=(1990-1980)+(1970-1960)+\cdots+(30-20)+10=99\cdot10+10=1000.$$

故选(D).

10·53　设$S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n,\quad n=1,2,\cdots,$则$S_{17}+S_{33}+S_{50}$等于

(A) 0.　(B) 1.　(C) 6.　(D) -1.　(E) 2.

（第19届美国高中数学考试,1968年）

[解]　(1)n为偶数时

$$\begin{aligned}S_n&=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n\\&=(1-2)+(3-4)+\cdots+[(n-1)-n]\\&=-1-1-\cdots-1=-\frac{n}{2};\end{aligned}$$

(2)n为奇数时

$$\begin{aligned}S_n&=1+\{(-2+3)+(-4+5)+\cdots+[-(n-1)+n]\}\\&=1+\{1+1+\cdots+1\}=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

由上，　$S_{17}+S_{33}+S_{50}=\frac{18}{2}+\frac{34}{2}-\frac{50}{2}=1.$

故选(B).

10·54　有1000个数排成一行,其中任意相邻三个数中,中间的数等于它前后两数的和.若第一个数和第二个数都是1,则这1000个数的和是

(A)1000.　　(B)1.　　(C)0.　　(D) -1.

（中国山东省初中数学竞赛,1996 年）

[解]　依题设可知该 1000 个数依照下面方式排列:

$1,1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1,0,\cdots$

换言之它们按 $1,1,0,-1,-1,0$ 周期循环.

又 $1000\div 6=166\cdots\cdots 4$,而每个周期内的 6 个数和为 0,这样该 1000 个数和是

$$1+1+0+(-1)=1.$$

故选 (B).

10·55　数列 $1,2,1,2,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,\cdots$ 其相邻的两个 1 间被 2 隔开,第 n 对 1 之间有 n 个 2. 则数列的前 1234 项和为

(A)1996.　　(B)2419.　　(C)2429.

(D)2439.　　(E)2449.

（第 47 届美国高中数学考试,1996 年）

[解1]　设该数列前 1234 项有 k 个 1. 这样有

$$1234\leqslant k+(1+2+3+\cdots+k)=k+\frac{k(k+1)}{2},$$

即　$k^2+3k-2468\geqslant 0$,　得 $k=49$.

$$\therefore\quad S_{1234}=49+2(1234-49)=2419.$$

故选 (B).

[解 2]　构造补数列 $1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,\cdots$ 与题设数列相应项相加即为 $2,2,2,2,\cdots$

而补数列中前 1234 项中 1 的个数(与解 1 求法同)为 $k=49$,

则　$S_{1234}=1234\times 2-49=2419$.

故选 (B).

10·56　$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-7$ 等于

(A) $-\frac{1}{64}$.　(B) $-\frac{1}{16}$.　(C) 0.　(D) $\frac{1}{16}$.　(E) $\frac{1}{64}$.

（第 30 届美国高中数学考试,1979 年）

[解]　注意到

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{65}{64}-7$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{64}\right)-7$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{64}-1=-\frac{1}{64}.$$

故选(*A*).

10·57　数列1,(1+2),$(1+2+2^2)$,…,$(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$前 n 项之和用 n 来表示是

(A) 2^n.　　(B) 2^n-n.　　(C) $2^{n+1}-n$.

(D) $2^{n+1}-n-2$.　　(E) $n\cdot 2^n$.

（第23届美国高中数学考试,1972年）

[解]　已知数列的第 k 项等于 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$,所以前 n 项的和可以写为

$$(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)$$
$$=(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{n\text{项}}$$
$$=(2^{n+1}-2)-n$$
$$=2^{n+1}-n-2.$$

故选(*D*).

10·58　设 S 为一数列 $x+a$,　x^2+2a,　x^3+3a,…前九项之和($x\neq 1$),则 S 等于

(A) $\dfrac{50a+x+x^8}{x+1}$.　　(B) $50a-\dfrac{x+x^{10}}{x-1}$.

(C) $\dfrac{x^9-1}{x+1}+45a$.　　(D) $\dfrac{x^{10}-x}{x-1}+45a$.

(E) $\dfrac{x^{11}-x}{x-1}+45a$.

（第10届美国高中数学考试,1959年）

[解]　$S=(x+a)+(x^2+2a)+\cdots+(x^9+9a)$
$$=(x+x^2+\cdots+x^9)+(a+2a+\cdots+9a)$$
$$=\frac{x(x^9-1)}{x-1}+\frac{9}{2}(a+9a)$$
$$=\frac{x^{10}-x}{x-1}+45a.$$

故选(*D*).

10·59　公比为 r(其中 $|r|<1$)的一个无穷等比数列和为15,而

这数列的每项平方的和是45.这数列的首项是

(A) 12. (B) 10. (C) 5. (D) 3. (E) 2.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解] 设数列首项为 a,则由设有

$$\frac{a}{1-r}=15, \quad 且 \quad \frac{a^2}{1-r^2}=45,$$

由 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}\cdot\frac{a}{1-r}$, 则 $\frac{a}{1+r}=3.$

由 $a=15(1-r)$ 和 $a=3(1+r)$ 可解得 $a=5.$

故选(C).

10·60 代数式

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots+\frac{1}{255\cdot 257}$$

的值为

(A) $\frac{127}{255}$. (B) $\frac{128}{255}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{128}{257}$. (E) $\frac{129}{257}$.

(第28届美国高中数学考试,1977年)

[解1] 因为 $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right),$

则
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1},\end{aligned}$$

当 $n=128$ 时,所求和为 $\frac{128}{2\cdot 128+1}=\frac{128}{257}.$

故选(D).

[解2] $\because \frac{1}{n(n-k)}+\frac{1}{n(n+k)}=\frac{2}{(n-k)(n+k)}$,所求和是

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{253\cdot 257}\right)\\&=4\left(\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{249\cdot 257}\right)\\&=\cdots=128\left(\frac{1}{1\cdot 257}\right).\end{aligned}$$

故选(D).

10·61　代数式$\frac{1}{\log_2 100!}+\frac{1}{\log_3 100!}+\frac{1}{\log_4 100!}+\cdots+\frac{1}{\log_{100} 100!}$的值是

(A)0.01.　　(B)0.1.　　(C)1.　　(D)2.　　(E)0.

（第 49 届美国高中数学考试，1998 年）

[解]　由对数性质知

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \log_{100!}2+\log_{100!}3+\cdots+\log_{100!}100\\ &= \log_{100!}100!\\ &= 1\end{aligned}$$

故选(C).

10·62　数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足 $a_1=19, a_9=99$ 且对所有 $n\geqslant 3$，a_n 是它前面 $n-1$ 项的算术平均值. 则 a_2 是

(A) 29.　　(B) 59.　　(C) 79.　　(D) 99.　　(E) 179.

（第 50 届美国高中数学考试，1999 年）

[解]　由题设 $a_1=19$，令 $a_2=x$，这样此数列诸项依次为(先求第 3 项，再依 2、3 项反求 a_4 等等)：

$19,\ x,\ \frac{19+x}{2},\ \frac{3}{2}(19+x),\ \cdots$

易发现从 a_4 起，它们分别是在 $(19+x)$ 前乘以

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}, \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4},$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{5},\ \cdots$

这样　$a_9=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(19+x)=99,$

解得　$x=179$，　即　$a_2=179$.

故选(E).

10·63　设 S_n 为调和数列前 n 项之和，例如 S_3 表前三项之和，如果一调和数列的前三项为 3,4,6，则

(A) $S_4=20$.　　(B) $S_4=25$.　　(C) $S_5=49$.

(D) $S_6=49$.　　(E) $S_2=\frac{1}{2}S_4$.

（第 10 届美国高中数学考试，1959 年）

[解]　因 3,4,6 成调和数列，则$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ 成等差数列，且公差为

$-\frac{1}{12}$. 然而此数列的第五项为 0($\because \frac{1}{3}+(5-1)\cdot\frac{(-1)}{12}=0$).

因 0 的倒数不存在,故此调和数列仅有四项.

注意到 $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$, 故调和数列第四项为 12.

从而 $S_4 = 3+4+6+12 = 25.$

故选(B).

10·64 在数列 1,3,2,… 中,前两项以后的每一项等于它前面前两项之差(前面一项减去再前面一项).这个数列的前 100 项之和是

(A) 5. (B) 4. (C) 2. (D) 1. (E) −1.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 依题设这个数列的前八项分别是 1,3,2,−1,−3,−2,1,3. 因为第七,第八项与第一,第二项相同,第九项将与第三项相同,等等;即这个数列每隔 6 项重复出现前面的项,即

$a_k = a_{k+6}(k=1,2,3,\cdots)$. a_k 为数列通项.

又 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$, 因而 $\sum_{k=1}^{96} a_k = 0.$

因此
$$\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{96} a_k + a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}$$
$$= 0+1+3+2-1 = 5.$$

故选(A).

10·65 对任意正整数 n,若使

$$f(n)=\begin{cases}\log_8 n, \text{若 } \log_8 n \text{ 是有理数;}\\ 0, \text{若 } \log_8 n \text{ 不是有理数.}\end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{1997} f(n) =$

(A) $\log_8 2047$. (B) 6. (C) $\frac{55}{3}$. (D) $\frac{58}{3}$. (E) 585.

(第 48 届美国高中数学考试,1997 年)

[解] 由于 $8=2^3$,显然 $\log_8 n$ 仅当 n 为 2 的方幂时是有理数,这样注意到 $2^0 < 1997 < 2^{11} = 2048$,

有 $\sum_{n=1}^{1997} f(n) = \sum_{k=0}^{1024}\log_8 2^k = \sum_{k=0}^{10}\frac{k}{3} = \frac{55}{3}.$

故选(C).

10·66　有某个数列，它的第一项是1，对于所有的 $n \geqslant 2$，此数列的前 n 项的乘积是 n^2. 这个数列的第三项及第五项的和是

(A) $\frac{25}{9}$.　(B) $\frac{31}{15}$.　(C) $\frac{61}{16}$.　(D) $\frac{576}{225}$.　(E) 34.

（第30届美国高中数学考试，1979年）

［解］　用 a_n 表示数列的第 n 项，依题设且注意到

$$a_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2}\ (n \geqslant 2),$$

则该数列的前五项是 $1, 4, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}$，因而所要求的和是

$$\frac{9}{4} + \frac{25}{16} = \frac{61}{16}.$$

故选(C).

10·67　已知数列 $10^{\frac{1}{11}}, 10^{\frac{2}{11}}, 10^{\frac{3}{11}}, 10^{\frac{4}{11}}, \cdots, 10^{\frac{n}{11}}$. 使数列的前 n 项的乘积为1000000的正整数 n 是

(A) 不存在.　(B) 8.　(C) 9.　(D) 10.　(E) 11.

（第22届美国高中数学考试，1971年）

［解］　因为 $1000000 = 10^6$，故数列前 n 项的指数和应为6.

即　$\frac{n(n+1)}{22} = 6$，　或　$n(n+1) = 132$，

$\therefore\ n = 11$.

故选(E).

10·68　设数列 $\{u_n\}$ 由 $u_1 = 5$，$u_{n+1} - u_n = 3 + 4(n-1)$，$(n = 1,2,3,\cdots)$ 定义，如果 u_n 是 n 的一个多项式，则此多项式的系数代数和为

(A) 3　(B) 4.　(C) 5.　(D) 6.　(E) 11.

（第20届美国高中数学考试，1969年）

［解1］　由题设 $u_{k+1} - u_k = 3 + 4(k-1)$，令 $k = n-1, n-2, \cdots 2, 1$，便可依次得到

$$u_n - u_{n-1} = 3 + 4(n-2),$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 3 + 4(n-3),$$

$$\cdots\cdots\ \cdots\cdots$$

$$u_3 - u_2 = 3 + 4 \cdot 1,$$

$$u_2 - u_1 = 3 + 4 \cdot 0.$$

将上诸式两边相加：

式左 $= u_n - u_1$

式右 $= 3 \cdot (n-1) + 4[(n-2) + (n-3) + \cdots + 1]$

$\quad = 2n^2 - 3n + 1.$

又 $\quad u_1 = 5$， 故 $\quad u_n = 2n^2 - 3n + 1 + 5 = 2n^2 - 3n + 6.$

故其系数和是 $\quad 2 - 3 + 6 = 5.$

故选(C).

[解 2] 令 $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_k n^k.$

由 $\quad u_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k$，及 $u_1 = 5.$

故 $\quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 5.$

故选(C).

10·69 乘积$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$的值是

(A) $4^{2^n} - 1$. (B) $2^{2^{2^n}} - 1$. (C) $2^{2n} - 1$. (D) $2^n - 1$.

（第 8 届“缙云杯”初中数学邀请赛，1991 年）

[解] $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)}{2-1}$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$$

$$= \cdots = (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) = (2^{2^n})^2 - 1 = 4^{2^n} - 1.$$

故选(A).

10·70 若乘积 $S = (1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})(1+2^{-\frac{1}{2}})$，那么 S 等于

(A) $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$. (B) $(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$. (C) $1-2^{-\frac{1}{32}}$.

(D) $\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})$. (E) $\frac{1}{2}$.

（第 22 届美国高中数学考试，1971 年）

[解] 设 $x = 2^{-\frac{1}{32}}$，由题设则有

$$S=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}).$$

$\because\quad (1-x)S=1-x^{32}=\dfrac{1}{2},$

$\therefore\quad S=\dfrac{1}{2}(1-x)^{-1}=\dfrac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}.$

故选(A).

10·71　乘积$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$等于

(A) $\frac{5}{12}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{11}{20}$.　(D) $\frac{2}{3}$.　(E) $\frac{7}{10}$.

(第37届美国高中数学考试,1986年)

[解]　注意到下面变形:

$$\text{原式}=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{10})(1+\frac{1}{10})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}$$

$=\dfrac{11}{20}$.（注意前后式约分）

故选(C).

10·72　式$\log_2[(2^1+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)+1]$的值为

(A) 16.　(B) 32.　(C) 64.　(D) 128.　(E) 256.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985年)

[解]　令$M=(2^1+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)(2^{64}+1)$,

考虑　$(2^1-1)M=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{64}+1)=\cdots$

$=(2^{64}-1)(2^{64}+1)=2^{128}-1,$

则　原式$=\log_2(2^{128}-1+1)=\log_2 2^{128}=128.$

故选(D).

10·73　$\log_3\left[(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)+\dfrac{1}{2}\right]+\log_3 2$的值为

(A) 32.　(B) 64.　(C) 128.　(D) 非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛,1987年)

[解] $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$

$$=\frac{1}{3-1}\cdot[(3-1)(3+1)](3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{64}+1)$$

$$=\cdots=\frac{1}{2}(3^{128}-1).$$

$\therefore$ 原式 $=\log_3\left[\frac{1}{2}(3^{128}-1)+\frac{1}{2}\right]+\log_3 2$

$$=\log_3 3^{128}-\log_3 2+\log_3 2=128.$$

故选(C).

10·74 化简$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$得

(A) $\frac{1}{n}$. (B) $\frac{2}{n}$. (C) $\frac{2(n-1)}{n}$.

(D) $\frac{2}{n(n+1)}$. (E) $\frac{3}{n(n+1)}$.

（第 10 届美国高中数学考试，1959 年）

[解] 原式 $=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{2}{n}$.

故选(B).

10·75 积 $\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\left(1+\frac{1}{4\cdot 6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{98\cdot 100}\right)\left(1+\frac{1}{99\cdot 101}\right)$的值的整数部分为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1991 年）

[解] 注意到$1+\frac{1}{k(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$，则

原式 $=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\cdots\cdot\frac{99^2}{98\cdot 100}\cdot\frac{100^2}{99\cdot 101}$

$=\frac{2\cdot 100}{101}=1\frac{99}{101}$. （注意式子前后项分子分母约分）

故选(A).

10·76 如果 $T_n=1+2+3+\cdots+n$，而

$$P_n=\frac{T_2}{T_2-1}\cdot\frac{T_3}{T_3-1}\cdot\frac{T_4}{T_4-1}\cdot\cdots\cdot\frac{T_n}{T_n-1},$$

其中 $n = 2,3,4,\cdots$，那么 P_{1991} 最接近的数是

(A) 2.0.　(B) 2.3.　(C) 2.6.　(D) 2.9.　(E) 3.2.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

［解］　由题设知

$$\frac{T_n}{T_n-1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1}=\frac{n(n+1)}{n^2+n-2}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)},$$

则

$$P_{1991}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 4}{5\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 5}{6\cdot 3}\cdots\frac{1990\cdot 1991}{1992\cdot 1989}\cdot\frac{1991\cdot 1992}{1993\cdot 1990}$$
$$=\frac{3\cdot 1991}{1993}\approx 2.997.$$

故选(D).

10·77　有限数列 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，我们定义

$$\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$$

叫做 A 的凯森和，其中 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(1\leqslant k\leqslant n)$，如果有 99 项的数列$(a_1,a_2,\cdots,a_{99})$的凯森和为 1000，则有 100 项的数列$(1,a_1,a_2,\cdots,a_{99})$凯森和为

(A) 991.　(B) 999.　(C) 1000.　(D) 1001.　(E) 1009.

（第 43 届美国高中数学考试，1992 年）

［解］　由　$\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n}$

由设　$\frac{99a_1+98a_2+\cdots+a_{99}}{99}=1000$，　则

$$99a_1+98a_2+\cdots+a_{99}=99\cdot 1000,$$

所以

$$\frac{100\cdot 1+99a_1+98a_2+\cdots+a_{99}}{100}$$
$$=\frac{100+99\cdot 1000}{100}=991.$$

故选(A).

第 5 节　无穷数列和与极限

10·78　若一个无穷递缩等比数列的首项是一个正整数，公比是

一个正整数的倒数,数列的和是3,那么这个数列前两项之和是

(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $\frac{8}{3}$.　(D) 2.　(E) $\frac{9}{2}$.

(第26届美国高中数学考试,1975年)

[解] 若 a 是这个数列的首项,$\frac{1}{n}$ 是它的公比,那么由设

$$\frac{a}{1-\frac{1}{n}}=3 \text{ 或 } a=3-\frac{3}{n}.$$

因为 a 和 n 是整数,并且 $0<\frac{1}{n}<1$,故 $n=3$, $a=2$.

$\therefore$ 数列前两项和为 $2+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

故选(C).

10·79 $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\cdots$ 直至无穷的和为

(A) $\frac{1}{5}$.　(B) $\frac{1}{24}$.　(C) $\frac{5}{48}$.　(D) $\frac{1}{16}$.　(E) 以上答案都不正确.

(第1届美国高中数学考试,1950年)

[解] 原式 $=\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^4}+\frac{2}{7^6}+\cdots\right)$

$$=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}+\frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{7}{48}+\frac{2}{48}=\frac{3}{16}.$$

故选(E).

10·80 已知无穷数列为 $\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots$,它的第 n 项为 $\frac{n}{10^n}$,则其极限和为

(A) $\frac{1}{9}$.　(B) $\frac{10}{81}$.　(C) $\frac{1}{8}$.　(D) $\frac{17}{72}$.　(E) 大于任何有限之数.

(第13届美国高中数学考试,1962年)

[解] 令 $S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{n}{10^n}$.

考虑 $S_n-\frac{S_n}{10}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{10^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{10^{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{10^k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{10^k}$

$$= \left(\frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{10^k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{10^k} + \frac{n}{10^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{10^k} - \frac{k-1}{10^k}\right) - \frac{n}{10^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{10^k} - \frac{n}{10^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} - \frac{n}{10^{n+1}},$$

即 $\frac{9}{10}S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} - \frac{n}{10^{n+1}}$ 或 $S_n = \frac{10}{9}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} - \frac{n}{9 \cdot 10^n}$.

而 $$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{10}{9} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} - 0 = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{81}.$$

故选(B).

10·81 $S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \cdots$,则 S 等于

(A) 0. (B) $\frac{2}{7}$. (C) $\frac{6}{7}$. (D) $\frac{9}{32}$. (E) $\frac{27}{32}$.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解 1] 将题设式子变形有

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots,$$

$$\therefore \qquad S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

故选(B).

[解 2] 令 $S_1 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \cdots, S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots$,

$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \cdots$,

则 $$S = S_1 - S_2 - S_3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}.$$

故选(B).

10·82　一线起初是1英寸长,依下列规则增长(其中第一项就是起初的长度).

$$1 + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\sqrt{2} + \frac{1}{64} + \cdots\cdots$$

若增长的过程继续不已,则线长的极限为

(A) ∞.　　(B) $\frac{4}{3}$.　　(C) $\frac{8}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}(4+\sqrt{2})$.　　(E) $\frac{2}{3}(4+\sqrt{2})$.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解]　原式$= 1 + \frac{1}{4}(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{16}(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{64}(\sqrt{2}+1) + \cdots$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4+\sqrt{2}}{3}.$$

故选(D).

10·83　一圆内切于边长为m的正方形,另一正方形内接于这个圆内,然后又一圆内切于第二个正方形,如此下去,如果S_n表示上述前n个圆的面积总和,当n无限增加时,S_n趋近于

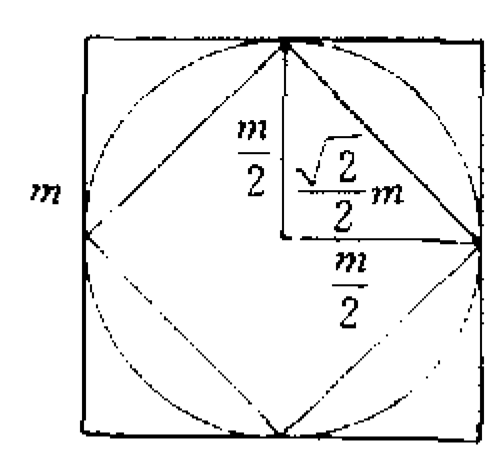
(A) $\frac{\pi m^2}{2}$.　(B) $\frac{3\pi m^2}{8}$.　(C) $\frac{\pi m^2}{3}$.　(D) $\frac{\pi m^2}{4}$.　(E) $\frac{\pi m^2}{8}$.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解]　设第k个正方形边长为a_k,由设有

$$a_1 = m,\quad a_k = \frac{\sqrt{2}}{2}a_{k-1}(k = 2,3,\cdots).$$

再设第k个圆半径为r_k,依题设亦有



$$r_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}m,$$

$$r_k = \frac{1}{2}a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k-1}m.$$

则第 k 个圆面积

$$A_k = \pi r_k^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{m}{2}\right)^2,$$

这样 $S_n = \pi\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \pi\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \pi\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \cdots$

$$+ \pi\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi m^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{\pi m^2}{4}\cdot 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right].$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi m^2}{2}$.

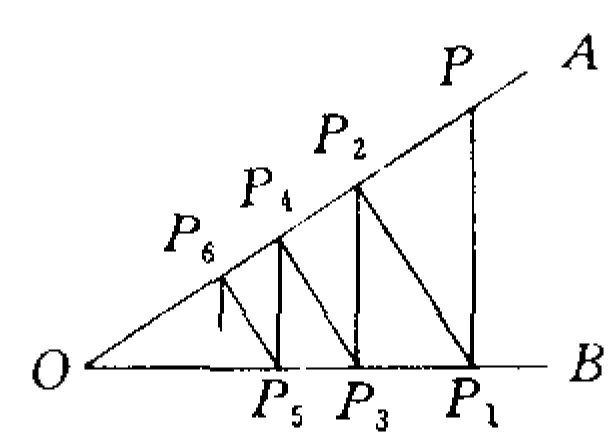
故选(A).

10·84 已知 OA 和OB是两不同直线，从 OA 上任取一点作OB的垂线，再从此垂足作 OA 的垂线，再从第二垂足作 OB 的垂线，如此进行到无限，若最初两垂线段长为 $a,b(a\neq b)$，则这些垂线段长的和，当垂线无限增加时，趋近于一极限，此极限值为

(A) $\frac{b}{a-b}$. (B) $\frac{a}{a-b}$. (C) $\frac{ab}{a-b}$. (D) $\frac{b^2}{a-b}$. (E) $\frac{a^2}{a-b}$.

（第 16 届美国高中数学考试，1965 年）

[解] 如图易证 $\triangle PP_1P_2 \backsim \triangle P_1P_2P_3 \backsim \triangle P_2P_3P_4 \backsim \cdots$，则



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{P_2P_3} = \frac{P_2P_3}{P_3P_4} = \cdots,$$

且 $$P_2P_3 = \frac{b^2}{a},\quad P_3P_4 = \frac{b^3}{a^2},\cdots,$$

$$P_nP_{n+1} = \frac{b^n}{a^{n-1}}.$$

这样，诸线段长之和为

$$S = a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\cdots = a\left[1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots\right]$$

$$= a\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a-b}.$$

故选(E).

10·85 若 $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$,则

(A) $x=1$. (B) $0<x<1$. (C) $1<x<2$.

(D) x 是无穷大. (E) $x>2$ 但定值.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 由设有 $x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=1+x$,

由 $x^2-x-1=0$ 解得正根 $x\approx 1.62$.

故选(C).

注 严格地讲,还须证 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ 单调,有界.

它的单调性显然,有界性可结合归纳法去证明.证明如下:

今设 $x_n=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n\text{重}}$,则 $x_n<2$.

(1)$n=1$ 时,$\sqrt{1}<2$ 成立;

(2)若 $n=k$ 时,$x_k<2$,考虑

$x_{k+1}=\sqrt{1+x_k}<\sqrt{1+2}<\sqrt{4}=2$,命题对 x_{k+1} 亦成立,从而命题成立.

10·86 满足方程 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ 的 x 值为

(A) 无穷大. (B) 2. (C) $4\sqrt{2}$.

(D) $\sqrt{2}$. (E) 以上答案都不正确.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解] 由设可有 $\lg x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=\lg 2$,即 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\lg x=\lg 2$.

但 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$, 有 $2\lg x=\lg 2$, 即 $x^2=2$.

得 $x=\pm\sqrt{2}$(舍去负值).

故选(D).

10·87 若 x 是无限增大的正实数,则

$\log_3(6x-5)-\log_3(2x+1)$ 趋近于

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 4. (E) 非有限数.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解] 由题设及对数性质有

$$\log_3(6x-5)-\log_3(2x+1)=\log_3\frac{6x-5}{2x+1}=\log_3\left(3-\frac{8}{2x+1}\right).$$

$\because \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8}{2x+1} = 0,$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_3\left(3 - \dfrac{8}{2x+1}\right) = \log_3 3 = 1.$

故选(B).

10·88　设$L(m)$为$y = x^2 - 6$和$y = m$(其中$-6 < m < 6$)的图形的左交点的横坐标x.设$r = \dfrac{L(-m) - L(m)}{m}$,那么,当$m$无限接近于0时,$r$的值是

(A) 非常接近0.　(B) 非常接近$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.　(C) 非常接近$\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

(D) 无穷大.　(E) 不能确定.

(第20届美国高中数学考试,1969年)

[解]　由设$L(m)$的坐标满足$x^2 - 6 = m$或$x^2 = 6 + m$.

即　$x = \pm\sqrt{6+m}$,它不为0(注意到$-6 < m < 6$).

故其左端点为$L(m) = -\sqrt{6+m}$,因此

$$r = \frac{L(-m) - L(m)}{m} = \frac{-\sqrt{6-m} - (-\sqrt{6+m})}{m},$$

即
$$r = \frac{2}{\sqrt{6+m} + \sqrt{6-m}}.$$

则当$m \to 0$时,　$r \to \dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \dfrac{2}{2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

故选(B).

10·89　当$a_1, a_2, \cdots, a_{25}$是0或2时,形如$x = \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_2}{3^2} + \cdots + \dfrac{a_{25}}{3^{25}}$的一切数$x$,可满足

(A) $0 \leqslant x < \dfrac{1}{3}$.　　(B) $\dfrac{1}{3} \leqslant x < \dfrac{2}{3}$.

(C) $\dfrac{2}{3} \leqslant x < 1$.　　(D) $0 \leqslant x < \dfrac{1}{3}$或$\dfrac{2}{3} \leqslant x < 1$.

(E) $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}$.

(第25届美国高中数学考试,1974年)

[解]　由无穷递缩等比数列和公式有

$$0 \leqslant x < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

若 $a_1 = 0$， 则 $0 \leqslant x < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$；

若 $a_1 = 2$， 则 $\frac{2}{3} + 0 + 0 + \cdots \leqslant x < 1$.

由上有 $0 \leqslant x < \frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3} \leqslant x < 1$.

故选(D).

第十一章　二项式定理

11·1　在$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}\right)^8$的展开式中，$x^7$的系数为

(A) 56.　(B) -56.　(C) 14.　(D) -14.　(E) 0.

（第11届美国高中数学考试，1960年）

[解]　由$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}\right)^8=\frac{1}{(2x)^8}(x^3-4)^8$，从而，只须求$(x^3-4)^8$中$x^{15}$的系数，其为

$$C_8^5(1^3)^5(-4)^3=-2^6C_8^5,$$

则展开式中x^7的系数为$\frac{1}{2^8}\cdot(-2^6C_8^5)=-14$.

故选(D).

11·2　在$\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$的展开式中，$a^{-\frac{1}{2}}$的系数是

(A) -7.　(B) 7.　(C) -21.　(D) 21.　(E) 35.

（第14届美国高中数学考试，1963年）

[解]　由二项式定理，上述展开式的第$r+1$项为

$$C_7^ra^{7-r}(-1)^r(a^{-\frac{1}{2}})^r=(-1)^rC_7^r\cdot a^{7-\frac{3}{2}r},$$

又由设知　$7-\frac{3}{2}r=-\frac{1}{2}$，　得　$r=5$.

故$a^{-\frac{1}{2}}$的系数是　$(-1)^5C_7^5=-C_7^2=-21$.

故选(C).

11·3　在$(1+2x-x^2)^4$的多项式展开式中x^7的系数是

(A) -8.　(B) 12.　(C) 6.　(D) -12.　(E) 这些都不对.

（第25届美国高中数学考试，1974年）

[解]　由 $1+2x-x^2=-(x-1)^2+2$，则

$$\begin{aligned}&(1+2x-x^2)^4\\=&[2-(x-1)^2]^4=[(x-1)^2-2]^4\\=&(x-1)^8+C_4^3(x-1)^{2\cdot 3}(-2)^1+\cdots\end{aligned}$$

上式从第二项起，x 方幂次数 $\leqslant 6$，

∴　$(1+2x-x^2)^4$ 展开式中 x^7 项为 $(x-1)^8$ 的 x^7 项 $C_8^1x^7(-1)^1$，则其系数为 -8.

故选(A).

11·4　若 $(1.0025)^{10}$ 计算精确到五位小数，那么第五位小数的数字是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 5.　　(E) 8.

（第 22 届美国高中数学考试，1971 年）

[解]　由二项展开式得

$$\begin{aligned}(1.0025)^{10}&=(1+0.0025)^{10}\\&=1+10(0.0025)+45(0.0025)^2+120(0.0025)^3\\&\quad+210(0.0025)^4+\cdots\\&=1.025+0.00028125+0.000001875+R\\&=1.025283125+R.\end{aligned}$$

其中 R 是比 10^{-8} 小的项和即 $R=\sum\limits_{k=4}^{10}C_{10}^kb^k$，其中 $b=0.0025$.

而由于　$0<b<1$，　且　$\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k=(1+1)^{10}=2^{10}$，

故　　$R=\sum\limits_{k=4}^{10}C_{10}^kb^k<b^4\sum\limits_{k=4}^{10}C_{10}^k<b^4\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k=b^4\cdot 2^{10}$.

因而　$R<\dfrac{2^{10}}{2^8\cdot 10^8}=\dfrac{2^2}{10^8}=0.00000004$.

∴　$(1.0025)^{10}\approx 1.02528$（精确到小数点后 5 位）.

故选(E).

11·5　在 $(a+b)^n$ 的展开式中，有 $n+1$ 个不同项，在 $(a+b+c)^{10}$ 的展开式中，不同项的项数为

(A) 11.　　(B) 33.　　(C) 55.　　(D) 66.　　(E) 132.

（第 9 届美国高中数学考试，1958 年）

[解]　由　$(a+b+c)^{10}$

$$= [(a+b)+c]^{10}$$
$$= (a+b)^{10} + 10(a+b)^9 c + \cdots + 10(a+b)c^9 + c^{10}$$

共 11 项.但

$(a+b)^{10}$ 有 11 项,$(a+b)^9$ 有 10 项,…,$(a+b)^0$ 有 1 项.

故总项数为 $1+2+\cdots+10+11=66$.

故选(D).

11·6 当用二项式定理展开$(a-b)^n$($n \geqslant 2$, $ab \neq 0$)时,如 $a = kb$,(其中 k 是一个正整数),则第二,第三项的和是 0,那么 n 等于

(A) $\frac{1}{2}k(k-1)$. (B) $\frac{1}{2}k(k+1)$. (C) $2k-1$.

(D) $2k$. (E) $2k+1$.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解] 由二项式定理可有

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n b^n,$$

当 $a = kb$ 时,其第二,三项和是

$$-n(kb)^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}(kb)^{n-2}b^2 = 0,$$

即 $-k + \frac{n-1}{2} = 0$, 得 $n = 2k+1$.

故选(E).

11·7 多项式$(x+y)^9$ 按 x 的降幂展开.当 $x = p$ 及 $y = q$ 时,第二和第三项有相等的值,其中 p 和 q 是正数且它们的和是 1. p 的值是

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{3}{4}$. (E) $\frac{8}{9}$.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 由$(x+y)^9 = x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + \cdots + y^9$;再由题设

$$9p^8q = 36p^7q^2,\text{则} \quad p = 4q.$$

又由 $p+q=1$, 得 $p = \frac{4}{5}$.

故选(B).

11·8 展开$\left(1-\frac{1}{a}\right)^6$,它的末三项系数的和为

(A) 22. (B) 11. (C) 10. (D) -10. (E) -11.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解]　利用杨辉三角知$(a+b)^n$展开系数依次为

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

则由二项式中第二项系数为 -1,则末三项系数应为 15, -6, 1. 它们的和是

$$15-6+1=10.$$

故选(C).

11·9　如图,帕斯卡(杨辉)三角形是一个正整数的阵列,其中第一行是1,第二行是两个1,每行以1开始和结尾,在任何一行中第 k 个数(当它不是1时)是前面一行第 k 个数与第$(k-1)$个数的和.在前 n 行中,不是1的数字的数目与1的数目的商是

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

(A) $\dfrac{n^2-n}{2n-1}$.　　(B) $\dfrac{n^2-n}{4n-2}$.　　(C) $\dfrac{n^2-2n}{2n-1}$.

(D) $\dfrac{n^2-3n+2}{4n-2}$.　　(E) 这些都不是.

(第22届美国高中数学考试,1971年)

[解]　在前 n 行中,1的数目有$(2n-1)$个,其他数有

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-3n+2)\text{ 个}.$$

其商是

$$\frac{n^2-3n+2}{4n-2}.$$

故选(D).

11·10　考查下面数字三角形阵,其中数阵里面的每个数都是它上一行与之相邻两数字和:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 4 & & 3 & & \\
 & 4 & & 7 & & 8 & & 7 & & 4 & \\
5 & & 11 & & 15 & & 15 & & 11 & & 5 \\
\end{array}
$$

……………………………

设 $f(n)$ 为数阵第 n 行所有数字和.则 $f(100)$ 被 100 除后的余数是

(A) 12.　(B) 30.　(C) 50.　(D) 62.　(E) 74.

(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解]　将上面数阵稍作变形(两边加数字 1):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 4 & & 4 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 7 & & 8 & & 7 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 11 & & 15 & & 15 & & 11 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

……………………………………

利用数学归纳法可以证明:上面数表中行数字和 $F(n) = 2^n$.

这样　　$f(n) = F(n) - 2 = 2^n - 2.$

∴　　$f(100) = 2^{100} - 2.$

而　　$2^{100} \equiv 2^{20} \equiv 76 \pmod{100}.$

知　$f(100)$ 除以 100 后余 74.

故选(E).

11·11 设$(x+a)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.若$a_1+a_2+a_3=64$,则$\alpha$等于

(A) -4. (B) 4. (C) -2. (D) 2.

(中国陕西省初中数学竞赛,1997年)

[解] 令$x=1$,则由题设有

$$(1+\alpha)^4=1+a_1+a_2+a_3+a_4=65+a_4.$$

令 $x=0$, 则 $\alpha^4=a_4$.

$$\therefore \quad (1+\alpha)^4-\alpha^4=65.$$

由此可得 $$2\alpha+3\alpha^2+2\alpha^3-32=0,$$

即 $$(\alpha-2)(2\alpha^2+7\alpha+16)=0.$$

而 $$2\alpha^2+7\alpha+16\neq0,$$

$\therefore \quad \alpha=2$.

故选(D).

11·12 若$(3x+1)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$, 则$a-b+c-d+e-f$的值是

(A) -32. (B) 32. (C) 1024. (D) -1024.

(中国陕西省西安市初中数学竞赛,1990年)

[解] 当$x=-1$时,式右$=-a+b-c+d-e+f$,

$\therefore \quad a-b+c-d+e-f=-[3\cdot(-1)+1]^5=32$.

故选(B).

11·13 若$(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_0$,那么$a_7+a_6+\cdots+a_0$等于

(A) 0. (B) 1. (C) 64. (D) -64. (E) 128.

(第28届美国高中数学考试,1977年)

[解] 多项式$p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$的系数和$\sum_{k=0}^{n}a_k$等于$p(1)$,则

$$a_7+a_6+\cdots+a_0=(3\cdot1-1)^7=128.$$

故选(E).

11·14 设$S=(x-1)^4+4(x-1)^3+6(x-1)^2+4(x-1)+1$,则$S$等于

(A) $(x-2)^4$. (B) $(x-1)^4$. (C) x^4.

(D) $(x+1)^4$. (E) x^4+1.

（第 12 届美国高中数学考试,1961 年）

[解] 考虑二项式展开

$$(a+1)^4 = a^4+4a^3+6a^2+4a+1,$$

令 $a = x-1$, 则 $S = x^4$.

故选(C).

11·15 展开$(x-2y)^{18}$的所有项的系数之和为

(A) 0. (B) 1. (C) 19. (D) -1. (E) -19.

（第 15 届美国高中数学考试,1964 年）

[解] 因其展开式为x,y的代数式,当$x=y=1$时,即为展开式中的诸系数.因而其所有项系数和为

$$(1-2\cdot 1)^{18} = (-1)^{18} = 1.$$

故选(B).

11·16 展开$(x^2-2xy+y^2)^7$,它的系数之和为

(A) 0. (B) 7. (C) 14. (D) 128. (E) 128^2.

（第 16 届美国高中数学考试,1965 年）

[解] 由 $(x^2-2xy+y^2)^7 = [(x-y)^2]^7 = (x-y)^{14}$,在其展开式中令 $x=y=1$ 即为全部系数和.

而 $(1-1)^{14} = 0$.

故选(A).

11·17 设$(1+x+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ 为x的一恒等式,若定义 $S = a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$,则 S 等于

(A) 2^n. (B) 2^n+1. (C) $\frac{3^n-1}{2}$.

(D) $\frac{3^n}{2}$. (E) $\frac{3^n+1}{2}$.

（第 17 届美国高中数学考试,1966 年）

[解 1] 先用 $x=1$ 和 $x=-1$ 分别代入恒等式有:

$(1+1+1)^n = 3^n = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$.

$[1+(-1)+(-1)^2]^n = 1^n = a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2n-1}+a_{2n}$.

上两式两边相加有

$$3^n+1=2a_0+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{2n},$$

即
$$S=\frac{3^n+1}{2}.$$

故选(E).

[**解 2**] 因命题对任意 x 和 n 均成立,今考虑:

$n=1$ 时,$1+x+x^2=a_0+a_1x+a_2x^2$,即 $a_0=a_2=1$.

故 $a_0+a_2=2$,则(B),(C),(D)不成立.

$n=2$ 时,$(1+x+x^2)^2=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$,

知 $a_0=1$, $a_2=3$, $a_4=1$,则 $a_0+a_2+a_4=5$,

故(A)不成立.

故选(E).

11·18 式子 $\dfrac{(1+\sqrt{1991})^{100}-(1-\sqrt{1991})^{100}}{\sqrt{1991}}$ 表示的数是

(A) 自然数. (B) 整数但不是自然数.

(C) 有理数但不是整数. (D) 无理数.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[**解**] 注意到

$$(1+\sqrt{1991})^{100}-(1-\sqrt{1991})^{100}$$
$$=2[C_{100}^1(\sqrt{1991})^1+C_{100}^3(\sqrt{1991})^3+\cdots+C_{100}^{99}(\sqrt{1991})^{99}],$$

则
$$\text{原式}=2[C_{100}^1+C_{100}^3(\sqrt{1991})^2+\cdots+C_{100}^{99}(\sqrt{1991})^{98}]$$
$$=2(C_{100}^1+C_{100}^3\cdot 1991+\cdots+C_{100}^{99}\cdot 1991^{49}),$$

它是正整数,

故选(A).

11·19 找出 $(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$ 的十进制表达式中的个位数字是

(A) 0. (B) 2. (C) 5. (D) 9. (E) 非以上这些值.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[**解**] 设 $d_1=a+\sqrt{b}$, $d_2=a-\sqrt{b}$,其中 $a=15$, $b=220$.

由二项式定理,有

$$d_1{}^n=a^n+C_n^1a^{n-1}\sqrt{b}+C_n^2a^{n-2}b+C_n^3a^{n-3}b\sqrt{b}+C_n^4a^{n-4}b^2+\cdots+(\sqrt{b})^n,$$

$$d_2{}^n=a^n-C_n^1a^{n-1}\sqrt{b}+C_n^2a^{n-2}b-C_n^3a^{n-3}b\sqrt{b}+C_n^4a^{n-4}b^2+\cdots,$$

$\therefore \quad d_1{}^n + d_2{}^n = 2(a^n + C_n^2 a^{n-2} b + C_n^4 a^{n-4} b^2 + \cdots)$.

其中，n 是正整数. 又因为 a，b 都可以被5整除，所以我们断言 $d_1{}^n + d_2{}^n$ 可以被10整除.

取 $n = 19$ 和 $n = 82$，得到

$$d_1{}^{19} + d_2{}^{19} = 10k_1, \quad d_1{}^{82} + d_2{}^{82} = 10k_2,$$

其中 k_1 和 k_2 是正整数. 将两式相加，合并后有

$$d_1{}^{19} + d_1{}^{82} = 10k - (d_2{}^{19} + d_2{}^{82}), \quad 其中 \quad k = k_1 + k_2.$$

不过 $\quad d_2 = 15 - \sqrt{220} = \dfrac{5}{15 + \sqrt{220}} < \dfrac{1}{3}$，

所以

$$d_2{}^{19} + d_2{}^{82} < 1.$$

因此 $d_1{}^{19} + d_1{}^{82} = 10k - (d_2{}^{19} + d_2{}^{82})$ 的个位数字应是9.

故选(D).

第十二章 复 数

12·1 若 $S = i^n + i^{-n}$,其中 i 为虚数单位,n 为整数,那么 S 有可能相异值的数目为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 大于 4.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)

[解] 分四种情形考虑:

(1) $n = 4k$ 时, $S = i^{4k} + i^{-4k} = 2$;

(2) $n = 4k + 1$ 时, $S = i^{4k+1} + i^{-(4k+1)} = 0$;

(3) $n = 4k + 2$ 时, $S = i^{4k+2} + i^{-(4k+2)} = -2$;

(4) $n = 4k + 3$ 时, $S = i^{4k+3} + i^{-(4k+3)} = 0$.

故选(C).

12·2 若 $i^2 = -1$,那么 $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ 等于

(A) -1024. (B) $-1024i$. (C) 0.

(D) 1024. (E) $1024i$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 因为 $i^2 = -1$,有 $(1 + i)^2 = 2i$ 和 $(1 - i)^2 = -2i$.

而 $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} - [(1 - i)^2]^{10}$,

因而 $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20} = (2i)^{10} - (-2i)^{10} = 0$.

故选(C).

12·3 已知 $i^2 = -1$,能使 $(n + i)^4$ 成为整数的 n 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解] 因为 $i^2 = -1$, 故有

$$(n+i)^4=n^4-6n^2+1+i(4n^3-4n),$$

当且仅当 $4n^3-4n=0$ 时上式是实数.

解得 $n=0,1,-1$. 所以能使 $(n+i)^4$ 是实数的 n 只有三个值,并且此时 $(n+i)^4=n^4-6n^2+1$ 是一个整数.

故选 (D).

12·4　当 n 取 $1,2,\cdots,100$ 时, $\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8+1\right]^n$ 可取不同值的个数是

(A) 8 个.　　(B) 6 个.　　(C) 4 个.　　(D) 2 个.

（中国上海市高中数学竞赛,1985 年）

[解]　$\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8+1\right]^n=\left\{\left[-i\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]^8+1\right\}^n$

$$=[(-i\omega)^8+1]^n=(\omega^2+1)^n$$

$$=(-\omega)^n,$$

其中 ω 为 $1+x+x^2=0$ 的根 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

这样　$(-\omega)^n$ 当 $n=1,2,\cdots,100$ 时可取 $\pm1,\pm\omega,\pm\omega^2$ 共 6 个不同值.

故选 (B).

12·5　若 ω 是方程 $x^3=1$ 的一个虚根,那么乘积 $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$ 等于

(A) 4.　　(B) ω.　　(C) 2.　　(D) ω^2.　　(E) 1.

（第 22 届美国高中数学考试,1971 年）

[解]　将给定的方程 $x^3-1=0$ 因式分解,得到

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

其虚根 ω 满足　$\omega^2+\omega+1=0$,　且 $\omega^3=1$.

因此　$1+\omega^2=-\omega$,　$1+\omega=-\omega^2$.

$\therefore$　$(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=(-2\omega)(-2\omega^2)=4\omega^3=4$.

故选 (A).

12·6　设非零复数 x,y 满足 $x^2+xy+y^2=0$, 则代数式 $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}$ 的值是

(A) 2^{-1989}.　　(B) -1.　　(C) 1.　　(D) 以上答案都不对.

（中国高中数学联赛，1990 年）

[解]　令 $y=\omega x$，　$\omega\neq 1$，代入已知条件得 $1+\omega+\omega^2=0$. 因而 $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2)=0$，有 $\omega^3=1$.

$$\therefore\quad 原式=\frac{1}{(1+\omega)^{1990}}+\frac{\omega^{1990}}{(1+\omega)^{1990}}=\frac{1+\omega^{1990}}{(-\omega^2)^{1990}}$$

$$=\frac{1+\omega^{3\times 663+1}}{\omega^{2\times(3\times 663+1)}}=\frac{1+\omega}{\omega^2}=-1.$$

故选(B).

12·7　如果 θ 是满足下列条件的一个常数，$0<\theta<\pi$，且 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$. 那么对每一个正整数 n，　代数式 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 等于

(A) $2\cos\theta$.　　(B) $2^n\cos\theta$.　　(C) $2\cos^n\theta$.

(D) $2\cos n\theta$.　　(E) $2^n\cos^n\theta$.

（第 32 届美国高中数学考试，1981 年）

[解]　由题设 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ 则有

$$x^2-2x\cos\theta+1=0.$$

解得　$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta(=e^{\pm i\theta})$.

由德·莫弗公式 $x^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta(=e^{\pm in\theta})$，

而　$$\frac{1}{x^n}=\frac{1}{\cos n\theta\pm i\sin n\theta}=\cos n\theta\mp i\sin n\theta(=e^{\mp in\theta}),$$

则　$$x^n+\frac{1}{x^n}=(\cos n\theta\pm i\sin n\theta)+(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)$$
$$=2\cos n\theta.$$

故选(D).

12·8　设 a,b,c 均为非零复数，且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值为(其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$)

(A) 1.　　(B) $\pm\omega$.　　(C) $1,\ \omega,\ \omega^2$.　　(D) $1,\ -\omega,\ -\omega^2$.

（中国高中数学联赛，1991 年）

[解]　令 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=t$，则 $a=bt=ct^2=at^3$.

由 $a \neq 0$，知 $t^3 = 1$，因此，$t = 1, \omega, \omega^2$.

利用比例性质，知

$$\text{原式} = \frac{ct^2 + ct - c}{ct^2 - ct + c} = \frac{t^2 + t - 1}{t^2 - t + 1}$$

$$= \frac{t^3 + t^2 - t}{t \cdot (t^2 - t + 1)} = \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 - t + 1)} = \frac{1}{t}.$$

故当 $t = 1, \omega^2, \omega$ 时，原式分别取 $1, \omega, \omega^2$.

故选(C).

12·9　若 $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$，$y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$. 其中 $i^2 = -1$. 则下式中不对的式子是

(A) $x^5 + y^5 = -1$.　　(B) $x^7 + y^7 = -1$.

(C) $x^9 + y^9 = -1$.　　(D) $x^{11} + y^{11} = -1$.

(E) $x^{13} + y^{13} = -1$.

（第36届美国高中数学考试，1985年）

[解]　将题设 x, y 化为三角函数式有

$$x = \sin\frac{11\pi}{6} + i\cos\frac{11\pi}{6}, \quad y = \sin\frac{7\pi}{6} + i\cos\frac{7\pi}{6}.$$

由　$x^9 + y^9$

$$= \left(\sin\frac{99}{6}\pi + i\cos\frac{99}{6}\pi\right) + \left(\sin\frac{63}{6}\pi + i\cos\frac{63}{6}\pi\right)$$

$$= \left[\sin\left(16\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(10\frac{1}{2}\pi\right)\right] + i\left[\cos\left(16\frac{1}{2}\pi\right) + \cos\left(10\frac{1}{2}\pi\right)\right]$$

$$= 2.$$

故选(C).

12·10　若 $x = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ 其中 $i = \sqrt{-1}$，那么 $\frac{1}{x^2 - x}$ 等于

(A) -2.　(B) -1.　(C) $1 + i\sqrt{3}$.　(D) 1.　(E) 2.

（第23届美国高中数学考试，1972年）

[解]　由　$x^2 - x$

$$= \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{4}(-2-2i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$$
$$= -1,$$

因此所求 $x^2 - x$ 的倒数还是 -1.

故选(B).

12·11　若 n 为 4 的倍数,i 为虚数单位,则和 $S = 1 + 2i + 3i^2 + \cdots + (n+1)i^n$ 等于

(A) $1 + i$.　　(B) $\frac{1}{2}(n+2)$.

(C) $\frac{1}{2}(n+2-ni)$.　　(D) $\frac{1}{2}[(n+1)(1-i)+2]$.

(E) $\frac{1}{8}(n^2+8-4ni)$.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解]　考虑 $S - iS = \sum_{k=0}^{n} i^k - (n+1)i^{n+1}$,即

$$(1-i)S = \frac{1-i^{n+1}}{1-i} - (n+1)i^{n+1} = 1-(n+1)i,$$

注意 n 是 4 的倍数,故 $i^n = 1$.则

$$S = \frac{1-(n+1)i}{1-i} = \frac{1}{2}(n+2-ni).$$

故选(C).

12·12　若 $i^2 = -1$,那么和 $S = \cos 45^\circ + i\cos 135^\circ + \cdots + i^n\cos(45+90n)^\circ + \cdots + i^{40}\cos 3645^\circ$ 等于

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $-10\sqrt{2}i$.　　(C) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}(21-20i)$.　　(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}(21+20i)$.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解]　因为 $i^n\cos(45+90n)^\circ = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & n \text{ 是偶数}, \\ \frac{-i\sqrt{2}}{2}, & n \text{ 是奇数}. \end{cases}$

$$\therefore\quad S=\frac{\sqrt{2}}{2}(\underbrace{1-i+1-i+\cdots+1-i+1}_{41\text{项}})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(21-20i).$$

故选(D).

12·13 对于任意的复数 $w=a+bi$, $|w|$ 被定义为实数 $\sqrt{a^2+b^2}$. 如果 $w=\cos40°+i\sin40°$,那么

$|w+2w^2+3w^3+\cdots+9w^9|^{-1}$等于

(A) $\frac{1}{9}\sin40°$.　　(B) $\frac{2}{9}\sin20°$.　　(C) $\frac{1}{9}\cos40°$.

(D) $\frac{1}{18}\cos20°$.　　(E) 非以上的值.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解] 由题设知 $|w|=1$,且 $40°=\frac{360°}{9}$,用此 w 是一个 9 次单位根.而对于更一般的 n 次单位根,$n>1$,我们设

$$s=w+2w^2+\cdots+nw^n, \qquad ①$$

用 w 乘方程的两边,得到

$$sw=w^2+2w^3+\cdots+nw^{n+1}. \qquad ②$$

① - ② 有

$$s(1-w)=w+w^2+w^3+\cdots+w^n-nw^{n+1},$$

因为 $n>1$,所以 $w\neq1$,则　$s(1-w)=\frac{w^{n+1}-w}{w-1}-nw^{n+1}$.

而　$w^n=1$,　所以　$s(1-w)=-nw$, 则

$$\frac{1}{s}=\frac{w-1}{nw},\ \text{且}\quad \frac{1}{|s|}=\frac{|w-1|}{n}.$$

又因为 1 和 w 是单位圆上相邻的两个顶点,所以 $|w-1|$ 是单位圆中内接正 n 边形的边长,所以它的长度为 $2\sin\frac{\pi}{n}$,

即
$$|s|^{-1}=\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

因此,若 $n>1$,且 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$,

则
$$|w+2w^2+3w^3+\cdots+nw^n|^{-1}=\frac{2}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

当 $n=9$ 时，$|w+2w^2+3w^3+\cdots+9w^9|^{-1}=\frac{1}{|s|}=\frac{2}{9}\sin 20^\circ$.

故选(B).

12·14　已知复数列$\{a_n\}$的通项为

$$a_n=(1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

则 $|a_n-a_{n+1}|$ 等于

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $\sqrt{2}$.　　(C)1.　　(D) 2.

（中国江苏省苏州市高中数学竞赛，1993 年）

[解]　先证明 $|a_n|=\sqrt{n+1}$，用数学归纳法.

(1) $n=1$ 时，$|a_1|=|1+i|=\sqrt{1+1}$，结论成立.

(2) 假设 $n=k$ 时，$|a_k|=\sqrt{k+1}$ 成立. 则当 $n=k+1$ 时，

$$|a_{k+1}|=\left|a_k\cdot\left(1+\frac{i}{\sqrt{k+1}}\right)\right|=|a_k|\sqrt{1+\frac{1}{k+1}}=\sqrt{k+2}.$$

于是，对所有 $n\in N$，$|a_n|=\sqrt{n+1}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &|a_n-a_{n+1}|\\ &=\left|a_n-a_n\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right|\\ &=\left|-a_n\cdot\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right|\\ &=|a_n|\cdot\left|\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right|\\ &=\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &=1.\end{aligned}$$

故选(C).

12·15　设 z,w,λ 为复数，$|\lambda|\neq 1$，关于 z 的方程 $\bar{z}-\lambda z=w$ 有下面四个结论：

Ⅰ. $z=\frac{\bar{\lambda}w+\bar{w}}{1-|\lambda|^2}$ 是这个方程的解；

Ⅱ. 这个方程只有一个解；

Ⅲ. 这个方程有两个解；

Ⅳ. 这个方程有无穷多解.

则

(A) 只有 Ⅰ 和 Ⅱ 是正确的. (B) 只有 Ⅰ 和 Ⅲ 是正确的.

(C) 只有 Ⅰ 和 Ⅳ 是正确的. (D) 以上(A),(B),(C) 都不正确.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[解] 由 $\overline{z}-\lambda z=w$,可得

$\overline{\overline{z}-\lambda z}=\overline{w}$,即 $z-\overline{\lambda}\,\overline{z}=\overline{w}$, ①

及 $\overline{\lambda}(\overline{z}-\lambda z)=\overline{\lambda}w$, 即 $\overline{\lambda}\cdot\overline{z}-|\lambda|^2\cdot z=\overline{\lambda}w$, ②

① + ② 得 $(1-|\lambda|^2)\ z=\overline{\lambda}\cdot w+\overline{w}$.

由题设 $|\lambda|\neq 1$, 即 $1-|\lambda|^2\neq 0$.

所以 $z=\dfrac{\overline{\lambda}w+\overline{w}}{1-|\lambda|^2}$ 是方程的惟一解.

故选(A).

12·16 如果复数满足 $z+|z|=2+8i$ 则 $|z|^2$ 等于

(A) 68. (B) 100. (C) 169. (D) 208. (E) 289.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解] 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,则题设方程化为

$$r\cos\theta+ir\sin\theta+r=2+8i,$$

则

$$\begin{cases} r\cos\theta+r=2, & ①\\ r\sin\theta=8, & ② \end{cases}$$

由 ① 有 $r\cos\theta=2-r$, ③

②^2 + ③^2: $r^2=64+4-4r+r^2$, 即 $r=17$,

$\therefore\ |z|^2=r^2=17^2=289$.

故选(E).

12·17 关于复数 z 的方程 $10z^2-3iz-k=0$,其中 $i^2=-1$,下列命题中正确的是

(A) 对一切正实数 k,两个根都是纯虚数.

(B) 对一切负实数 k,两个根都是纯虚数.

(C) 对一切纯虚数 k,两个根都是有理数.

(D) 对一切纯虚数 k,两个根都是无理数.

(E) 对一切复数 k,没有一个根是实数.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解] 利用二次方程求根公式,得

选择题卷

$$z=\frac{3i\pm\sqrt{-9+40k}}{20},\quad 判别式\quad \Delta=-9+40k.$$

若 $k=1$,则 $\Delta=31$,所以(A)不对.

若 k 是一个负数,则 Δ 是一个负实数,所以(B)正确.

若 $k=i$,则 $\Delta=-9+40i=16+40i-25=(4+5i)^2$,两个根为 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i,-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$,所以(C)和(D)都不对.

若 $k=0$ 则根是 0 和 $\frac{3}{10}i$,所以(E)也不对.

因此只有(B)对.

故选(B).

12·18 令 $i=\sqrt{-1}$.则 $z^2-z=5-5i$ 的根的实部的乘积是

(A) -25. (B) -6. (C) -5. (D) $\frac{1}{4}$. (E) 25.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 由设有 $z^2-z-5+5i=0$,记其两根分别为

$$z_1=x_1+y_1i,\qquad z_2=x_2+y_2i,$$

则

$$z_1+z_2=1=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i,$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x_1+x_2=1, & ①\\ y_1+y_2=0. & ②\end{cases}$$

又 $z_1z_2=5i-5=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$,

$$\therefore\quad\begin{cases}x_1x_2-y_1y_2=-5, & ③\\ x_1y_2+x_2y_1=5. & ④\end{cases}$$

由②,④式有 $(x_1-x_2)y_2=5$, ⑤

由②,③式有 $x_1x_2+y_2^2=-5$. ⑥

又 $(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2$,

则

$$1=\frac{25}{y_2^2}-20-4y_2^2,$$

$\therefore\ 4y_2^4+21y_2^2-25=0$, 得 $y_2^2=1$(已舍负值).

由⑥有 $x_1x_2=-5-y^2=-6$.

故选(B).

12·19 若 $a\pm bi(b\neq0)$ 是方程 $x^3+qx+r=0$ 的虚根,其中 a,b,q 和 r 是实数.那么用 a,b 表示 q 为

(A) a^2+b^2.　　(B) $2a^2-b^2$.　　(C) b^2-a^2.

(D) b^2-2a^2.　　(E) b^2-3a^2.

（第23届美国高中数学考试,1972年）

[解1]　设已知方程的第三个根是s.由题设知(据韦达定理)根的和是零,即$2a+s=0$,得$s=-2a$.

又由韦达定理有

$$(a+bi)(a-bi)+(a+bi)s+(a-bi)s=q,$$

即　$$(a^2+b^2)+a(-2a)+bi(-2a)+a(-2a)-bi(-2a)$$

$$=b^2-3a^2=q.$$

故选(E).

[解2]　设$\alpha=a+bi$,则$\bar{\alpha}=a-bi$.由设有

$$\alpha^3+q\alpha+r=0,\quad 且\quad \bar{\alpha}^3+q\bar{\alpha}+r=0.$$

两式相减可有　$\alpha^3-\bar{\alpha}^3+q(\alpha-\bar{\alpha})=0$.

即有　$$-q=\frac{\alpha^3-\bar{\alpha}^3}{\alpha-\bar{\alpha}}=\alpha^2+\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2=(\alpha^2+\bar{\alpha}^2)+\alpha\bar{\alpha}$$

$$=(2a^2-2b^2)+(a^2+b^2)=3a^2-b^2.$$

故选(E).

12·20　假设$z=a+bi$是多项式方程

$$c_4z^4+ic_3z^3+c_2z^2+ic_1z+c_0=0$$

的一个解,其中c_0,c_1,c_2,c_3,a和b都是实常数,且$i^2=-1$.那么下列数中是此方程的一个解的是

(A) $-a-bi$.　　(B) $a-bi$.　　(C) $-a+bi$.

(D) $b+ai$.　　(E) 以上值都不是.

（第33届美国高中数学考试,1982年）

[解]　我们先将方程两边取共轭有

$$\overline{0}=\overline{c_4z^4+ic_3z^3+c_2z^2+ic_1z+c_0}$$

即　$$0=c_4\bar{z}^4-ic_3\bar{z}^3+c_2\bar{z}^2-ic_2\bar{z}+c_0$$

$$=c_4(-\bar{z})^4+ic_3(-\bar{z})^3+c_2(-\bar{z})^2+ic_2(-\bar{z})+c_0.$$

这就说明$-\bar{z}=-a+bi$也是原方程的根.

故选(C).

12·21　设a,b,c,d是实数.假定方程$z^4+az^3+bz^2+cz+d=$

0 的所有根都在复平面上以 $0+0i$ 为中心，半径为 1 的圆上，则这些根的倒数和一定是

(A) a.　(B) b.　(C) c.　(D) $-a$.　(E) $-b$.

（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）

［解］　由题设知方程为实系数，且其根均在单位圆上（复平面），即其四根 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$.

又实系数方程，复根以共轭方式出现，无妨设 $z_2=\bar{z}_1$，$z_4=\bar{z}_3$.

这样 $z_1=\dfrac{1}{z_2}$，$z_3=\dfrac{1}{z_4}$，这只须注意到 $\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{\bar{z}_1}=\dfrac{z_1}{z_1\bar{z}_1}=z_1$ 即可.

这即是说：若 z 是题设方程的根，则 $\dfrac{1}{z}$ 亦为题设方程的根. 这样 $d=1$，$a=c$.

由韦达定理知：

$$\begin{cases} z_1z_2z_3z_4=d, \\ z_1z_2z_3+z_2z_3z_4+z_3z_4z_1+z_4z_1z_2=-c, \end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}=\frac{z_1z_2z_3+z_2z_3z_4+z_3z_4z_1+z_4z_1z_2}{z_1z_2z_3z_4}$$

$$=\frac{-c}{d}=\frac{-c}{1}=-c=-a.$$

故选 (D).

12·22　设复平面上单位圆内接正 20 边形的 20 个顶点所对应的复数依次为 $z_1,z_2,\cdots,z_{20}$. 则复数 $z_1^{1995},z_2^{1995},\cdots,z_{20}^{1995}$ 所对应的不同的点的个数是

(A) 4.　(B) 5.　(C) 10.　(D) 20.

（中国高中数学联赛，1995 年）

［解］　设 $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$z_k=(\cos\theta+i\sin\theta)\left[\cos\frac{2(k-1)\pi}{20}+i\sin\frac{2(k-1)\pi}{20}\right],$$

$$1\leqslant k\leqslant 20.$$

由 $1995=20\times 99+15$，　得

$$z_k^{1995}=(\cos 1995\theta+i\sin 1995\theta)\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{k-1}$$

$$= (\cos 1995\theta + i\sin 1995\theta)(-i)^{k-1},\ k = 1,2,\cdots,20.$$

显然上式共有四个不同的值.

故选(*A*).

12·23　如果方程 $x^6 = -64$ 的6个根都写成 $a + bi$ 的形式,a,b 都是实数,那么实部 $a > 0$ 的那些根的乘积是

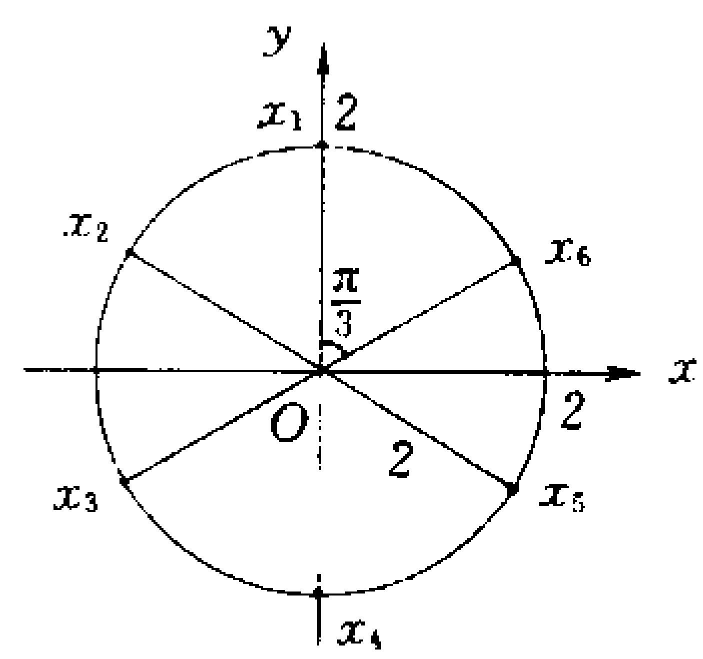
(A) -2.　(B) 0.　(C) $2i$.　(D) 4.　(E) 16.

(第41届美国高中数学考试,1990年)

[解]　由 $64 = 2^6$,则题设方程可化为　$x^6 = -2^6$,

这样其6个根均分布在半径为2,圆心在 O 点的圆上(注意其一根为 $2i$).

显然,对于复根 z_5, z_6,其实部大于0.



又　$z_5 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i,$

且　$z_6 = \sqrt{3} + i,$

则　$z_5 \cdot z_6 = (\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i) = 4.$

故选(*D*).

12·24　考虑下列各式:

(Ⅰ) $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$;　(Ⅱ) $\sqrt{a^2 + b^2} = ab$;

(Ⅲ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$;　(Ⅳ) $\sqrt{a^2 + b^2} = a - b$.

其中 a,b 表示实数或虚数,除 $a = 0$ 及 $b = 0$ 外尚有其他解的式为

(A)(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ).　(B) 仅(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ).

(C) 仅(Ⅰ),(Ⅲ),(Ⅳ).　(D) 仅(Ⅲ),(Ⅳ).

(E) 仅(Ⅰ).

(第17届美国高中数学考试,1966年)

[解]　注意到对于实数 $a > 1$ 而言,当 $b = ai,\ \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}},\ 0,\ 0$ 时,它们分别满足方程(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ).

由 a 的任意性($a > 1$),则原诸方程均有无穷多解.

故选(*A*).

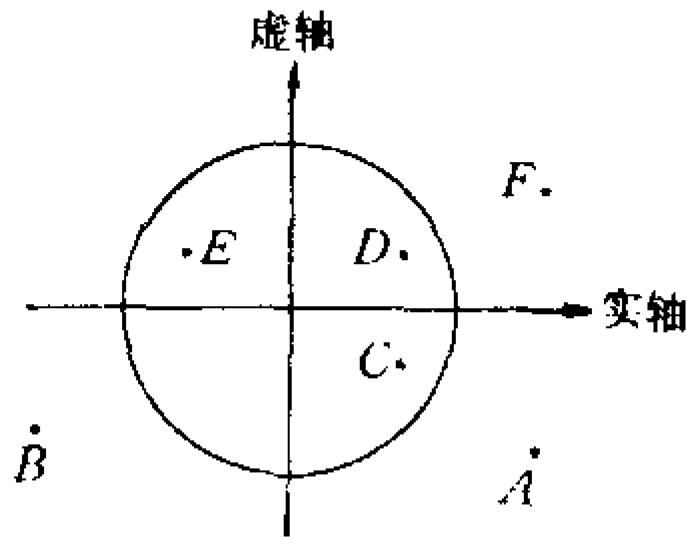
12·25　设 z 为复数,$M = \{z \mid (z-1)^2 = |z-1|^2\}$,那么

(A) $M=\{$纯虚数$\}$.　　(B) $M=\{$实数$\}$.
(C) $\{$实数$\}\subset M\subset\{$复数$\}$.　　(D) $M=\{$复数$\}$.

（中国高中数学联赛,1986年）

[解]　由$(z-1)^2=|z-1|^2=(z-1)(\bar{z}-1)$知
若$z-1=0$,则$z=1$;
若$z-1\neq 0$,则　$z-1=\bar{z}-1$,有　$z=\bar{z}$,知z为实数.
故选(B).

12·26　右图中的点表示复平面上的几个数,且此圆为单位圆,则点F的反演点是其中的



(A) A.　(B) B.　(C) C.
(D) D.　(E) E.

（第34届美国高中数学考试,1983年）

[解1]　将F写成$a+bi$.易见,$a,b>0$,且$a^2+b^2>1$.
因为　$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$,
所以这个复数的实部是正的,虚部是负的;它的模为

$$\frac{1}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+(-b)^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1.$$

则F的反演点在第四象限,且在单位圆内,那里仅有一个C点.
故选(C).

[解2]　对于任意不为零的复数z,如果$z=re^{i\theta}$,那么

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}.$$

因为F在第一象限,则它的反演点必在第四象限;又因为F的模大于1,则它的反演点的模必小于1,即在单位圆内.
故选(C).

12·27　在复平面上,四个复数分别位于一个正方形的四个顶点,其中三个复数分别是$1+2i$,$-2+i$,和$-1-2i$.那么第四个复数是
(A) $2+i$.　(B) $2-i$.　(C) $1-2i$.
(D) $-1+2i$.　(E) $-2-i$.

（第35届美国高中数学考试,1984年）

[解] 由题设知，点 $1+2i$ 和点 $-1-2i$ 是关于原点对称的，并且它们的模(即到原点的距离)都为 $\sqrt{5}$.

所以，坐标原点就是这个正方形的中心，由此得到第四个顶点是 $-2+i$ 关于原点的对称点，即 $2-i$.

故选(B).

12·28 若 A,B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角，则复数

$$z=(\cos B-\sin A)+i(\sin B-\cos A)$$

在复平面内所对应的点位于

(A) 第一象限.(B) 第二象限.(C) 第三象限.(D) 第四象限.

（中国高中数学联赛，1989 年）

[解] $\because$ $A+B>\frac{\pi}{2}$，则 $0<\frac{\pi}{2}-A<B<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ $$\cos B<\cos(\frac{\pi}{2}-A)=\sin A,$$

且 $$\sin B>\sin(\frac{\pi}{2}-A)=\cos A.$$

从而 $\cos B-\sin A<0$, $\sin B-\cos A>0$.

知 z 位于第二象限.

故选(B).

12·29 如果 S 是复平面中使 $(3+4i)z$ 为实数的点 z 组成的集合，那么 S 是一个

(A) 直角三角形. (B) 圆. (C) 双曲线.

(D) 直线. (E) 抛物线.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

[解] 设 $z=x+yi$，由设

$$(3+4i)(x+yi)=(3x-4y)+(4x+3y)i$$

为实数，则 $4x+3y=0$，它是一条直线.

故选(D).

12·30 集合 $S=\{z^{-2}\mid \arg z=\alpha,\alpha$ 为常数$\}$ 在复平面的图形是

(A) 射线 $\arg z=2\alpha$. (B) 射线 $\arg z=-2\alpha$.

(C) 射线 $\arg z=-\alpha$. (D) 上述答案都不对.

（中国高中数学联赛，1984 年）

[解] $\because$ $\arg z=\alpha$，α 为常数，由复数的幅角主值范围可得 $0\leqslant\alpha$

选择题卷

$< 2\pi$. 而 $-\alpha$, -2α 均不在$[0,2\pi)$内,故(B),(C)不对.

由已知可设 $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

故 $$\bar{z} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

且 $$z^{-2} = [r(\cos\alpha - i\sin\alpha)]^2 = r^2(\cos2\alpha - i\sin2\alpha)$$
$$= r^2[\cos(-2\alpha) + i\sin(-2\alpha)],$$

即$\bar{z}^2$的幅角不为2α,故(A)不对.所以(D)对.

事实上,集合 S 在复平面的图形,是以原点为顶点与实轴交角为 -2α 的射线,但不能写为射线 $\arg z = -2\alpha$.

故选(D).

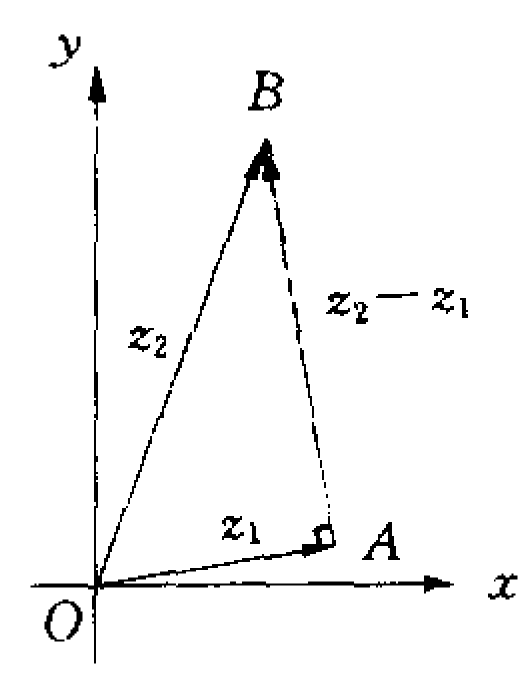
12·31 设复数 z_1, z_2 在复平面上的对应点分别为 A, B,且 $|z_1| = 4$, $4z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 = 0$, O 为坐标原点,则 $\triangle OAB$ 的面积为

(A) $8\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $12\sqrt{3}$.

(中国高中数学联赛,1992 年)

[解 1] 由题设有$(z_2 - z_1)^2 = -3z_1^2$,故 $z_2 - z_1 = \pm\sqrt{3}z_1 i$,

所以平面上等式两边复数对应的向量互相垂直,即 $OA \perp AB$.



因而 $$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|AB|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}$$
$$= 8\sqrt{3}.$$

故选(A).

[解 2] 由设有 $$z_2 = (1 \pm \sqrt{3}i)z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1$$
$$= 2(\cos60^\circ + i\sin60^\circ)z_1,$$

从而 $|OB| = 2|OA|$. 由余弦定理有 $|AB| = \sqrt{3}|OA|$.

于是 $|AB| = 4\sqrt{3}$. 则 $\triangle OAB$ 为直角三角形.

所以 $S = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = 8\sqrt{3}$.

故选(A).

12·32 设 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 + 5i$,复数 z 满足 $|z - z_1| - |z - z_2| = 5$. 则表示复数 z 的点的轨迹是

(A) 双曲线. (B) 双曲线一支.

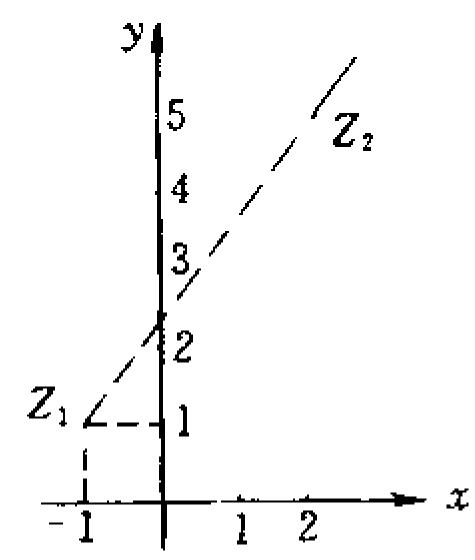
(C) 一条直线.　　　　　　　(D) 一条射线.

（中国湖北省黄冈地区高中数学竞赛，1989 年）

［解］ 因为 $|z_1 - z_2| = |-3-4i|$

$= \sqrt{3^2+4^2} = 5,$

而 $|z - z_1| - |z - z_2| = 5$



表示到 Z_1 和到 Z_2 距离差等于 5 的点集，它表示以 Z_2 为端点的射线（斜率与过 Z_1, Z_2 的直线斜率同），如图.

故选 (D).

12·33　如果 $|z| = 1$，θ 是 z 的幅角，那么当 z 变化时，$p = z^2 + 2z\cos\theta$ 在复平面上对应点的图像是

(A) 圆.　　　　　　　(B) 双曲线.

(C) 抛物线.　　　　　(D) 两条相交直线.

（中国江苏省苏州市高中数学竞赛，1990 年）

［解］ 由题设 $|z| = 1$，故设 $z = \cos\theta + i\sin\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$，

则 $p = z^2 + 2z\cos\theta = (\cos2\theta + i\sin2\theta) + 2(\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta)$

$= (\cos2\theta + 2\cos^2\theta) + i(\sin2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)$

$= (2\cos2\theta + 1) + i(2\sin2\theta),$

此为圆心在 $(-1,0)$，半径为 2 的圆.

故选 (A).

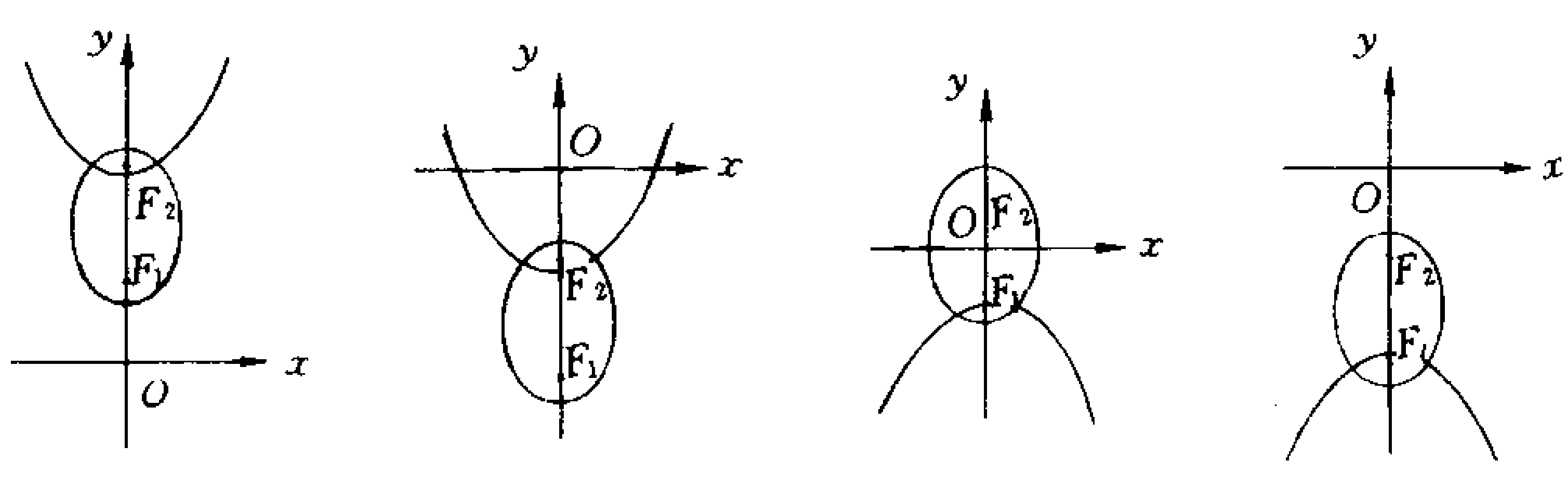
12·34　设 m, n 为非零实数，i 为虚数单位，$z \in C$，则方程

$$|z + ni| + |z - mi| = n, \quad ①$$

与

$$|z + ni| - |z - mi| = -m. \quad ②$$

在同一复平面内的图形（F_1, F_2 是焦点）是



(A)　　　(B)　　　(C)　　　(D)

（中国高中数学联赛，1993 年）

［解］ 依题意，① 表示以 $F_1(0, -n)$，$F_2(0, m)$ 为焦点的椭圆.

② 表示以 $F_1(0,-n)$，$F_2(0,m)$ 为焦点的双曲线的一支.

从 ① 知 $n>0$ 以及 $n=|z+ni|+|z-mi|\geqslant|n+m|$.

故 $m<0$；再从 ② 即得

$$|z+ni|-|z-mi|=-m<n. \qquad ③$$

于是 F_1,F_2 的位置只可能是(B)或(D).

再从 ③ 可知双曲线上的点离 F_2 较近. 故情形如(B)所示.

故选(B).

12·35　若两集合

$$M=\left\{z \mid z=\frac{t}{1+t}+i\frac{1+t}{t},\quad t\in R,\quad t\neq-1,\quad t\neq 0\right\},$$

$$N=\{z\mid z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+i\cos(\arccos t)],t\in R,|t|\leqslant 1\},$$

则 $M\cap N$ 中元素的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 4.

（中国高中数学联赛，1989 年）

[解]　在直角坐标系中，集合 M 和 N 的元素分别是曲线

$$M:\ \begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t}, \\ y=\dfrac{1+t}{t}; \end{cases} \qquad (t\in R,\quad t\neq 0,\quad t\neq -1),$$

$$N:\ \begin{cases} x=\sqrt{2(1-t^2)}, \\ y=\sqrt{2}t. \end{cases} \qquad (t\in R,\quad |t|\leqslant 1)$$

上的点. 将 M,N 的上述参数方程化为普通方程得

M: $xy=1(x\neq 1,x\neq 0)$,

N: $x^2+y^2=2\quad(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$.

于是曲线 M 和 N 交点横坐标应满足方程 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$，解得

$$x=\pm 1.$$

但 $\pm 1\notin(0,1)\cup(1,\sqrt{2})$，即有　$M\cap N=\varnothing$.

故选(A).

12·36　在复平面上，曲线 $z^4+z=1$ 与圆周 $|z|=1$ 的交点的个数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

（中国江苏省苏州市高中数学竞赛，1993 年）

[解]　由 $|z|=1$ 知 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$. 代入

$$z^3+1=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

得 $$1+\cos3\theta+i\sin3\theta=\cos\theta-i\sin\theta.$$

再由复数相等的定义得

$$1+\cos3\theta=\cos\theta,\quad \sin3\theta=-\sin\theta.$$

所以
$$\begin{aligned}1&=\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta\\&=(\cos\theta-1)^2+(-\sin\theta)^2\\&=2-2\cos\theta,\end{aligned}$$

即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,θ 等于$\frac{\pi}{3}$ 或 $2\pi-\frac{\pi}{3}$,但都不适合 $1+\cos3\theta=\cos\theta$.

所以曲线 $z^4+z=1$ 与圆周 $|z|=1$ 没有交点.

故选(A).

12·37 令 $i=\sqrt{-1}$,复数序列 $z_1=0$, $n\geqslant1$ 时, $z_{n+1}=z_n^2+i$.则在复平面内z_{111} 的模是

(A) 1. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{110}$. (E) $\sqrt{2^{55}}$.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 由设 $z_{n+1}=z_n^2+i$,则有

$z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-1+i$,

$z_4=-i$. $z_5=-1+i$, $z_6=-i$, …

所以 $2k+1\geqslant3$ 时, $z_{2k+1}=-1+i$.

因而 $$|z_{111}|=|-1+i|=\sqrt{2}.$$

故选(B).

第十三章　最大与最小(极大与极小)

第1节　代数函数中的极(最)值

13·1　下列各数中最小的正数是

(A) $10-3\sqrt{11}$.　　(B) $3\sqrt{11}-10$.

(C) $18-5\sqrt{13}$.　　(D) $51-10\sqrt{26}$.

(E) $10\sqrt{26}-51$.

(第34届美国高中数学考试,1983年)

[**解**]　注意到下面的事实:即若 $m>n>0$,则 $\sqrt{m}>\sqrt{n}>0$.

由 $10^2=100>99=(3\sqrt{11})^2$,　$18^2=324<325=(5\sqrt{13})^2$,

$51^2=2601>2600=(10\sqrt{26})^2$,

所以此五个差中,仅有(A)和(D)是正数.

又由 $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$,有 $10-3\sqrt{11}=\dfrac{1}{10+3\sqrt{11}}\approx\dfrac{1}{20}$.

而
$$51-10\sqrt{26}=\frac{1}{51+10\sqrt{26}}\approx\frac{1}{102}.$$

显然 $10-3\sqrt{11}>51-10\sqrt{26}$,

故选(D).

13·2　下列数中最大的数是

(A) 1.　　(B) $\sqrt{29}-\sqrt{21}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{3.142}$

(D) $5.1\cdot\sqrt{0.0361}$.　　(E) $\dfrac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1986年)

[解] $\because\ \sqrt{29}>5,\sqrt{21}>4,\quad\therefore\ \sqrt{29}+\sqrt{21}>9.$

故 $\sqrt{29}-\sqrt{21}=\dfrac{8}{\sqrt{29}+\sqrt{21}}<1.$

$\because\ \pi<3.142,\quad\therefore\ \dfrac{\pi}{3.142}<1.$

$\because\ \sqrt{0.0361}=0.19,\quad\therefore\ 5.1\cdot\sqrt{0.0361}<1.$

$\because\ (\sqrt{13}+\sqrt{7})^2=20+2\sqrt{91}>20+2\cdot 8=36=6^2,$

$$\therefore\quad \frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}<1,$$

故选(A).

13·3 若 a,c,d 是整数，b 是正整数，且满足 $a+b=c$，$b+c=d$，$c+d=a$. 那么，$a+b+c+d$ 的最大值是

(A) -1. (B) -5. (C) 0. (D) 1.

(中国初中数学联赛，1991年)

[解] $a+b=c$ 与 $c+d=a$ 相加，得 $a+b+c+d=a+c$.

所以 $b+d=0$，即 $b=-d$. 代入 $b+c=d$，得 $c=2d$.

所以 $$a=c+d=2d+d=3d.$$

故 $a+b+c+d=a+c=3d+2d=5d=-5b$.

因为 b 是正整数，b 的最小值为 1.

所以 $a+b+c+d$ 的最大值为 -5.

故选(B).

13·4 已知 a,b,c,d 是整数，且 $a<2b$，$b<3c$，$c<4d$. 如果 $d<100$，那么 a 的最大值是

(A) 2367. (B) 2375. (C) 2391. (D) 2399. (E) 2400.

(第40届美国高中数学考试，1989年)

[解] 由题设 a,b,c,d 是整数，则有

$$a\leqslant 2b-1,\quad b\leqslant 3c-1,\quad c\leqslant 4d-1,\quad d\leqslant 99,$$

所以 $$\begin{aligned}a&\leqslant 2(3c-1)-1\leqslant 2[3(4d-1)-1]-1\\&\leqslant 2\{3[4\cdot(99)-1]-1\}-1\end{aligned}$$

即 $a\leqslant 2367$，则 a 的最大值是 2367.

故选(A).

13·5 设 a,b,c,d 均为整数，且关于 x 的四个方程

$$(a-2b)x=1,\qquad (b-3c)x=1,$$

$$(c-4d)x=1, \qquad x+100=d,$$

的根都是正数.则 a 可能取得的最小值是

(A) 2433.　　(B) 2425.　　(C) 2401.　　(D) 2400.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1990 年）

[解]　由题设有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a-2b}>0,\\ \dfrac{1}{b-3c}>0,\\ \dfrac{1}{c-4d}>0,\\ d-100>0.\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}a-2b>0,\\ b-3c>0,\\ c-4d>0,\\ d>100.\end{cases}$$

由设 a,b,c,d 均为整数,知 d 至少为 101.

又　$c>4d\geqslant 4\cdot 101=404$,则 c 至少为 405.

而　$b>3c\geqslant 3\cdot 405=1215$,则 b 至少为 1216.

再　$a>2b\geqslant 2\cdot 1216=2432$,则 a 至少为 2433.

故选(A).

13·6　设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9$ 均为正整数,且 $x_1<x_2<\cdots<x_9$, $x_1+x_2+\cdots+x_9=220$.则当 $x_1+x_2+\cdots+x_5$ 的值最大时,x_9-x_1 的最小值是

(A) 8.　　(B) 9.　　(C) 10.　　(D) 11.

（中国初中数学联赛,1992 年）

[解 1]　(1) 先证 $x_1+x_2+\cdots+x_5\leqslant 110$.用反证法.

设 $x_1+x_2+\cdots+x_5>110$,　则 $x_6+x_7+x_8+x_9<110$,

而　$x_7\geqslant x_6+1$,　$x_8\geqslant x_7+1$,　$x_9\geqslant x_8+1$,

故

$$\begin{aligned}&x_6+(x_6+1)+(x_6+2)+(x_6+3)\\ \leqslant\ &x_6+x_7+x_8+x_9<110.\end{aligned}$$

则 $x_6<\dfrac{110-6}{4}=26$,又 x_6 为正整数,从而 $x_6\leqslant 25$.

这样　$x_5\leqslant 24$,　$x_4\leqslant 23$,　$x_3\leqslant 22$,　$x_2\leqslant 21$,　$x_1\leqslant 20$.

而

$$20+21+22+23+24=110.$$

所以　$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 110$,与前设矛盾!

(2) 若取 $x_1=20$,　$x_2=21$,　$x_3=22$,　$x_4=23$,　$x_5=24$,

则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 110$.

故当 $x_1 + x_2 + \cdots + x_5$ 取得最大值时， x_1 的最大值为20.

(3) 当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 110$ 时,若取 $x_6 = 26$， $x_7 = 27$， $x_8 = 28$， $x_9 = 29$， 则 $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 110$,满足题设.

故当 $x_1 + x_2 + \cdots + x_5$ 取得最大值时， x_9 的最小值为29.

这样当 $x_1 + x_2 + \cdots + x_5$ 取最大值时, $x_9 - x_1$ 最小值为9.

故选(B).

[解2] 由 $x_9 \geqslant x_8 + 1 \geqslant x_7 + 1 \geqslant \cdots \geqslant x_1 + 8$,则

$$x_9 - x_1 \geqslant 8.$$

若 $x_9 - x_1 = 8$,则 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 为公差是1的等差数列,其和为220,即 $9x_5 = 220$， x_5 不是整数,矛盾!故 $x_9 - x_1 \neq 8$.

从而 $x_9 - x_1 \geqslant 9$.

取 $x_1 = 20$， $x_2 = 21$， $x_3 = 22$， $x_4 = 23$， $x_5 = 24$， $x_6 = 26$， $x_7 = 27$， $x_8 = 28$， $x_9 = 29$ 时,

有 $\sum_{i=1}^{9} x_i = 220$，且 $x_9 - x_1 = 9$.

于是知 $x_9 - x_1$ 最小值为9.

故选(B).

13·7 若实数a、b、c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$,则代数式 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 的最大值是

(A) 27. (B) 18. (C) 15. (D) 12.

(中国初中数学联赛,1997年)

[解] 注意到代数式:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \\
&= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \\
&= 27 - (a + b + c)^2 \leqslant 27.
\end{aligned}$$

故选(A).

13·8 设 x 是实数, $y = |x - 1| + |x + 1|$.下列四个结论:

(Ⅰ) y 没有最小值.

(Ⅱ) 只有一个 x 使 y 取到最小值.

(Ⅲ) 有有限多个 x(不止一个) 使 y 取到最小值.

(Ⅳ) 有无穷多个 x 使 y 取到最小值.

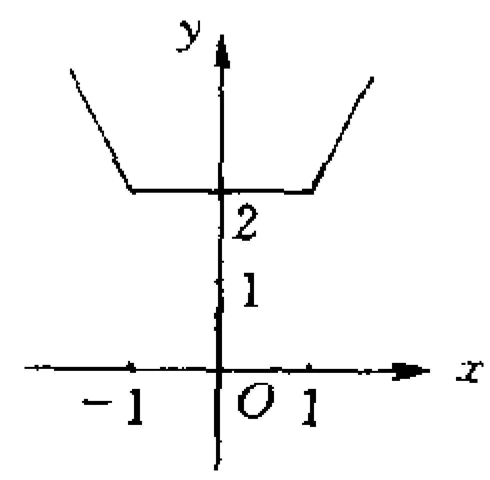
其中正确的是

(A) Ⅰ.　　(B) Ⅱ.　　(C) Ⅲ.　　(D) Ⅳ.

(中国初中数学联赛,1993 年)

[解]　注意到题设函数与下面函数等价:

$$y=\begin{cases}2, & -1<x<1;\\ -2x, & x\leqslant -1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$



显然, 2 是上面函数的最小值.同时,由上式知有无穷多个 x 使 y 取最小值 2.

故选(D).

13·9　$|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值是

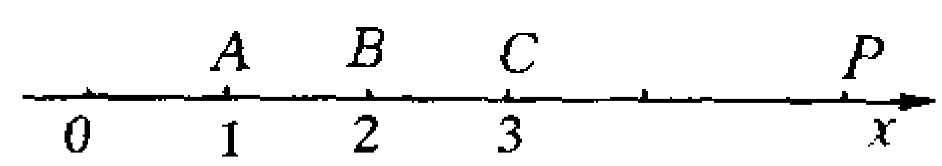
(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(中国安徽省初中数学竞赛,1996 年)

[解]　如图所示,题设

$|x-1|+|x-2|+|x-3|$

可用 $PA+PB+PC$ 代之.



易知:P 与 B 重合时,$PA+PB+PC$ 的值最小.

即 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值为 2.

故选(B).

13·10　设 $y=|x-a|+|x-15|+|x-a-15|\ (0<a<15)$.若 $a\leqslant x\leqslant 15$,则 y 的最小值为

(A) 30.　　(B) 25.　　(C) 15.　　(D) 7.5.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1990 年)

[解]　由题设知

$x-a\geqslant 0,\quad x-15\leqslant 0,\quad -15\leqslant x-a-15\leqslant -a<0.$

则　$y=(x-a)+(15-x)+(15+a-x)=30-x.$

因而　当 $x=15$ 时,　y 取最小值 15.

故选(C).

13·11　设 $f(x)=|x-2|+|x-4|-|2x-6|$,　其中 $2\leqslant x\leqslant 8$,则 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为

(A) 1.　(B) 2.　(C) 4.　(D) 6.　(E) 不是以上这些值.

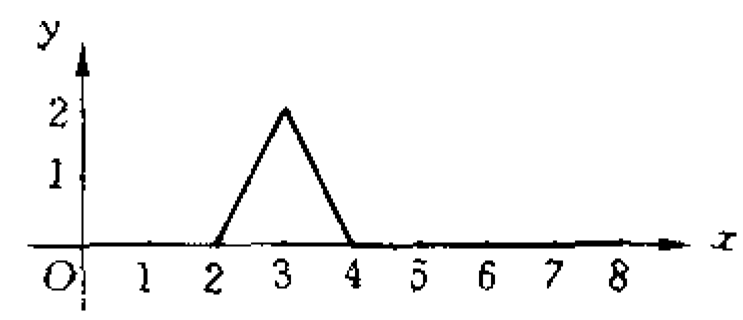
(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解]　当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$|x-2|=x-2$,$|x-4|=-(x-4)$,

$$|2x-6|=-(2x-6),$$

所以此时

$$f(x)=(x-2)-(x-4)+(2x-6)$$
$$=-4+2x,$$



同理,当 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时,

$$f(x)=(x-2)-(x-4)-(2x-6)=8-2x,$$

当 $4\leqslant x\leqslant 8$ 时,

$$f(x)=(x-2)+(x-4)-(2x-6)=0.$$

作 $f(x)$ 的图像.

很容易看出 $f(x)_{\max}=2, f(x)_{\min}=0$,其和为 2.

故选(B).

13·12　满足 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.01$ 的最小正整数 n 是

(A) 2499.　(B) 2500.　(C) 2501.

(D) 10,000.　(E) 没有这样的整数.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解]　若　$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<\frac{1}{100}$,则

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}>100.$$

注意到　$\sqrt{2500}+\sqrt{2499}<100$,

而　$\sqrt{2501}+\sqrt{2500}>100$,

则　$n=2501$ 为满足题设的最小整数 n.

故选(C).

13·13　下列各数与 $\sqrt{65}-\sqrt{63}$ 最接近的数是

(A) 0.12.　(B) 0.13.　(C) 0.14.　(D) 0.15.　(E) 0.16.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解]　由 $\sqrt{65}-\sqrt{63}=\frac{(\sqrt{65}-\sqrt{63})(\sqrt{65}+\sqrt{63})}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{65}+\sqrt{63}},$$

由　$2\sqrt{63}<\sqrt{63}+\sqrt{65}<2\sqrt{65}$,又　$\sqrt{64}=8$,

显然　$\sqrt{63}>7.5$,则　$15<\sqrt{63}+\sqrt{65}$.

又由 $a+b>2\sqrt{ab}(a>b>0)$，有 $2(a+b)>a+b+2\sqrt{ab}$，

即
$$\sqrt{2(a+b)}>\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

故
$$\sqrt{63}+\sqrt{65}<\sqrt{2(63+65)}=2\cdot 8=16,$$

因而 $15<\sqrt{63}+\sqrt{65}<16$，则
$$0.125=\frac{2}{16}<\sqrt{65}-\sqrt{63}<\frac{2}{15}=0.133\cdots,$$

故选(B).

13·14　比$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$大的最小整数是

(A) 972.　(B) 971.　(C) 970.　(D) 969.　(E) 968.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解]　因为
$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=(a^2+b^2)[(a^2+b^2)^2-3a^2b^2],$$

注意到
$$\begin{aligned}&(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6\\&=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2]\{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2]^2\\&\quad-3(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\}\\&=10\cdot(10^2-3)=970.\end{aligned}$$

而　$\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$，　故　$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6<1$.

则　比$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$大的最小整数是 970.

故选(C).

13·15　若 $a>1$，且令
$$p=\sqrt{1993a}-\sqrt{1993a-1},\qquad q=\sqrt{1993a-1}-\sqrt{1993a},$$
$$r=\sqrt{1993a}-\sqrt{1993a+1},\qquad s=\sqrt{1993a+1}-\sqrt{1993a}.$$

则 p,q,r,s 中取值最小的一个是

(A) p.　(B) q.　(C) r.　(D) s.

（中国北京市初中数学竞赛，1993 年）

[解]　由 $p-q=2\sqrt{1993a}-2\sqrt{1993a-1}>0$，知 $p>q$；

又　$r-s=2\sqrt{1993a}-2\sqrt{1993a+1}<0$，　知 $r<s$.

而　$r-q=2\sqrt{1993a}-\sqrt{1993a+1}-\sqrt{1993a-1}$，

注意到　$(2\sqrt{1993a})^2=4\cdot 1993a$，

又
$$\begin{aligned}&(\sqrt{1993a+1}+\sqrt{1993a-1})^2\\&=2\cdot 1993a+2\sqrt{(1993a)^2-1}\end{aligned}$$

$< 4 \cdot 1993a,$

则 $r - q > 0$,知 $r > q$. 这样 $p > q$, $s > r > q$,

故选(B).

13·16 若 $0 < x < 1$,则 x^2, x, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ 这四个数中

(A) $\frac{1}{x}$ 最大, x^2 最小. (B) x 最大, $\frac{1}{x}$ 最小.

(C) x^2 最大, $\sqrt{x}$ 最小. (D) x 最大, x^2 最小.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987 年)

[**解**] 由题设 $0 < x < 1$,

$\therefore \quad 0 < x^2 < 1, \quad 0 < \sqrt{x} < 1, \quad \frac{1}{x} > 1.$

又因为 $x - x^2 = x(1 - x) > 0$, 所以 $x > x^2$.

而 $\sqrt{x} - x^2 = \sqrt{x}(1 - x\sqrt{x}) > 0$, 所以 $\sqrt{x} > x^2$.

于是 $\frac{1}{x}$ 最大, x^2 最小.

故选(A).

13·17 当 a,b 是两个不相等的正数时,下列三个代数式:

甲:$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$, 乙:$\left(\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$,

丙:$\left(\frac{a + b}{2} + \frac{2}{a + b}\right)^2$

中间,值最大的一个

(A) 必定是甲. (B) 必定是乙.

(C) 必定是丙. (D) 一般并不确定,而与 a, b 的取值有关.

(中国高中数学联赛,1982 年)

[**解 1**] 先比较甲,乙两式,由题设

甲 $= \frac{1}{ab}(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1)$, 乙 $= \frac{1}{ab}(a^2b^2 + 2ab + 1)$.

由 $a^2 + b^2 > 2ab$,知甲 $>$ 乙. 再比较甲,丙两式,由

$$丙 - 甲 = \frac{(a - b)^2}{4ab(a + b)^2}[(a + b)^2(ab - 4) - 4],$$

且由于$(a + b)^2(ab - 4) - 4$ 的符号随着 a,b 与 4 的大小不同而不同. 故甲与丙谁大不确定.

故选(D).

[解2] 在解法1中,丙 - 甲的计算是比较复杂的,可用下述方法估计甲,丙:

取 $b = 1$,则 $甲 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $丙 = \left(\frac{a+1}{2} + \frac{2}{a+1}\right)^2$.

由此可见,当 a 很大时,甲 $\approx 2a$, 丙 $\approx \frac{1}{4}(a+1)^2 > \frac{1}{4}a \cdot a > 2a$.

例如取 $a = 9$,有甲 < 19,丙 > 25. 即此时丙 > 甲.

又取 $a = \frac{1}{5}$,由上式知甲 > 10,丙 $\leqslant (1+2)^2 = 9$. 即此时甲 > 丙. 因而甲与丙的大小不确定.

故选(D).

13·18 若 $a < b < c$, $x < y < z$ 时,下列四个代数式:

甲: $ax + by + cz$. 乙: $ax + bz + cy$.

丙: $bx + ay + cz$. 丁: $bx + cy + az$.

中间最大的一个

(A) 必定是甲. (B) 必定是乙. (C) 必定是丙. (D) 必定是丁.

(中国上海市初中数学竞赛,1983年;
中国福建省初中数学竞赛,1984年)

[解] 甲 - 乙 $= (b-c)y + (c-b)z = (b-c)(y-z) > 0$,

$\therefore$ 甲 > 乙;

甲 - 丙 $= (a-b)x + (b-a)y = (a-b)(x-y) > 0$,

$\therefore$ 甲 > 丙;

丙 - 丁 $= (a-c)y + (c-a)z = (a-c)(y-z) > 0$,

$\therefore$ 丙 > 丁, 即 甲 > 丁.

故选(A).

13·19 若实数 $a > b > c > 0$. 又若设 $l_1 = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$, $l_2 = \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$, $l_3 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. 则乘积 $l_1 l_2$, $l_1 l_3$, $l_2 l_3$, l_2^2, l_3^2 中最小的一个是

(A) $l_1 l_2$. (B) $l_1 l_3$. (C) $l_2 l_3$. (D) l_2^2. (E) l_3^2.

(中国北京市初中数学竞赛,1983年)

[解1] 由 $a > b > c > 0$, 知 $ab > ac > bc$, 所以

$$a^2+2ab+b^2+c^2>a^2+2ac+c^2+b^2$$
$$>a^2+b^2+2bc+c^2,$$

即 $(a+b)^2+c^2>(a+c)^2+b^2>a^2+(b+c)^2>0$,

故 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}>\sqrt{(a+c)^2+b^2}>\sqrt{a^2+(b+c)^2}>0$,

也就是 $l_3>l_1>l_2>0$,则有 $l_3{}^2>l_1l_3>l_2l_3>l_1l_2>l_2{}^2$.

故选(D).

[**解 2**] 令 $a=3$, $b=2$, $c=1$. 容易算得

$$l_1=\sqrt{20},\quad l_2=\sqrt{18},\quad l_3=\sqrt{26},$$

显然,$l_2{}^2$ 为乘积中最小者.

故选(D).

13·20 二次函数 $y=-x^2+6x-7$,当 x 取值为 $t\leqslant x\leqslant t+2$ 时,此函数的最大值为 $y_{最大}=-(t-3)^2+2$,则 t 的取值范围是

(A) $t\leqslant 0$. (B) $0\leqslant t\leqslant 3$. (C) $t\geqslant 3$. (D) 以上都不对.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1991 年)

[**解**] 由设 $y=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$,

又 $t\leqslant x\leqslant t+2$ 时, $y_{\max}=-(t-3)^2+2$.

则 y 在 $t\leqslant x\leqslant t+2$ 时为减函数.

由前式知,当 $x\geqslant 3$ 时, $y=-(x-3)^2+2$ 为减函数.

∴ $t\geqslant 3$.

故选(C).

13·21 已知方程 $3x^2-4x+k=0$ 有实根,若此方程的两根之积最大,则 k 值为

(A) $\frac{16}{9}$. (B) $\frac{16}{3}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{4}{3}$. (E) $-\frac{4}{3}$.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[**解**] 若方程两根 x_1,x_2 之一非正,则它们的积显然不是最大.又两正数和一定,其积当两数相等时最大.

由 $x_1+x_2=\frac{4}{3}$,

当 $x_1=x_2=\frac{2}{3}$ 时, $x_1x_2=\frac{4}{9}$ 为最大.

从而 $k=3x_1x_2=\frac{4}{3}$.

故选(D).

13·22 方程 $x|x|-5|x|+6=0$ 的最大根与最小根的积为

(A) -6.　(B) 3.　(C) -3.　(D) 6.　(E) -8.

（中国湖北省武汉市初中数学竞赛，1985 年）

[解] 当 $x\geqslant 0$ 时，方程化为 $x^2-5x+6=0$，解得

$$x_1=2,\quad x_2=3.$$

当 $x<0$，方程化为 $-x^2+5x+6=0$，解得

$$x_3=-1,\quad x_4=6\text{(不合前设舍之)}.$$

于是方程最大根为 3，最小根为 -1，其积得 -3.

故选(C).

13·23 已知方程$(x-19)(x-83)=p$有实根r_1和r_2（其中 p 为实数），则方程$(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的最小实根是

(A) -19.　(B) -83.　(C) 19.　(D) 83.　(E) 1.

（中国北京市高中数学竞赛，1984 年；东北三省数学邀请赛，1989 年）

[解] 由题设有$(x-19)(x-83)-p=(x-r_1)(x-r_2)$，

即
$$(x-r_1)(x-r_2)+p=(x-19)(x-83).$$

易知 19，83 为$(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 仅有的两个根.

故选(C).

13·24 如果 a 和 b 是正的实数，并且方程 $x^2+ax+2b=0$ 和 $x^2+2bx+a=0$ 都有实根，那么 $a+b$ 最小的正值是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.　(E) 6.

（第 35 届美国高中数学考试，1984 年）

[解] 由题中所给的两个方程均有实根，则判别式非负，因此有下面的不等式 $a^2-8b\geqslant 0$ 和 $4b^2-4a\geqslant 0$，

即
$$a^2\geqslant 8b \quad 和 \quad 4b^2\geqslant 4a.$$

因而
$$a^4\geqslant 64b^2\geqslant 64a.$$

因为 $a>0$，得到 $a^3\geqslant 64$，即 $a\geqslant 4$.

又因为 $b^2\geqslant a$，得到 $b\geqslant 2$.

又 $a=4$ 和 $b=2$ 也使两方程都有实根.故 $a+b$ 的最小值是 6.

故选(E).

13·25 设 $y=(x-a)^2+(x-b)^2$，其中 a，b 为常数，当 y 有极小值时，则 x 等于

(A) $\frac{a+b}{2}$.　　　　(B) $a+b$.　　　　(C) $\sqrt{ab}$.

(D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.　　　　(E) $\frac{a+b}{2ab}$.

（第 15 届美国高中数学考试,1964 年）

[解]　由题设有 $y=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2$.

故　$x=\frac{a+b}{2}$ 时，　函数 y 有极小值.

故选(A).

13·26　已知 $|y|\leqslant 1$,且 $2x+y=1$,则 $2x^2+16x+3y^2$ 的最小值是

(A)19/7.　　(B)3.　　(C)27/7.　　(D)13.

（中国山西省太原市初中数学竞赛,1997 年）

[解]　由设知 $-1\leqslant y\leqslant 1$, 又 $2x+y=1$,从而 $0\leqslant x\leqslant 1$.

又　$$2x^2+16x+3y^2=2x^2+16x+3(1-2x)^2=14x^2+4x+3,$$

知　$z=14x^2+4x+3$ 是以 $x=-\frac{1}{7}$ 为对称轴开口向上的抛物线,在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 区间其最小值是 3.

故选(B).

13·27　若 $x^2+y^2=14x+6y+6$,则 $3x+4y$ 的最大值是

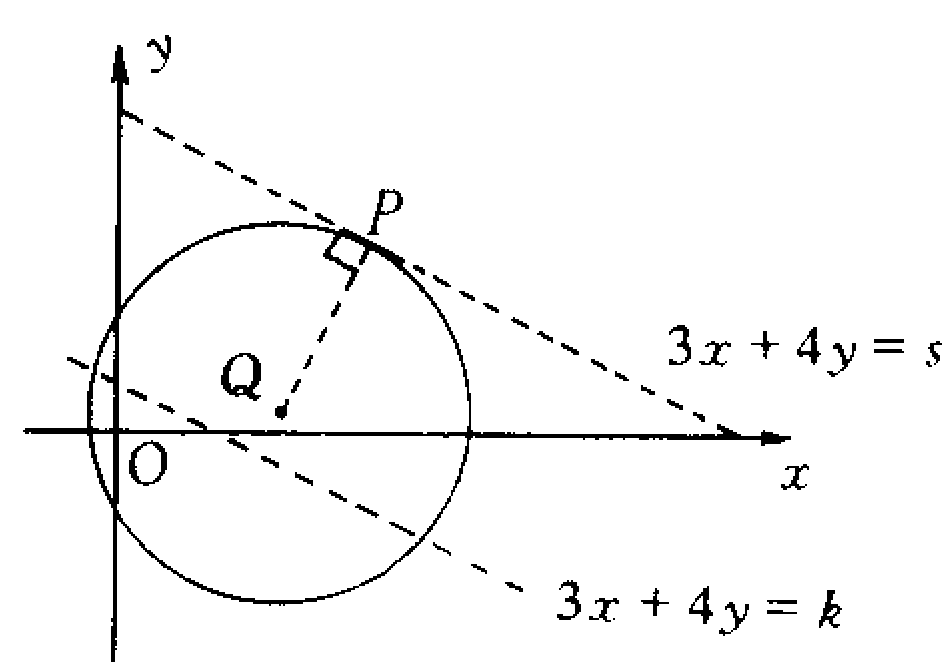
(A)72.　　(B)73.　　(C)74.　　(D)75.　　(E)76.

（第 47 届美国高中数学考试,1996 年）

[解]　$x^2+y^2=14x+6y+6$ 可化为

$$(x-7)^2+(y-3)^2=8^2.$$

它是一个圆心在 $Q(7,3)$ 半径为 8 的圆.



$3x+4y=k$ 的方向如图所示,显然在已知圆内求 $3x+4y$ 的极大值,系与 $\odot Q$ 相切的直线切点 P 处(直线 $3x+4y=k$ 向右上方移动时,k 值增大)实现.

而 P 点坐标亦可由求 PQ(与切线垂直)与 $\odot P$ 交点求得:

选择题卷

$$\begin{cases} y-3=\frac{4}{3}(x-7), & (1)\\ (x-7)^2+(y-3)^2=8^2 & (2)\end{cases}$$

得 $x=11\frac{4}{5}$，$y=9\frac{2}{5}$，此时$(3x+4y)_{\max}=73$.

故选(B).

13·28　若实数 x，y 满足条件 $2x^2-6x+y^2=0$，则 x^2+y^2+2x 的最大值是

(A) 14.　　(B) 15.　　(C) 16.　　(D) 无法确定.

（中国江苏省初中数学竞赛，1991 年）

[解]　由设有　$y^2=-2x^2+6x$，　故有

$x^2+y^2+2x=x^2-2x^2+6x+2x=-(x-4)^2+16$.

又　$y^2\geqslant 0$，　有 $-2x^2+6x\geqslant 0$，　解得　$0\leqslant x\leqslant 3$.

则　$(x^2+y^2+2x)_{\max}=-(3-4)^2+16=15$.

故选(B).

13·29　已知 x_1，x_2 是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0（k \text{ 为实数}）$$

的两个实数根. ${x_1}^2+{x_2}^2$ 的最大值是

(A) 19.　　(B) 18.　　(C) $5\frac{5}{9}$.　　(D) 不存在.

（中国高中数学联赛，1982 年）

[解]　由韦达定理得

$$\begin{aligned}{x_1}^2+{x_2}^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)\\&=-(k+5)^2+19,\end{aligned}$$

又因为方程有两个实根，故

$$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant 0,$$

即　　$3k^2+16k+16\leqslant 0$.　　得　　$-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$.

由前式可知，在此范围内，使 ${x_1}^2+{x_2}^2$ 取得最大值的 $k=-4$，此时

$${x_1}^2+{x_2}^2=18.$$

故选(B).

13·30　函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+35$ 的最小值是

(A) $33\frac{7}{8}$.　(B) 34.　(C) $34\frac{1}{16}$.　(D) 35.　(E) 59.

（中国江苏省徐州市初中数学竞赛，1985 年）

[解 1]　由设 $f(x)=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+35$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+35,$$

若令 $x^2+5x+4=t$，　则上式可化为

$$\varphi(t)=t(t+2)+35=t^2+2t+35.$$

因此　$\varphi(t)_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4\cdot 35\cdot 1-2^2}{4}=34.$

当 $t=-\dfrac{b}{2a}=-1$ 时，知　$x^2+5x+4=-1$,

即　$x^2+5x+5=0$ 有实根.

所以　$f(x)_{\min}=34.$

故选(B).

[解 2]　$f(x)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+35$

$$=(x^2+5x+4)[(x^2+5x+4)+2]+35$$
$$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+1+34$$
$$=(x^2+5x+5)^2+34,$$

由　$(x^2+5x+5)^2\geqslant 0$，　则　$f(x)_{\min}=34.$

故选(B).

13·31　函数 $y=-x-\dfrac{9}{x}+18(x>0)$ 的最大值是

(A) 24.　(B) 18.　(C) 12.　(D) 2.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1991 年）

[解]　由设 $y=-(x+\dfrac{9}{x})+18$，　$x>0$.

而　$x>0$ 时，　$x+\dfrac{9}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{9}{x}}=6.$

则　$y\leqslant -6+18=12$.　即　$y_{\max}=12$　($x>0$ 时).

故选(C).

13·32　函数 $y=\dfrac{3x^2+3x+4}{x^2+x+1}$ 的最大值是

(A) $4\frac{1}{3}$.　(B) 4.　(C) $3\frac{3}{4}$.　(D) 3.

（中国山东省初中数学竞赛，1993 年）

[解] 由题设有 $y=3+\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

$\because\ (x^2+x+1)_{\min}=(-\dfrac{1}{2})^2+(-\dfrac{1}{2})+1=\dfrac{3}{4}$,

$\therefore\ y_{\max}=3+\dfrac{4}{3}=4\dfrac{1}{3}$.

故选(A).

13·33 如果在区间〔1,2〕上,函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ 在同一点取相同的最小值,那么,$f(x)$ 在该区间上的最大值是

(A)$4+\dfrac{11}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.　　(B)$4-\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

(C)$1-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.　　(D) 以上答案都不对.

(中国高中数学联赛,1996 年)

[解] 今考虑在区间〔1,2〕上,

$$g(x)=x+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

$\because\ f(x)$ 与 $g(x)$ 在同一点上取相等的最小值,

$\therefore\qquad -\dfrac{p}{2}=\sqrt[3]{2},\quad \dfrac{4q-p^2}{4}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

当 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{x_2}$, 即 $x=\sqrt[3]{2}\in[1,2]$ 时,

$$g(x)_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$$

解得 $\qquad p=-2\sqrt[3]{2},\quad q=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

于是 $\qquad f(x)=x^2-2\sqrt[3]{2}x+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

由于 $\qquad \sqrt[3]{2}-1<2-\sqrt[3]{2}$,

$\therefore\qquad f(x)_{\max}=f(2)=4-\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

故选(B).

13·34 对于 $-4<x<1$,式子$\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$

(A) 没有极大或极小值.　　(B) 有极小值 1.

(C) 有极大值 1. (D) 有极小值 -1.

(E) 有极大值 -1.

（第 9 届美国高中数学考试,1958 年）

[解] 式子变形为$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{1}{2}(x-1+\frac{1}{x-1})$.

因 $-4<x<1$, 有 $-5<x-1<0$.

令 $t=x-1$,则 $t+\frac{1}{t}$.

当 $t=\frac{1}{t}$, 即 $t^2=1$ 时有极大值.

故 $-5<t<0$, 因而 $t=-1$ 时原式有极大值 -1.

故选(E).

注 类似的问题如

对 $x\geqslant 0$,代数式$\frac{4x^2+8x+13}{6(1+x)}$的最小值为

(A) 1. (B) 2. (C) $\frac{25}{12}$. (D) $\frac{13}{6}$. (E) $\frac{34}{5}$.

（第 16 届美国高中数学考试,1965 年）

[解] 令 $y=\frac{4x^2+8x+13}{6(1+x)}=\frac{4(x+1)^2+9}{6(1+x)}$, $x\geqslant 0$.

再设 $x+1=t$, 则 $y=\frac{4t^2+9}{6t}$, $t\geqslant 1$.

即
$$4t^2-6ty+9=0.$$

因 t 为实数,故 $\Delta=36y^2-4\cdot 4\cdot 9\geqslant 0$, 即 $y^2-4\geqslant 0$.

得 $y\geqslant 2$ 或 $y\leqslant -2$ ($x\geqslant 0$ 时, $y\geqslant 0$,故不合题设).

由 $y\geqslant 2$,知 y 最小值为 2, 得 $t=\frac{3}{2}$, 或 $x=\frac{1}{2}$.

故选(B).

13·35 对于每个正数 x,设

$$f(x)=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})},$$

则 $f(x)$ 的极小值是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 6.

（第 30 届美国高中数学考试,1979 年）

[解]　注意到$[x^3+\frac{1}{x^3}]^2=x^6+2+\frac{1}{x^6}$，　因而

$$f(x)=\frac{[(x+\frac{1}{x})^3]^2-[x^3+\frac{1}{x^3}]^2}{(x+\frac{1}{x})^3+(x^3+\frac{1}{x^3})}$$

$$=(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})=3(x+\frac{1}{x}),$$

因为　$0\leqslant(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2=x+\frac{1}{x}-2$,　即　$2\leqslant x+\frac{1}{x}$,

所以,当 $x=1$ 时,$f(x)=3(x+\frac{1}{x})$ 有极小值 6.

故选(E).

13·36　对实数 x,函数

$$f(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$$

的最大值是

(A) $\sqrt{7}-1$.（B) 3.（C) $2\sqrt{3}$.（D) 4.（E) $\sqrt{55}-\sqrt{5}$.

（第 44 届美国高中数学考试,1993 年）

[解]　因为 $f(x)=\sqrt{(8-x)x}-\sqrt{(8-x)(x-6)}$,当且仅当 $6\leqslant x\leqslant 8$ 时是实数,又

$$f(x)=\sqrt{8-x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})$$

$$=\sqrt{8-x}\cdot\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})(\sqrt{x}+\sqrt{x-6})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

$$=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

对所有的 $6\leqslant x\leqslant 8$ 成立.

当 $x=6$ 时,上式最后的表达式的分子最大,而分母最小.

因此,分式值最大,为　$f(6)=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$.

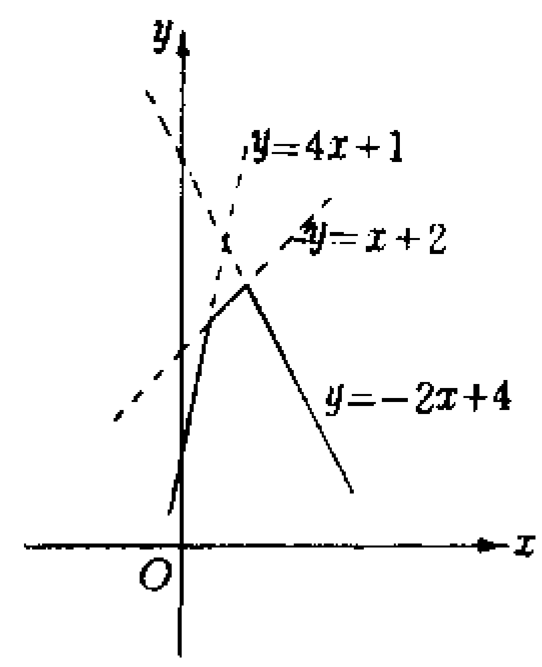
故选(C).

13·37　对于每个实数 x,设 $f(x)$ 是 $4x+1$,$x+2$ 和 $-2x+4$ 三个函数中的最小值.那么 $f(x)$ 的最大值是

(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{5}{2}$.　(E) $\frac{8}{3}$.

（第 31 届美国高中数学考试,1980 年）

[解]　在如图中,给出了 $y=4x+1$, $y=x+2$ 和 $y=-2x+4$ 的图像,其中实线表示函数 f 的图像.



显然,直线 $y=x+2$ 和 $y=-2x+4$ 的交点是该函数的最大值,即

$$x=\frac{2}{3},\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}.$$

故选(E).

13·38　设 x,y 和 z 是三个正实数,它们的和是1,如果它们之中没有一个数大于其余数的两倍,那么乘积 xyz 的最小值是

(A) $\frac{1}{32}$.　(B) $\frac{1}{36}$.　(C) $\frac{4}{125}$.　(D) $\frac{1}{127}$.　(E) 非以上这些值.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解]　设 $m=x_0y_0z_0$ 是它们乘积的最小值,不妨设

$$x_0\leqslant y_0\leqslant z_0.$$

又设 $x_1=x_0-h$, $z_1=z_0+h$,其中 $h>0$,且充分小,以使 $z_1\leqslant 2x_1$,于是 x_1,y_0,z_1 仍满足题中原来的约束条件,因此有

$$\begin{aligned}x_1y_0z_1&=(x_0-h)y_0(z_0+h)\\&=x_0y_0z_0+y_0[h(x_0-z_0)-h^2]\\&<x_0y_0z_0,\end{aligned}$$

这是因为　$x_0-z_0\leqslant 0$, $-h^2<0$,

所以

$$y_0[h(x_0-z_0)-h^2]<0.$$

由 $x_0y_0z_0$ 最小,则上式不成立,因此 $z_0=2x_0$.

由约束条件 $y_0=1-x_0-z_0=1-3x_0$,所以 $m=2x_0^2(1-3x_0)$.

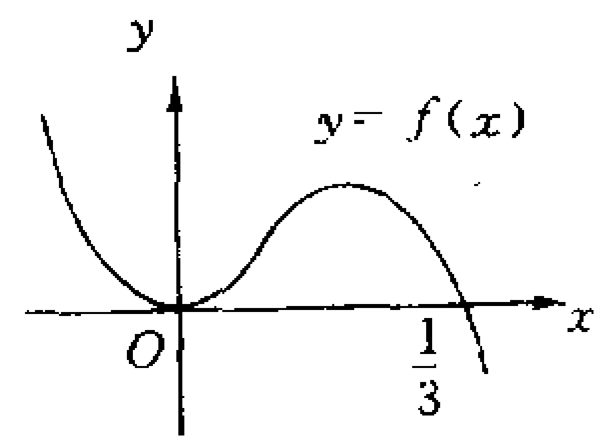
又由　$x_0\leqslant 1-3x_0\leqslant 2x_0$,有　$\frac{1}{5}\leqslant x_0\leqslant\frac{1}{4}$.

因此,m 可以看做是函数 $f(x)=2x^2(1-3x)$ 在区间

$$D=\{x\mid\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\}$$

上的值.

事实上,m 就是函数 f 在 D 上的最小值,因为任取 $x\in D$,取 $y=1-3x$, $z=2x$,这样得到的 x,y,z,即可满足原题的约束条件,又得到了 $f(x)=xyz$.



为了找到 $f(x)$ 在 D 的最小值,作函数 $f(x)$ 图像(如图).

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 有一个极小值(由 $f(x)=2x^2(1-3x)$ 可以看出 $f(x)$ 在 $x<\frac{1}{3}$ 处,与 x^2 同号,即为正或零,而当 $x=0$ 时,$f(x)=0$),而三次曲线最多只能有一个极小值,因为若函数 $f(x)$ 在两个零点之间还有一个极小值,比方说在 $x=a$ 处取得这个极小值,那么方程 $f(x)=f(a)$ 将至少有 4 个根.这是不可能的,因一元三次方程最多只有三个根.

所以函数 $f(x)$ 在 D 上的最小值一定在两个端点处取得,事实上

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{32}\leqslant f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{125}.$$

故选(A).

13·39　对于一切实数 x,y 和 z,则满足

$$(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant n(x^4+y^4+z^4).$$

的最小整数 n 是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 6.　(E) 无此整数 n.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解]　设 $a=x^2,\quad b=y^2,\quad c=z^2$,那么

$$0\leqslant(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

即

$$ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2,$$

或

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leqslant 1,$$

不等式两边乘 2 加 1 有

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\leqslant 3,$$

即

$$(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2).$$

所以

$$n\leqslant 3.$$

选　$a=b=c>0$,　由设　$(3a)^2\leqslant n\cdot 3a^2$,　则　$n\geqslant 3$.

故选(B).

13·40　有 n 个有色球,其中有红的与黑的,在 50 个球中有 49 个是红的,以后,每 8 个球中有 7 个是红的.若所有球中有不少于 90% 是

红的，则 n 的极大值是

(A) 225.　(B) 210.　(C) 200.　(D) 180.　(E) 175.

（第 14 届美国高中数学考试，1963 年）

[解]　由设可有不等式

$$\frac{49+\frac{7}{8}(n-50)}{n}\geqslant\frac{9}{10},$$

解得　$n\leqslant 210$.

故选 (B).

13·41　水池装有编号为 ①，②，③，④，⑤ 的 5 条水管，其中有些是进水管，有些是出水管，如果同时开放两条水管，注满水池的时间如下表：

开放水管号	①②	②③	③④	④⑤	⑤①
注满水池的时间(时)	2	15	6	3	10

那么单开一条水管，最快注满水池的水池编号为

(A) ①.　(B) ②.　(C) ④.　(D) ③ 或 ⑤.

（中国初中数学联赛，1989 年）

[解]　设编号为 i 的水管每小时的流量为 Q_i（$i=1,2,3,4,5$；$Q_i<0$ 表示出水），由所列表相邻两栏比较可得：

$$Q_1>Q_3,\quad Q_2<Q_4,\quad Q_3<Q_5,\quad Q_4>Q_1,\quad Q_5<Q_2,$$

即　$$Q_4>Q_2>Q_5>Q_3,\quad Q_4>Q_1>Q_3.$$

同时，易知 Q_i 中必有为正的，其中 Q_4 最大，因而单开编号为 ④ 的水管，注满水池所需的时间最短.

故选 (C).

第 2 节　指数与对数函数中的极(最)值

13·42　下列数中最大的一个是

(A) $\sqrt{\sqrt[3]{5\cdot 6}}$.　(B) $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$.　(C) $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$.

(D) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$.　　　　(E) $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$.

（第 41 届美国高中数学考试，1990 年）

[解]　显然　$\sqrt{6\sqrt[3]{5}} > \sqrt{5\sqrt[3]{6}} > \sqrt{\sqrt[3]{5\cdot 6}}$.

又　$\sqrt[3]{6\sqrt{5}} > \sqrt[3]{5\sqrt{6}}$,

且　$\sqrt{6\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{6^3\cdot 5}} = \sqrt[6]{6^3\cdot 5}, \sqrt[3]{6\sqrt{5}}$

$= \sqrt[3]{\sqrt{6^2\cdot 5}} = \sqrt[6]{6^2\cdot 5}$,

$\therefore$　$\sqrt{6\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{6\sqrt{5}}$，即$(B)$最大，

故选(B).

13·43　在$2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{8}}, 9^{\frac{1}{9}}$中，最大的和次大的数按顺序为

(A) $3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}$.　　(B) $3^{\frac{1}{3}}, 8^{\frac{1}{8}}$.　　(C) $3^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{9}}$.

(D) $8^{\frac{1}{8}}, 9^{\frac{1}{9}}$.　　(E) 这些都不对.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

[解]　首先注意　$(2^{\frac{1}{2}})^6 = 8 < (3^{\frac{1}{3}})^6 = 9$,　所以　$2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$.

同时　$(2^{\frac{1}{2}})^{18} = 2^9 = 512 > (9^{\frac{1}{9}})^{18} = 81$,　所以　$2^{\frac{1}{2}} > 9^{\frac{1}{9}}$.

并且　$2^{\frac{1}{2}} > 8^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{3}{8}}$.

因此$3^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}$依次是这些数中最大和次最大的数.

故选(A).

13·44　能使乘积$2^{\frac{1}{7}}\cdot 2^{\frac{3}{7}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$大于 1000 的最小正奇整数 n 是（在乘积中，指数的分母都是 7，分子是从 1 到 $2n+1$ 的连续奇整数.）

(A) 7.　　(B) 9.　　(C) 11.　　(D) 17.　　(E) 19.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解]　因为$2^{\frac{1}{7}}\cdot 2^{\frac{3}{7}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{2n+1}{7}} = 2^{\frac{(n+1)^2}{7}}$，且$2^{10} = 1024$. 我们考虑 n 的值能使$\frac{(n+1)^2}{7}$接近于 10.

由　$\frac{(7+1)^2}{7} = 9\frac{1}{7} < 10 < \frac{(8+1)^2}{7} = 11\frac{4}{7}$,

且 $2^{\frac{(7+1)^2}{7}} = 2^{9+\frac{1}{7}} < 2^9 \cdot 2^{\frac{1}{2}} < 1000$,

则 8 是满足题设的最小整数,但题目要求奇数,

因而 $n = 9$.

故选(B).

13·45 已知 $\log_2 a + \log_2 b \geqslant 6$,那么 $a + b$ 的最小值是

(A) $2\sqrt{6}$.　(B) 6.　(C) $8\sqrt{2}$.

(D) 16.　(E) 非上述答案.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解] 由题设有 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \geqslant 6$,则 $ab \geqslant 2^6$.

故 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \geqslant 2 \cdot 2^3 = 2^4$.

则
$$(a + b)_{\min} = 16.$$

故选(D).

13·46 若 x 是正数,且 $\lg x \geqslant \lg 2 + \frac{1}{2}\lg x$,则

(A) x 没有极大或极小值.　(B) x 的极大值是 1.

(C) x 的极小值是 1.　(D) x 的极大值是 4.

(E) x 的极小值是 4.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解] 由题设有 $\lg x - \frac{1}{2}\lg x \geqslant \lg 2 (x > 0)$,即

$$\lg \frac{x}{\sqrt{x}} \geqslant \lg 2, \quad 或 \quad \lg \sqrt{x} \geqslant \lg 2.$$

则 $\sqrt{x} \geqslant 2$, 得 $x \geqslant 4$.

故选(E).

13·47 设 x, y 是正整数,且 $x < y$. 又 $\lg x$ 的首数为 a,尾数为 α; $\lg y$ 的首数为 b,尾数为 β,其满足条件 $a^2 + b^2 = 5, \alpha + \beta = 1$. 则 x 的最大值是

(A) 50.　(B) 80.　(C) 100.　(D) 200.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1990 年)

[解 1] $\because$ a, b 为整数,又 $a^2 + b^2 = 5$,

由 $x < y$ 可推出 $a \leqslant b$. 故有 $a = 1$, $b = 2$.

则
$$x \cdot y = 10^{a+\alpha} \cdot 10^{b+\beta} = 10^{a+\alpha+b+\beta} = 10^4.$$

又 $x < y$，易得 $x_{max} = 80$，$y_{min} = 125$.

故选(B).

[解 2] $\because$ $\lg x = a + \alpha$，$\lg y = b + \beta$，

$\therefore$ $\lg xy = (a + b) + (\alpha + \beta) = (a + b) + 1$，

又 $\because$ $x, y \in N$，$\therefore$ $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$，且 $x < y$.

$\therefore$ $a = 1, b = 2$. 知 x 为两位数.

又 $xy = 10^4$，则 x 应为 10^4 约数中最大的两位约数，即 $x_{max} = 80$. 从而 $y_{min} = 125$.

故选(B).

13·48 假设在一年的年底，一个单位的钱比该年初贬值了 10%，找出最小的整数 n，使得 n 年之后一个单位的钱至少贬值了 90%. n 为（lg3 精确到小数点后三位的值是 0.477）

(A) 14.　(B) 16.　(C) 18.　(D) 20.　(E) 22.

（第 32 届美国高中数学考试，1981 年）

[解] 设 A 表示一个单位的钱在开始时的价值，则 $0.9A$ 表示一年之后它的价值，而$(0.9)^n A$ 表示 n 年之后它的价值. 我们只须寻找最小的正整数 n，使

$$(0.9)^n A \leqslant 0.1A, \quad \text{即} \quad \left(\frac{9}{10}\right)^n \leqslant \frac{1}{10}.$$

因而
$$\lg\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqslant \lg\frac{1}{10},$$
即
$$n(2\lg 3 - 1) \leqslant -1.$$

$$\therefore \quad n \geqslant \frac{1}{1 - 2\lg 3} \approx 21.7.$$

故选(E).

第 3 节　三角函数中的极(最)值

13·49 当 $\sin\frac{A}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{A}{2}$ 有极小值时，A 的值为

(A) $-180°$.　(B) $60°$.　(C) $120°$.

(D) $0°$.　(E) 这些都不对.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

[解]　注意到　$\sin\frac{A}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$=2(\cos 60^\circ\sin\frac{A}{2}-\sin 60^\circ\cos\frac{A}{2})$$

$$=2\sin(\frac{A}{2}-60^\circ),$$

我们看到最后的式子成极小值的条件是 $\sin(\frac{A}{2}-60^\circ)=-1$,

或 $\frac{A}{2}-60^\circ=270^\circ+k\cdot 360^\circ,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$

即　$A=660^\circ+k\cdot 720^\circ,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

(A)到(D)中没有一个满足上式.

故选(E).

13·50　函数 $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ 的

(A) 最大值是 3.　　　　(B) 最大值不小于$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

(C) 最大值是$\sqrt{3}$.　　　　(D) 最小值是 1.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解 1]　由 $\sin x\leqslant 1$,且 $\sin x,\sin 2x,\sin 3x$ 不同时为 1,故(A)不真.

又当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=1+\sqrt{2}>\sqrt{3}>1,$$

知(C)不真.

又当 $x=0$ 时,$f(0)=0$,知(D)不真.

故选(B).

[解 2]　当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}>\frac{3+\sqrt{2}}{2}$,

故选(B).

13·51　函数 $f(x)=a\sin x+b$ 的最大值是 1,最小值是 -7,则 $b\sin^2 x-a\cos^2 x$ 的最 大值是(a,b 为常数)

(A) 5 或 4.　(B) 4 或 -5.　(C) 4 或 -3.　(D) 5 或 -3.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　由题设，若 $a>0$ 有 $b-a\leqslant a\sin x+b\leqslant a+b$ 知

$$\begin{cases}b+a=1,\\b-a=-7.\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a=4,\\b=-3.\end{cases}$$

若 $a<0$ 有　$b+a\leqslant a\sin x+b\leqslant b-a$ 知

$$\begin{cases}b-a=1,\\b+a=-7.\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a=-4,\\b=-3.\end{cases}$$

令 $g(x)=b\sin^2x-a\cos^2x$，则当 $a=4$，　$b=-3$ 时，

$$g(x)=-3\sin^2x-4\cos^2x=-3-\cos^2x\leqslant-3,$$

则
$$g(x)_{\max}=-3.$$

当　$a=-4$，　$b=-3$ 时，

$$g(x)=-3\sin^2x+4\cos^2x=4-7\sin^2x\leqslant4,$$

则
$$g(x)_{\max}=4.$$

故选(C).

13·52　函数 $f(x)=(1+\sec x)\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

(A) 有最小值，没有最大值.　　(B) 有最大值，没有最小值.

(C) 有最小值和最大值.　　(D) 没有最小值和最大值.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　注意到

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{\cos x}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+1}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{2}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

又 $0\leqslant\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\leqslant\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,

所以　$f(x)\geqslant8$. 则 $f_{\min}(x)=8$，但 $f(x)$ 无最大值.

故选(A).

注 原命题无区间限制,这时

由 $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{(1+\cos x)^2}{\cos x(1-\cos x)}$,

当 $x>\dfrac{\pi}{2}, x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)\to-\infty$,

当 $x<\dfrac{\pi}{2}, x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)\to+\infty$,

故 $f(x)$ 既无最大值,又无最小值.

13·53 设$0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则 $\cos^2\alpha\sin\beta+\dfrac{1}{\sin\beta}$ 的最小值是

(A) 0. (B) 1. (C) 0.7. (D) 不存在.

(东北三省数学邀请赛,1989 年)

[解] 由题设知 $0\leqslant\cos\alpha\leqslant1$, $0<\sin\beta\leqslant1$ ($\because$ $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$),

$\therefore$
$$(\cos\alpha)_{\min}=0,$$

但 $\cos\alpha=0$ 时,原函数式化为$\dfrac{1}{\sin\beta}$, 其最小值为 1;

而 $\cos\alpha\neq0$ 时,由 $\dfrac{1}{\sin\beta}\geqslant1$, 且 $\cos^2\alpha\sin\beta>0$,

知
$$\cos^2\alpha\sin\beta+\frac{1}{\sin\beta}>1.$$

$\therefore$
$$\left(\cos^2\alpha\sin\beta+\frac{1}{\sin\beta}\right)_{\min}=1.$$

故选(B).

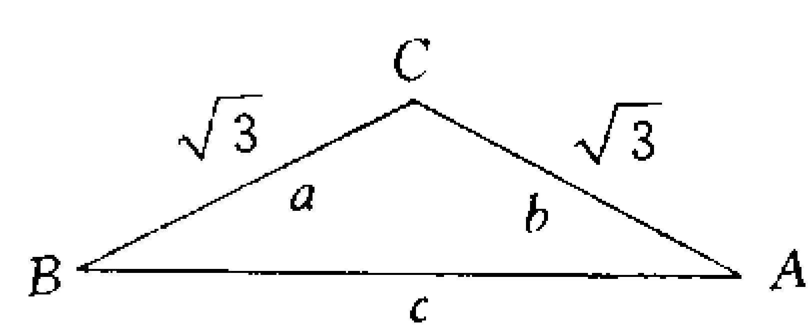
13·54 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{3}, AC=\sqrt{3}, AB>3$, 设 x 为使 $\angle C$ 的度数能够超过的最大数,则 x 等于

(A) 150. (B) 120. (C) 105. (D) 90. (E) 60.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解] 由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,或

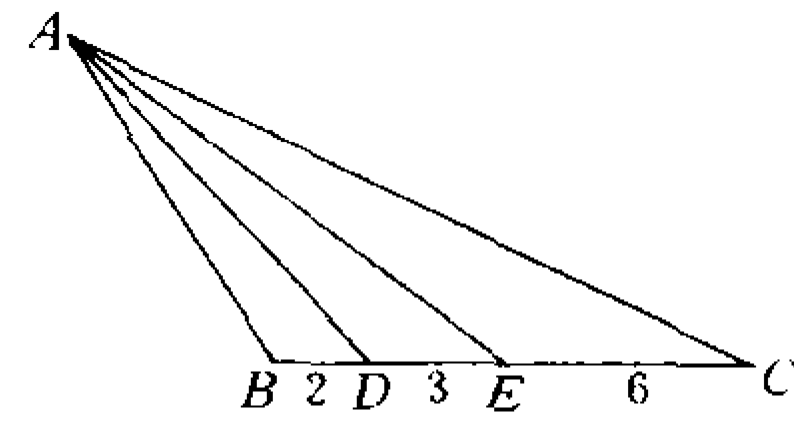
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{3+3-c^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6-c^2}{6},$$



这里 $c^2>9$， 故 $\cos C<-\frac{1}{2}$， 从而 $\angle C>120°$.

故选(B).

13·55 如图，在三角形 ABC 中，AD 和 AE 将 $\angle BAC$ 三等分，BD，DE 和 EC 的长度分别为 2，3 和 6. 那么 $\triangle ABC$ 中最短边的长度为



(A) $2\sqrt{10}$.　　(B) 11.

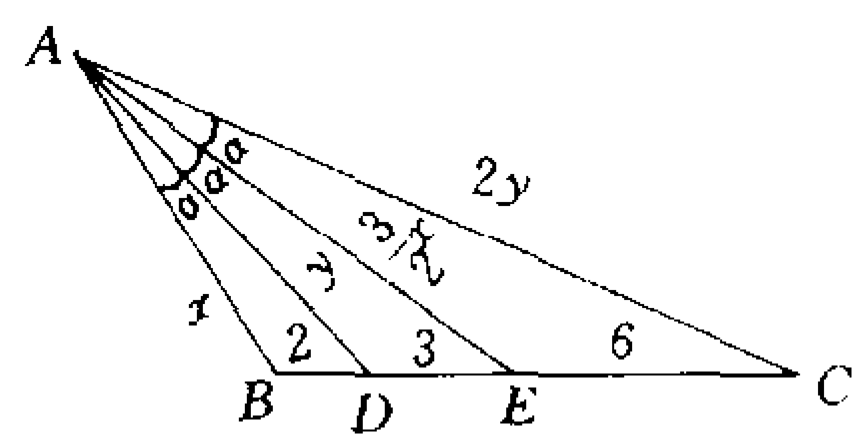
(C) $6\sqrt{6}$.　　(D) 6.

(E) 不能被所给的条件惟一确定.

（第 32 届美国高中数学考试，1981 年）

[解 1] 如图，设 $\angle BAC=3\alpha$， $x=AB$ 及 $y=AD$. 由角平分线性质有

$$\frac{AB}{AE}=\frac{2}{3} \quad 和 \quad \frac{AD}{AC}=\frac{1}{2},$$



于是 $AE=\frac{3}{2}x$， $AC=2y$.

在 $\triangle ADB$，$\triangle AED$ 和 $\triangle ACE$ 中分别运用余弦定理，有

$$\begin{cases}4=x^2+y^2-2xy\cos\alpha,\\9=\frac{9}{4}x^2+y^2-3xy\cos\alpha,\\36=\frac{9}{4}x^2+4y^2-6xy\cos\alpha.\end{cases}$$

于是有 $$\frac{x^2+y^2-4}{2xy}=\frac{\frac{9}{4}x^2+y^2-9}{3xy}, \quad ①$$

和 $$\frac{x^2+y^2-4}{2xy}=\frac{\frac{9}{4}x^2+4y^2-36}{6xy}. \quad ②$$

由 ① 有 $$3x^2-2y^2=12,$$

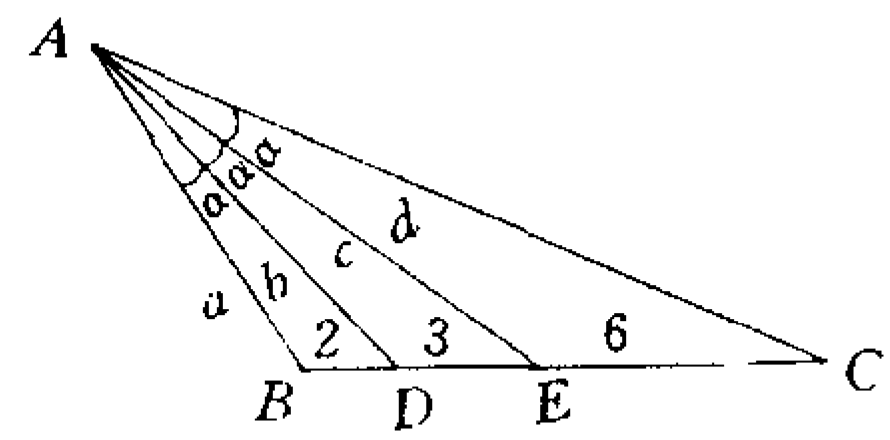
由 ② 有 $$3x^2-4y^2=-96.$$

从这两方程解得 $x=2\sqrt{10}$， $y=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$.

所以 $AB=2\sqrt{10}\approx 6.3$， $AC=6\sqrt{6}\approx 14.7$ 以及 $BC=11$.

故选(A).

[**解 2**]　如图，设 $AB = a$，$AD = b, AE = c$ 以及 $AC = d$. 由角平分线性质有



$$\frac{a}{c} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b}{d} = \frac{3}{6},$$

于是 $a = \frac{2}{3}c, \quad d = 2b.$

由角平分线长度公式有

$$b^2 + 6 = ac \quad \text{和} \quad c^2 + 18 = bd,$$

由上有　$b^2 + 6 = \frac{2}{3}c^2$　或　$c^2 + 18 = 2b^2$,

解得　$c^2 = 90, \quad b^2 = 54.$

$$\therefore \quad a = \frac{2(3\sqrt{10})}{3} = 2\sqrt{10}, \quad \text{且} \quad d = 2(3\sqrt{6}) = 6\sqrt{6}.$$

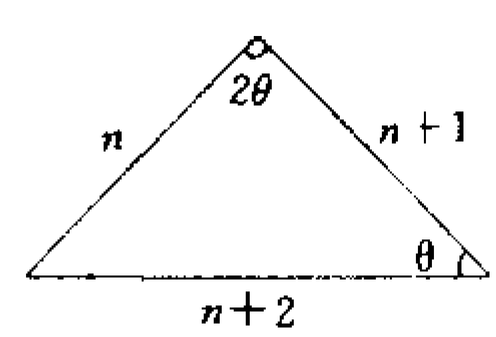
故选(A).

13·56　一个三角形的边长是三个连续整数，且最大的角两倍于最小的角. 则最小角的余弦值是

(A) $\frac{3}{4}$.　(B) $\frac{7}{10}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{9}{14}$.　(E) 非以上这些值.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

[**解**]　如图，不妨设最短的边 n 所对的最小的角为 θ，由正弦定理，



有 $\frac{\sin\theta}{n} = \frac{\sin 2\theta}{n+2}$，即 $\frac{\sin\theta}{n} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{n+2}$,

所以　$\cos\theta = \frac{n+2}{2n}$.

由余弦定理，有

$$\cos\theta = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 - n^2}{2(n+1)(n+2)},$$

因此
$$\frac{n+2}{2n} = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 - n^2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+5)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+5}{2(n+2)}.$$

解得　$n = 4$，　所以　$\cos\theta = \frac{4+2}{4\cdot 2} = \frac{3}{4}$.

故选(A).

13·57　半径为1 的圆中的内接十边形的最短边的最大值是

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. (D) 1.

(中国北京市高中数学竞赛,1987 年)

[解] 若半径为 1 的圆内接十边形的最短边所对的圆心角若为 α,则 $\alpha \leqslant 36^\circ$.

则最短边之长 $l = 2\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant 2\sin 18^\circ$.

所以当 $\alpha = 36^\circ$ 时,最短边取最大值为 $2\sin 18^\circ$.

容易计算这个值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选(A).

13·58 在 $\triangle ABC$ 中,若

$(\sin B + \sin C):(\sin C + \sin A):(\sin A + \sin B) = 4:5:6$.

则该三角形最大角的度数是

(A) 72°. (B) 84°. (C) 1.5°. (D) 120°. (E) 150°.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 由正弦定理及题设有

$$(b+c):(c+a):(a+b) = 4:5:6.$$

令 $b+c = 4k,\quad c+a = 5k,\quad a+b = 6k$,

三式相加化简后有 $a+b+c = 7.5k$.

所以 $a = 3.5k,\quad b = 2.5k,\quad c = 1.5k$.

设 $k = 2t$,则 $a = 7t,\quad b = 5t,\quad c = 3t$, 知其最大角为 A.又

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(3^2+5^2-7^2)t^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot t^2} = -\frac{1}{2},$$

知 $A = 120^\circ$.

故选(D).

13·59 在 Rt$\triangle ABC$ 中,斜边 $c = 5$,两直角边 $a \leqslant 3$, $b \geqslant 3$,则 $a+b$ 的最大值是

(A) $5\sqrt{2}$. (B) 7. (C) $4\sqrt{3}$. (D) 6.

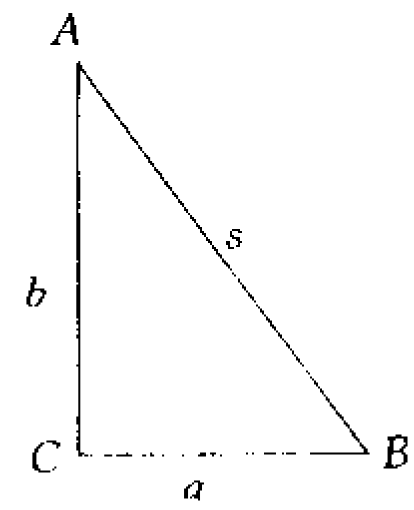
(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年)

[解 1] 如图 $a+b = 5\sin A + 5\cos A$,

而 $\sin A + \cos A = \sqrt{2}\sin(45^\circ + A)$, ⊛

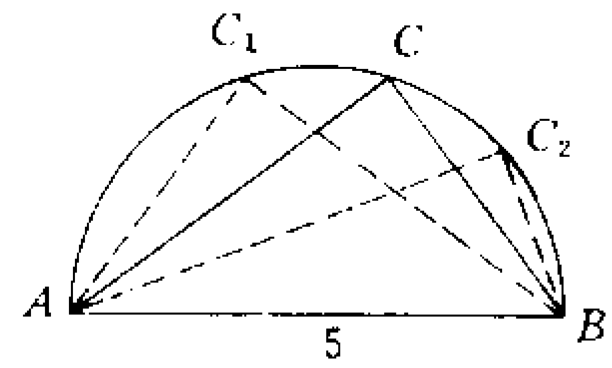
知 $(\sin A + \cos A)_{\max} = \sqrt{2}$,

但此时 $A=45°$,则 $a=b=\frac{5}{2}\sqrt{2}$,与 $a\leqslant 3$ 相抵.



容易看出:以 AB 为直径的半圆上的点 C 与 A,B 所连弦长之和,以 $\angle CBA$ 与 $\angle CAB$ 之差绝对值愈小为愈大(亦可从 ⊛ 式看出,注意在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $\sin x$ 为增函数),或以两弦差愈小为愈大.

而 a 最大为3,取 $a=3$,则 $b=\sqrt{5^2-3^2}=4$,此时 $a+b$ 最大.



即 $$(a+b)_{\max}=7.$$

故选(B).

[解 2] 由 $a^2+b^2=25$,则

$$y=a+b=a+\sqrt{25-a^2},$$

即 $$2a^2-2ay+y^2-25=0.$$

又 ∵ $a\leqslant 3\leqslant b$,

∴ $$a=\frac{2y-\sqrt{4y^2-8(y^2-25)}}{2\cdot 2}\leqslant 3,$$

∴ $$(y-6)^2\leqslant 50-y^2,\quad \text{即}\quad y\leqslant 7.$$

因而 $y_{\max}=7$. 即 $(a+b)_{\max}=7$.

故选(B).

13·60 下面四个图形中,面积最大的是

(A) $\triangle ABC$:$\angle A=60°$,$\angle B=45°$,$AC=\sqrt{2}$.

(B) 梯形:两对角线长度分别为$\sqrt{2}$ 和$\sqrt{3}$,夹角为 75°.

(C) 圆:半径为 1.

(D) 正方形:对角线的长度是 2.5.

(中国高中数学联赛,1981 年)

[解] 本题如直接计算(A)中 $\triangle ABC$ 的面积比较费事,可先算出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R,这时

$$R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin 45°}=1.$$

现在把(A)与(C)比较,当然(C)的面积大,再由

$$S_{\text{四边形}}=\frac{1}{2}l_1l_2\sin\varphi,$$

(其中 l_1,l_2 是对角线,φ 是两对角线夹角)可直接比较(B)与(D).

$\because \quad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ < \frac{1}{2}\cdot 2.5\cdot 2.5\cdot\sin 90^\circ.$

$\therefore$ (D) 大于(B).

再比较(C)与(D),容易得出(C)最大.

故选(C).

第4节 数列中的最值

13·61 若7个连续偶数之和为1988,则此7个数中最大的一个是

(A) 286. (B) 288. (C) 290. (D) 292.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987年)

[解] 设这7个连续偶数分别为

$2n-6,\ 2n-4,\ 2n-2,\ 2n,\ 2n+2,\ 2n+4,\ 2n+6.$

于是有$(2n-6)+(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=1988$,

即 $14n=1988$, 得 $n=142$.

则 $2n+6=284+6=290$.

故选(C).

13·62 考虑下面的序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$,其中 $x_1=\sqrt[3]{3}$, $x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}$,一般地,$x_n=(x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}$.对 $n>1$,问使 x_n 是一个整数的最小的 n 是

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 9. (E) 27.

(第36届美国高中数学考试,1985年)

[解] 由设 $x_1=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$, $x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}=(3^{\frac{1}{3}})^{3^{\frac{1}{3}}}=3^{\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}$,

$x_3={x_2}^{\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}},\cdots$

一般地 $x_n=3^{\frac{1}{3}\cdot\underbrace{3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdots 3^{\frac{1}{3}}}_{n-1\text{个}}}=3^{3^{-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}}$.

这样,若 x_n 为整数的最小的 n 为4.

即 $x_4=3^{3^{-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}}=3^{3^0}=3^1=3.$

故选(C).

13·63 已知数列 $10^{\frac{1}{11}},10^{\frac{2}{11}},10^{\frac{3}{11}},\cdots,10^{\frac{n}{11}}$,使得此数列的前 n 项

之积超过 100000 时,n 的最小值是

(A) 7.　　(B) 8.　　(C) 9.　　(D) 10.　　(E) 11.

（第 16 届美国高中数学考试,1965 年）

[解]　令　$p=\prod_{k=1}^{n}10^{\frac{k}{11}}=10^{s}$,

且　$$s=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{11}=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{22}n(n+1).$$

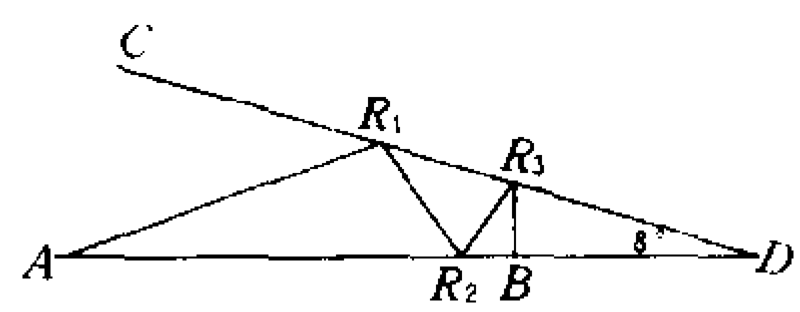
若　$10^{s}>10^{5}$,　即　$s>5$.　或　$\frac{1}{22}n(n+1)>5$,

即　$n^{2}+n-110>0$　或　$(n-10)(n+11)>0$.

$\because$　$n+11>0$,　$\therefore$　$n>10$.

故选(E).

13·64　如下图,从 A 点发出的一束光,在一平面内传播,于 AD 直线和 CD 直线之间反射几次后,垂直地打到了 B 点(B 点可能在 AD 上,也可能在 CD 上),然后按原路反射回点 A(在每一反射点,如图所示,入射角等于反射角.图仅表示 $n=3$ 的情况).如果 $\angle CDA=8°$,那么 n 可取得的最大值是



(A) 6.　　(B) 10.

(C) 38.　　(D) 98.

(E) n 不存在最大的值.

（第 32 届美国高中数学考试,1981 年）

[解]　设 $\angle DAR_1=\theta$,并且设 θ_i 是光线在第 i 个反射点的入射角(当然也是反射角).

对 $\triangle AR_1D$ 以及连续地对 $\triangle R_{i-1}R_iD$, $2\leqslant i\leqslant n$,直到对 $\triangle R_nBD$ 使用三角形外角定理,于是有以下的结果:

$$\theta_1=\theta+8°,$$
$$\theta_2=\theta_1+8°=\theta+16°,$$
$$\theta_3=\theta_2+8°=\theta+24°,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_n=\theta_{n-1}+8°=\theta+(8n)°,$$
$$90°=\theta_n+8°=\theta+(8n+8)°.$$

因为 θ 是正值,所以　$0°\leqslant\theta=90°-(8n+8)°$,

得　$$n\leqslant\frac{82}{8}<11.$$

若 $\theta=2°$,　n 取得它的最大值为 10.

故选(B).

13·65　已知数列$\{a_n\}$满足$3a_{n+1}+a_n=4(n\geqslant 1)$，且$a_1=9$，其前 n 项之和为S_n，则满足不等式$|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$的最小整数 n 是

(A)5.　　(B)6.　　(C)7.　　(D)8.

（中国高中数学联赛，1994 年）

[解]　由$3(a_{n+1}-1)=-(a_n-1)$，$a_1-1=8$知数列$\{a_n-1\}$是首项为 8，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

因此
$$S_n-n=\frac{8\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{3}}=6-6\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\therefore\quad |S_n-n-6|=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{125},$$

即　$3^{n-1}>250>3^5$.

有　$n-1>5$，　$n>6$，　从而　$n\geqslant 7$.

不难验证 $n=7$ 时满足要求.

故选(C).

13·66　设等差数列$\{a_n\}$满足$3a_8=5a_{13}$且$a_1>0$，S_n为其前 n 项之和.则$S_n(n\in N)$中最大的是

(A)S_{10}.　　(B)S_{11}.　　(C)S_{20}.　　(D)S_{21}.

（中国高中数学联赛，1995 年）

[解]　设该等差数列的公差为 d.

则由　$3a_8=5a_{13}$得　$3(a_1+7d)=5(a_1+12d)$，

即　$a_1=-19.5d$.

于是，$a_{20}=a_1+19d>0$，而$a_{21}=a_1+20d<0$.故该等差数列的前 20 项和最大.

故选(C).

13·67　等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1536$，公比$q=-\frac{1}{2}$，用Π_n表示它的前 n 项之积，则$\Pi_n(n\in N)$最大的是.

(A) Π_9.　　(B) Π_{11}.　　(C) Π_{12}.　　(D) Π_{13}.

（中国高中数学联赛，1996 年）

[解]　题设的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=1536\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

前 n 项的积为

$$\Pi_n = 1536^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

易见 Π_9,Π_{12},Π_{13}为正数,Π_{10},Π_{11}为负数,故只需比较Π_9,Π_{12},Π_{13}.注意到

$a_{10} = 1536 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -3,\ a_{11} = a_{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$

$a_{12} = a_{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4},\ a_{13} = a_{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$

且 $a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} = (-3)\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{8} > 1.$

$\therefore \qquad \Pi_{12} = a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot \Pi_9.$

又 $0 < a_{13} < 1$ 及 $\Pi_{13} = a_{13} \cdot \Pi_{12},$

$\therefore \quad \Pi_{13} < \Pi_{12}.$

(事实上,$n \geqslant 13$时,$|a_n| \leqslant a_{13} = \frac{3}{8}$. Π_{12}是Π_n中的最大值.)

故选(C).

13·68 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是满足下面条件的数列:

(i) $-1 \leqslant x_i \leqslant 2$,对于 $i = 1,2,3,\cdots,n$.

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 19$ 且

(iii) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = 99$.

又设 m 和M 分别是$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$ 的最小、最大值,则 M/m 值是

(A)3. (B)4. (C)5. (D)6. (E)7.

(第 50 届美国高中数学考试,1999 年)

[解] 由题设 $-1 \leqslant x_i \leqslant 2$,今设这 n 个x_i 中有p 个 -1,g 个0,r 个1,s 个 2.这时有

$$\begin{cases} -p + r + 2s = 19, & (1) \\ p + r + 4s = 99. & (2) \end{cases}$$

由上可推得 $r + 3s = 59,\ r + s = 40.$

又 p、q、r、s 均为非负整数,则 $s_{\min} = 0,\ s_{\max} = 19.$

而 $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = -p + r + 8s,$

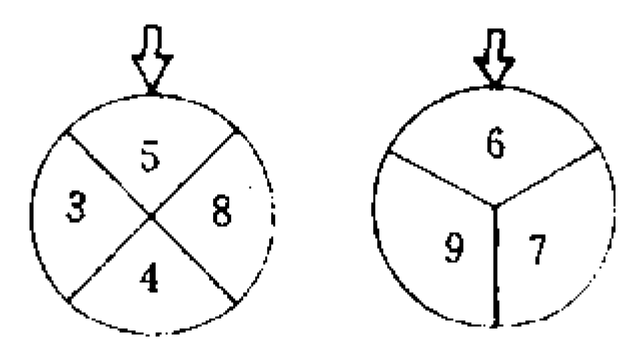
又 $\because \qquad -p + r + 8s = 19 + 6s \qquad$ (由(1)式)

$$\therefore \qquad \frac{M}{m} = \frac{19 + 6 \cdot 19}{19 + 6 \cdot 0} = 7.$$

故选(E).

第十四章　初等概率

14·1　如图，两个轮子每旋转一次，两箭头都指着两个数. 问被箭头指着的两个数之和为偶数的概率是



(A) $\frac{1}{6}$.　(B) $\frac{3}{7}$.　(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{2}{3}$.　(E) $\frac{5}{7}$.

（第 5 届美国初中数学考试，1989 年）

［解］　考虑下面两轮子中的数相加后的奇偶性：

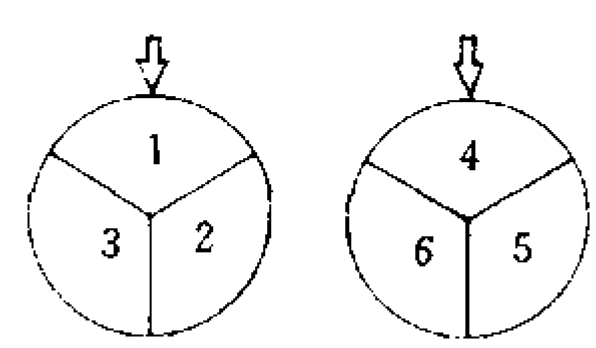
B 轮中的数	A 轮中的数	和中偶数个数
6	3,4,5,8	2
7	3,4,5,8	2
9	3,4,5,8	2

则和取偶数的概率为

$$\frac{2+2+2}{4+4+4}=\frac{1}{2}.$$

故选(C).

14·2　两个可转动的圆盘每个圆盘被分成三等分，并且写上数字(如图). 若箭头所指部分的数的乘积为所得的值，则这个值是偶数的可能性为



(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{7}{9}$.　(E) 1.

（第 7 届美国初中数学考试，1991 年）

[**解**]　考虑到下表

乘　数	被　乘　数	积为偶数的个数
1	4,5,6	2
2	4,5,6	3
3	4,5,6	2

则值为偶数的可能为$\frac{7}{9}$.

故选(D).

14·3　从$\{1,2,3,\cdots,10\}$中随机取出6个不相同的整数.在这些选法中,第二小的数是3的概率是

(A) $\frac{1}{60}$.　(B) $\frac{1}{6}$.　(C) $\frac{1}{3}$.　(D) $\frac{1}{2}$.　(E) 不是以上各数.

（第37届美国高中数学考试,1986年）

[**解**]　10个数中取6个数的取法有C_{10}^{6},

而取法中第二小的数是3的取法,即从1,2中取一个,再从4,5,6,$\cdots$,10中取4个,即$C_2^1C_7^4$.

$\therefore$　所求概率　$p=\frac{C_2^1C_7^4}{C_{10}^6}=\frac{C_2^1C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{3}$.

故选(C).

14·4　一个盒子里有11个小球,它们分别标有1,2,3,$\cdots$,11.如果随机地从盒子中取出6个小球,那么取出的这些小球的数标的和为奇数的概率是

(A) $\frac{100}{231}$.　(B) $\frac{115}{231}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{118}{231}$.　(E) $\frac{6}{11}$.

（第35届美国高中数学考试,1984年）

[**解**]　当且仅当被选出的奇标号的小球的个数是奇数个时,被选出的小球的标号和为奇数(如若是偶数个,则它们的标号和必为偶数).而从11个小球中选出6个小球,选法的总数为$C_{11}^6=462$种.

其中有一个奇标号小球的选法数为　$C_6^1\cdot C_5^5=6$;

有3个奇标号小球的种数为　$C_6^3\cdot C_5^3=200$;

有5个奇标号小球的种数为　$C_6^5\cdot C_5^1=30$.

所以题中所求的概率是　$\frac{6+200+30}{462}=\frac{118}{231}$.

故选(D).

14·5 如果从某个五位数的集合中随机地抽出一个数,它的各位数字和均等于 43,这个数可以被 11 除尽的概率是

(A) $\frac{2}{5}$.　(B) $\frac{1}{5}$.　(C) $\frac{1}{6}$.　(D) $\frac{1}{11}$.　(E) $\frac{1}{15}$.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解] 十进制中每位数字最大是 9,因而五位数字和 $d_1+d_2+d_3+d_4+d_5$ 最多是 45. 而数字和是 43 则有下面情况:

(1) 其中一个数字是 7,其余是 9,有 5 种可能:

79999,　97999,　99799,　99979,　99997.

(2) 其中两个数字是 8,其余数字是 9,有 10 种可能:

88999,　89899,　89989,　89998,　98899,
98989,　98998,　99889,　99898,　99988.

而上述诸数中可被 11 整除者仅 97999,99979,98989 三个.

综上所求概率　$$p=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

故选(B).

14·6 若 a,b,c 是从集合{1,2,3,4,5}中任取的三个元素(不一定不同). 则 $ab+c$ 为偶数的概率为

(A) $\frac{2}{5}$.　(B) $\frac{59}{125}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{64}{125}$.　(E) $\frac{3}{5}$.

(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解] 首选从集合任取三元素的总事倒数为 $5^3=125$.

下面考虑 c 的情况:从{1,3,5}中选一个有 $C_3^1=3$ 种情况 c 是奇数;从{2,4}中选一个有 $C_2^1=2$ 种情况 c 是偶数.

而 ab 为奇数的情形有 $3^2=9$ 种,为偶数的情形有 $5^2-3^2=16$ 种.

由"奇 + 奇 = 偶","偶 + 偶 = 偶"知,$ab+c$ 为偶数的情形共有

$$3\times9+2\times16=59(\text{种})$$

这样所求概率为 $\frac{59}{125}$.

故选(B).

14·7 用这样一种方法来选择不超过 100 的正整数 n,若 $n\leqslant 50$,那么选择 n 的概率是 p;若 $n>50$,那么选择 n 的概率是 $3p$. 选择到

一个完全平方的概率是

(A) 0.05.　(B) 0.065.　(C) 0.08.　(D) 0.09.　(E) 0.1.

（第29届美国高中数学考试，1978年）

[解]　由题设 $50p + 50 \cdot 3p = 1$，则 $p = 0.005$.

又因为有7个完全平方不超过50，3个在51和100之间.

因而选择一个完全平方的概率是 $7p + 3 \cdot 3p = 0.08$.

故选(C).

14·8　平面内任选一点，它的直角坐标都是绝对值小于或等于4的整数，且所有这样的点被选的概率相等.所选的点到原点的距离至多是2单位的概率是

(A) $\frac{13}{81}$.　(B) $\frac{15}{81}$.　(C) $\frac{13}{64}$.

(D) $\frac{\pi}{16}$.　(E) 一个有理数的平方.

（第27届美国高中数学考试，1976年）

[解]　坐标是绝对值小于或等于4的整数的点，构成以原点为中心的 9×9 的点阵列.

而这些点中有13个点到原点的距离小于或等于2个单位.

因而所求概率为 $\frac{13}{81}$.

故选(A).

14·9　一条绳子被任意割成两段，较长的一段至少是较短的一段的 x 倍的概率是

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{2}{x}$.　(C) $\frac{1}{x+1}$.　(D) $\frac{1}{x}$.　(E) $\frac{2}{x+1}$.

（第23届美国高中数学考试，1972年）

[解]　假设 AB 是这条绳子(如图)，P 是 AB 上一点，使得

$$AP : PB = 1 : x.$$



若 AP 长 s，那么 PB 长 sx.

所求截点在 AP 上的概率是 $\frac{s}{s + sx} = \frac{1}{1 + x}$.

又因为截点位于与线段另一端 B 同样距离的线段上的可能性是

一样的,则所求事件的概率是 $\frac{2}{x+1}$.

故选(E).

14·10　从 1 到 9 这九个数字分别写在九张纸片上放在帽子里,杰克随机取了一张又放了回去,接着吉尔也随机取了一张,问杰克,吉尔两个人所取数字和的个位数最可能的数字是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 8.　(D) 9.　(E) 每个数字可能性一样.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解]　数字 1 ~ 9 与 1 ~ 9 和的个位数可如下表

$\langle m+n\rangle$ (n \ m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

这里$\langle m+n\rangle$表示 $m+n$ 的个位数字.从表中可看出:0 在表中出现 9 次,其余数字皆出现 8 次.

两人所取数字和最大可能是 0.

故选(A).

14·11　首先从$\{1,2,3,\cdots,99,100\}$中任意选取 a,然后从同一集合中任意选取 b,则 3^a+7^b 的末位数字是 8 的可能性为

(A) $\frac{1}{16}$.　(B) $\frac{1}{8}$.　(C) $\frac{3}{16}$.　(D) $\frac{1}{5}$.　(E) $\frac{1}{4}$.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解]　3^n 的末位数字随 n 的增大(从 1 开始)依 3,9,7,1 周期变化,7^m 的末位数字依 7,9,3,1 周期性变化.

因为它们的周期均为 4,又 1 ~ 100 这 100 个数中,$4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ 型数的个数是均等的(各有 25 个).

在上述尾数中,只有 7+1, 1+7, 9+9 这三种情形中的末位数字是 8. 即

a	$4k+2$	$4k+3$	$4k$
b	$4l+2$	$4l$	$4l+1$
3^a+7^b 末位	8	8	8

这样从四种数型中取 a 和 b 的数对 (a,b) 取法共 $C_4^1C_4^1=16$ 种,而其中仅 3 种符合题设.

则所求概率(可能性)为 $\frac{3}{16}$.

故选(C).

14·12 任意选择一个用十进位表示的三位正整数 N,每个三位数有相等的选择机会. $\log_2 N$ 是一个整数的概率是

(A) 0. (B) $\frac{3}{899}$. (C) $\frac{1}{225}$. (D) $\frac{1}{300}$. (E) $\frac{1}{450}$.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] 从 100 到 999 共有 900 个三位数,它们中有三个:

$$128=2^6,\ 256=2^7,\ 512=2^8$$

是 2 的整数次幂,因而它们的以 2 为底的对数也是整数.

因而所求概率为 $\frac{3}{900}=\frac{1}{300}$.

故选(D).

14·13 假定按下列方式选取非零数字:使数字 d 被选到的概率是 $\lg(d+1)-\lg d$. 问数字 2 被选到的概率是下列集合中的数字能被选到的概率的 $\frac{1}{2}$ 的是

(A) $\{2,3\}$. (B) $\{3,4\}$. (C) $\{4,5,6,7,8\}$.
(D) $\{5,6,7,8,9\}$. (E) $\{4,5,6,7,8,9\}$.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解] 数字 2 依题设被选到的概率是

$$\lg(2+1)-\lg 2=\lg\frac{3}{2},$$

注意到集合(C)中诸数字被选中的概率是

$$\begin{aligned}&\lg\frac{5}{4}+\lg\frac{6}{5}+\lg\frac{7}{6}+\lg\frac{8}{7}+\lg\frac{9}{8}\\&=\lg\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\\&=\lg\frac{9}{4}=\lg\left(\frac{3}{2}\right)^2=2\lg\frac{3}{2},\end{aligned}$$

则集合(C)中数字被选中的概率是 2 被选中概率的 2 倍.

故选(C).

14·14 任意选择一对有序整数(b,c),其中每一个整数的绝对值小于或等于 5,每一对这样的有序整数被选择的可能性是相等的.方程式 $x^2+bx+c=0$ 没有相异正实根的概率是

(A) $\frac{106}{121}$. (B) $\frac{108}{121}$. (C) $\frac{110}{121}$. (D) $\frac{112}{121}$. (E) 这些都不对.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 下述六个命题是等价的:

(1) 方程 $x^2+bx+c=0$ 有正根;

(2) 方程 $x^2+bx+c=0$ 有实数根,其中较小的是正的;

(3) $\sqrt{b^2-4c}$ 是实数并且 $-b-\sqrt{b^2-4c}>0$;

(4) $0\leqslant b^2-4c<b^2$ 并且 $b<0$;

(5) $0<c\leqslant\frac{b^2}{4}$ 且 $b<0$;

(6) $b=-2$ 而且 $c=1$; 或者 $b=-3$ 而且 $c=1$ 或 2; 或者 $b=-4$ 而且 $c=1,2,3$ 或 4; 或者 $b=-5$ 而且 $c=1,2,3,4$ 或 5.

在(6)中可以看出除非 $b^2=4c$,否则两根不会相等,这样,从(6)中删去$(b,c)=(-2,1)$和$(-4,4)$,就剩下 10 对有序整数可使方程有相异正实根.

所求的概率就是 $1-\frac{10}{11^2}=\frac{111}{121}$.

故选(E).

14·15 在 100 与 200 之间随机选取一个实数 x,如果$[\sqrt{x}]=$

12,那么$[\sqrt{100x}]=120$的概率为

(A) $\frac{2}{25}$.　(B) $\frac{241}{2500}$.　(C) $\frac{1}{10}$.　(D) $\frac{96}{625}$.　(E) 1.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解]　由设$[\sqrt{x}]=12$,则知

$$12\leqslant\sqrt{x}<13,$$

即

$$12^2\leqslant x<13^2,$$

又　$[\sqrt{100x}]=120$,则 $120\leqslant\sqrt{100x}<121$,即

$120\leqslant10\sqrt{x}<121$,　或　$12\leqslant\sqrt{x}<12.1$,

则

$$12^2\leqslant x<12.1^2.$$

因而所求概率　$p=\frac{12.1^2-12^2}{13^2-12^2}=\frac{2.41}{25}=\frac{241}{2500}$,

故选(B).

14·16　将2.5随机地分解成两个非负数之和,如$2.5=2.143+0.357$或$2.5=\sqrt{3}+(2.5-\sqrt{3})$,再把每一数改为与它最接近的整数,如前第一例的2.143,　0.357分别改为2,0;第二例的$\sqrt{3}$,$(2.5-\sqrt{3})$分别改为2,1.那么最后得的两整数和为3的概率是

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{2}{5}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{3}{5}$.　(E) $\frac{3}{4}$.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

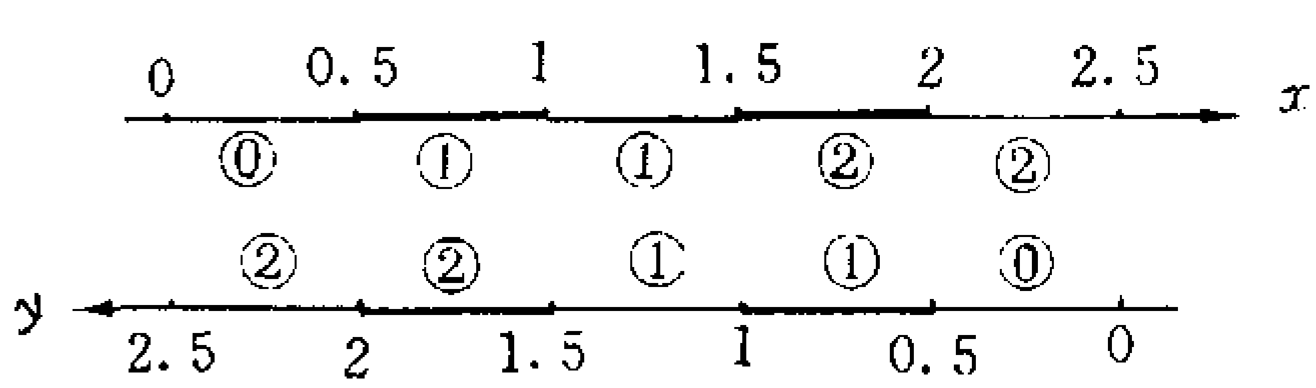
[解 1]　对2.5依题设分拆(成两个非负数)取整(将此两数写成与之最接近的整数)后的两数只能为下面几种情形:

0, 2;　1, 1;　2, 0;　2, 1;　1, 2.

其中和为3者有2种,故其概率为$\frac{2}{5}$.

故选(B).

[解 2]　对于$x+y=2.5$的分拆可用下图表示(每条竖直直线与两数轴交点所表示的数为一种分拆),图中圆圈数字为该区间段(各有五段)上的数取整时的数.



显然适合题意的数分拆，仅有2段.其概率为$\frac{2}{5}$.

故选(B).

14·17　在男生和女生混合的班中，选一个学生作为该班的代表，每一个学生被选中的可能性都是一样的，且一个男生被选中的概率是一个女生被选中的概率的$\frac{2}{3}$.则男生的人数在全班总人数中的比率是

(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{2}{5}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{3}{5}$.　(E) $\frac{2}{3}$.

（第36届美国高中数学考试，1985年）

[解]　设男，女生被选中的概率分别为p_1, p_2，依题意有

$$p_1 = \frac{2}{3}p_2, \quad 即 \quad 3p_1 = 2p_2,$$

因而　　(男生人数)：(女生人数) = 2 : 3.

从而男生人数占全班总人数的$\frac{2}{5}$.

故选(B).

14·18　有两张卡片，一张两面都是红的，另一张一面是红的另一面是蓝的.两张卡片被选择的概率相同（均为$\frac{1}{2}$）.现选择一张放在桌子上，若该卡片上面一面是红的，那么下面一面也是红的概率是

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{2}{3}$.　(E) $\frac{3}{4}$.

（第24届美国高中数学考试，1973年）

[解]　设第一张卡片的面（都是红的）编号为1和2，设第二张卡片的红蓝面分别编号为3和4.这样1,2,3,4四个面中的任意一面都有被取出的可能.

但是在题设情况下面4不可能再出现，所以只有面1,2或3有可能出现.

这样，下面的面两个是红的，一个是蓝的，在这三个面中红的概率是$\frac{2}{3}$.

故选(D).

14·19　A,B两队正进行一系列的比赛.若两队中任何一队赢得

一盘的机会是均等的，但为了在一系列比赛中获胜，A 队必须赢2盘，B 队必须赢3盘．那么 A 队获胜的可能性是

(A) 11 比 5．(B) 5 比 2．(C) 8 比 3．(D) 3 比 2．(E) 13 比 6．

（第 22 届美国高中数学考试，1971 年）

［解］ 因为两个队要赛5盘，则各盘不同的输赢情况总数为 $\frac{2^5}{2}=16$．在比赛中，A 队输掉的四种赢家顺序是

$$BBB\left(\frac{1}{8}\right),\quad ABBB\left(\frac{1}{16}\right),\quad BABB\left(\frac{1}{16}\right),\quad BBAB\left(\frac{1}{16}\right).$$

（每一种后面括号内的数字是它的概率）．A 队输的总概率是 $\frac{5}{16}$．

所以赢的概率是 $\frac{11}{16}$．

即 A 队得胜的可能性是 11 比 5．

故选(A)．

14·20 在 X，Y 和 Z 三匹马参加的比赛中不会出现平局的情况，如果 X 赢的机会是 3 比 1， Y 赢的机会是 2 比 3，那么 Z 赢的机会是

（“H 赢的机会是 p 比 q” 意思是 H 赢得比赛的概率为 $\frac{q}{p+q}$）

(A) 3 比 20．　(B) 5 比 6．　(C) 8 比 5．

(D) 17 比 3．　(E) 20 比 3．

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

［解］ 由题设知 X 赢的概率为 $p_x=\frac{1}{4}$，Y 赢的概率为 $p_y=\frac{3}{5}$，若 Z 赢的概率为 p_z，则

$$p_z=1-p_x-p_y=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{5}=\frac{3}{20}.$$

因此 $q_z=3,\qquad p_z=17.$

故选(D)．

14·21 记号为 1，2，3 的 三个球放在一个缸子中．将一个球从缸中取出，把它的号码记下来，然后再将它放回到缸子里．这个过程重复三次．每个球在每次过程中被抽出的机会是等可能的．如果记录的数码之和为 6，那么其中记号为 2 的球三次全被抽中的概率为

(A) $\frac{1}{27}$．　(B) $\frac{1}{8}$．　(C) $\frac{1}{7}$．　(D) $\frac{1}{6}$．　(E) $\frac{1}{3}$．

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

［解］ 因为一共有7种抽出情形使小球数码的和为6，且它们是等可能的．

用下面的三元有序组来表示即

(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1) 和(2,2,2),

所以记号为 2 的球三次全被抽中的概率为$\frac{1}{7}$.

故选(C).

14·22 任意掷三只骰子(这就是说所有的面向上的概率相同).三个朝上的数能排列成公差为 1 的等差数列的概率是

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{9}$. (C) $\frac{1}{27}$. (D) $\frac{1}{54}$. (E) $\frac{7}{36}$.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 合乎要求的是数组(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6).而每种数组可有 3!种不同排列.

又掷三只骰子出现不同排列的总局数为 6^3.因而所求概率为

$$\frac{4\cdot 3!}{6^3}=\frac{1}{9}.$$

故选(B).

14·23 一只骰子掷六次.至少达到 5 点至少是五次的概率是

(A) $\frac{13}{729}$. (B) $\frac{12}{729}$. (C) $\frac{2}{729}$.

(D) $\frac{3}{729}$. (E) 这些都不对.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 设 A 表示掷后至少达到五这件事,那么 A 的概率是

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

掷骰子六次中,事件 A 发生六次的概率是$\left(\frac{1}{3}\right)^6$.

在特定的次序中,事件 A 五次发生,一次不发生的概率是

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}.$$

因为做这件事有六种特定次序,所以 A 五次出现和一次不出现的概率是

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}=\frac{12}{729}.$$

于是 A 全部出现或五次出现一次不出现的概率是

$$\frac{12}{729}+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}.$$

故选(A).

14·24　一普通骰子被掷3次,若前两次所掷点数之和等于第三次的点数,则掷得点数至少有一次是2的概率是

(A) $\frac{1}{6}$.　(B) $\frac{91}{216}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{8}{15}$.　(E) $\frac{7}{12}$.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解]　设(a,b,c)为骰子被掷3次的点数,依题设满足前两次点数和等于第3次点数的情形为:

(1,1,2),(1,2,3),(1,3,4),(1,4,5),(1,5,6),(2,1,3),(2,2,4),(2,3,5),(2,4,6),(3,1,4),(3,2,5),(3,3,6),(4,1,5),(4,2,6),(5,1,6)

总计15种,其中含点数2的有8种,所求概率为$\frac{8}{15}$.

故选(D).

14·25　掷n次普通骰子得到点数和为1994的概率大于0,且与得到点数和为S的概率相等,则S的最小值是

(A) 333.　(B) 335.　(C) 337.　(D) 339.　(E) 341.

(第45届美国高中数学考试,1994年)

[解]　因为$1994 = 6 \times 332 + 2$,此即说:掷333次出现332次6和一次2是所掷次数最少者,显然出现该情况的概率不为0.

掷333次骰子出现332次6和一次2的概率与出现332次1和一次2的概率相等,且此时出现的点数和最小:

$$1 \times 332 + 2 = 334.$$

故S的最小值是334.

注　原选择枝答案有误,应有334值.

14·26　阿利斯,博勃和卡尔三个孩子轮流掷骰子.阿利斯先掷,博勃总是紧接着阿利斯掷,卡尔总是紧接着博勃再掷.找出卡尔第一个掷中6的概率是多少?(在每一次掷骰子中,得到6的概率为$\frac{1}{6}$,并且各次掷骰子之间是相互独立的.)

(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{2}{9}$.　(C) $\frac{5}{18}$.　(D) $\frac{25}{91}$.　(E) $\frac{36}{91}$.

(第32届美国高中数学考试,1981年)

[解]　卡尔在第一次投骰子时,就第一个投中6的概率为

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6};$$

他在第二次投骰子时,第一个投中 6 的概率是

$$\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6};$$

一般地,卡尔在第 n 次投骰子时,第一个投中 6 的概率是

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

所以卡尔第一个投中 6 的概率为

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n-1}\cdot\frac{1}{6}+\cdots$$

这是一个首项 $a=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$,公比 $r=\left(\frac{5}{6}\right)^3$ 的无穷递缩等比数列的和,其值为

$$\frac{a}{1-r}=\frac{25}{91}.$$

故选(D).

14·27 一只盒子中装有三枚光亮的新硬币和四枚灰暗的旧硬币,从盒中随机地一个接一个不返回地取出硬币,如果到新硬币全部取出时所取次数多于 4 次的概率为 $\frac{a}{b}$,且 $\frac{a}{b}$ 是既约分数,那么 $a+b$ 为

(A) 11. (B) 20. (C) 35. (D) 58. (E) 66.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[**解**] 记 p_3,p_4 为取出三枚和四枚硬币时,已将全部三枚亮币取出的概率.则 $\frac{a}{b}=1-(p_3+p_4)$.

$$p_3=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{35},$$

(即第一次取出亮币,第二次也取出亮币,第三次再取出亮币的概率)

$$p_4=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{35}.$$

(即前三次中分别在第一次或第二次或第三次取得旧币,且第四次取得亮币的概率和)

这样 $\frac{a}{b}=1-\left(\frac{1}{35}+\frac{3}{35}\right)=\frac{31}{35}.$

则 $a+b=66,$

故选(E).

14·28　掷一枚“不均匀”的钱币，正面朝上的概率为 p. 设 w 为在 5 次互相独立的投掷中正面朝上正好是 3 次的概率，如果 $w=\frac{144}{625}$，则

(A) p 一定是$\frac{2}{5}$.　(B) p 一定是$\frac{3}{5}$.　(C) p 一定比$\frac{3}{5}$ 大.

(D) p 不惟一确定.　(E) 没有 p 值使 $w=\frac{144}{625}$.

（第 39 届美国高中数学考试，1988 年）

[解]　设反面朝上的概率为 q，则

$$q=1-p.$$

又 5 次独立投掷中正好是 3 次正面朝上的概率应为$(p+q)^5$ 展开式中含 p^3 的项.

其展开式系数为 1, 5, 10, 10, 5, 1，故所求的项为

$$10p^3q^2=10p^3(1-p)^2.$$

即 $\frac{144}{625}=10p^3(1-p)^2$或 $p^3(1-p)^2-\frac{2^3\cdot 3^2}{5^5}=0.$

这是一个关于 p 的五次方程，令式左为 $f(p)$.

$\because$ $f(0)=f(1)=-\frac{3^2\cdot 2^3}{5^2}<0,$

又 $\because$ $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{32}-\frac{3^2\cdot 2^3}{5^5}>0,$

$\therefore$ $f(p)$ 在$(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},1)$ 上均有实根.

则 p 的值不惟一.

故选(D).

14·29　一枚不均匀的硬币抛出落下正面朝上的概率是$\frac{2}{3}$. 如果将此硬币抛 50 次，那么，正面朝上的次数是偶数的概率为

(A) $25\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$.　(B) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{50}})$.　(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3^{50}})$.　　　(E) $\frac{2}{3}$.

（第 43 届美国高中数学考试，1992 年）

[解]　显然抛 50 次硬币，正面朝上次数为偶数的概率系$(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})^{50}$展开式中$\frac{2}{3}$的幂次为偶数的项的和 p.

由
$$1=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{50}=\frac{1}{3^{50}}(1+2)^{50}, \qquad ㊉$$
再
$$(1-2)^{50}=(-1)^{50}=1,$$
其展开式中 -2 的偶次幂的项与奇次幂的项和(绝对值之差)为 1.

这样，在㊉式中$(1+2)^{50}$展开式中 2 的偶次项和 S_1 与 2 的奇次项和 S_2 之差亦为 1.

从而
$$p=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3^{50}}[(S_1+S_2)+1]\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right).$$
故选(D).

14·30　盒子里有 2 只一分，4 只五分和 6 只一角的硬钱币. 从中依次取出 6 只硬币，每次取出不再放回，每只硬币被选中的概率相等. 取出的硬币的值至少是 50 分的概率是

(A) $\frac{37}{924}$.　(B) $\frac{91}{924}$.　(C) $\frac{127}{924}$.　(D) $\frac{132}{924}$.　(E) 这些都不对.

（第 31 届美国高中数学考试，1980 年）

[解]　从 12 只硬币中选择 6 只的方法是 $C_{12}^{6}=924$ 种. 下列情况将会出现“至少有 50 分”的事件：

(1) 取出 6 只一角硬币；

(2) 取出 5 只一角和任何其他硬币；

(3) 取出 4 只一角和 2 只五分；

使(1)，(2) 和(3) 能够出现的情况分别有 $C_6^6, C_6^5\cdot C_6^1$ 和 $C_6^4\cdot C_4^2$ 种.

所以所求的概率是
$$\frac{C_6^6+C_6^4\cdot C_4^2+C_6^5\cdot C_6^1}{924}=\frac{127}{924}.$$
故选(C).

14·31　一袋正在爆的玉米，其中$\frac{2}{3}$是白粒的，$\frac{1}{3}$是黄粒的，又知

白粒的有$\frac{1}{2}$会爆开，黄粒的有$\frac{2}{3}$会爆开，今从袋中任选一粒放锅中发生爆花，试问它是白粒玉米的概率为

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{5}{9}$.　(C) $\frac{4}{7}$.　(D) $\frac{3}{5}$.　(E) $\frac{2}{3}$.

（第 45 届美国高中数学考试，1994 年）

[解]　由题设，会爆的白玉米占 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

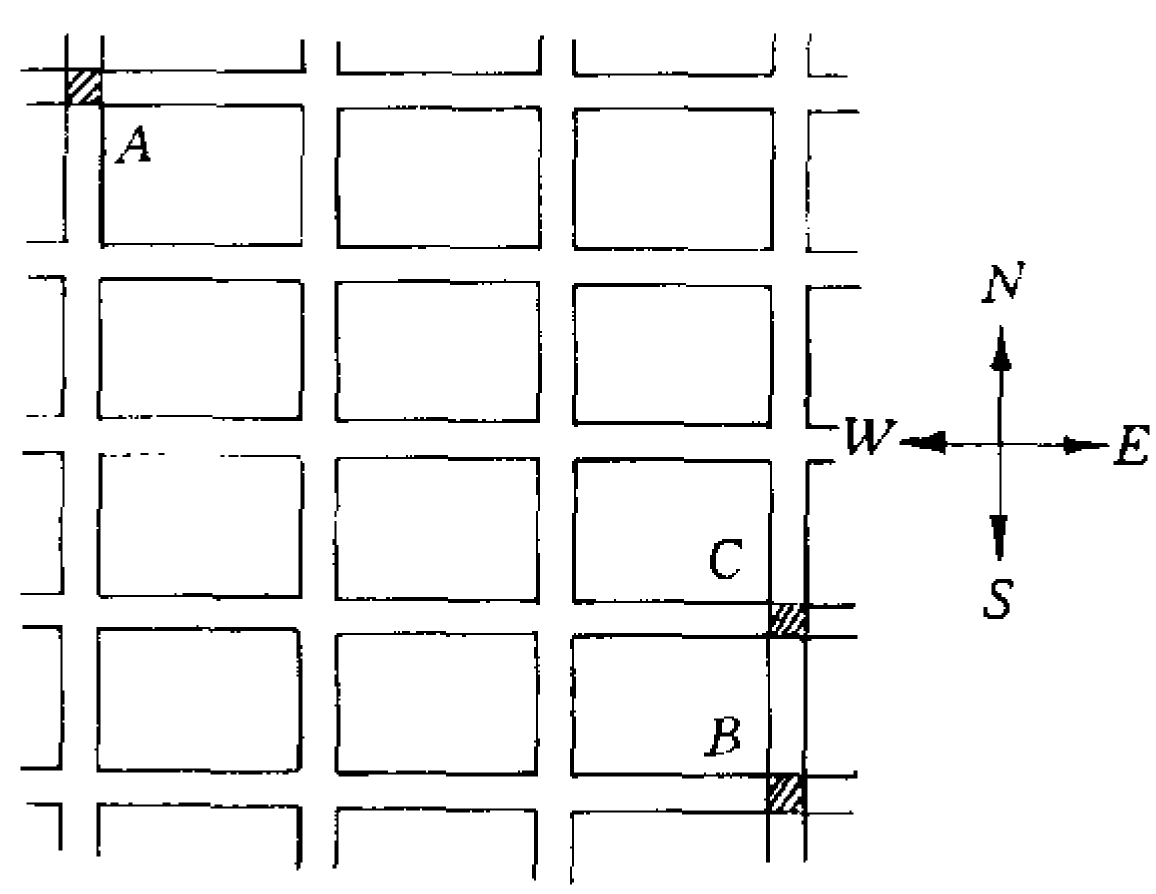
而会爆的黄玉米占$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

则在会爆的玉米中是白色粒的概率为

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}=\frac{3}{5}.$$

故选(D).

14·32　下图是一张某城市地图的一部分. 小长方形表示住宅和房屋，它们之间的空隙表示街道. 有一个学生，每天早晨按照图中所示街道从 A 处步行到 B 处，并且只能朝东或朝南走. 在每一个交叉路口，他都有一个概率为$\frac{1}{2}$的向东或向南的选择（每一个选择与其他选择间都是相互独立的）. 这个学生步行通过 C 处的概率为

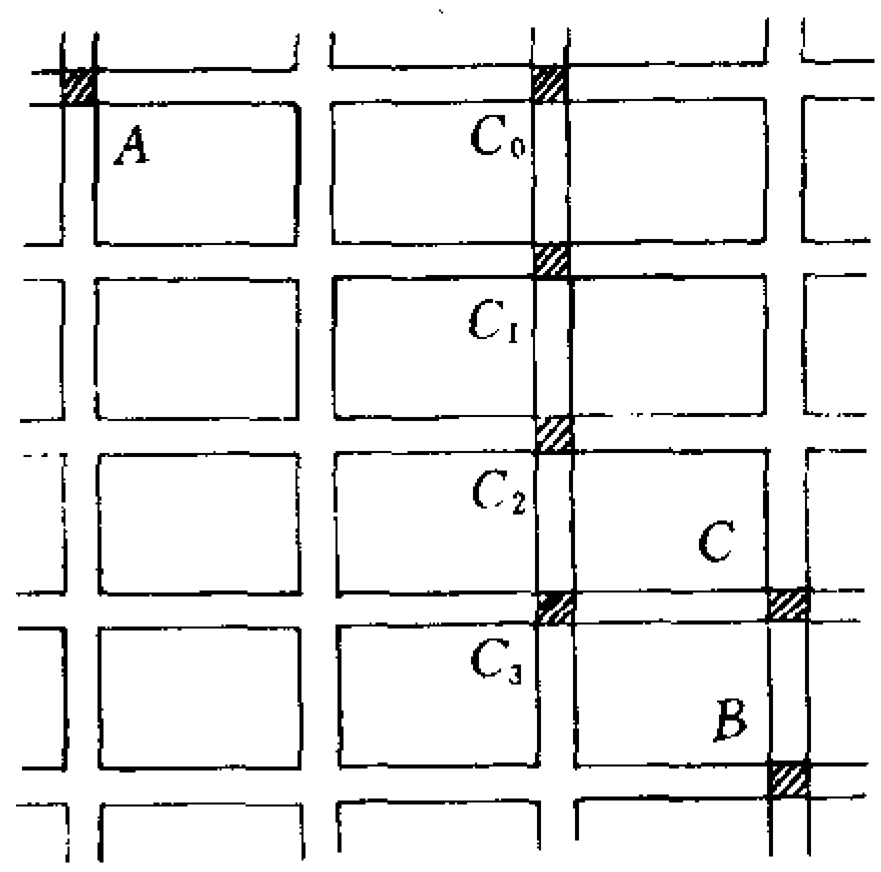


(A) $\frac{11}{32}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{4}{7}$.　(D) $\frac{21}{32}$.　(E) $\frac{3}{4}$.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

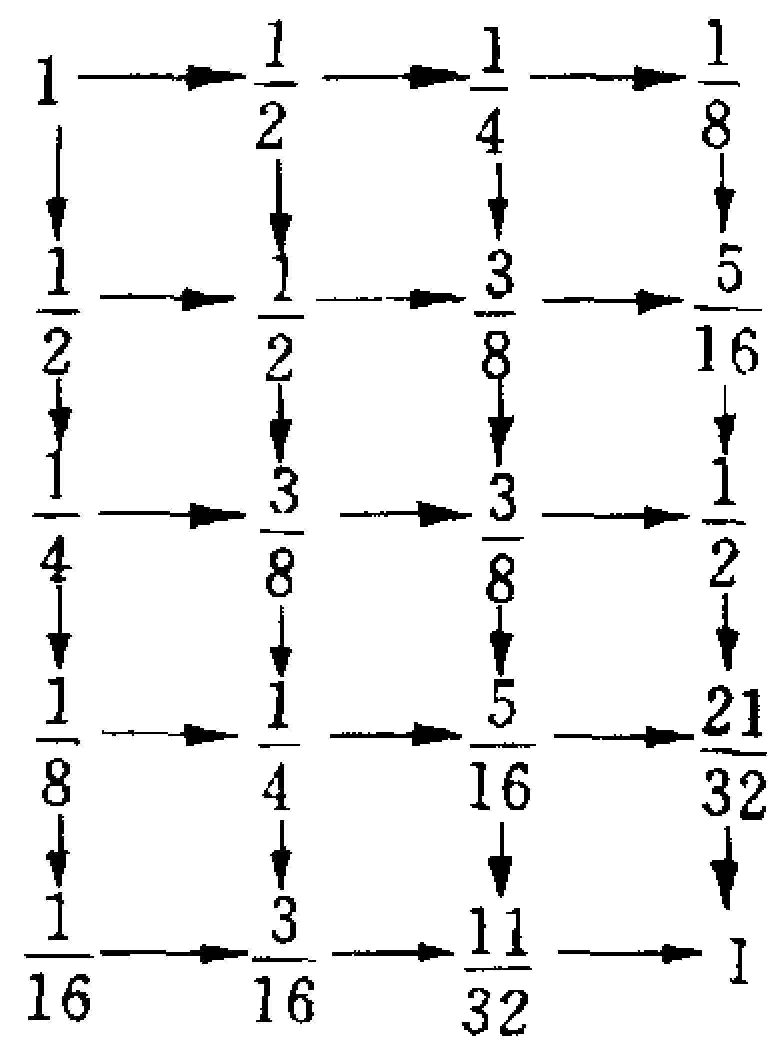
[解]　如图，按照题中规定的行走法则. 这个学生要想通过 C，必须经 $C_i(i=0,1,2,3)$ 之中的一个，然后向东. 也就是说，该学生经过 C 的概率应等于他通过 C_i 诸点然后向东的概率和.

而从 A 出发通过 C_i 的路径中，包含有两条向东的线段与 i 条向南的线段，因此共包含有 $2+i$ 条线段，其中 i 条向南的线段的出现可以是任意次序.



因此从 A 出发，过 C_i 的路径共有 C_{2+i}^{i} 条（当然也可考虑，其中两条向东的线段的出现可以是任意次序，那么得到的组合数为 C_{2+i}^{2}，但 $C_{2+i}^{i}=C_{2+i}^{2}$）.

又因为在每一个交叉路口，向东和向南的概率均为 $\frac{1}{2}$，而从 A 出发到 C_i 的每一路径所经过的交叉路口共有 $3+i$ 个（其中包括 A 和 C_i），因此走此路径向东的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+i}$. 所以题中所求之概率为



$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{3} C_{2+i}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{3+i}\\&=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}+\frac{10}{64}\\&=\frac{21}{32}.\end{aligned}$$

故选(D).

注 倘若一步一步地写出通过每一交叉路口的概率，可得到上右这张树图（其中最后的 1，仅是为了来检验计算用的）.

从图中我们可以清楚地看到，20 条从 A 到 B 经过 C 的路径（从 A 到 B 共有 35 条路径）并不是等可能的.

14·33 圆上给定六点，任意组合形成四根弦，它们能形成凸四边形的概率是

$(A)\ \frac{1}{15}$. $(B)\ \frac{1}{91}$. $(C)\ \frac{1}{273}$. $(D)\ \frac{1}{455}$. $(E)\ \frac{1}{1365}$.

（第 50 届美国高中数学考试，1999 年）

［解］ 所给六点共可连接弦数 $C_6^2=15$ 条；从中挑选四根的方式数为 C_{15}^4.

又题设 六点所连弦可组成凸四边形的数目为 C_6^4，这样所求概

率为

$$P = \frac{C_6^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{91}.$$

故选(B).

14·34　一圆周上均匀分布着1996个点,从中均等地选出A、B、C、D四个不同的点,则弦AB与CD相交的概率是

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{3}$.　(C) $\frac{1}{2}$.　(D) $\frac{2}{3}$.　(E) $\frac{3}{4}$.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解]　考虑点A、B、C、D的顺序即可.

因为对任意凸四边形而言,若AB、CD恰为两对角线时,它们才相交.

当A,B为相邻顶点时,其顺序情况有8种;C,D顺序有2种;

当A,B为相对顶点时,其顺序情况有4种;C,D顺序有2种.

这样,所求概率为 $\frac{4\times 2}{4\times 2+8\times 2} = \frac{1}{3}$.

故选(B).

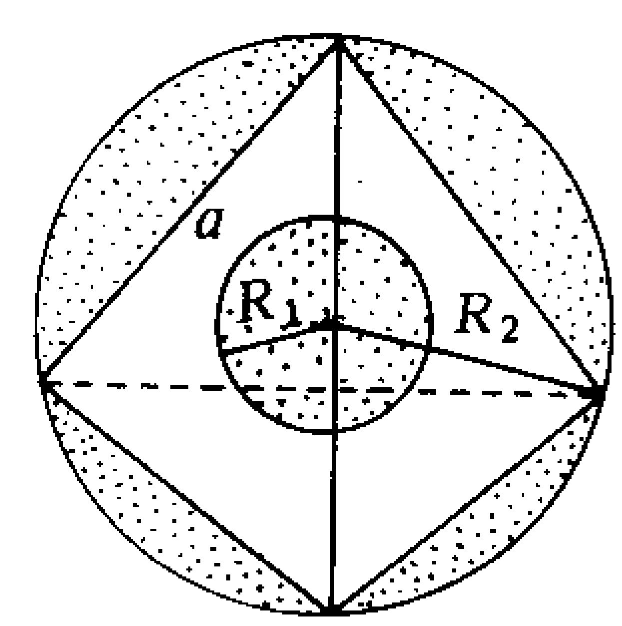
14·35　一个正四面体有两球分别内切和外接于它,又在正四面体每个面与外接球之间又有四个球切于该面中心,点P为外接球内一点,则P落在五个小球内的概率最接近于

(A)0.　(B)0.1.　(C)0.2.　(D)0.3.　(E)0.4.

(第50届美国高中数学考试,1999年)

[解]　设正四面体棱长为a,易知其内切球半径为

$$R_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}a,$$



其外接球半径为 $R_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

若设切外接球与四面体面的球半径为r,则

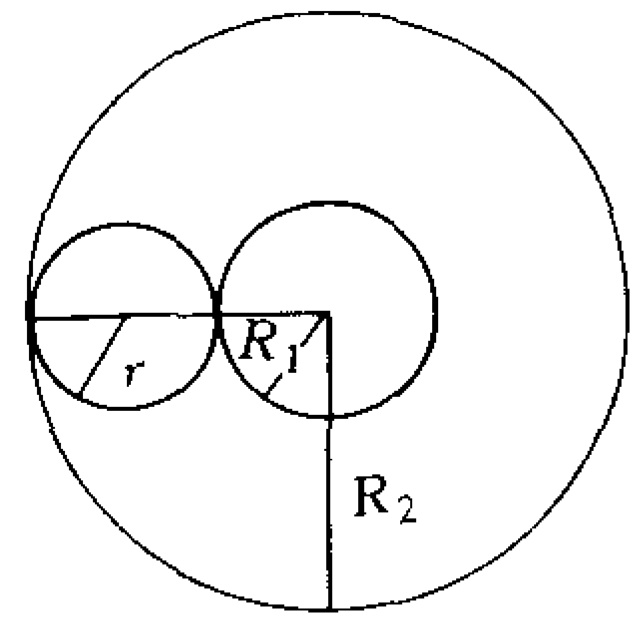
$$r = \frac{R_2 - R_1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}a.$$

由是所求概率为

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3+4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\frac{5\left(\frac{1}{12}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$$

$=\frac{5}{27}\approx 0.19$,

故选(B).



注 若由正四面体中心到其面与顶点距离比为 1 : 3 考虑更简.

14·36 事件 A 出现的概率是$\frac{3}{4}$,事件 B 出现的概率是$\frac{2}{3}$.设 p 是 A 和 B 同时出现的概率.那么包含 p 的区间是

(A) $\left[\frac{1}{12},\frac{1}{2}\right]$.　(B) $\left[\frac{5}{12},\frac{1}{2}\right]$.　(C) $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.

(D) $\left[\frac{5}{12},\frac{2}{3}\right]$.　(E) $\left[\frac{1}{12},\frac{2}{3}\right]$.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解] 设 $P(E)$ 表示事件 E 出现的概率.

由公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

$$\therefore\quad p=P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-P(A\cup B),$$

其中　$1\geqslant P(A\cup B)\geqslant\max\{P(A),P(B)\}=\frac{3}{4}$.

因而　$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-1\leqslant p\leqslant\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$,

即　$$\frac{5}{12}\leqslant p\leqslant\frac{2}{3}.$$

故选(D).

第十五章　集合与论证

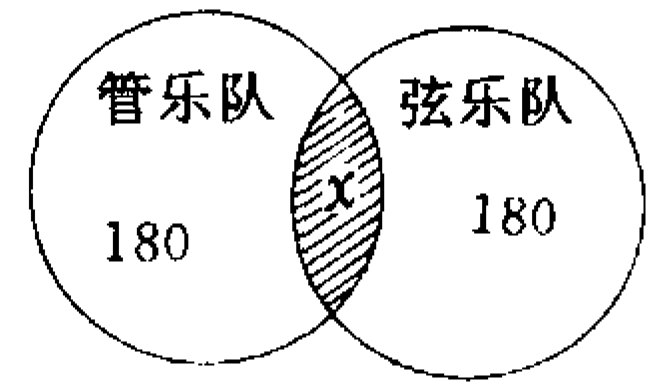
第1节　集合与映射

15·1　某校管乐队由100名男生,80名女生组成,弦乐队由80名男生,100名女生组成,总共有230名学生参加了这两支乐队,其中有60名男生两队都参加了.那么,只参加管乐队而没参加弦乐队的女生人数是

(A) 10.　　(B) 20.　　(C) 30.　　(D) 50.　　(E) 70.

（第7届美国初中数学考试,1991年）

[解]　设同时参加两种乐队的人数为x,如图中阴影所示,依题意有



$$180+180-x=230,\quad 则\ x=130.$$

∵　参加两乐队男生为60名,则参加两乐队的女生为70名.

∴　只参加管乐队的女生为　$80-70=10$名.

故选(A).

15·2　28位同学每人至少选英语,数学,历史中的一门课,其中同时选数学与英语但不选历史的人数等于仅选数学的人数,没有同学仅选英语或仅选历史,6个同学同时选数学与历史,但不选英语,同时选英语与历史的人数5倍于全选三课的人数,若全选三课的人数为一非零偶数,则同时选数学与英语但不选历史的人数为

(A) 5.　　(B) 6.　　(C) 7.　　(D) 8.　　(E) 9.

（第 16 届美国高中数学考试，1965 年）

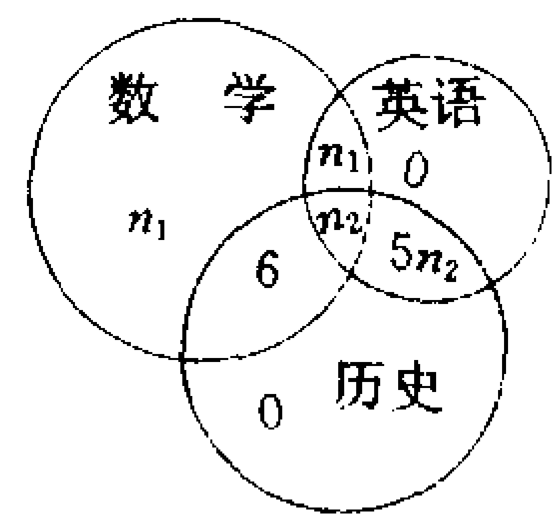
[解]　设同时选英语与数学的人数为 n_1，三门全选的人数为 n_2，其中 $n_1 \geqslant 0, n_2 > 0$ 且为偶数.

从右图可看出：$2n_1 + 6n_2 + 6 = 28$，即

$$n_1 + 3n_2 = 11.$$

符合题设者仅有 $n_1 = 5,\quad n_2 = 2$.

故选(A).



15·3　某中学初三年级有 13 个课外兴趣小组，各组人数如下表：

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	2	3	5	7	9	10	11	14	13	17	21	22	24

一天下午，学校同时举办语文，数学两个讲座. 已知有 12 个小组去听讲座，其中，听语文讲座是听数学讲座人数的 6 倍. 还剩下 1 个小组在教室讨论问题，这一组是

(A) 第 4 组.　(B) 第 7 组.　(C) 第 9 组.　(D) 第 12 组.

（中国江苏省初中数学竞赛，1988 年）

[解]　设听语文讲座的人数为 a 人，听数学讲座的人数为 b 人，在教室讨论问题的小组人数为 x 人. 依题设有

$$\begin{cases} a = 6b, & ① \\ a + b + x = 2 + 3 + 5 + \cdots + 22 + 24 = 158. & ② \end{cases}$$

① 代入 ② 可得

$$x = 158 - 7b = 154 - 7b + 4 = 7(22 - b) + 4,$$

即教室中讨论问题的小组人数被 7 除后余 4. 从表中可知仅 11 符合.

故选(B).

15·4　集合

$$M = \{u \mid u = 12m + 8n + 4l,\ 其中\ m, n, l \in Z\},$$
$$N = \{u \mid u = 20p + 16q + 12r,\ 其中\ p, q, r \in Z\}$$

则它们的关系为

(A) $M = N$.　　　(B) $M \not\subseteq N,\quad N \not\subseteq M$.

(C) $M \subset N$.　　　　　　(D) $M \supset N$.

（中国高中数学联赛，1989 年）

[解] 对 N 中任一元素 u，有

$$u = 20p + 16q + 12r = 12r + 8(2q) + 4(5p) \in M,$$

从而
$$N \subseteq M.$$

另一方面，对 M 中任一元素 u，有

$$u = 12m + 8n + 4l = 20n + 16l + 12(m - n - l) \in N,$$

从而
$$M \subseteq N.$$

所以　$M = N$.

故选(A).

15·5　有一个含三个正整数元素的集合$\{a,b,c\}$，若 $a \times b \times c = 2310$，则这样的集合个数为

(A)32.　(B)36.　(C)40.　(D)43.　(E)45.

（第 46 届美国高中数学考试，1995 年）

[解] 由 $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ 即其有五个素因子.

5 个因子及它们的积(部分积) 均可为 a,b,c 之一，故有集合总数为

$C_5^2C_3^2 + C_5^3 + C_5^4 = 45$(个).

注意到因元素 a,b,c 应互异，显然集合$\{1, 1, 2310\}$ 不在其中.

故选(E).

15·6　给出一相邻整数的集$\{1\}$，$\{2,3\}$，$\{4,5,6\}$，$\{7,8,9,10\}$，…，其中每一个集较前者多含一个元素，并且它的第一个元素较前一集中最后的元素大 1. 设 S_n 是第 n 个集的元素的总和. 则 S_{21} 等于

(A) 1113.　(B) 4641.　(C) 5082.

(D) 53361.　(E) 以上都不是.

（第 18 届美国高中数学考试，1967 年）

[解] 由设第 n 个集合系由 n 个相邻整数组成，且其后一个(即 1, 3,6,10,…) 为前 n 个自然数和 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

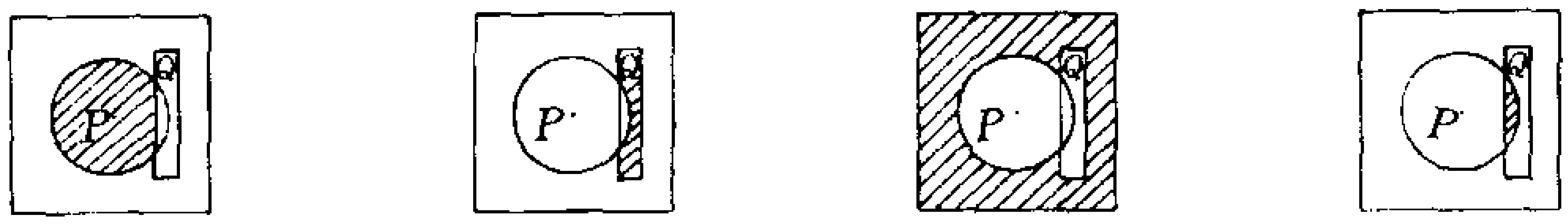
则第 n 个集合首项为 $\dfrac{n(n+1)}{2} - (n-1)$，且其全部元素和为

$$S_n = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n(n^2+1).$$

当 $n=21$ 时，$S_{21}=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot(21^2+1)=4641$.

故选(B).

15·7　用文氏图中阴影部分表示$\overline{\overline{P}\cup\overline{Q}}$,正确的画法是



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

（东北三省数学邀请赛,1989 年）

[解]　∵　$$\overline{P}\cup\overline{Q}=\overline{P\cap Q},$$

∴　$$\overline{\overline{P}\cup\overline{Q}}=\overline{\overline{P\cap Q}}=P\cap Q.$$

故选(D).

15·8　对于$\{1,2\}\subseteq x\subseteq\{1,2,3,4,5\}$关系式(其中 x 是$\{1,2,3,4,5\}$的子集)解的数目是

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.　　(E) 这些都不对.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

[解]　$\{1,2\}$和$\{3,4,5\}$的 8 个不同子集中的每一个相组合,构成 x 的不同的解,此外就再无其他解.具体地子集 x 为

$$\{1,2\},\quad \{1,2,3\},\quad \{1,2,4\},\quad \{1,2,5\},\quad \{1,2,3,4\},$$
$$\{1,2,3,5\},\quad \{1,2,4,5\},\quad \{1,2,3,4,5\}.$$

故选(D).

15·9　如果$\{a\}\subset(A\cup B)\subset\{a,b,c,d\}$,并且 $a\in B$,　$A\cap B=\varnothing$,则满足上述条件的集合 A 的个数是

(A) 5.　　　(B) 6.　　　(C) 7.　　　(D) 8.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　∵　$a\in B$,且 $A\cap B=\varnothing$,

∴　$$a\notin A.$$

又∵　$$\{a\}\subset(A\cup B)\subset\{a,b,c,d\},$$

∴　A 可能是 $\varnothing$;$\{b\}$;$\{c\}$;$\{d\}$;$\{b,c\}$;$\{b,d\}$;$\{c,d\}$;$\{b,c,d\}$共 8 种可能.

故选(D).

15·10　设集合 $P=\{x,1\}$,　$Q=\{y,1,2\}$,其中 $x,y\in\{1,2,\cdots,9\}$,且$P\subseteq Q$.将满足这些条件的每一个有序整数对(x,y)看做

一个点,这样的点的数目是

(A) 9.　　(B) 14.　　(C) 15.　　(D) 21.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　由题设当 $x=2$ 时,$y=3,4,5,6,7,8,9$;

当 $x\neq 2$(注意 $x\neq 1$) 时,$y=x=3,4,5,6,7,8,9$.

综上,有序数对(x,y) 共 14 个.

故选(B).

15·11　其和是 100 的二个以上连续正整数集合的数目是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

（第 24 届美国高中数学考试,1973 年）

[解]　在一个连续整数的集合中,元素个数可能是奇数或偶数.

若为奇数,设它为 $2n+1$,它们的平均数 x 是居中的一个.

那么　$(2n+1)x=100$,　所以　$x=\dfrac{100}{2n+1}$.

则　$(2n+1)$ 只可能是 5 或 25.

若　$2n+1=5$,　那么　$x=20$,　$n=2$,所以这些整数是

$$18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22.$$

若 $(2n+1)=25$,　$x=4$ 且 $n=12$,这是不可能的,因为整数必须是正的.

若连续整数的个数是偶数 $2n$,设它们的平均数(在中间一对数中)以 x 表示,那么 $2nx=100$,即 $x=\dfrac{50}{n}$.

对于 $n=4$,即 $x=12\dfrac{1}{2}$,居中的一对数是

$$x-\frac{1}{2}=12,\quad x+\frac{1}{2}=13,$$

故 9,10,11,12,13,14,15,16 是这 $2n=8$ 个整数.

对于其他整数 n 则没有中间一对$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$和$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$为正整数的.

综上和为 100 的正整数集合只有上述的两个.

故选(B).

15·12　集合$\{1,2,\cdots,100\}$ 的子集,满足没有一个数恰好是另一个数的 3 倍,这样的子集中所含元素的个数最多有

(A) 50.　　(B) 66.　　(C) 67.　　(D) 76.　　(E) 78.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解]　符合题设所含元素个数最多的子集为

$$\{1\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10,11\} \cup \{34,35,36,\cdots,99,100\},$$

共计有元素

$$1+(11-4+1)+(100-34+1)=76 \text{ 个}.$$

下面证明 76 为该种子集元素最多个数.

因为(2,6),(3,9),(12,36),(13,39),…,(33,99) 这 24 对数中,每一对只能有一个被选入子集,这样子集中元素最多有

$$100-24=76(\text{个}).$$

故选(D).

15·13　在集合$\{1,2,3,\cdots,50\}$的子集 S 中任意两个元素的和都不能被 7 整除,这样的子集 S 中元素个数最多的是

(A) 6.　　(B) 7.　　(C) 14.　　(D) 22.　　(E) 23.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解]　对于自然数 $m=7k_1+r_1$,　$n=7k_2+r_2$来讲,若 r_1+r_2 不能被 7 整除,则 $m+n$ 亦不能被 7 整除.

这样题目要求的子集 S 中元素最多有

$$\{x \mid x=7k+r,\ r=1,2,3,\ \text{且}\ x \leqslant 50\} \cup \{7\},$$

共有 23 个元素.

故选(E).

15·14　集合 A,B 的并集$A \cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$.当 $A \neq B$ 时,(A,B) 与(B,A) 视为不同的对.则这样的(A,B) 对的个数有

(A) 8.　　(B) 9.　　(C) 26.　　(D) 27.

(中国高中数学联赛,1993 年)

[解 1]　已知$A \cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$.则作为其子集的 A,B 最多只有 3 个元素.

① 若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$,则满足题意的 B 可以是空集,或是单元素的集合,或是二元素的集合,或是三元素的集合,这样的 B 有

$$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3 \text{ 个}.$$

这时(A,B) 有 $C_3^3 \cdot 2^3$ 对.

② 若 A 为二元素的集合($\{a_1,a_2\}$ 或$\{a_1,a_3\}$ 或$\{a_2,a_3\}$),则有 C_3^2

种,其对应的 B 有 2^2 个($C_2^0+C_2^1+C_2^2=2^2$).

这时(A,B)有 $C_3^2\cdot 2^2$ 对.

③ 若 A 为单元素的集合,则其有 C_3^1 种,其对应的 B 有 2 个,这时(A,B)有 $C_3^1\cdot 2$ 对.

④ 若 A 是空集,则其有 C_3^0 种,其对应的 B 有一个,这时(A,B)有 $C_3^0\cdot 1$ 对.

所以这样的(A,B)对共有

$$C_3^3\cdot 2^3+C_3^2\cdot 2^2+C_3^1\cdot 2+C_3^0\cdot 2^0=3^3=27\text{ 个}.$$

故选(D).

[解 2] 令 $P=\{a_1,a_2,a_3\}$,则 $A=B$ 且 $A\cup B=P$ 的情形只有一种配对:$A=P$ 且 $B=P$.

而 $A\neq B$ 配对情形个数必为偶数,故全部配对个数必是奇数.可否(A),(C).

又粗略计算后知其配对数比 9 大,

故选(D).

15·15 从$\{1,2,3,4,\cdots,20\}$中选取四个不同的数 a,b,c,d,满足 $a+c=b+d$.若不考虑 a,b,c,d 的顺序,则选取方法的总数为

(A) 1050. (B) 525. (C) 1140. (D) 190.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1993 年)

[解 1] 不妨设 $a>b>d$,由 $a+c=b+d$ 得 $d>c$.

从 $1,2,\cdots,20$ 中选出三个数 $a>b>c$ 的选法有 C_{20}^3 种,但其中有 $a+c=b+b$ 的不合要求,这相当于 a 和 c 同奇偶的不合要求.

而从 $1,2,\cdots,20$ 中取两个奇数的选法有 C_{10}^2 种,取两个偶数的选法有 C_{10}^2 种.

于是,从 $1,2,\cdots,20$ 中选三个数 $a>b>c$,且满足 $a+c\neq b+b$ 的选法有 $C_{20}^3-2C_{10}^2=1050$ 种.

这样的每个三元数组确定一个符合要求的四元数组,但每个四元数组(a,b,c,d)出现两次(a,b,c)和(a,d,c)(因为 $d>c$)产生的四元数组.共有 $\frac{1}{2}\cdot 1050=525$ 种.

故选(B).

[解 2] 设 $a+b=c+d=k$,今考虑:

当 $k=5$ 时，有 2 对数和为 5，即有 C_2^2 个等式满足

$$a+b=c+d=5;$$

当 $k=6$ 时，亦有 2 对数和为 6，即有 C_2^2 个等式满足

$$a+b=c+d=6;$$

类似地，当 $k=7,8$ 时，各有 3 对数和为 7 或 8，即有 C_3^2 个等式；

当 $k=9,10$ 时有 C_4^2 个等式；$k=11,12$ 时有 C_5^2 个等式；…；当 $k=19,20$ 时有 C_9^2 个等式；当 $k=21$ 时有 C_{10}^2 个等式；当 $k=22,23$ 时，有 C_9^2 个等式；当 $k=24,25$ 时有 C_8^2 个等式；…；当 $k=36,37$ 时有 C_2^2 个等式.

综上共有　$4(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_9^2)+C_{10}^2=525$.

故选(B).

15·16　对于集合 S，设 $|S|$ 表示 S 中的元素个数，而令 $n(S)$ 表示包括空集和 S 自身在内的 S 的子集的个数. 如果 A,B,C 三个集合满足 $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$，$|A|=|B|=100$，那么 $|A\cap B\cap C|$ 最小可能值是

(A) 96.　(B) 97.　(C) 98.　(D) 99.　(E) 100.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

[解]　集合 X 的子集个数为 $n(X)=2^{|X|}$，由设有

$2^{|A|}+2^{|B|}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$.　又 $|A|=|B|=100$，

因而　$2^{100}+2^{100}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$，即 $2^{101}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$.

则 $|C|=101$，　从而　$|A\cup B\cup C|=102$.

下面分几种情况考虑：

(1) 若 $|A\cap B|=100$，又 $|C|=101$，且 $|A\cup B\cup C|=102$，则 C 至少有两个元素异于 $A\cap B$，　所以　$|A\cap B\cap C|=99$.

(2) 若 $|A\cap B|=99$，则 $|A\cup B|=101$.

由 $|C|=101$，$|A\cup B\cup C|=102$，则 C 异于 $A\cup B$ 的元素至多有一个.

为使 $|A\cap B\cap C|$ 尽量小，则

$$C\cap(A\setminus A\cap B)\neq\varnothing,\quad 且\quad C\cap(B\setminus A\cap B)\neq\varnothing.$$

此时　$$|A\cap B\cap C|\geqslant 98.$$

(3) 若 $|A\cap B|=98$，为使 $|A\cap B\cap C|$ 尽量小，则使

$$|C\cap(A\setminus A\cap B)|=2,\quad |C\cap(B\setminus A\cap B)|=2,$$

又 $|A\cup B\cup C|=102$，且 $|C|=101$，

则
$$|A\cap B\cap C|\geqslant 97.$$

(4) 若 $|A\cap B|\leqslant 97$，为使 $|A\cap B\cap C|$ 尽量小，则

$$|A\setminus A\cap B|\geqslant 3,\quad 且\quad |B\setminus A\cap B|\geqslant 3.$$

但这样 $|A\cup B|\geqslant 97+3+3=103$ 与题设相抵！

综上 $|A\cap B\cap C|$ 的最小值为 97.

故选(B).

15·17 如果集合 M,N 各含有 m,n 个元素，那么，从 M 到 N 可能建立的映射个数是

(A) $m+n$. (B) $m\cdot n$. (C) m^n. (D) n^m.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解] 对 M 中的每个元素，从 M 到 N 均可建立 n 个不同的映射：

即若 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$N=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，则

$$a_k\to b_l\quad (k=1,2,\cdots,m;\quad l=1,2,\cdots,n)$$

故从 M 到 N 的映射个数为 $\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{m个}=n^m$.

故选(D).

15·18 映射 $f:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3\}$. 如果 $10<f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)\cdot f(d)<20$，这样的映射个数共有

(A) 23. (B) 24. (C) 25. (D) 26.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解] 若 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=2$，显然是一种适合题意的映射.

又若 $f(a),f(b),f(c),f(d)$ 不全是 2，这样其中至少一个值是 1，且至多一个是 1(注意到 $2^3=8<10$)，进而知 $f(a),f(b),f(c),f(d)$ 中至少有一个是 3，且至多有两个 3(注意到 $3^3=27>20$).

分下面两种情形讨论：

(1) $f(a),f(b),f(c),f(d)$ 中有一个 1，一个 3 的情形(两个 2)，这时映射有 $P_4^2=4\cdot 3=12$ 种；

(2) $f(a),f(b),f(c),f(d)$ 中有 1 个 1，两个 3 的情形(一个 2)，这时映射有 $P_4^2=4\cdot 3=12$ 种.

总共有 $1+12+12=25$ 种.

故选(C).

15·19　以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：

①P 中的元素有正数，有负数；　②P 中的元素有奇数，有偶数；

③ $-1 \notin P$；　④ 若 $x, y \in P$，则 $x + y \in P$.

对于这个集合 P，可以断定

(A) $0 \in P, 2 \notin P$.　　(B) $0 \notin P, 2 \in P$.

(C) $0 \in P, 2 \in P$.　　(D) $0 \notin P, 2 \notin P$.

（第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛，1990 年）

[解]　考虑集合$\{-3,0,3\}$满足题设 ① ~ ④ 条件，则可否(B)，(C)，(D).

故选(A).

第 2 节　命题与运算

15·20　命题"对所有实数 a, b，若 $a = 0$，则 $ab = 0$"的否定可写作：存在实数 a, b 使

(A) $a \neq 0$ 及 $ab \neq 0$.　　(B) $a \neq 0$ 及 $ab = 0$.

(C) $a = 0$ 及 $ab \neq 0$.　　(D) $ab \neq 0$ 及 $a \neq 0$.

(E) $ab = 0$ 及 $a \neq 0$.

（第 17 届美国高中数学考试，1966 年）

[解]　设 $P(a, b)$ 为有关 a, b 的命题.

则"对所有 a, b，$P(a, b)$ 成立"的命题否定为"存在 a, b，使 $P(a, b)$ 不成立".

故选(C).

15·21　命题"若 n 为正奇数，且其各位数字和为 4，又它们均不为 0，则 n 为素数".则可作上述命题反例的数字的个数是

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　(E)4.

（第 45 届美国高中数学考试，1994 年）

[解]　符合命题条件的奇数有以下几个：

$$13,\quad 31,\quad 121,\quad 211,\quad 1111.$$

其中 121 和 1111 不是素数.

故选(C).

15·22　在卡上有下列四个命题,且仅这四个:

在这张卡上恰有一个命题是不真的.
在这张卡上恰有二个命题是不真的.
在这张卡上恰有三个命题是不真的.
在这张卡上恰有四个命题是不真的.

(假设在卡上的每一个命题或者是真的或者是不真的.)在它们中间,不真命题的数目恰好是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

(第29届美国高中数学考试,1978年)

[解]　因为卡上任一对命题都是矛盾的,所以至多其中之一是真的.

假设这些命题中没有一个是真的,就推出"第四个命题"是真的.因此卡上"必定存在恰好一个命题为真"也成立.这与前设矛盾.

因而其中有一命题为真,换句话说"恰有三个命题不真",即第三个命题成立.

故选(D).

15·23　假设下列三个叙述是正确的:

Ⅰ.所有新生都是人.

Ⅱ.所有研究生都是人.

Ⅲ.某些研究生在思索.

已知下列四个叙述:

(1) 所有新生都是研究生.

(2) 某些人在思索.

(3) 没有新生在思索.

(4) 在思索的某些人不是研究生.

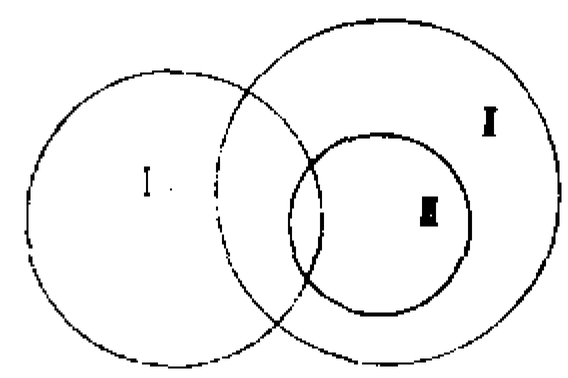
其中为Ⅰ,Ⅱ及Ⅲ逻辑结果的叙述是

(A) (2).　　(B) (4).　　(C) (2),(3).

(D) (2),(4).　　(E) (1),(2).

(第10届美国高中数学考试,1959年)

[解]　题设三类人的集合可用下图表示.从图可以看到:结论(1)不真;结论(3)不真;结论(4)也不真.



故选(A).

15·24　给出两个假设:(Ⅰ)最少有一个 Mems 不是 Ens.(Ⅱ)没有一个 Ens 是 Vees,我们可以推断

(A) 最少有一个 Mems 不是 Vees.

(B) 最少有一个 Vees 不是 Mems.

(C) 没有一个 Mems 是 Vees.

(D) 最少有一个 Mems 是 Vees.

(E) 不能从给出的假设推断出(A)或(B)或(C)或(D).

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　令 M,E,V 分别记为 Mems,Ens,Vees 的集合.

从题设知至少一个 $m \in M$,且 $m \notin E$,同时 $E \cap V = \varnothing$.

若 $M = V$,则(A),(B),(C)不成立;

若 $M \cap V = \varnothing$,则(D)不成立.

故选(E).

15·25　在某学校中,假定

Ⅰ:某些学生是不诚实的.

Ⅱ:所有的社团成员都是诚实的.

由此导出的必然结论是

(A) 某些学生是社团成员.　　(B) 某些社团成员不是学生.

(C) 某些学生不是社团成员.　　(D) 没有一个社团成员是学生.

(E) 没有一个学生是社团成员.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解]　结论(A),(B)要求"社团成员集"为非空集,而假设Ⅰ,Ⅱ均无须此要求;

又若"社团成员集"为"全体学生集"的非空子集,则结论(D),(E)不成立.

又由Ⅰ知学生中有不诚实者,再由Ⅱ知这些人非社团成员,因而

(C) 真.

故选(C).

15·26　若当 whosis 是 is 且 so 和 so 是 is · so 时,whatsis 是 so. 当 whosis 是 so 且 so 和 so 是 so · so 又 is 是 2 时,whosis · whatsis 是(whatsis, whosis,is 和 so 是取正值的变量)

(A) whosis · is · so.　　(B) whosis.　　(C) is.

(D) so.　　(E) so 和 so.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解]　设 W,H,I 和 S 依次表示 whatsis,whosis,is 和 so.

那么当 $H = I$ 且 $IS = 2S$ 时,推出 $W = S$.

等价地,因为　$S > 0$,由　$H = I = 2$,　推出　$W = S$.

现在　$H = S$ 且 $2S = S^2$ 又 $I = 2$,

等价地　$H = I = S = 2$,

那么
$$W = S,$$

所以
$$HW = 4 = S + S.$$

故选(E).

15·27　一位妇女,她的兄弟,儿子和女儿(所有的关系都是血统关系)都是棋手. 最坏的棋手的孪生者(也是四个棋手之一)和最好的棋手为异性. 最坏的棋手和最好的棋手为同年龄的. 最坏的棋手是

(A) 这位妇女.　(B) 她的儿子.　　(C) 她的兄弟.

(D) 她的女儿.　(E) 按已知条件无一致的解.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解]　若儿子是最坏的棋手,女儿必须是他的孪生姐妹,那么最好的棋手必定是兄弟,这与已知条件是一致的,因为兄弟和儿子可以为相同年龄.

假定其他棋手中的任何一个是最坏的,必然导致矛盾:

若这位妇女是最坏的棋手,她的兄弟必定是她的孪生兄弟,她的女儿必须是最好的棋手,但是这位妇女和她的女儿不可能是相同年龄.

若兄弟是最坏的棋手,妇女必定是他的孪生姐妹,那么最好的棋手是儿子,但是妇女和她的儿子不可能是相同年龄,因此妇女的孪生兄弟不可能和儿子有相同的年龄.

若女儿是最坏的棋手，儿子必定是女儿的孪生兄弟，那么最好的选手是妇女，但是妇女和她的女儿不可能是相同年龄.

故选(B).

15·28　Ⅰ～Ⅳ中的命题等价于下面这个命题："如果在行星 α 上的粉红大象有紫色眼睛，那么在行星 β 上的野猪没有长鼻子" 的是

Ⅰ."如果在行星 β 上的野猪有长鼻子，那么在行星 α 上的粉红大象有紫色眼睛."

Ⅱ."如果在行星 α 上的粉红大象没有紫色眼睛，那么在行星 β 上的野猪没有长鼻子."

Ⅲ."如果在行星 β 上的野猪有长鼻子，那么在行星 α 上的粉红大象没有紫色眼睛."

Ⅳ."在行星 α 上的粉红大象没有紫色眼睛，或者在行星 β 上的野猪没有长鼻子."

(A) 仅 Ⅰ 和 Ⅲ.　　(B) 仅 Ⅲ 和 Ⅳ.　　(C) 仅 Ⅱ 和 Ⅳ.

(D) 仅 Ⅱ 和 Ⅲ.　　(E) 仅 Ⅲ.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解]　这些命题中"若 P 则 Q"，"若非 Q 则非 P" 和，"非 P 或 Q" 是等价的. 故已知命题，命题 Ⅲ 和命题 Ⅳ 分别是以上三种形式.

故选(B).

15·29　(Ⅰ) 考虑叙述：(1) $p \wedge q$. (2) $p \wedge \sim q$. (3) $\sim p \wedge q$. (4) $\sim p \wedge \sim q$. 其中 p 与 q 为叙述，而 $\wedge$ 表示"且"，$\sim$ 表示该叙述的否定，这些叙述中能推出 $\sim(p \wedge q)$ 正确的有

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

或(Ⅱ) 考虑叙述：(1) p 且 q 均真. (2) p 为真且 q 为假. (3) p 为假且 q 为真. (4) p 为假且 q 为假. 这些叙述中能推出"p 与 q 均真" 的否定者有多少？

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

（第 13 届美国高中数学考试，1962 年）

[解]　对于型(Ⅰ) 我们有：

既然　$\sim(p \wedge q) = \sim p \wedge \sim q$，则叙述(2)，(3)，(4) 正确.

对于型(Ⅱ) 我们有：

叙述"p 和 q 俱真" 的否定是说："p 真 q 假" 或"p 假 q 真" 或"p，q

俱假".故叙述(2),(3),(4)正确.

故选(D).

15·30　Ⅰ.考虑叙述:(1)$p \wedge \sim q \wedge r$.(2)$\sim p \wedge \sim q \wedge r$.(3)$p \wedge \sim q \wedge \sim r$.(4)$\sim p \wedge q \wedge r$,其中$p,q$与$r$为命题,问其中可以推出$(p \to q) \to r$真确的有

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

或Ⅱ.考虑叙述:(1)p与r为真且q为假.(2)r为真而p与q为假.(3)p为真而q与r为假.(4)q与r为真而p为假.问此中有多少可推出"r可由'p推出q'推得"为真?

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解]　若"$(p \to q) \to r$为真"其涵义为:

① 结果r为真,且前提$p \to q$可为真或假;

② 结果r为假,前提也是假.

又"$p \to q$为真"涵义为:

① 结果q真,且前提p或真或假;

② 结果q为假,前提亦为假.

因而在(1)中,$p \to q$是假,r是真;则$(p \to q) \to r$是真;

在(2)中,$p \to q$是真,r是真;则$(p \to q) \to r$是真;

在(3)中,$p \to q$是假,r是假;则$(p \to q) \to r$是真;

在(4)中,$p \to q$是真,r是真;则$(p \to q) \to r$是真.

故选(E).

15·31　设a Ⓛ b表示选择a和b两数之较大者的运算,且a Ⓛ $a = a$,又设a Ⓢ b表示选择a和b两数之较小者的运算,且a Ⓢ $a = a$.

下列三个结论:

(1)a Ⓛ $b = b$ Ⓛ a.

(2)a Ⓛ $(b$ Ⓛ $c) = (a$ Ⓛ $b)$ Ⓛ c.

(3)a Ⓢ $(b$ Ⓛ $c) = (a$ Ⓢ $b)$ Ⓛ $(a$ Ⓢ $c)$.

其中正确的是

(A) 仅(1).　　(B) 仅(2).　　(C) 仅(1)与(2).

(D) 仅(1)与(3).　　(E) 全部.

(第13届美国高中数学考试,1962年)

[解] 由题设结论(1)成立显然.

对于(2),先由 b,c 中选较大者再与 a 选较大者与先由 a,b 中选较大者再与 c 选较大者结果一样(均为 a,b,c 中最大者).

对于(3),先设 a 为 a,b,c 中最小者.这样 a Ⓢ $(b$ Ⓛ$c) = a$,而

$$(a \text{ Ⓢ } b)\text{Ⓛ}(a \text{ Ⓢ } c) = a,$$

故这时结论成立;

若 b 或 c 为 a,b,c 中最小者,比如 b,这时

$$a \text{ Ⓢ } (b \text{ Ⓛ } c) = a \text{ Ⓢ } c,$$

而 $(a \text{ Ⓢ}b)\text{Ⓛ}(a \text{ Ⓢ}c) = b \text{ Ⓛ}(a \text{ Ⓢ}c) = a \text{ Ⓢ}c$ (注意 b 最小).

综上,(1),(2),(3) 均成立.

故选(E).

15·32 对一切实数 x 和 y,运算"∘"定义为

$$x \circ y = 4x - 3y + xy.$$

实数 y 使得 $3 \circ y = 12$ 的个数有

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 4. (E) 多于 4 个.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解] 用 3 代替式中的 x,得

$$3 \circ y = 12 - 3y + 3y = 12.$$

所以 $3 \circ y = 12$ 对所有的实数 y 都正确.

故选(E).

15·33 运算 $x * y$ 定义为:$x * y = (x+1)(y+1) - 1$,那么下列的式子中错的是

(A) $x * y = y * x$ 对所有的实值 x 和 y.

(B) $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ 对所有的实值 x,y 和 z.

(C) $(x - 1) * (x + 1) = (x * x) - 1$ 对所有的实值 x.

(D) $x * 0 = x$ 对所有的实值 x.

(E) $x * (y * z) = (x * y) * z$ 对所有的实值 x,y 和 z.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解] 由 $x * (y + z) = (x + 1)(y + z + 1) - 1,$

再
$$\begin{aligned}&(x * y) + (x * z)\\ =& [(x + 1)(y + 1) - 1] + [(x + 1)(z + 1) - 1]\\ =& (x + 1)(y + z + 2) - 2,\end{aligned}$$

所以 $$x*(y+z)\neq(x*y)+(x*z).$$
故选(B).

15·34 对于正实数 x 和 y 定义 $x*y=\dfrac{x\cdot y}{x+y}$,那么

(A)“$*$”是可以交换的,但不可以结合.

(B)“$*$”是可以结合的,但不可以交换.

(C)“$*$”既不可以交换,也不可以结合.

(D)“$*$”是可以交换和结合的.

(E) 这些都不对.

(第25届美国高中数学考试,1974年)

[解] 由 $x*y=\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{yx}{y+x}=y*x$,并且

$$(x*y)*z=\frac{xy}{x+y}*z=\frac{\dfrac{xyz}{x+y}}{\dfrac{xy}{x+y}+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz},$$

同样地 $$x*(y*z)=\frac{xyz}{xy+xz+yz}.$$

所以“$*$”不仅可以交换,而且可以结合.

故选(D).

15·35 已知二元运算“$*$”定义为 $a*b=a^b$(a 和 b 为任意正数),那么,对于所有的正数 a,b,c,n,我们有

(A) $a*b=b*a$. (B) $a*(b*c)=(a*b)*c$.

(C) $(a*b^n)=(a*n)*b$. (D) $(a*b)^n=a*(bn)$.

(E) 非上述答案.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解] 由 $a*b=a^b$,而 $b*a=b^a$,一般讲 a^b 与 b^a 不相等故(A)不真.

又 $(a*b)*c=a^b*c=(a^b)^c=a^{bc}$,

而 $a*(b*c)=a*b^c=a^{b^c}$,对所有正数来讲它们不一定相等,故(B)不真.

由 $a*b^n=a^{b^n}$,而$(a*n)*b=a^n*b=a^{nb}$,则(C)不真.

由$(a*b)^n=(a^b)^n=a^{bn}$,且$a*(bn)=a^{bn}$,故(D)真.

从而(E)不真.

故选(D).

15·36　对实数x,y定义运算"$*$"：$x*y=ax^y+b+1$.　若$1*2=969$，$2*3=983$,则$2*9$等于

(A) 1988.　(B) 1989.　(C) 1990.　(D) 1991.

（中国陕西省西安市初中数学竞赛,1990年）

[解]　由设可有

$$\begin{cases} a\cdot 1^2+b+1=969, & ① \\ a\cdot 2^3+b+1=983, & ② \end{cases}$$

解得　$a=2$，$b=966$.

$\therefore$　$2*9=2\cdot 2^9+966+1=1991$.

故选(D).

15·37　规定$*$为在有序实数对上的运算,记$(a,b)*(c,d)=(ac+bd,\ ad+bc)$,如果$(a,b)*(x,y)=(a,b)$,那么$(x,y)$是

(A) (0,0).　(B) (0,1).　(C) (1,0).

(D) (1,1).　(E) (1,－1).

（中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985年）

[解]　由设及$(a,b)*(x,y)=(ax+by,\ ay+bx)$,则

$$\begin{cases} ax+by=a, \\ ay+bx=b, \end{cases}$$

若$a^2\neq b^2$,解得$x=1$，$y=0$.

故选(C).

15·38　下列关于求平均(算术平均)的二次运算的Ⅰ至Ⅴ五种说法：

Ⅰ.求平均是可结合的；

Ⅱ.求平均是可交换的；

Ⅲ.求平均对于加法是可分配的；

Ⅳ.加法对求平均是可分配的；

Ⅴ.求平均有一个恒等元素.

以上永远正确的是

(A) 全部.　(B) 只有Ⅰ和Ⅱ.　(C) 只有Ⅱ和Ⅲ.

(D) 只有Ⅱ和Ⅳ.　(E) 只有Ⅱ和Ⅴ.

（第24届美国高中数学考试,1973年）

[解] 用 * 表示求平均的二次运算,对于任何两个数 a 和 b,我们有

$$a * b = \frac{1}{2}(a+b).$$

因此,Ⅱ 和 Ⅳ 是惟一正确的说法,因为在 Ⅱ 中,

$$a * b = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(b+a) = b * a.$$

并且在 Ⅳ 中 $a+(b*c) = a+\frac{1}{2}(b+c)$,

而 $(a+b)*(a+c) = \frac{1}{2}[a+b+a+c] = a+\frac{1}{2}(b+c)$.

另一方面,在 Ⅰ 中 $a*(b*c) = \frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c$,

又 $(a*b)*c = \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c$,

它们并不总是相等的,所以 * 是不可结合的.

在 Ⅲ 中 $a*(b+c) = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$,

而 $(a*b)+(a*c) = a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$,它们亦不总相等.

在 Ⅴ 中,因为 $a*e = \frac{1}{2}(a+e)$,所以对于每个数 a 并不存在一个恒等元素 e,使得 $e*a = a$.

故选(D).

15·39 如果对于数集 A 中任意两个数 a,b,其和 $a+b$,差 $a-b$,积 ab 都在数集 A 内,就称数集 A 为数环,下面六个数集:

① $Z=\{$全体整数$\}$

② $N=\{$全体自然数$\}$

③ $Q=\{$全体有理数$\}$

④ $R=\{$全体实数$\}$

⑤ $M=\{$全体形如 $n+m\sqrt{2}$ 的数,其中 n,m 是整数$\}$

⑥ $P=\{$全体形如$\frac{m}{2n}$ 的数,其中 n,m 是自然数$\}$

是数环的有

(A) 6 个. (B) 5 个. (C) 4 个. (D) 3 个. (E) 1 个.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1985 年)

[解] 对任意整数 a,b,则 $a+b$, $a-b$, ab 仍为整数,所以 Z

选择题卷

是数环.

对于任意自然数 m,n,若 $n>m$,则 $m-n<0$,知 $m-n$ 不是自然数,故 N 不是数环.

对于任意有理数 a,b,由 $a-b$, $a+b$, ab 仍为有理数,故 Q 是数环.

对于任意实数 a,b,因 $a-b$, $a+b$, ab 仍为实数, 故 R 是数环.

对于属于 M 的任意数 a,b,它们可表示为

$a=n+m\sqrt{2}$, $b=p+q\sqrt{2}$,(n,m,p,q 为整数)

由
$$a+b=n+m\sqrt{2}+p+q\sqrt{2}=(n+p)+(m+p)\sqrt{2},$$
及
$$a-b=n+m\sqrt{2}-(p+q\sqrt{2})=(n-p)+(m-p)\sqrt{2},$$
且
$$\begin{aligned}ab&=(n+m\sqrt{2})(p+q\sqrt{2})\\&=np+nq\sqrt{2}+pm\sqrt{2}+2mq\\&=(np+2mq)+(nq+pm)\sqrt{2},\end{aligned}$$
知 $a+b,a-b,ab$ 仍为属于 M 的数.

$\therefore$ M 为数环.

对于任意属于 P 的数 a,b,可表示为

$$a=\frac{m}{2n},\quad b=\frac{q}{2p},\quad (n,m,p,q \text{ 是自然数})$$

则
$$a-b=\frac{m}{2n}-\frac{q}{2p}=\frac{mp-nq}{2np},$$

若 $n>m$, $q>p$, 则 $mp-nq<0$. 知 $a-b$ 不属于 P,

$\therefore$ P 不是数环.

综上所述,只有 Z,Q,R,M 为数环,即 4 个数环.

故选(C).

几何篇(上)

（平面几何）

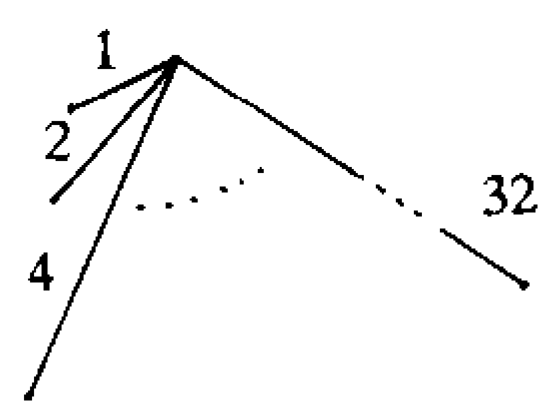
第十六章　点,线,面

16·1　给定平面上的 n 个点,已知 1,2,4,8,16,32 都是其中两点之间的距离,那么,点数 n 的最小可能值是

(A)4.　　(B)5.　　(C)6.　　(D)7.

(中国初中数学联赛,1997 年)

[解]　因为上述任意三个距离的数值都不能构成同一个三角形的三条边长,这样这些点和距离的分布只能如右图,换言之至少有 7 个点.



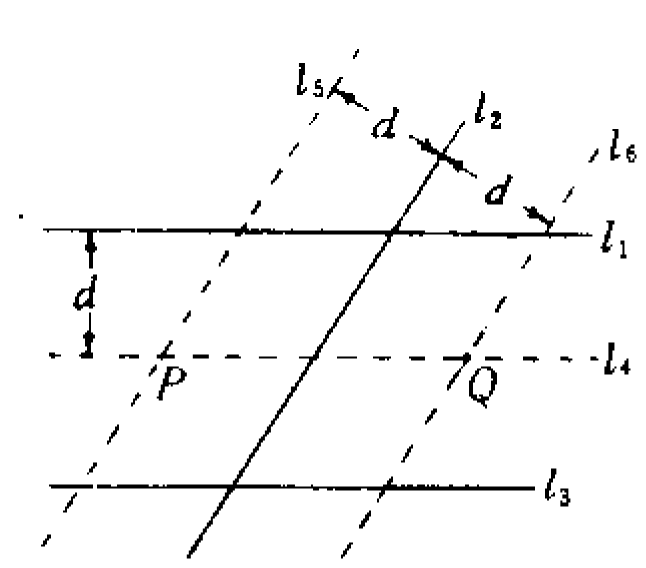
故选(D).

16·2　在同一平面内的三条直线,l_2 与 l_1 相交,l_3 与 l_1 平行,则距这三条直线等距离的点的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 4.　　(E) 8.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解]　设 l_4 为距 l_1,l_3 等距之平行线,且设距离为 d.



又设 l_5,l_6 为距 l_2 距离为 d 的两平行线.

则　l_4,l_5,l_6 的交点 P,Q 为所求.

故选(C).

16·3　在等边三角形 ABC 所在平面上找这样的一点 P,使 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PAC$ 都是等腰三角形,那么具有这样性质的点的个数共有

(A) 1 个.　(B) 4 个.　(C) 7 个.　(D) 9 个.　(E) 10 个.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1986 年)

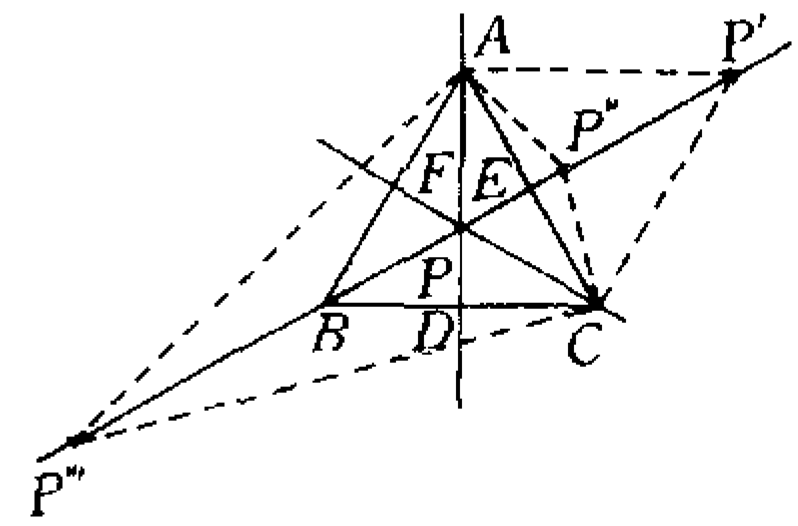
[解] 作 $\triangle ABC$ 各边的垂直平分线 AD,BE,CF 分别交各边于 D,E,F,其交点 P 为所求一点.

另延长 BE,作 $AP'=AB$,作 $BP''=AB$,则 P' 和 P'' 为所求的两点.

延长 EB,使 $BP'''=AB$,则 P''' 为所求的一点;

同理延长 AD 和 DA,同样可以得到符合要求的三个点;

延长 CF 及 FC,也可得到符合要求的三个点.



综上,这样点共 $1+3\cdot(1+2)=10$ 个.

故选(E).

16·4 已知锐角 $\triangle ABC$ 中,$AC<AB<BC$,在 $\triangle ABC$ 所在平面内,使得 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 都是等腰三角形的点 P 的个数是

(A) 6. (B) 9. (C) 13. (D) 14.

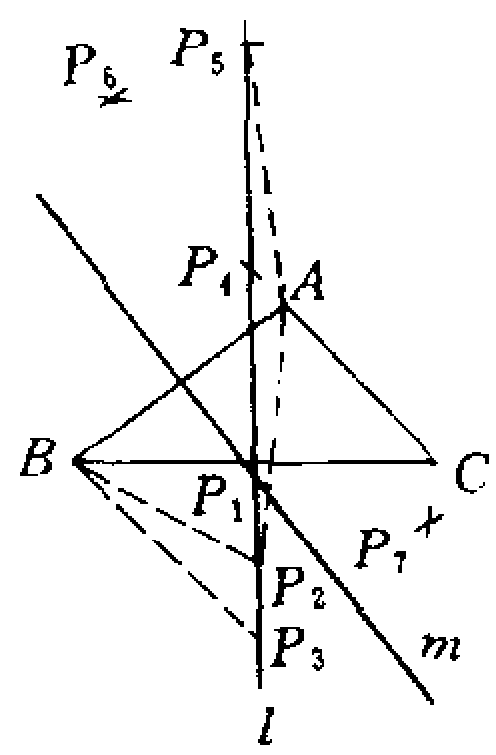
(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年)

[解] 首先,BC 与 AB 的垂直平分线 l,m 的交点 P_1 为所求.

又以 B,A 为圆心 AB 长为半径分别画弧与 l 的四个交点 P_2,P_3,P_4,P_5 亦为所求.

类似地在 m 上亦可求得四个交点(以 B,C 为圆心 BC 长为半径画弧与 m 的交点).

又以 A 为圆心,AB 为半径作圆与以 B 为圆心,BC 为半径的圆交于两点 P_6,P_7;



类似地以 B 为圆心,AB 为半径作圆与以 C 为圆心,BC 为半径的圆交于两点;

以 A 为圆心,AB 为半径作圆与以 C 为圆心,BC 为半径的圆交于一点(另一点与 B 点重合).

综上,共有 14 个点为所求.

故选(D).

16·5 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P,使 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PDA$ 都是等腰三角形.那么,具有这样性质的 P 点个数共有

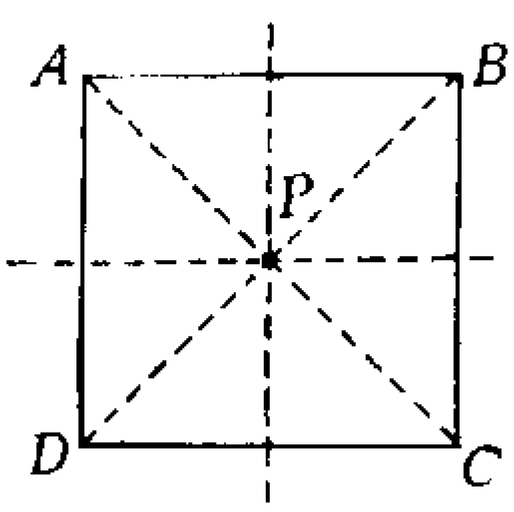
(A) 9 个. (B) 17 个. (C) 1 个. (D) 5 个.

(中国高中数学联赛,1983 年)

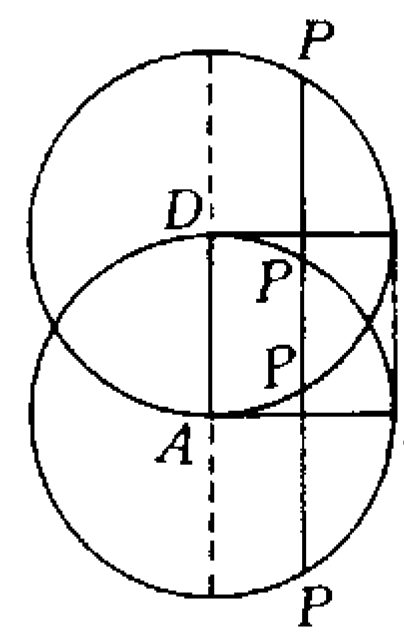
[**解 1**]　在正方形中，若以一边为底作等腰三角形时，那么因为这个等腰三角形的顶点 P 必在这边中垂线上，因而这边的对边也必定同时是以 P 为顶点的另一等腰三角形的底. 所以可以分以下情况讨论：

(1) 正方形中，四条边都是等腰三角形的底.

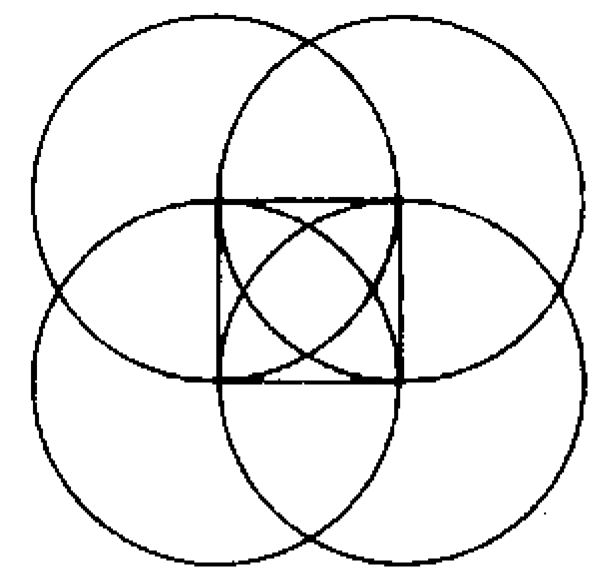
这时，顶点 P 必在两组对边中垂线上，因而 P 应是正方形的中心，这时只有一点，如图 ①.



①



②



③

(2) 正方形中，二边作为等腰三角形的底.

这时，顶点 P 除需在这组对边(如 AB、CD) 的中垂线上外，还应在以 A 为圆心以 AB 为半径的圆或以 D 为圆心，以 DA 为半径的圆上. 这时有四点，如图 ②. 由正方形对称性，同理还有四点.

(3) 正方形中，四边都作为等腰三角形的腰.

这时，顶点 P 应是在以正方形顶点为圆心，边长为半径的圆上，但作出这些圆后(如图 ③) 把任意相邻两圆交点与正方形顶点连接起来，所得四个三角形中总有两个是以正方形的边为底的. 即不存在以四边都作为腰的等腰三角形.

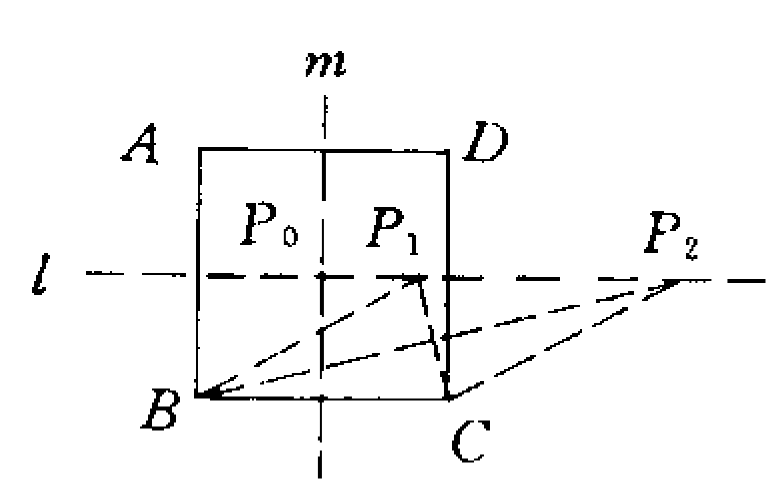
综上所述，符合条件 P 点个数有且只有 9 个.

故选(A).

[**解 2**]　正方形中点 P_0 显然适合.

又如右图，P_1，P_2 亦满足题设.

由对称性，直线 l 上还有两点；直线 m 上亦有 4 点(除 P_0 外). 总计 9 个点.



故选(A).

16·6　在矩形的边上找一点，使得这点与对边两端点的连线将此矩形分成三个彼此相似的三角形，这样的点

(A) 不存在.　　　　　(B) 一定有 2 个.

(C) 一定有 4 个.　　　　　　　　(D) 个数不能确定.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1987 年)

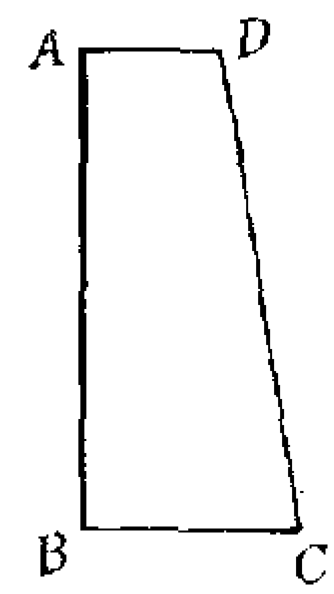
[解] 这样的点与对边两端点的两条连线应成 90° 角,故这样的点是以矩形一边为直径向矩形内所作半圆与对边的公共点.

当 $ABCD$ 为正方形时,这样的点不存在,否定了(B),(C);

当 $AB > 2AD$ 时,点有四个,否定了(A).显然(D) 正确.

故选(D).

16·7 如图,在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB = 7$,$AD = 2$,$BC = 3$.如果边 AB 上的点P 使得以P,A,D 为顶点的三角形和以 P,B,C 为顶点的三角形相似,那么这样的点 P 有



(A) 1 个.　　　　　　　(B) 2 个.

(C) 3 个.　　　　　　　(D) 4 个.

(中国初中数学联赛,1988 年)

[解 1] 设 $AP = x$,则 $PB = 7 - x$.(如图 ①).

(1) 如果 $\triangle PAD \backsim \triangle PBC$, 则 $\dfrac{x}{7-x} = \dfrac{2}{3}$,

$\therefore\quad x = \dfrac{14}{5} < 7$, 符合条件.

(2) 如果 $\triangle PAD \backsim \triangle CBP$, 则 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{7-x}$,

$\therefore\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 6$, 也都符合条件.

所以满足条件的点 P 有 3 个.

故选(C).

[解 2] (1) 如图②,延长 CB到E,使 $BE = CB$.连接 DE交AB 于P_1.

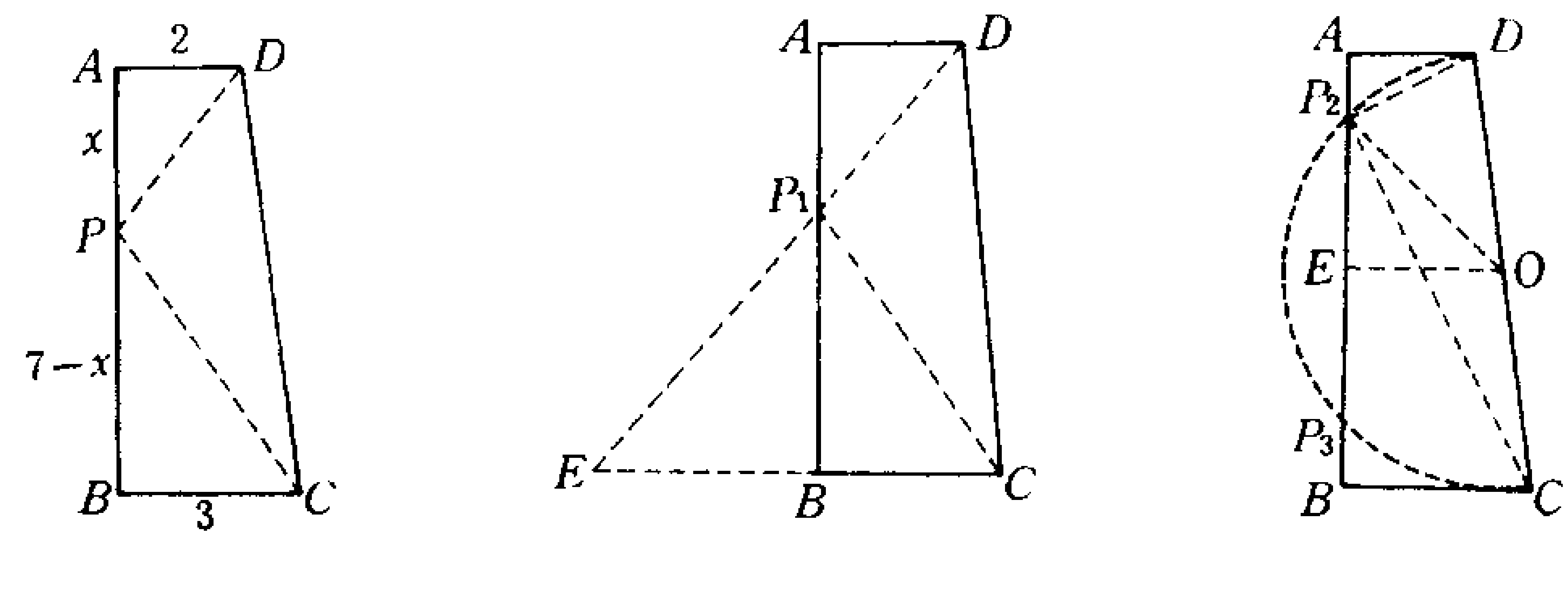
则易证 $\triangle P_1AD \backsim \triangle P_1BE$. $\triangle P_1BE \cong \triangle P_1BC$.

$\therefore\quad P_1$ 符合条件.

(2) 如图 ③,易知中位线

$$OE = \frac{5}{2}, CD = \sqrt{7^2 + (3-2)^2} = 5\sqrt{2}.$$

因此,以 CD 的中点O 为圆心,以 $OD = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\left(> \dfrac{5}{2}\right)$为半径的圆,必和直线 AB 交于两点,记为 P_2 和 P_3.



①　　　　②　　　　③

又由 $$EP_2 = EP_3 = \sqrt{OP_2^2 - OE^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{5}{2} < \frac{7}{2} = EA.$$

可知　P_2 和 P_3 落在线段 AB 内.

易证　$\triangle P_2AD \backsim \triangle CBP_2$，$\triangle P_3AD \backsim \triangle CBP_3$.

所以 P_2 和 P_3 也都符合条件.

以下证明:P_1 必不与 P_2(同理,P_3) 重合.

假若不然,应有 $\angle BP_1C = \angle AP_1D = \angle BCP_1 = 45°$.

$\triangle P_1AD$ 和 $\triangle P_1BC$ 都是等腰直角三角形.

而 $AB = AP_1 + P_1B = AD + BC = 2 + 3 = 5$.

与 $AB = 7$ 的条件相矛盾.

综上,满足条件的点 P 共有三个.

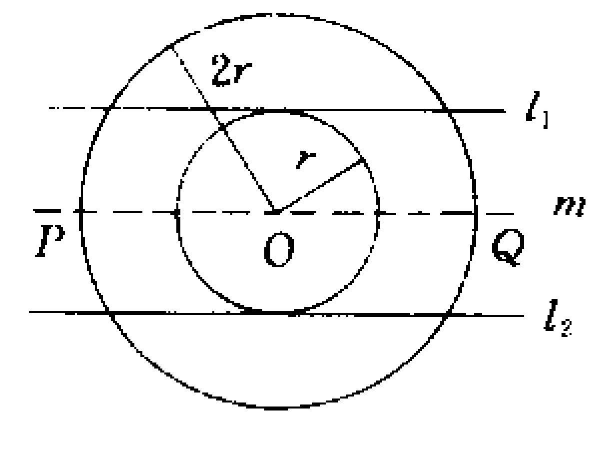
故选(C).

16·8　同一个圆及其两条平行切线等距离的点的数目是

(A) 0.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 无穷个.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　设 l_1, l_2 为已知 $\odot O$ 的两条平行切线,若 r 为 $\odot O$ 半径,则 l_1, l_2 距离为 $2r$.



而与 l_1, l_2 等距的点在直线 m 上(如图),即过 O 与 l_1, l_2 平行的一条直线.

又与 $\odot O$ 上点距离为 r 点在 O 和以 O 为圆心,$2r$ 为半径的圆周上,它与 m 交于 P, Q 点.

综上，P,Q,O 三点适合题设.

故选(C).

16·9 如果 20 个点将某圆周 20 等分，那么顶点只能在这 20 个点中选取的正多边形个数是

(A)4. (B)8. (C)12. (D)24.

(中国初中数学联赛，1996 年)

[解] 设正 k 边形满足条件，则除去 k 个顶点外的 $20-k$ 个点均匀地分布在正 k 边形各边所对的劣弧上.

于是 $\frac{20-k}{k}=\frac{20}{k}-1$ 是整数，故 $k\mid 20$.

但 $k\geqslant 3$,

$\therefore$ $k=4$ 或 5 或 10 或 20.

$\therefore$ 所求正多边形的个数为：

$$\frac{20}{4}+\frac{20}{5}+\frac{20}{10}+\frac{20}{20}=12(\text{个}).$$

故选(C).

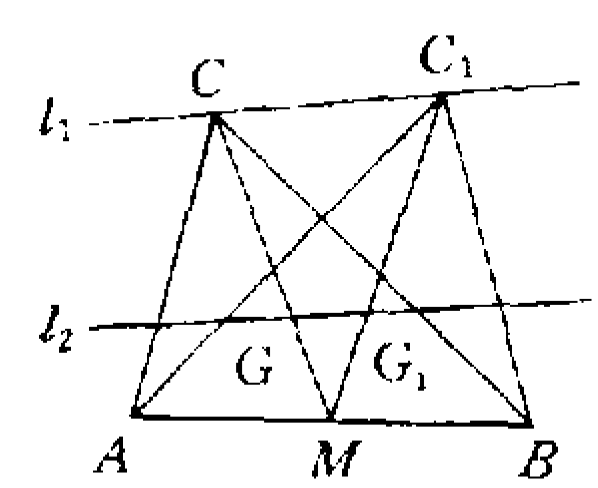
16·10 已知$\triangle ABC$的底边AB的长与位置固定，当顶点 C 在一直线上移动时，则其三中线的交点在何图形上移动

(A) 一圆. (B) 一抛物线. (C) 一椭圆.

(D) 一直线. (E) 不是上述曲线.

(第 13 届美国高中数学考试，1962 年)

[解] 设$\triangle ABC$顶点C在直线l_1上移动至 C_1，若 G 为$\triangle ABC$ 的重心，G_1 为 $\triangle ABC_1$ 的重心.



由三角形重心定理

$$CG=\frac{2}{3}CM,\quad C_1G_1=\frac{2}{3}C_1M,$$

从而 $GG_1 \parallel CC_1$.

即当 C 在 l_1 上移动时，三角形重心 G 在 l_1 的平行线 l_2 上移动.

故选(D).

16·11 设 P 是圆 K 内的一点但不重合于圆心. 经过 P 点作圆 K 的所有弦并定出它们的中点. 这些中点的轨迹是

(A) 除去一点的一个圆.

(B) 若从点 P 到圆心 K 的距离小于圆 K 的半径的一半，是一个圆；否则是小于 $360°$ 的一条圆弧.

(C) 除去一点的一个半圆.

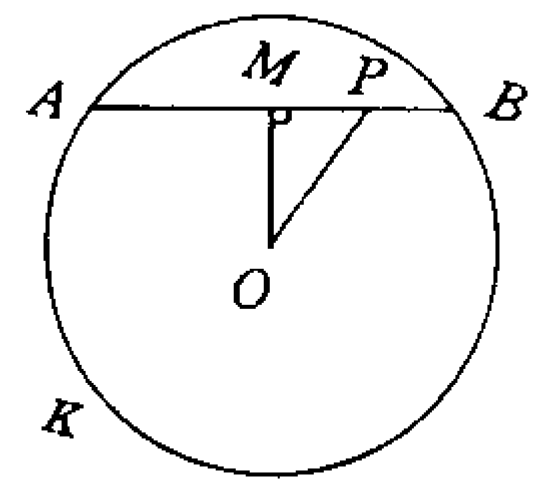
(D) 一个半圆.

(E) 一个圆.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解] 一方面，假设 P 是已知点，O 是圆 K 的圆心，M 是经过 P 点的某一弦 AB 的中点. 因为 $\angle OMP = 90°$，M 处在以 OP 为直径的圆上.

另一方面，若 M 是以 OP 为直径的圆上任何一点，那么经过 P 和 M 的已知圆的弦（若 $M = P$，已知圆的弦切圆 OP 于 P）是 OM 的垂线. 因此 M 是这条弦的中点.



故选 (E).

16·12 一条线段的分割法是，使小的部分比大的部分和大的部分比整个线段一样. 若 R 是小的部分对大的部分的比值，那么

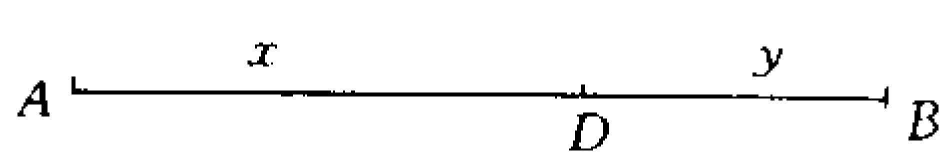
$$R^{\left[R^{\left(R^2+\frac{1}{R}\right)}+\frac{1}{R}\right]}+\frac{1}{R}$$

的值是

(A) 2.　(B) $2R$.　(C) $\frac{1}{R}$.　(D) $2+\frac{1}{R}$.　(E) $2+R$.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

[解] 考虑线段 AB 以 D 为分割点，且设 $AD = x$，$DB = y$，$y < x$，并且 $\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$.



因为 $\frac{y}{x} = R$，我们可选择 $x = 1$，这样 $y = R$，且 $R = \frac{1}{1+R}$，

即 $$R^2 + R - 1 = 0,\quad 且\quad \frac{1}{R} = R + 1.$$

这样 $$R^2 + \frac{1}{R} = R^2 + R + 1 = (R^2 + R - 1) + 2 = 2,$$

从而 $\quad R^{\left[R^{\left(R^2+\frac{1}{R}\right)}+\frac{1}{R}\right]}+\frac{1}{R}=R^{\left[R^2+\frac{1}{R}\right]}+\frac{1}{R}=R^2+\frac{1}{R}=2.$

故选(A).

16·13　在一直线上依次取 O,A,B,C,D 五点，并使 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，$OD=d$，P 为直线上位于B,C间的一点，且有 $AP:PD=BP:PC$.则 OP 等于

(A) $\dfrac{b^2-bc}{a-b+c-d}$.　　(B) $\dfrac{ac-bd}{a-b+c-d}$.

(C) $-\dfrac{bd+ac}{a-b+c-d}$.　　(D) $\dfrac{bc+ad}{a+b+c+d}$.

(E) $\dfrac{ac-bd}{a+b+c+d}$.

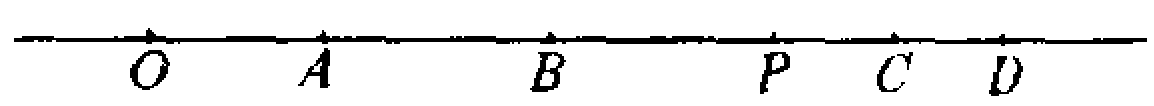
（第 17 届美国高中数学考试，1966 年）

[解]　设 $OP=p$，则

$AP=p-a$，$PD=d-p$，$BP=p-b$，$PC=c-p$.

则　$AP:PD=BP:PC$ 可表示为

$$(p-a):(d-p)=(p-b):(c-p),$$

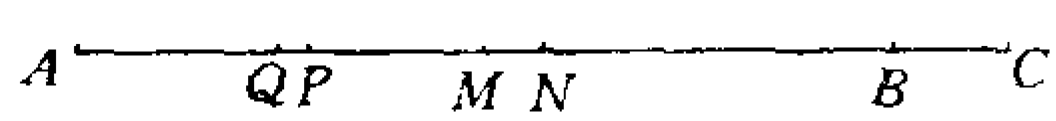


化简后有　$[(a+c)-(b+d)]p=ac-bd$.

$$\therefore\qquad p=\frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

故选(B).

16·14　如图，已知 B 是线段AC 上的一点，M 是线段 AB 的中点，N 为线段AC 的中点，P 为NA 的中点，Q 为MA 的中点.



则 $MN:PQ$ 等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　$\because\quad MN=AN-AM$，　则　$PQ=\dfrac{AN}{2}-\dfrac{AM}{2}$.

$\therefore\quad MN:PQ=(AN-AM):\dfrac{1}{2}(AN-AM)=2:1.$

故选(B).

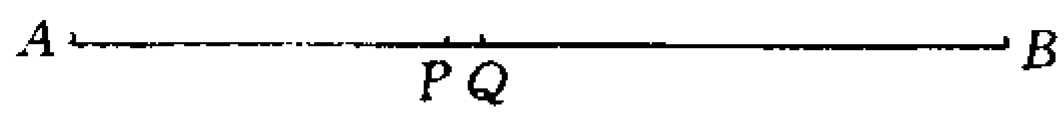
16·15　线段 AB 上有两点 P 与 Q 且在 AB 中点的同侧，P 分 AB 成 $2:3$，Q 分 AB 成 $3:4$，若 $PQ=2$，则 AB 的长为

(A) 60.　(B) 70.　(C) 75.　(D) 80.　(E) 85.

（第 12 届美国高中数学考试，1961 年）

［解］　如下图，由设知

$$AP=\frac{2}{2+3}AB=\frac{2}{5}AB,\quad AQ=\frac{3}{4+3}AB=\frac{3}{7}AB,$$



且　$PQ=\frac{3}{7}AB-\frac{2}{5}AB=\frac{1}{35}AB=2$，　得　$AB=70$.

故选(B).

16·16　在一条直线上已知四个不同的点依次是 A,B,C,D. 那么到 A,B,C,D 的距离之和最小的点

(A) 可以是直线 AD 外的某一点.　(B) 只是 B 点或 C 点.

(C) 只是线段 AD 的中点.　(D) 有无穷多个.

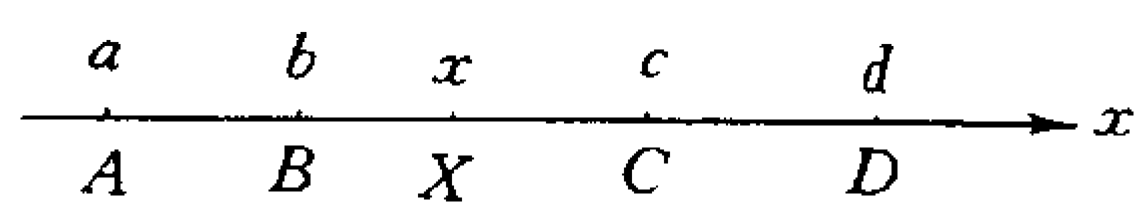
（中国初中数学联赛，1987 年）

［解 1］　易证，线段 BC 上的每一个点到四点 A,B,C,D 的距离之和都等于 $AD+BC$，这也是平面上任何一点到 A,B,C,D 的距离之和中的最小者.

故选(D).

［解 2］　平面上两点连线，线段最短，则所求点当在 AD 上.

设所求点 X 和 A,B,C,D 依次对应数轴上的 x,a,b,c,d，显然有 $a<b<c<d$.（如图）.



于是问题化为求

$$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$$

的极小值.

注意到：若 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，　则

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|\ (x\text{ 为实数})$$

的最小值为 $\begin{cases} f(a_{(n+1)/2}), & n\text{ 为奇数}; \\ f(t), & n\text{ 为偶数}; \end{cases}$

这时 $a_{n/2} \leqslant t \leqslant a_{(n/2)+1}$.

因而 X 应取在 BC 上.

故选(D).

16·17 已知直线上依次有七点 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7$(不一定等距),设 P 为直线上任意选取的一点,并设 s 为线段 $PP_1,PP_2,\cdots,PP_7$ 之长的和当且仅当点 s 最小时 P 的位置为

(A) P_1P_7 的中点. (B) P_2P_6 的中点.

(C) P_3P_5 的中点. (D) P_4. (E) P_1.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解] 先考虑有两个点 P_1,P_2 的情形,此时 P 可选 P_1P_2 上任一点,注意到

$$s = P_1P + PP_2 = P_1P_2.$$

再考虑有三个点 P_1,P_2,P_3 的情形.显然若要使 s 最小,只须取 P_2 点为 P 即可,此时

$$s = P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3.$$

仿上,对于直线上有任意 n 个点来讲:

若 $n = 2k$,则 P 落在 P_kP_{k+1} 上即可;

若 $n = 2k+1$,则 P 选在与 P_{k+1} 重合点.

由上有 $n = 7$ 时,应将 P 选在 P_4 点.

故选(D).

注 此问题化为代数问题即是:

若 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,求 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$ 的极小值.

16·18 点 A 和 B 的距离是 5 个单位长,在给定的一个通过 A,B 两点的平面上,有几条直线满足距离 A 点 2 个单位长,距离 B 点 3 个单位长

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 多于 3.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

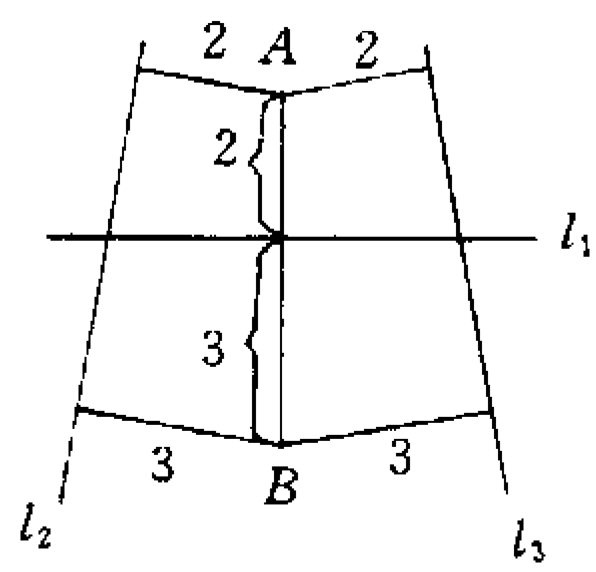
[解] 如图共有 3 条直线满足题设.注意与 AB 垂直的直线 l_1.

故选(D).

16·19 平面上给定不共线的三点 A,B,C,在平面上作直线 l,使点 A,B,C 到直线 l 的距离之比为 $1:1:2$ 或 $1:2:1$ 或 $2:1:1$,则

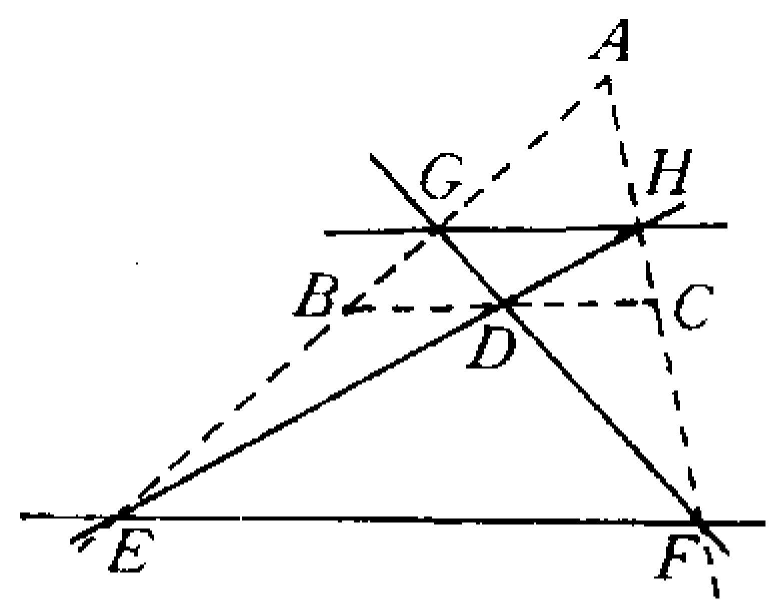
这样的直线的条数是

(A) 3 条. (B) 6 条. (C) 9 条. (D) 12 条. (E) 15 条.



(中国部分省、市初中数学通讯赛,1985 年)

[解] 连结 AB,BC,CA,延长 AB,取 $BE = AB$;延长 AC,使 $CF = AC$.取 BC 中点D.连结 ED,FD,并分别延长,交 AC 于H,交 AB 于G.



则直线 EH,FG,GH,EF 都是距离 B,C,A 各点的距离比为 $1:1:2$.

同理,取 AB,AC 中点,又可得8条符合题意的直线,因此,可有 12 条直线符合要求.

故选(D).

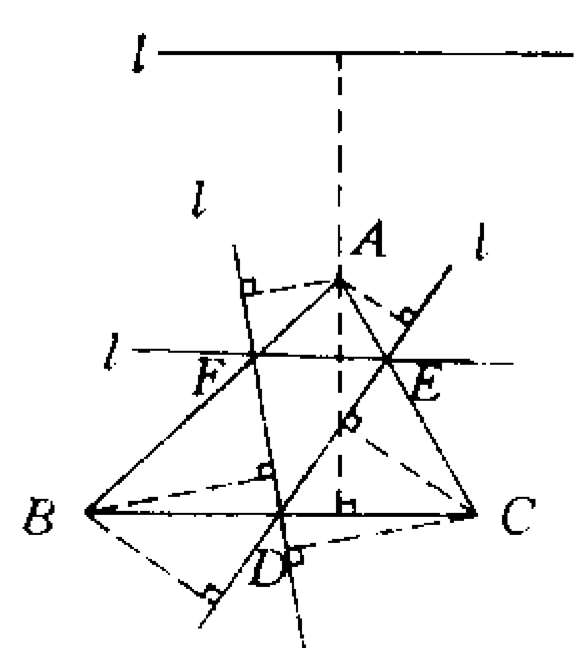
16·20 在 $\triangle ABC$ 所在平面内任作直线l 使A,B,C 三点到直线l 的距离比分别为 $1:2:2$ 或 $2:1:2$ 或 $2:2:1$,这样的直线 l 共有

(A) 3 条. (B) 6 条. (C) 9 条. (D) 12 条.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988 年)

[解] $\because$ 点 B,C 到l 的距离相等,

$\therefore$ 当 B,C 在l 的同侧时,$l \parallel BC$.平行且距离比是 $1:2:2$ 的直线有 2 条.



当 B,C 在l 的异侧时,用相似三角形和全等三角形的性质可证明过 AC,AB 的三等分点 E,F 及底边BC 的中点D 的直线DE 和FD 也符合条件.即对于$1:2:2$来说有 4 条合条件的直线 l(如图).同理满足另外两种比例的直线各有 4 条,共 12 条.

故选(D).

16·21 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A > \angle B > \angle C$,$\angle A \neq 90°$,画直线使它把 $\triangle ABC$ 分成两部分,且使其中一部分与 $\triangle ABC$ 相似,这样的互不平行的直线有

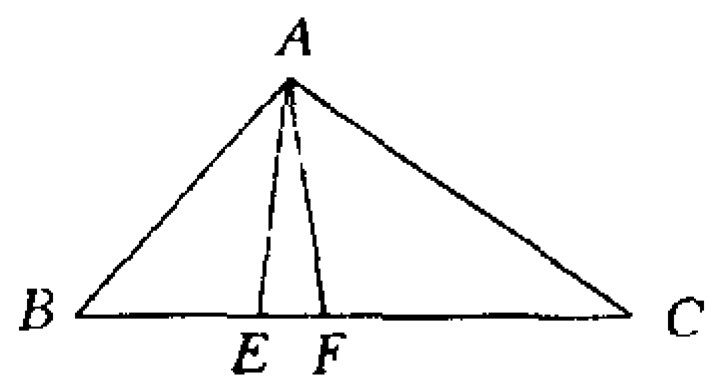
(A) 3 条. (B) 4 条. (C) 5 条. (D) 6 条.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1992 年)

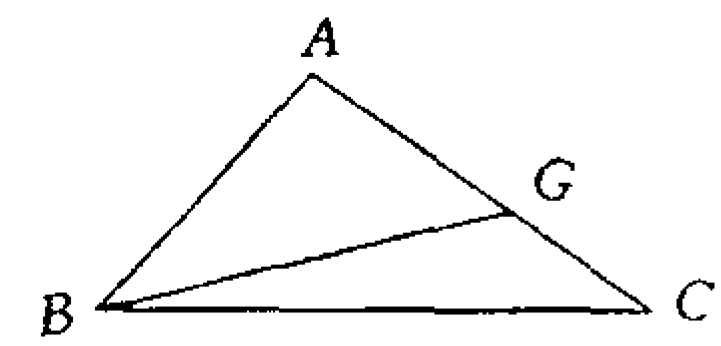
[解]　这种直线可分三类:

(1) 平行于三角形的一边者,共三种;

(2) 从最大角 $\angle A$ 出发的直线有两条为所求,见下图①(注意 $\angle A \neq 90°$):



图①



图②

(3) 从次大角 $\angle B$ 出发的直线有一条为所求,见上图②.

综上,这类直线有 6 条.

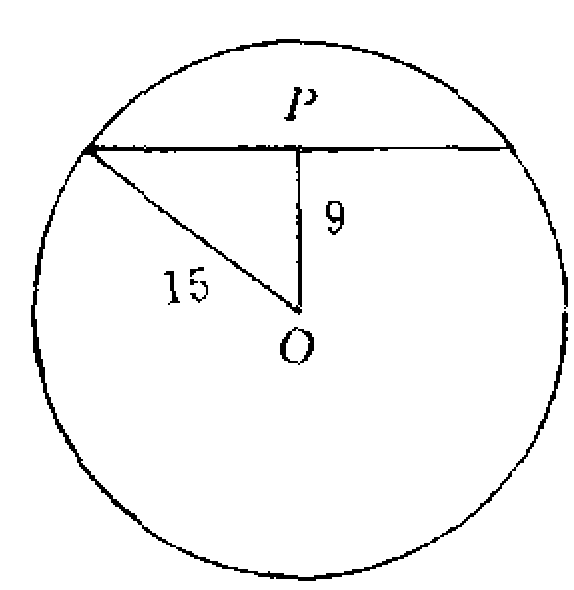
故选(D).

16·22　设点 P 到半径为 15 的圆的圆心距离为 9,那么圆中过 P 点且具有整数长度的弦的条数有

(A) 11.　(B) 12.　(C) 13.　(D) 14.　(E) 29.

（第 42 届美国高中数学考试,1991 年）

[解]　由题设知过 P 点的圆的弦最短者为 $2\sqrt{15^2-9^2}=24$,最长者(即过 P 点的圆的直径)为 30.



其最长者,最短者各有一条.

而长为 25,26,27,28,29 者各两条.

这样过 P 且长为整数的弦有 12 条.

故选(B).

16·23　两条直线相交所成的各角中

(A) 必有一个钝角.　(B) 必有一个锐角.

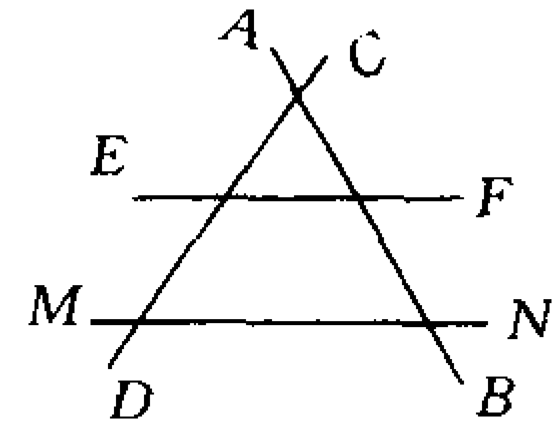
(C) 必有一个不是钝角.　(D) 必有两个锐角.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年）

[解]　考虑到两直线互相垂直时所成四个角皆为直角,则(A),(B),(D)不真.

故选(C).

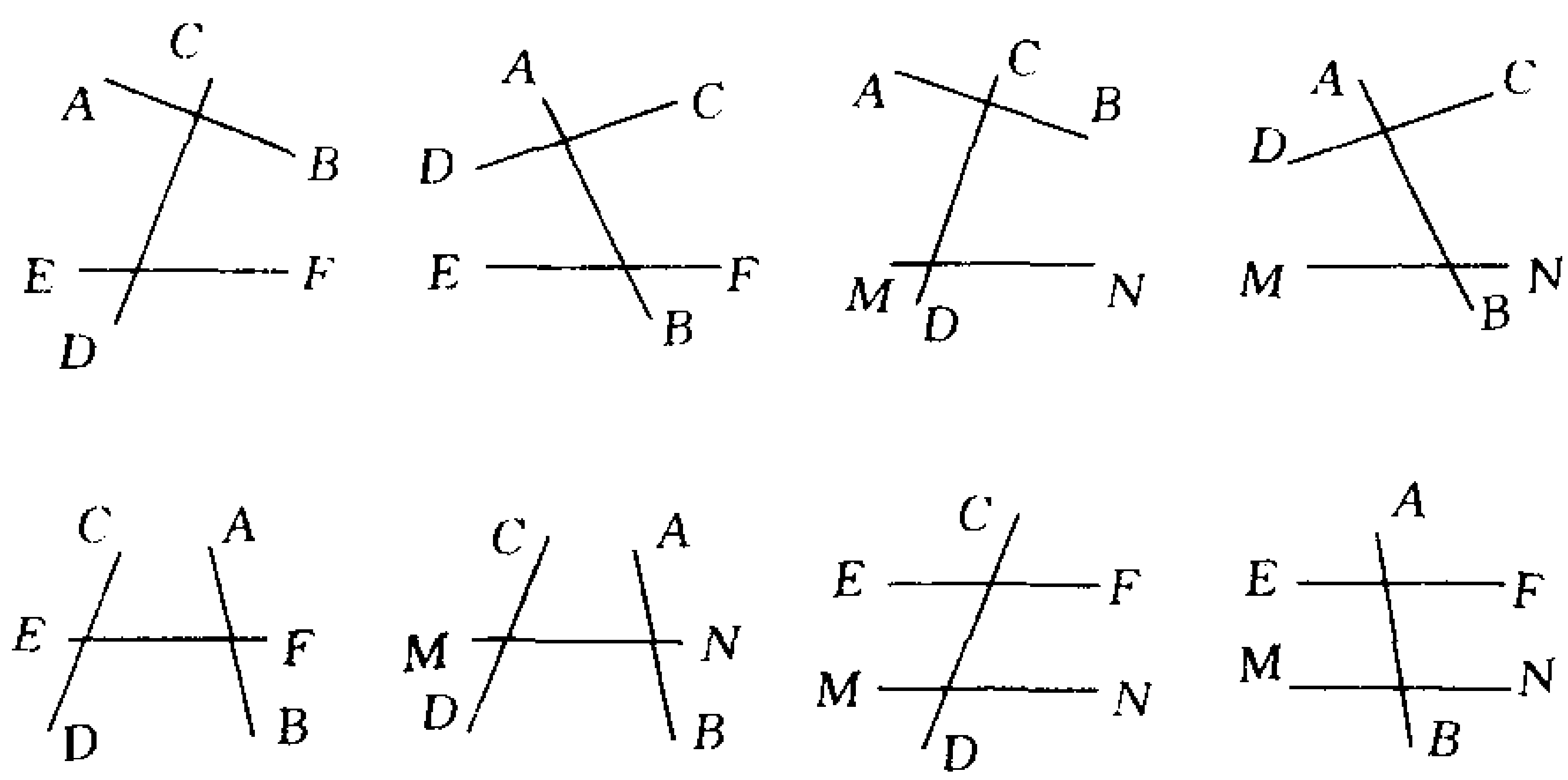
16·24　若平行直线 EF,MN 与相交直线 AB,CD 相交成如图所示的图形,则共得同旁内角的对数为



(A)4.　　　　(B)8.　　　　(C)12.　　　　(D)16.

（中国初中数学联赛,1994年）

[解]　因为每一个“三线八角”基本图形中都有两对同旁内角,而从所给图形中可分解出如下8个基本图形:



因而共有16对同旁内角.

故选(D).

第十七章 三角形

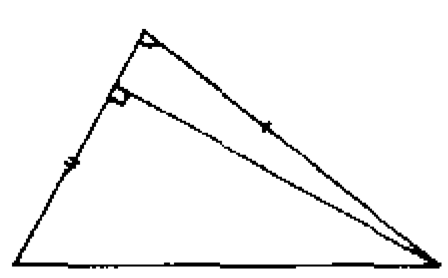
第1节 三角形中的角

17·1 若两个三角形两边和其中一边上的高分别对应相等,那么这两个三角形的第三边所对的角的关系是

(A)相等. (B)互余. (C)互补. (D)相等或互补.

(第1届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1987年)

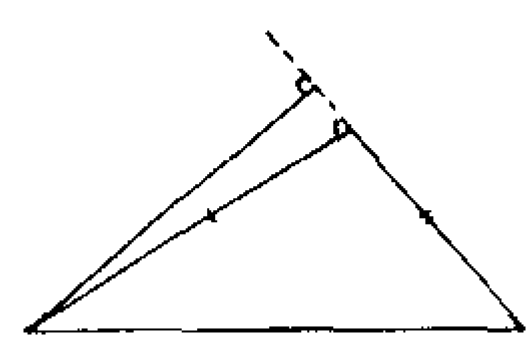
[解] 从下面图①②中可见两三角形第三边所对的角相等;从图①③中可见第三边所对的角互补.



图①



图②



图③

故选(D).

17·2 在$\triangle ABC$中,边a,b,c满足$(a+b+c)(a+b-c)=ab$,则AB边所对的角是

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $120°$. (D) $150°$.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1993年)

[解] 由题设 $(a+b+c)(a+b-c)=ab$ 可有

$$a^2+b^2-c^2=-ab, \quad \text{从而} \quad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}.$$

由余弦定理知 $\cos\angle C=-\frac{1}{2}$, $\therefore$ $\angle C=120°$.

故选(C).

17·3　若 α,β,γ 是三角形的三个内角. 而 $x=\alpha+\beta$, $y=\beta+\gamma$, $z=\gamma+\alpha$. 那么关于 x,y,z 中锐角个数不正确的结论是

(A)可能没有锐角.　　(B)可能有一个锐角.

(C)可能有两个锐角.　　(D)最多有一个锐角.

(E)不会有两个锐角.

（中国四川省重庆市初中数学竞赛,1984 年）

[解]　由设知 $\alpha+\beta+\gamma=180°$,且

$$x+y+z=2(\alpha+\beta+\gamma)=360°.$$

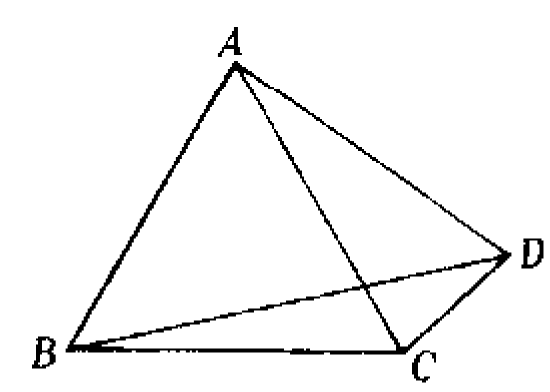
今设 x,y,z 中有两个锐角,无妨设为 x,y.

即　$0°<x<90°$,　$0°<y<90°$,　则　$0°<x+y<180°$.

从而　$z=360°-(x+y)>180°$,即 $\gamma+\alpha>180°$. 这是不可能的(因为 $\alpha+\beta+\gamma=180°$).

故选(C).

17·4　如图,在等边三角形 ABC 形外作 $AD=AB$. 连 DC,BD. 则$\angle CDB$ 等于

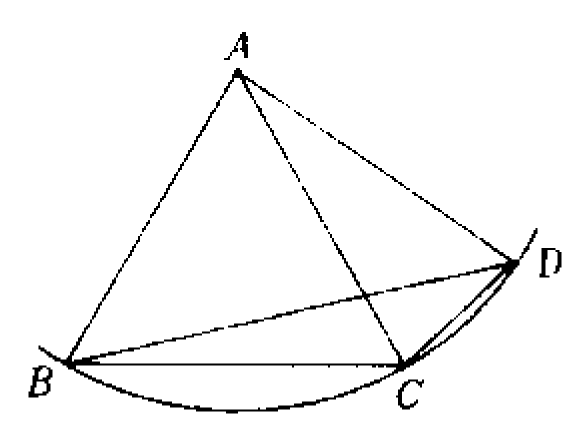


(A) 60°.　　(B) 45°.

(C) 30°.　　(D)无法确定.

（中国湖北省武汉市初中数学竞赛,1988 年）

[解]　由设 $AB=AC=AD$,则 B,C,D 三点均在以 A 为圆心,AB 为半径的圆上.



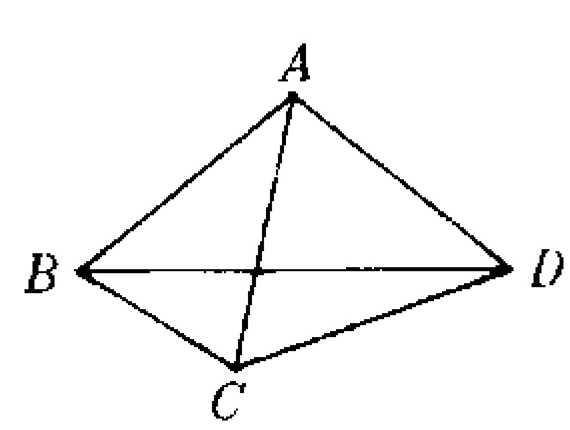
所以　$\angle CDB \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$,

又　$\overset{\frown}{BC} \overset{m}{=} \angle ABC=60°$,

则　$\angle CDB=\dfrac{1}{2}\angle ABC=30°$.

故选(C).

17·5　右图中,$AB=AC=AD$,如果$\angle DAC$ 是$\angle CAB$ 的 k 倍(k 为实数),那么$\angle DBC$ 是$\angle BDC$ 的

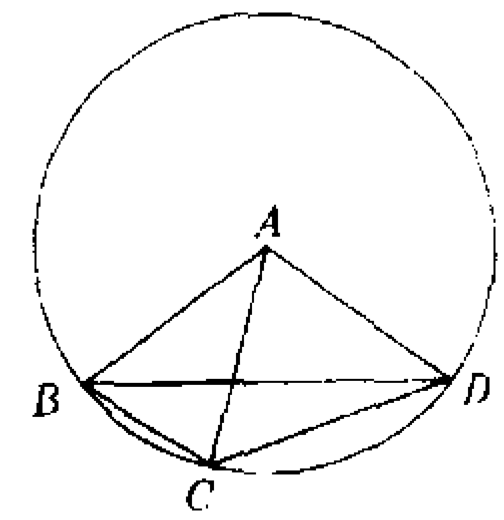


(A) k 倍.　　(B) $2k$ 倍.

(C) $3k$ 倍.　　(D)都不对.

（中国上海市初中数学竞赛,1984 年）

[解]　画出圆心在 A,半径为 AB 的圆,则由题设 C,D 在圆上.



由　$\angle DAC=k\angle CAB$,则　$\overset{\frown}{DC}=k\overset{\frown}{BC}$.

从而　$\angle DBC=k\angle BDC$　(圆周角性质).

故选(A).

17·6　在三角形 ABC 中,$\angle C=\theta$,$\angle B=2\theta$,其中 $0°<\theta<60°$.圆心是 A 及半径是 AB 的圆与 AC 相交于 D,并与 BC 相交(若需要可延长 BC)相交于 B、E(E 可与 B 重合).那么 $EC=AD$ 成立的条件是

(A)没有 θ 的值可适合.　　(B)仅当 $\theta=45°$.

(C)仅当 $0°<\theta\leqslant45°$.　　(D)仅当 $45°\leqslant\theta<60°$.

(E)对于所有满足 $0°<\theta<60°$的 θ 都适合.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解]　就 θ 取值分三种情形讨论:

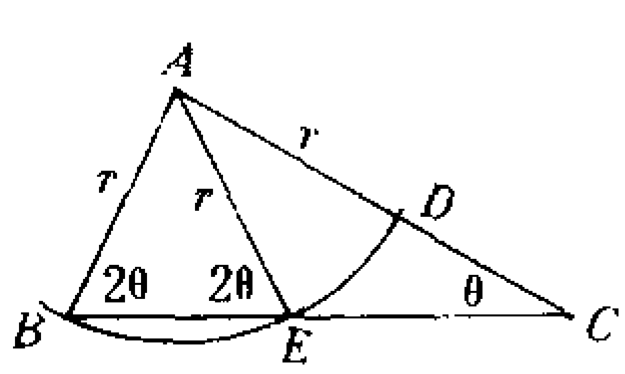
(1)若 $0°<\theta<45°$(见图①),那么对$\triangle EAC$ 运用三角形的外角定理得到 $2\theta=\angle EAC+\theta$,所以$\angle EAC=\theta$.故$\triangle EAC$ 是等腰三角形.因此 $EC=AE=AD$.

(2)若 $\theta=45°$,那么$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形,这时 E 与 B 重合,那么

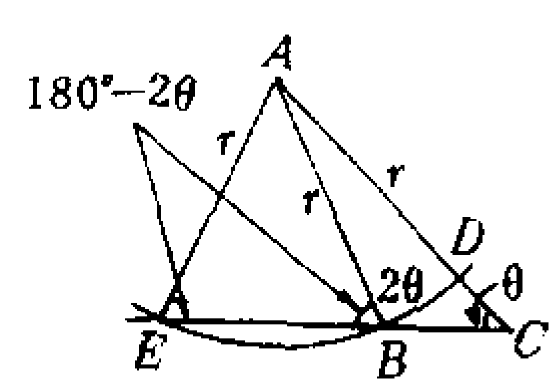
$$EC=BC=AB=AD.$$

(3)若$45°<\theta<60°$(见图②),那么

$$\begin{aligned}\angle EAC&=\angle EAB+\angle BAC\\&=[180°-2(180°-2\theta)]+[180°-3\theta]\\&=\theta.\end{aligned}$$



图①



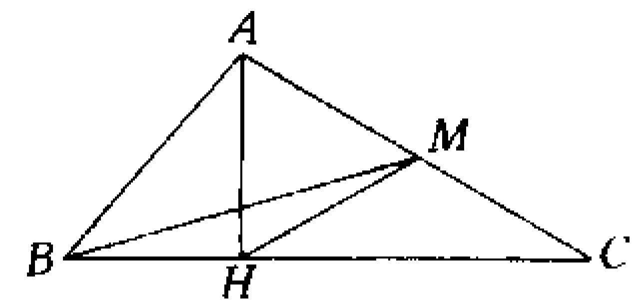
图②

这样$\triangle EAC$ 是等腰三角形,有　$EC=EA=AD$.

故选(E).

17·7　在$\triangle ABC$ 中,$\angle A=100°$,$\angle B=50°$,$\angle C=30°$,又 AH 是

高，BM 是中线，则$\angle MHC$ 等于



(A) 15°. (B) 22.5°. (C) 30°.

(D) 40°. (E) 45°.

(第 40 届美国高中数学考试，1989 年)

[解] 由设在 Rt$\triangle AHC$ 中，M 是AC 中点，则 HM 是斜边上的中线，从而 $MH=MC$.

$$\therefore \quad \angle MHC=\angle C=30°.$$

故选(C).

17·8 在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的乘积的 2 倍时，那么三角形的一个锐角为

(A) 15°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 60°. (E) 75°.

(第 10 届美国高中数学考试，1959 年)

[解] 设直角三角形三边长分别为 a,b,c. 依题设及勾股定理有：

$$c^2=2ab,\quad c^2=a^2+b^2,$$

故 $$a^2+b^2=2ab,\quad 得\quad a=b.$$

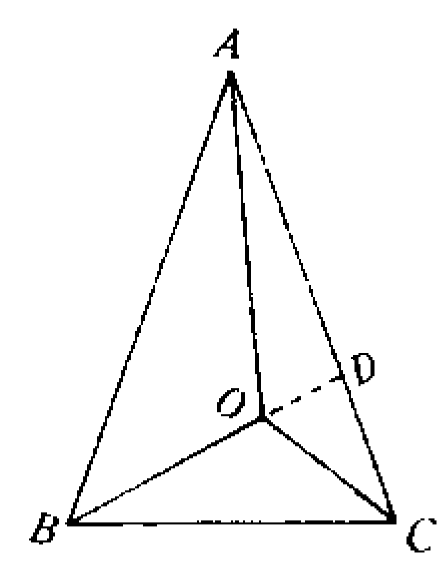
故选(C).

17·9 在三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=40°$，点 O 在三角形内，且$\angle OBC=\angle OCA$，则$\angle BOC$ 的度数为

(A) 110°. (B) 35°. (C) 140°. (D) 55°. (E) 70°.

(第 5 届美国高中数学考试，1954 年)

[解] 延长 BO 交AC 于D. 由三角形外角性质有



$$\begin{aligned}\angle BOC &=\angle OCD+\angle ODC\\ &=\angle OCD+(\angle OAD+\angle AOD)\\ &=\angle OCD+\angle OAD+\angle OAB+\angle ABO\\ &=\angle BAC+\angle ABC,\end{aligned}$$

注意到$\angle OBC=\angle OCA$ 即可.

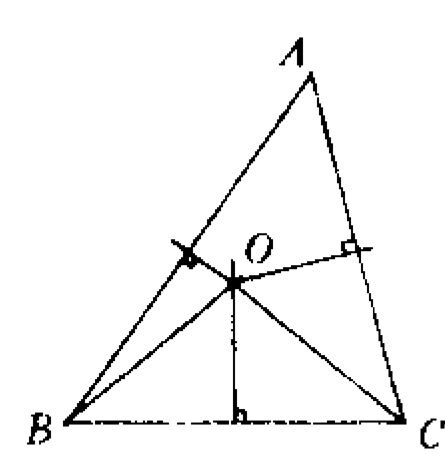
又 $\angle BAC=40°$， 则

$$\angle ABC=\frac{1}{2}(180°-40°)=70°,$$

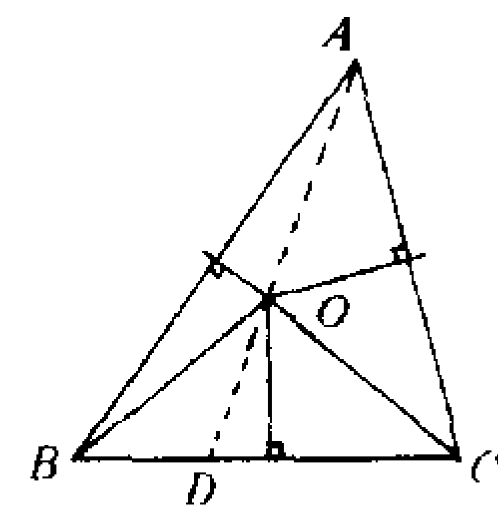
所以 $\angle BOC=40°+70°=110°$.

故选(A).

17·10 如图，已知 O 是锐角$\triangle ABC$ 三边



中垂线的交点，$\angle A=50°$. 则$\angle BOC$的度数是



(A) 90°.　　(B) 95°.

(C) 100°.　　(D) 105°.

(中国四川省初中数学竞赛，1991年)

[解] 连结AO且延长交BC于D，

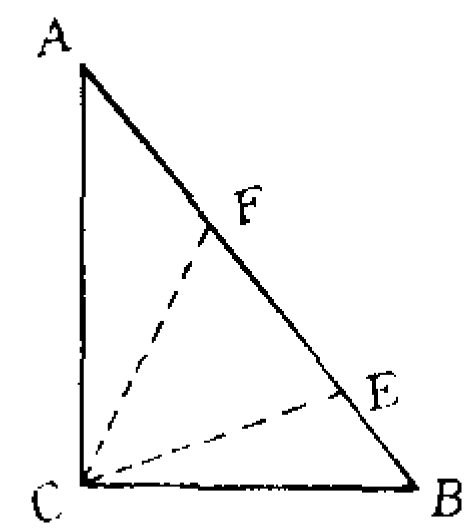
则 $\angle OAB=\angle OBA$，$\angle OAC=\angle OCA$.

于是

$$\begin{aligned}\angle BOC&=\angle BOD+\angle DOC\\&=\angle OAB+\angle OBA+\angle OAC+\angle OCA\\&=2\angle OAB+2\angle OAC=2\angle A=100°.\end{aligned}$$

故选(C).

17·11 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=AE$，$BC=BF$. 则$\angle ECF=$



(A)60°.　　(B)45°.

(C)30°.　　(D)不确定.

(中国安徽省初中数学竞赛，1997年)

[解] 设$\angle ECF=x$，$\angle ACF=\alpha$，$\angle BCE=\beta$.

则有 $\angle EFC=x+\beta$，$\angle FEC=x+\alpha$，$x+\alpha+\beta=90°$.

$\therefore$ $\angle EFC+\angle FEC+x=180°$，

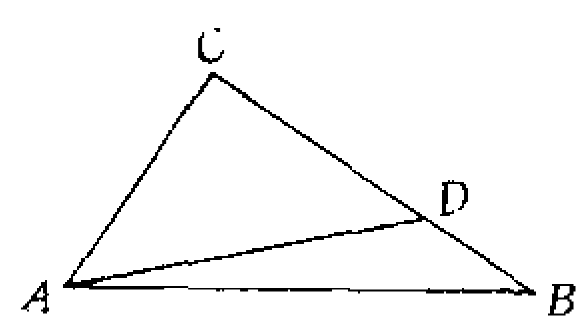
$3x+\alpha+\beta=180°$，$2x=90°$，$x=45°$.

故选(B).

17·12 在$\triangle ABC$中，$AC=CD$，且 $\angle CAB-\angle ABC=30°$，则$\angle BAD$的度数是

(A) 30°.　　(B) 20°.　　(C) 22.5°.

(D) 10°.　　(E) 15°.



(第8届美国高中数学考试，1957年)

[解] 由三角形外角性质及题设有

$$\begin{aligned}\angle BAD&=\angle CDA-\angle B=\angle CAD-\angle B\\&=(\angle CAB-\angle BAD)-\angle B.\end{aligned}$$

故 $2\angle BAD=\angle CAB-\angle B=30°$，即$\angle BAD=15°$.

故选(E).

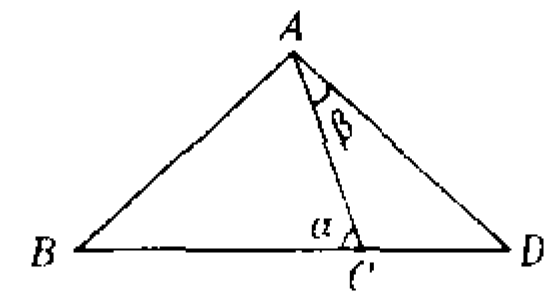
17·13 如下页图，若$AD=AB=BC$，那么α,β之间的关系是

(A) $\alpha=2\beta$.　　(B) $\alpha+\beta=90°$.

(C) $2\alpha+\beta=180°$.　　(D) $3\alpha-\beta=180°$.

(中国湖北省荆州地区初中数学竞赛，1987年)

[**解**] 由设知$\angle B=\angle D$,又 $\alpha=\beta+\angle D=\beta+\angle B$,



而 $\angle B=180^\circ-2\alpha$, 则 $\alpha=\beta+(180^\circ-2\alpha)$.

即 $3\alpha-\beta=180^\circ$.

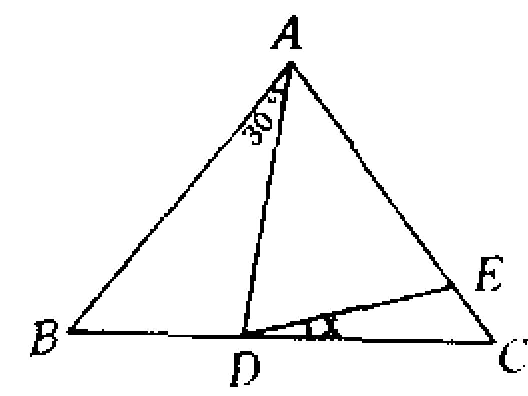
故选(D).

17·14 如图,$AB=AC$,$\angle BAD=30^\circ$,且 $AE=AD$,则 x 等于

(A) 7.5°. (B) 10°. (C) 12.5°.

(D) 15°. (E) 20°.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)



[**解**] 如图,由三角形外角性质有

$$\angle x=\angle ADC-\angle ADE=\angle ADC-\angle AED$$
$$=\angle ADC-(\angle x+\angle C),$$

故

$$\angle x=\frac{1}{2}(\angle ADC-\angle C)$$
$$=\frac{1}{2}[(\angle B+\angle BAD)-\angle C]\ (\because \angle B=\angle C)$$
$$=\frac{1}{2}\angle BAD=15^\circ.$$

故选(D).

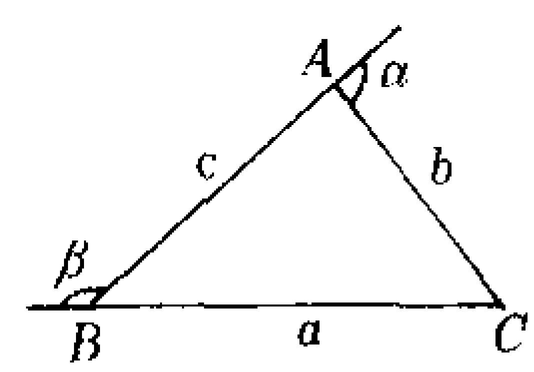
17·15 如图,$\triangle ABC$ 中三边a,b,c所对的内角分别是$\angle A,\angle B,\angle C$,以 A 为顶点的$\triangle ABC$ 的外角记为α,以 B 为顶点的$\triangle ABC$ 的外角记为β,则下面四个判断中正确的一个是

(A) $a=b+c$.

(B) $\angle B=\alpha$.

(C) $\alpha>120^\circ,\beta\geqslant120^\circ,\angle C<60^\circ$.

(D) $\angle B+\angle C=\alpha$.



(中国北京市初中数学竞赛,1985 年)

[**解**] 如图,a,b,c 为三角形三边,应有 $a<b+c$,故排除(A).

由三角形外角定理知 $\alpha>\angle B$,故排除(B).

$\because$ $\alpha>120^\circ$, $\therefore$ $\angle A<60^\circ$;

又 $\beta\geqslant120^\circ$, $\therefore$ $\angle B\leqslant60^\circ$.

若 $\angle C<60^\circ$, 则 $\angle A+\angle B+\angle C<180^\circ$, 矛盾.

故排除(C).

经验证,三角形外角等于不相邻二内角之和,有$\angle B+\angle C=\alpha$成立.

故选(D).

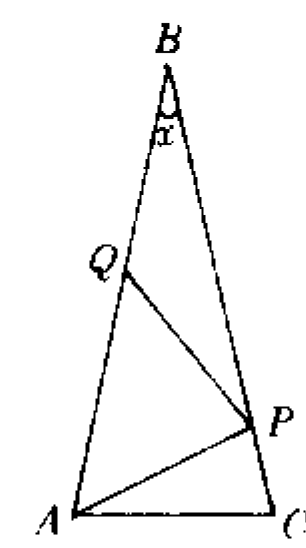
17·16 $\triangle ABC$是以AC为底的等腰三角形,点P与Q分别在CB与AB上,并且$AC=AP=PQ=QB$,则$\angle B$的度数为

(A) $25\frac{5}{7}$. (B) $26\frac{1}{3}$. (C) 30.

(D) 40. (E)无法确定.

(第12届美国高中数学考试,1961年)

[解] 设$\angle B=x$,由题设及三角形外角性质有



$$\angle QBP=x,\angle AQP=\angle QAP=2x,$$

故 $\angle QPA=180-4x$,

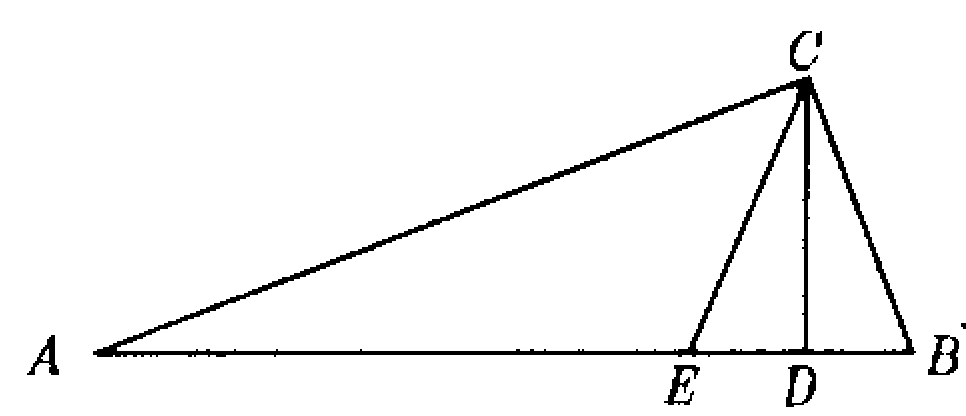
则 $\angle APC=3x$, $\angle ACP=3x$.

又 $\angle BCA=\angle BAC=3x$, 则$\triangle ABC$中

$x+3x+3x=180$, 得 $x=25\frac{5}{7}$.

故选(A).

17·17 如图,$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,CD和CE分别是底边AB上的高和$\angle C$的平分线.若$\triangle CED\backsim\triangle ABC$.则$\angle ECD$等于



(A) 18°. (B) 20°.

(C) 22.5°. (D) 30°.

(中国山东省初中数学竞赛,1993年)

[解] 由设$\angle ACB=90°$,又$CD\perp AB$,且$\triangle CED\backsim\triangle ABC$,

则 $\angle CED=\angle ABC$, 知$\triangle CEB$为等腰三角形.

从而 CD平分$\angle ECB$. 又 CE平分$\angle ACB$,

所以 $\angle ECD=\frac{1}{2}\angle ECB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\angle ACB=22.5°$.

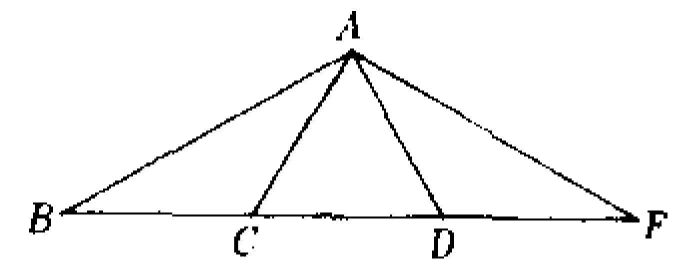
故选(C).

17·18 如图,$AC=CD=DA=BC=DE$.则$\angle BAE$是$\angle BAC$的

(A) 4倍. (B) 3倍.

(C) 2 倍.　　　　(D) 1 倍.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)



[**解**]　由题设知$\triangle ACD$为等边三角形,且$\triangle ACB$,$\triangle ADE$均为等腰三角形.

则$\angle BAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$,

同理　$\angle DAE=30^\circ$,　则　$\angle BAE=60^\circ+30^\circ+30^\circ=120^\circ$.

故选(A).

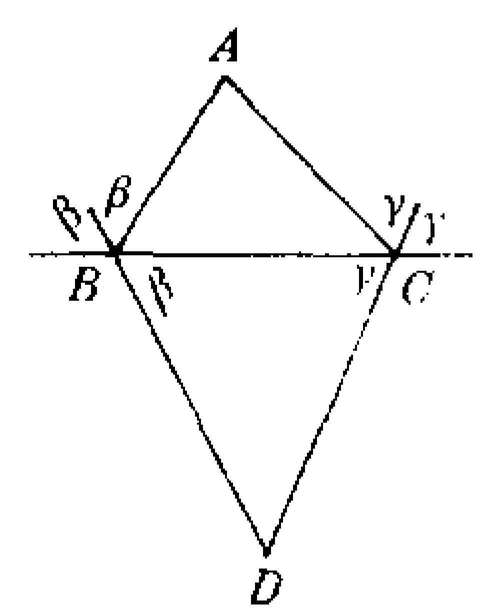
17·19　设$\triangle ABC$的$\angle B$和$\angle C$的外角平分线交于D,则$\angle BDC$的度数为

(A)$\frac{1}{2}(90^\circ-\angle A)$.　(B) $90^\circ-\angle A$.　(C)$\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$.

(D) $180^\circ-\angle A$.　　(E) $180^\circ-2\angle A$.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[**解**]　所设如右图所示,由三角形外角性质有



$2\beta=180^\circ-\angle B$,　$2\gamma=180^\circ-\angle C$,

故　$\beta+\gamma=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

又　$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$,

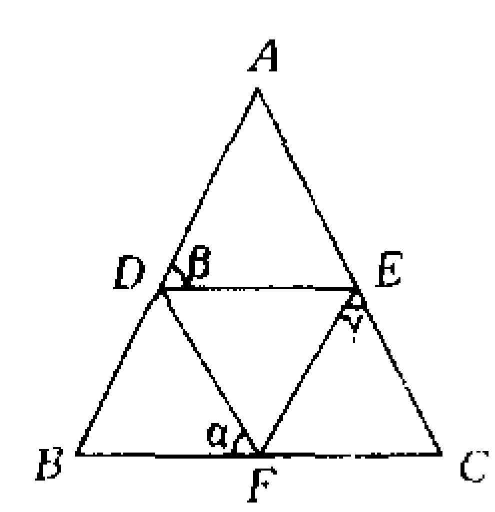
因而　$\angle BDC=180^\circ-(\beta+\gamma)$

$$=180^\circ-\left[180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A).$$

故选(C).

17·20　如图,等腰三角形 ABC,　$AB=AC$,$\triangle DEF$为内接正三角形,$\angle BFD=\alpha$,$\angle ADE=\beta$,$\angle FEC=\gamma$,则



(A) $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.　　　　(B) $\beta=\frac{\alpha-\gamma}{2}$.

(C) $\alpha=\frac{\beta-\gamma}{2}$.　　　　(D) $\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}$.

(E)非上述答案.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[**解**]　由三角形外角定理有

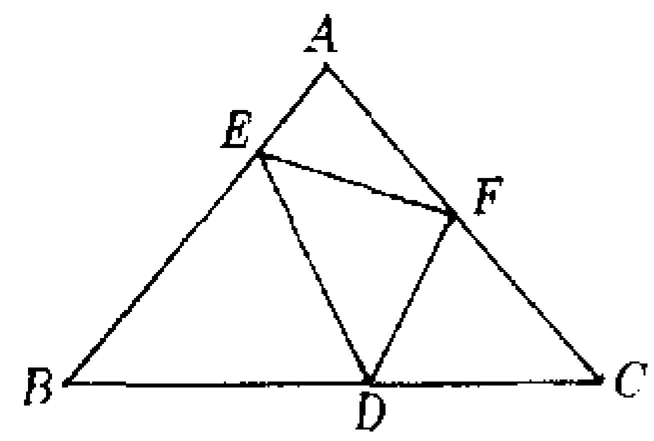
$$\beta+60^\circ=\alpha+\angle B,\quad \alpha+60^\circ=\gamma+\angle C,$$

因而
$$\beta-\alpha=\alpha-\gamma+\angle B-\angle C.$$

由 $\angle B=\angle C$，则 $\beta-\alpha=\alpha-\gamma$，即 $\alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

故选(D).

17·21　在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=80^\circ$，D是BC上一点，$BD=BE$，$CD=CF$，$\angle EFD$的度数:$\angle FED$的度数$=3:2$，那么$\angle AEF$的度数是



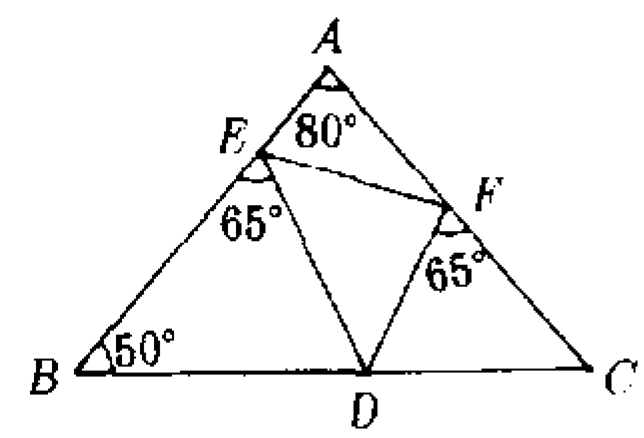
(A) 78°.　　(B) 63°.

(C) 52°.　　(D) 37°.

(第1届中国天津市“中华少年杯”数学邀请赛，1987年)

[解]　由题设有$\angle B=\angle C=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=50^\circ$，

$$\angle BED=\angle CFD=\frac{1}{2}(180^\circ-50^\circ)=65^\circ.$$



若　$\angle AEF=63^\circ$，　则有

$\angle AFE=180^\circ-80^\circ-63^\circ=37^\circ$，

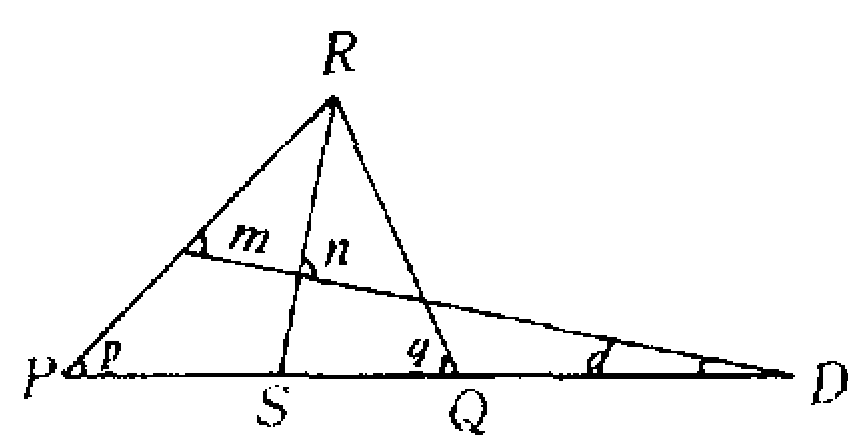
$\angle EFD=180^\circ-37^\circ-65^\circ=78^\circ$，

$\angle FED=180^\circ-63^\circ-65^\circ=52^\circ$，

这时　$\angle EFD$的度数:$\angle FED$的度数$=3:2$.

故选(B).

17·22　已知三角形PQR中，RS平分$\angle R$，延长PQ至D且使$\angle n$为直角，则



(A) $\angle m=\dfrac{1}{2}(\angle p-\angle q)$.

(B) $\angle m=\dfrac{1}{2}(\angle p+\angle q)$.

(C) $\angle d=\dfrac{1}{2}(\angle q+\angle p)$.

(D) $\angle d=\dfrac{1}{2}\angle m$.

(E)非上述答案.

(第5届美国高中数学考试，1954年)

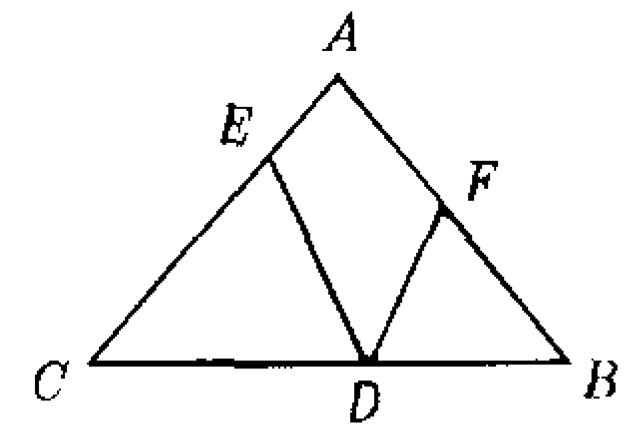
[解]　由三角形外角性质及题设有

$$\angle m=\angle p+\angle d=\angle p+(\angle q-\angle m),$$

即 $$2\angle m=\angle p+\angle q, \text{或} \angle m=\frac{1}{2}(\angle p+\angle q).$$

故选(B).

17·23 在△ABC 中, $AB=AC$, $\angle A=80°$. 若 D, E 和 F 点分别在 BC, AC 和 AB 边上,并且 $CE=CD$, $BF=BD$, 那么 $\angle EDF$ 等于



(A) 30°. (B) 40°.

(C) 50°. (D) 65°.

(E)这些都不对.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 由设 $\angle A=80°$, 且 $AB=AC$, 则

$$\angle B=\angle C=50°,$$

同理 $$\angle CDE=\angle FDB=65°.$$

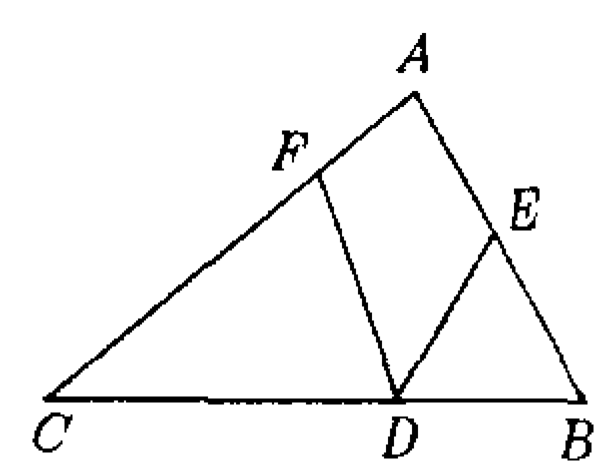
故 $$\angle EDF=180°-2\cdot 65°=50°.$$

故选(C).

注 甚至当 $AB\neq AC$ 时,上述结论仍成立:

$$\begin{aligned}\angle EDF&=180°-\angle CDE-\angle FDB\\&=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle C)-\frac{1}{2}(180°-\angle B)\\&=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=50°.\end{aligned}$$

17·24 在△ABC 中, $\angle A=80°$, 点 D, E, F 分别在边 BC, AB, AC 上,且 $BD=BE$, $CD=CF$(如图). 那么 $\angle EDF$ 等于



(A) 30°. (B) 40°.

(C) 50°. (D) 65°.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛,1990 年)

[解] 设 $\angle BDE=\alpha$, $\angle FDC=\beta$, 由设 $BE=BD$, $CD=CF$, 则在△BED 和△CDF 中有

$$2\alpha=180°-\angle B,\quad 2\beta=180°-\angle C.$$

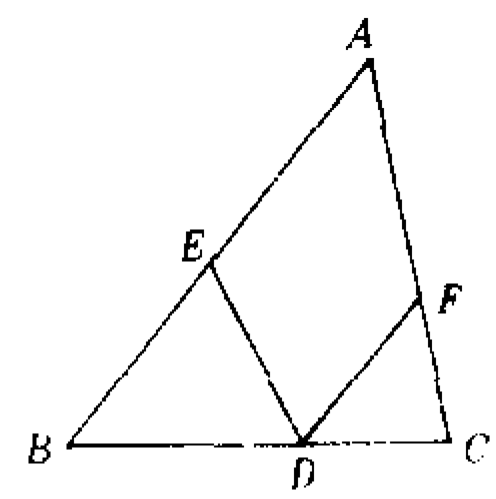
从而 $$\begin{aligned}2(\alpha+\beta)&=360°-(\angle B+\angle C)\\&=180°+[180°-(\angle B+\angle C)]\end{aligned}$$

$$= 180° + 80° = 260°,$$

因而 $\alpha + \beta = 130°$,且 $\angle EDF = 180° - (\alpha + \beta) = 50°$.

故选(C).

17·25 如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 50°$,且 $BE = BD, CF = CD$.则$\angle EDF$ 等于



(A) 30°. (B) 135°. (C) 65°. (D) 60°.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由 $\angle BAC = 50°$, 知 $\angle B + \angle C = 130°$.

又 $BE = BD$, $CF = CD$, 知

$$\angle BDE = \angle BED, \quad \angle CFD = \angle CDF.$$

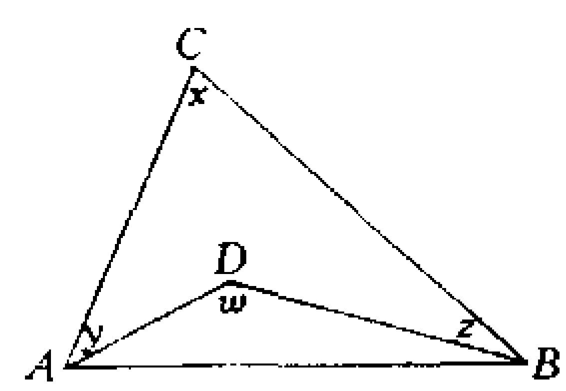
故 $\angle BDE = \frac{1}{2}(180° - \angle B)$, $\angle CDF = \frac{1}{2}(180° - \angle C)$.

所以 $\angle BDE + \angle CDF = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$,

则
$$\begin{aligned}\angle EDF &= 180° - (\angle BDE + \angle CDF) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)\\ &= 65°.\end{aligned}$$

故选(C).

17·26 在右图所示的$\triangle ABC$ 中,D 为其内一点,x, y, z, w 是所示各角的度数,则用 y, z 和 w 表示 x 的式子为



(A) $w - y - z$.

(B) $w - 2y - 2z$.

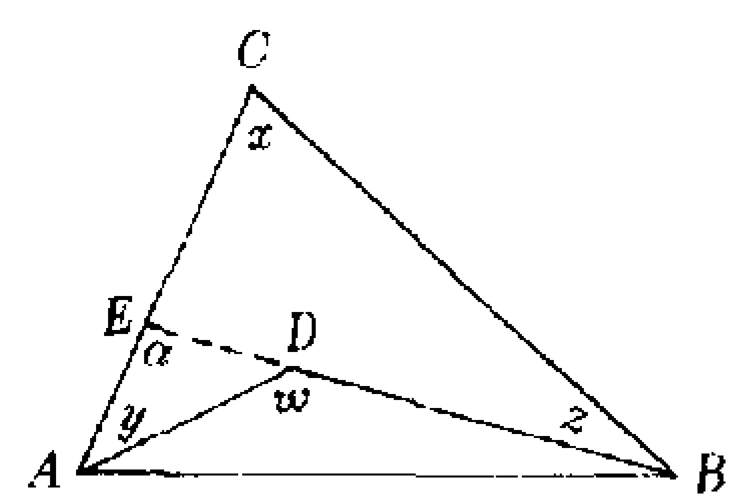
(C) $180° - w - y - z$.

(D) $2w - y - z$.

(E) $180° - w + y + z$.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解] 延长 BD 交 AC 于 E,且设$\angle AED = \alpha$.



由三角形外角性质有

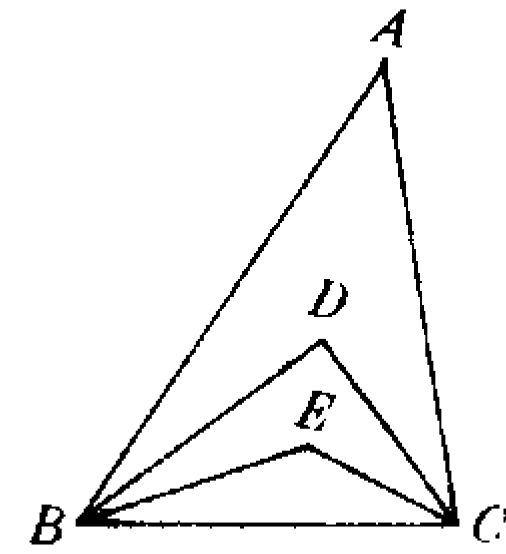
$w = \alpha + y$, 且 $\alpha = x + z$,

则 $\qquad w = x + y + z$,

即 $x=w-y-z$.

故选(A).

17·27 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle A=42°$.又若$\angle B$和$\angle C$的三等分线分别交于D,E.则$\angle BDC$的度数是

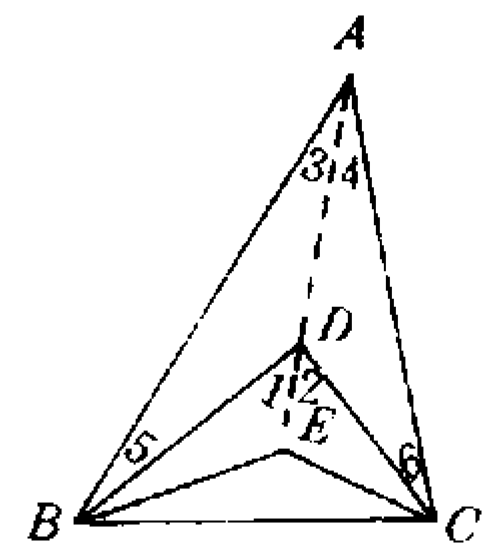


(A) 67°. (B) 84°.

(C) 88°. (D) 110°.

(中国北京市初中数学竞赛,1990年;第1届"希望杯"全国数学邀请赛,1990年)

[解] 连AD延长之.由三角形外角性质



$\angle 1=\angle 3+\angle 5$, $\angle 2=\angle 4+\angle 6$,

此两式相加有

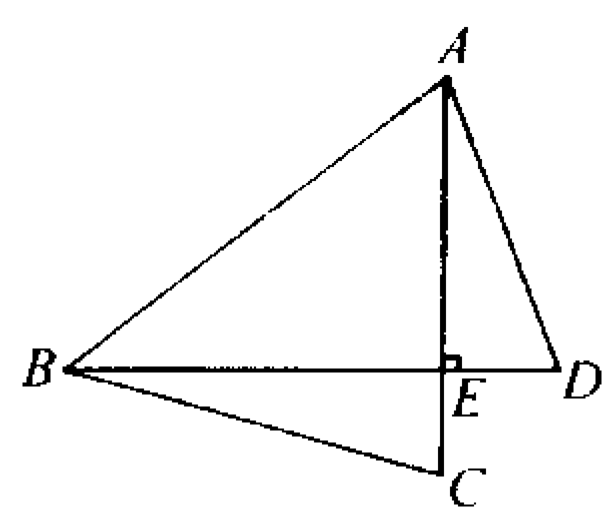
$$\angle BDC=\angle A+\frac{1}{3}\angle B+\frac{1}{3}\angle C$$

$$=\angle A+\frac{1}{3}(\angle B+\angle C)$$

$$=\angle A+\frac{1}{3}(180°-\angle A)=60°+\frac{2}{3}\angle A=88°.$$

故选(C).

17·28 $\triangle ABC$与$\triangle ABD$相迭(如图),且$AB=AC=BD$,又BD与AC交于E且$BD\perp AC$,则$\angle C+\angle D=$



(A)115° (B)120° (C)130°

(D)135° (E)不确定.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解] 在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中,由设$AB=AC=BD$,

则 $\angle C=\dfrac{180°-\angle BAC}{2}$, $\angle D=\dfrac{180°-\angle DBA}{2}$,

$\therefore$ $\angle C+\angle D=180°-\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle DBA)$,

又 $\angle BAC+\angle DBA=90°$,

$\therefore$ $\angle C+\angle D=180°-45°=135°$.

故选(D).

17·29 设AD为等腰$\triangle ABC$底边BC上的高,BM_1, BM_2, $\cdots$,

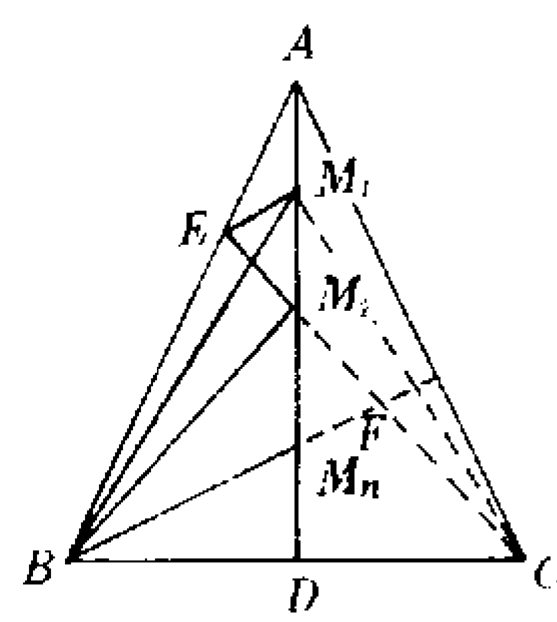
BM_n 为$\angle ABC$的 $n+1$ 等分线. 它们与 AD 的交点(由 A 至 D)分别为 $M_1, M_2, \cdots, M_n$, 延长 CM_2 交 AB 于 E, 则直线 EM_1 与直线 BM_n 的位置关系为

(A)平行. (B)相交.

(C)垂直相交. (C)与 n 有关不能确定.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1990 年)

[解] 如图, BM_1 至 BM_n 这 n 条线段将$\angle ABC$ 等分为 $n+1$ 个部分, 设每一部分为 α, 连结 CM_1, 连结 BM_n 交 CE 于 F.



易证: M_1 为$\triangle AEC$ 内角平分线的交点, 故 EM_1 平分$\angle AEC$.

$$\therefore\quad \angle M_1EC = \frac{\angle AEC}{2} = \frac{1}{2}(\angle B + \angle ECB) = \frac{1}{2}[(n+1)\alpha + (n-1)\alpha] = n\alpha.$$

且 $$\angle EFB = \angle FBC + \angle FCB = \alpha + (n-1)\alpha = n\alpha.$$

$\therefore\quad \angle M_1EC = \angle EFB,\ \therefore\quad EM_1 /\!/ BM_n.$

故选(A).

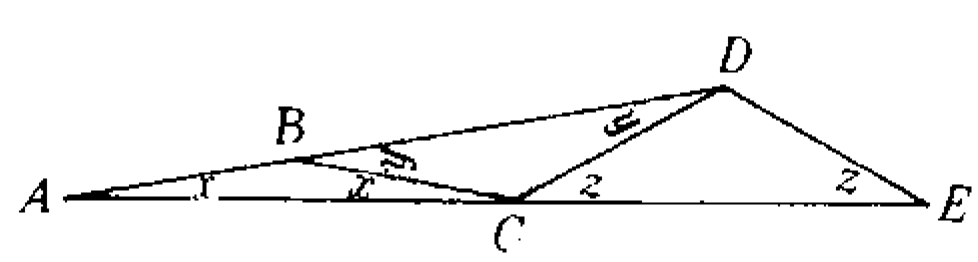
17·30 在$\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = 140°$, 点 B 和点 C 分别在边 AD 和边 AE 上. 若 AB, BC, CD 和 DE 的长都相等, 那么$\angle EAD$ 的度数是

(A) 5°. (B) 6°. (C) 7.5°. (D) 8°. (E) 10°.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解] 设 $x = \angle BAC = \angle BCA$, $y = \angle CBD = \angle CDB$, $z = \angle DCE = \angle DEC$.

在$\triangle ABC$, $\triangle ACD$ 和$\triangle ADE$ 中由三角形的内外角和性质, 得到



$y = 2x, \qquad z = x + y = 3x,$

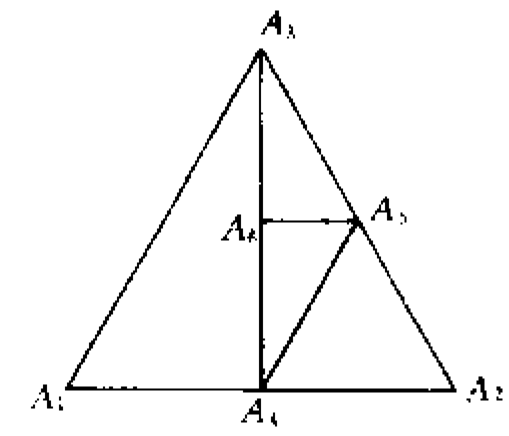
$x + \angle ADE + z = 180°,$

所以 $140° + 4x = 180°,$

得 $x = 10°.$

故选(E).

17·31　若$\triangle A_1A_2A_3$是等边三角形，A_{n+3}是线段A_nA_{n+1}的中点（n是一切正整数），那么$\angle A_{44}A_{45}A_{43}$的度数等于



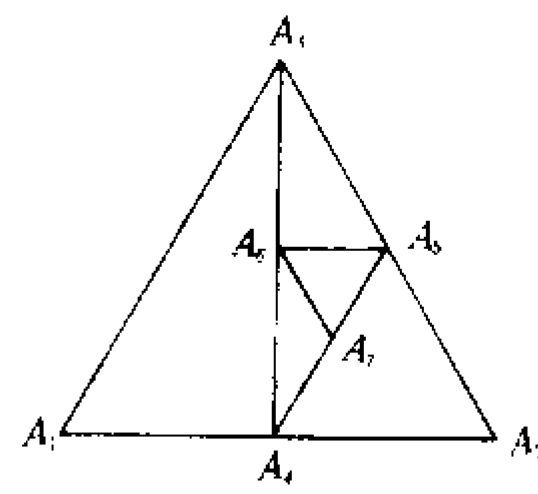
(A) 30°.　　(B) 45°.

(C) 60°.　　(D) 90°.

(E) 120°.

（第29届美国高中数学考试，1978年）

[解]　$\triangle A_2A_3A_4$的内角分别是$60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.



因为$\angle A_1A_2A_3 = 60^\circ$，$A_2A_4 = A_2A_5$，

∴　$\triangle A_2A_4A_5$是等边三角形.

所以$\triangle A_3A_4A_5$的顶角分别是30°，30°，120°. 则$\triangle A_4A_5A_6$分别有顶角30°，60°，90°.

又因为$\angle A_4A_5A_6 = 60^\circ$，$A_5A_6 = A_5A_7$，

∴　$\triangle A_5A_6A_7$又是等边三角形. 递归地推求可知A_n和A_{n+4}是对应角，且$\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2} \backsim \triangle A_{n+4}A_{n+5}A_{n+6}$.

∴　$\angle A_{44}A_{45}A_{43} = \angle A_4A_5A_3 = 120^\circ$.

故选(E).

17·32　在锐角$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交边BC于D. 圆心为B且半径为BD的圆交边AB于M；圆心为C且半径为CD的圆交边AC于N. 那么始终保持正确的说法是

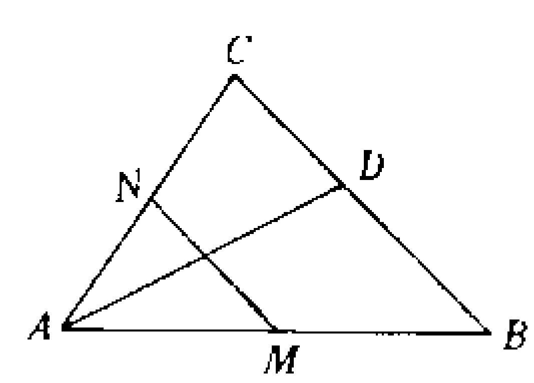
(A) $\angle CND + \angle BMD - \angle DAC = 120^\circ$.

(B) $AMDN$是梯形.　　(C) BC平行于MN.

(D) $AM - AN = \dfrac{3(DB - DC)}{2}$.　(E) $AB - AC = \dfrac{3(DB - DC)}{2}$.

（第26届美国高中数学考试，1975年）

[解]　如图，由三角形内角平分线性质有



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC},$$

又因为$CN = CD$，　$BM = BD$，

则　$\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AB}{AC}$，因而　$MN /\!/ CB$.

(A)，(B)，(D)和(E)四种说法是不成立的，若$\angle A = 90^\circ - \theta$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C = 30^\circ + \theta$，其中$\theta$是任何足够小的正角，即为使上述结论不

成立的例子.

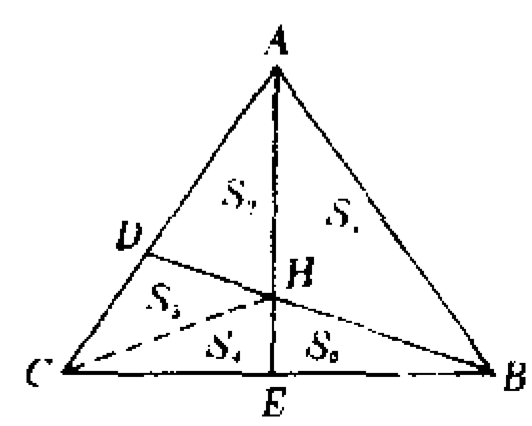
故选(C).

17·33 在$\triangle ABC$中,$\angle A=70°$,D为AC边上一点,$\angle A$的平分线AE交BD于H,且$AH:HE=3:1$,又$BH:HD=5:3$.则$\angle C$的度数为

(A) 45°. (B) 55°. (C) 75°. (D) 80°.

("汉江杯"初中数学竞赛,1991年)

[解] 连CH,如图令各三角形面积分别为S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,且设$S_0=1$.



由 $AH:HE=3:1$, 知 $S_1=3$.

又 $BH:HD=5:3$, 则

$$S_2=\frac{3}{5}S_1=\frac{9}{5}.$$

同时 $(S_2+S_3):S_4=3:1$,

则 $S_4=\frac{1}{3}(S_2+S_3)$.

再由 $S_3:(S_4+S_0)=S_3:\left[\frac{1}{3}(S_2+S_3)+S_0\right]=3:5$,

即 $S_3:\left[\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}+S_3\right)+1\right]=3:5$, 解得 $S_3=\frac{6}{5}$,

则 $$S_4=\frac{1}{3}(S_2+S_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{5}\right)=1.$$

这样 $S_0+S_1=4$, 而 $S_2+S_3+S_4=\frac{9}{5}+\frac{6}{5}+1=4$,

即 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABE}$, 即 $CE=EB$.

又AE平分$\angle A$,知$\triangle ABC$为等腰三角形.

$\therefore$ $\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}(180°-70°)=55°$.

故选(B).

17·34 在$\triangle ABC$中,AD是高,且$AD^2=BD\cdot CD$.那么$\angle BAC$的度数是

(A)小于90°. (B)等于90°. (C)大于90°. (D)不确定.

(中国初中数学联赛,1990年)

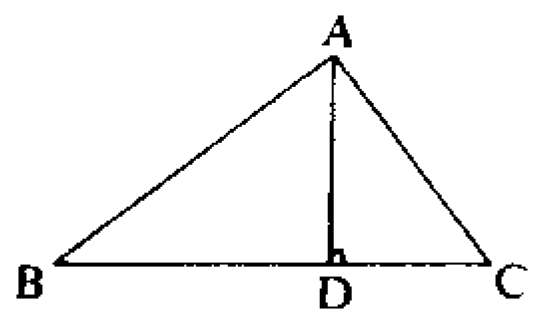
[解] 如图①,由$AD^2=BD\cdot CD$.有$2AD^2=2BD\cdot CD$,则

$$BD^2+CD^2+2AD^2=BD^2+CD^2+2BD\cdot CD.$$

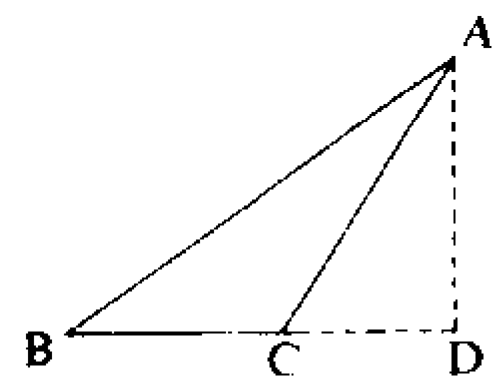
即 $$(BD^2+AD^2)+(AD^2+CD^2)=(BD+CD)^2.$$

故　　$AB^2+AC^2=BC^2$.　可得　$\angle BAC=90°$.

如图②,由设 $AD^2=BD\cdot CD$,但 D 点在$\triangle ABC$外,知$\angle ACB>90°$.有$\angle BAC<90°$.



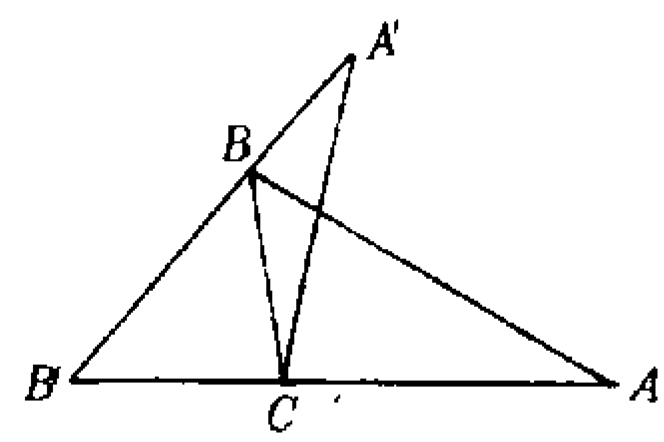
图①



图②

故选(D).

17·35　如图,在$\triangle ABC$中,若已知$\angle A:\angle B:\angle C=3:5:10$;又$\triangle A'B'C\cong\triangle ABC$,则$\angle BCA':\angle BCB'$等于



(A) 1:2.　　　　(B) 1:3.

(C) 1:4.　　　　(D) 2:3.

(中国四川省初中数学竞赛,1989 年)

[解]　由题设知

$\angle BB'C=\angle B'BC=180°\cdot\dfrac{5}{3+5+10}=50°$,

则在$\triangle B'BC$中,$BC=B'C$,则$\triangle B'BC$为等腰三角形.

故　$\angle BCA=180°-\angle BCB'=180°-(180°-2\angle BB'C)$

$=180°-(180°-2\cdot 50°)$

$=100°$,

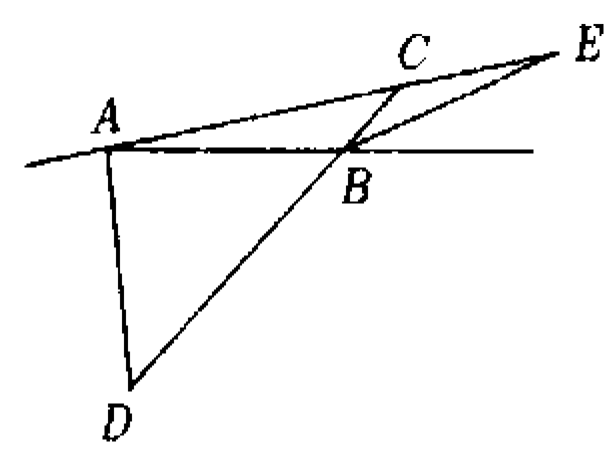
又　　　$\angle B'CA'+\angle BCA-\angle BCA'=180°$,

则 $\angle BCA'=2\angle BCA-180°=200°-180°=20°$.

所以　$\angle BCA':\angle BCB'=1:4$.

故选(C).

17·36　如图,在$\triangle ABC$中,$\angle A$,$\angle B$的外角平分线AD,BE分别交对边延长线于点D,E,且$AD=AB=BE$,则$\angle A$的度数是



(A) 10°.　　(B) 11°.　　(C) 12°.　　(D)非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛,1986 年)

[解]　设 $\angle A=\angle E=\alpha$,$\angle D=\angle ABD=\beta$,

$\angle CBE=\gamma$，$\angle ACB=\delta$. 依题设有

$\beta=2\gamma$，且 $\beta=\alpha+\delta$，$\delta=\gamma+\alpha$.

所以 $\beta=\alpha+(\gamma+\alpha)=2\alpha+\gamma$，

又 $2\gamma=\beta=2\alpha+\gamma$，则 $\gamma=2\alpha$.

因而 $\beta=2\gamma=4\alpha$.

$\because$ $\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)+2\beta=180^\circ$，

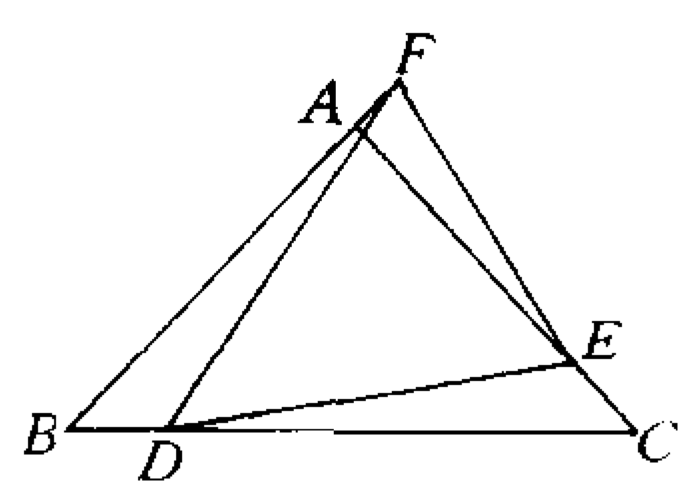
$\therefore$ $4\beta-\alpha=180^\circ$.

则 $4\cdot4\alpha-\alpha=180^\circ$.

得 $\alpha=12^\circ$，即 $\angle A=12^\circ$.

故选(C).

17·37 如图，$\triangle ABC$ 中 BC 为最大边，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$，则$\angle DEF$ 的取值范围是



(A) $0^\circ<\angle DEF<45^\circ$.

(B) $45^\circ<\angle DEF<60^\circ$.

(C) $60^\circ\leqslant\angle DEF<90^\circ$.

(D)以上都不对.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1989 年)

[解] 因 $CD=BF$，$CE=BD$，$\angle C=\angle B$，

故 $\triangle CDE\cong\triangle BFD$.

所以 $DE=DF$，$\angle CDE=\angle BFD$.

但 $\angle CDF=\angle BFD+\angle B$.

所以 $\angle EDF=\angle B$.

故 $\angle DEF=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$.

因 $60^\circ\geqslant\angle B>0^\circ$.

所以 $30^\circ\geqslant\frac{1}{2}\angle B>0^\circ$，从而 $60^\circ\leqslant\angle DEF<90^\circ$.

故选(C).

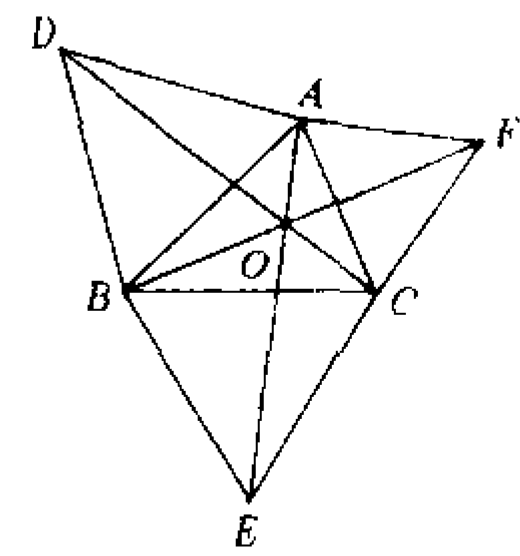
17·38 以锐角$\triangle ABC$ 的各边为长，在$\triangle ABC$ 形外分别作等边三角形，得$\triangle ABD$，$\triangle BCE$，$\triangle CAF$. 结论：

①$AE=BF=CD$.

②AE，BF，CD 交于一点.

③AE，BF，CD 每两条夹角(锐角)都等于 60°.

那么



(A) ①②③都不成立.　　(B) ①②③都成立.

(C) ①③成立,②不成立.

(D) ①成立,②③不成立.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988年)

[解]　如图,①易证$\triangle ABF\cong\triangle ADC$,$\triangle BDC\cong\triangle BAE$,

故　$BF=CD=AE$.

②假设BF和CD交于O点,连结OA和OE.

易证$\triangle ABF\cong\triangle ADC$,因而$A$到$BF$与$CD$的距离相等,那么$OA$是$\angle DOF$的平分线.

由$\triangle ABF\cong\triangle ADC$可知　$\angle AFO=\angle ACO$.

故A,F,C,O四点共圆,从而$\angle COF=\angle CAF=60°$.

据题意可知$\angle CEB=60°=\angle COF$,所以四边形$OBEC$有外接圆.

又$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$,$\therefore\angle BOE=\angle COE$,即$OE$是$\angle BOC$的平分线.对顶角的平分线在一条直线上,所以$A,O,E$在一条直线上.这就是说$AE,BF,CD$三线交于一点$O$.

③由②的证明可知

$$\angle AOF=\angle AOD=\angle BOD=\angle BOE=\angle COE=\angle COF=60°.$$

所以①,②,③都成立.

故选(B).

17·39　P是等边$\triangle ABC$内部一点,$\angle APB,\angle BPC,\angle CPA$的大小之比是5:6:7,则以$PA,PB,PC$的长为边的三角形的三个内角的大小之比(从小到大)是

(A) 2:3:4.　(B) 3:4:5.　(C) 4:5:6.　(D) 不能确定.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1988年)

[解1]　如下页图①,过P作$PD/\!/AB$交BC于D,作$PE/\!/BC$交AC于E,作$PF/\!/AC$交AB于F.

则　$$\angle PDB=\angle PEC=\angle PFA=120°.$$

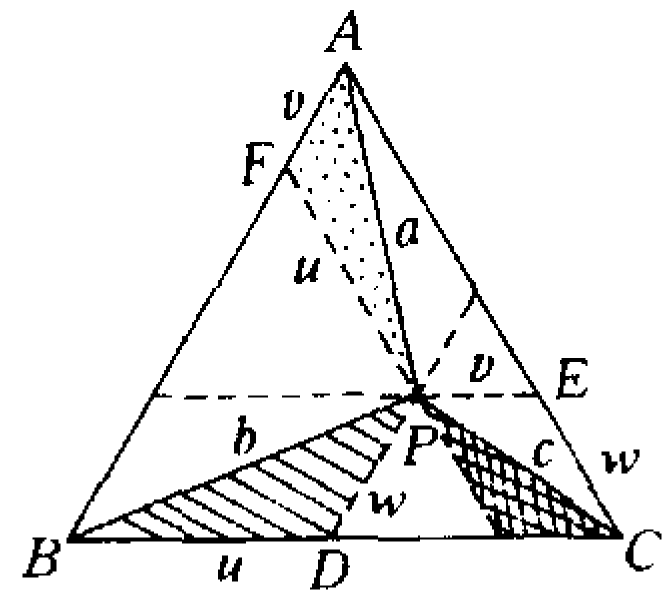
$\because$　$$\angle APB:\angle BPC:\angle CPA=5:6:7,$$

$\therefore$　$\angle APB=100°$,　$\angle BPC=120°$,　$\angle CPA=140°$.

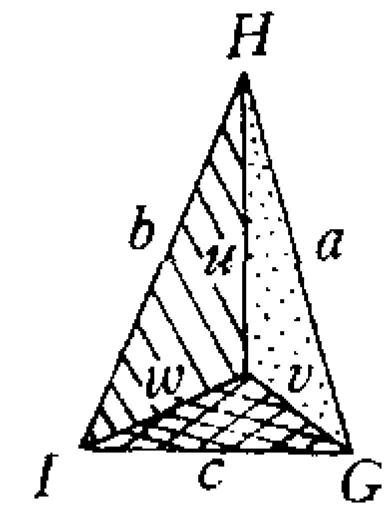
而　$$\angle APF+\angle PBD=\angle APB-60°=40°,$$

$$\angle BPD+\angle PCE=\angle BPC-60°=60°,$$

$$\angle CPE+\angle PAF=\angle CPA-60°=80°.$$



图①



图②

将$\triangle PFA$，$\triangle PDB$，$\triangle PCE$　按图②的方式拼成$\triangle GHI$，让它们为$120°$的顶角的顶点重合在一起，有 $GH=PA$，$HI=PB$，$IG=PC$.

所以$\triangle GHI$ 就是以PA，PB，PC 的长为边的三角形，其中

$$\angle G=\angle CPE+\angle PAF=80°,$$
$$\angle H=\angle APF+\angle PBD=40°,$$
$$\angle I=\angle BPD+\angle PCE=60°.$$

所以$\triangle GHI$ 的三个内角的大小之比(从小到大)是 2:3:4.

故选(A).

[解 2]　以 BP 为边在$\triangle ABC$ 形外作等边$\triangle BPD$，连结 CD(如图③).

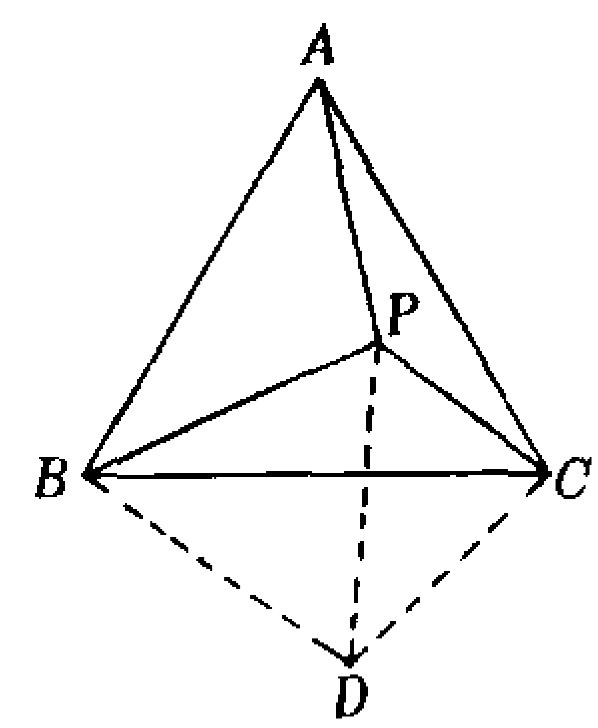
易证　$\triangle ABP\cong\triangle CBD$，

$\therefore$　$PA=DC$，　且　$\angle APB=\angle CDB$.

又$\because$　$\triangle BPD$ 是等边三角形，则

$PB=PD$.

$\therefore$　$\triangle PCD$ 即为以 PA，PB，PC 为边的三角形.



图③

$\because$　$\angle APB:\angle BPC:\angle CPA=5:6:7$，则

$\angle APB=100°$，　$\angle BPC=120°$，

$\angle CPA=140°$.

$\therefore$　$\angle PDC=\angle BDC-\angle BDP=\angle BPA-60°=40°$，

且　$\angle CPD=\angle BPC-\angle BPD=120°-60°=60°$，

又　$\angle PCD=180°-(\angle PDC+\angle CPD)=80°$.

即三角形三内角比为 2:3:4.

故选(A).

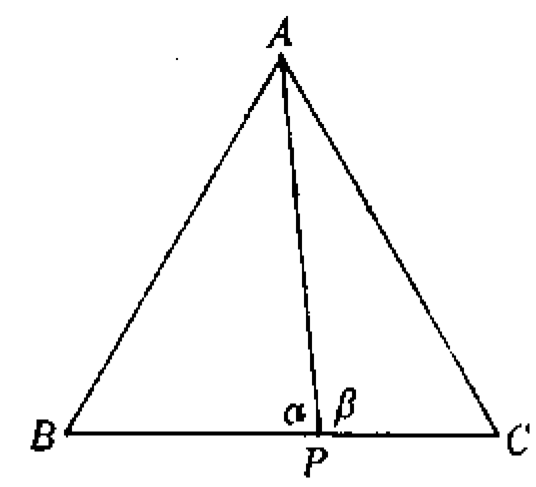
17·40 在正$\triangle ABC$中，点P在BC边上，以AP,BP,CP为边组成的新三角形的最大内角为θ，则

(A) $\theta \geqslant 90^\circ$.　　　　　(B) $\theta \leqslant 120^\circ$.

(C) $\theta = 120^\circ$.　　　　　(D) $\theta = 135^\circ$.

（中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛，1991年）

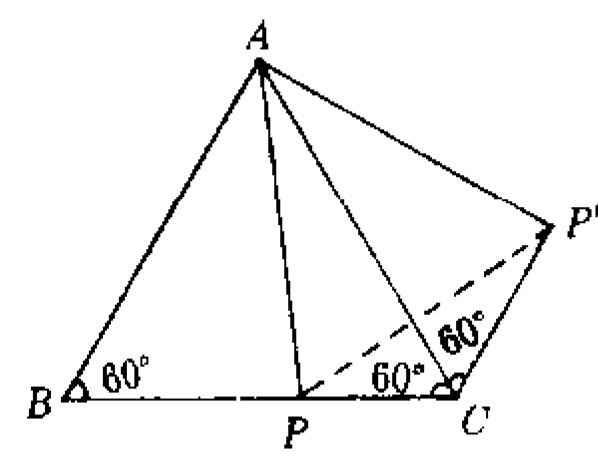
[解1] 本题是上题的特例情形，即P点在BC边上，因而它与三顶点的夹角视为$\alpha,\beta,180^\circ$.



这样由AP,BP,CP组成的三角形三内角分别为$\alpha-60^\circ,\beta-60^\circ,180^\circ-60^\circ$，其中最大者为$120^\circ$.

故选(C).

[解2] 以A为中心将$\triangle ABP$逆时针方向旋至$\triangle ACP'$位置，连PP'.



则　$CP'=BP$，易证$\triangle APP'$为正三角形.

在$\triangle PP'C$中，$PP'=AP$，又$P'C=BP$，则$\triangle PCP'$为所求新三角形.其最大角为120°.

故选(C).

17·41 不等边$\triangle ABC$的三条高的垂足为D,E,F，那么$\triangle ABC$的垂心是$\triangle DEF$的

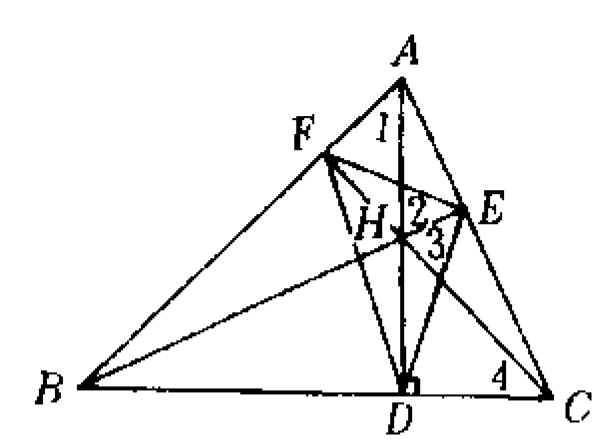
(A)内心.　　(B)外心.　　(C)重心.　　(D)垂心.

（中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛，1988年）

[解] 如图，H,D,C,E四点共圆，　$\therefore$　$\angle 3=\angle 4$.

A,F,H,E四点共圆，　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$.

A,F,D,C四点共圆，　$\therefore$　$\angle 1=\angle 4$.



故　$\angle 2=\angle 3$.因此，AD,BE,CF分别是$\angle EDF,\angle DEF,\angle EFD$的平分线.

所以H是$\triangle DEF$的内心.

故选(A).

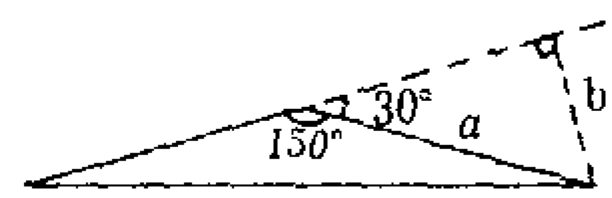
第2节　三角形中的边、线段

17·42　顶角是150°的等腰三角形，腰上的高的长与腰长的比是

(A) $1:(2+\sqrt{3})$.　　(B) $1:3$.　　(C) $1:2$.　　(D) $1:\sqrt{3}$.

（第6届"缙云杯"初中数学邀请赛，1989年）

[解]　如图，　$b:a=1:2$.（注意到30°-60°-90°的直角三角形性质）



故选(C).

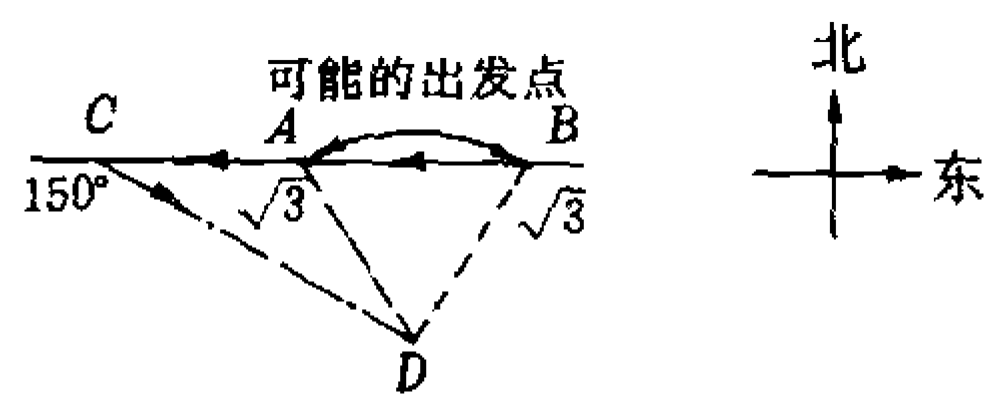
17·43　一人向正西方向走 x 英里，他向左转150°然后朝新方向走3英里.结果他离出发点$\sqrt{3}$英里，那么 x 是

(A)$\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C)$\frac{3}{2}$.

(D) 3.　　(E)按已知条件无惟一的解.

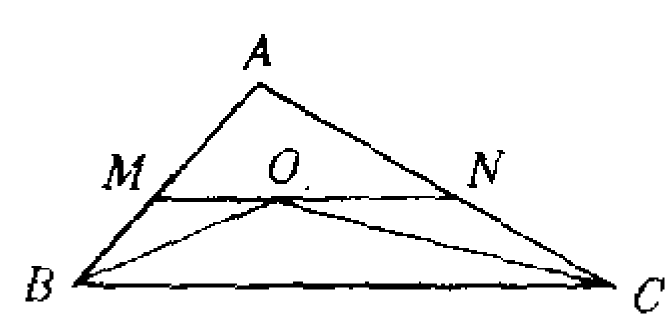
（第31届美国高中数学考试，1980年）

[解]　将题设可用下图表示.显然有两个可能的出发点 A 和 B 均满足题目要求.所以 x 无惟一的解.



故选(E).

17·44　如图，BO 平分$\angle CBA$，CO 平分$\angle ACB$，且 MN 平行于BC，如果 $AB=12$，$BC=24$，$AC=18$，则$\triangle AMN$ 的周长是



(A) 30.　　(B) 33.　　(C) 36.

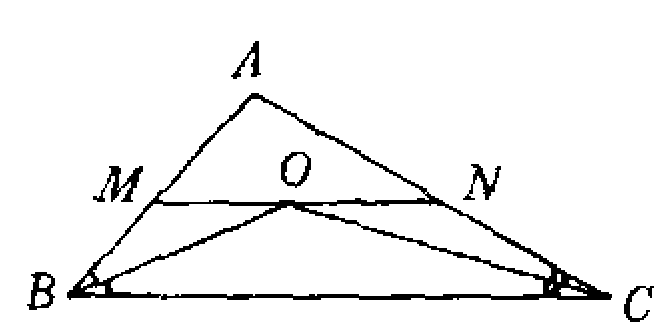
(D) 39.　　(E) 42.

（第33届美国高中数学考试，1982年）

[解]　在图中，因为 $MN/\!/BC$，$\angle MOB=\angle CBO=\angle OBM$，

$$\angle CON=\angle OCB=\angle NCO,$$

所以　　$MB=MO$，及 $ON=NC$，



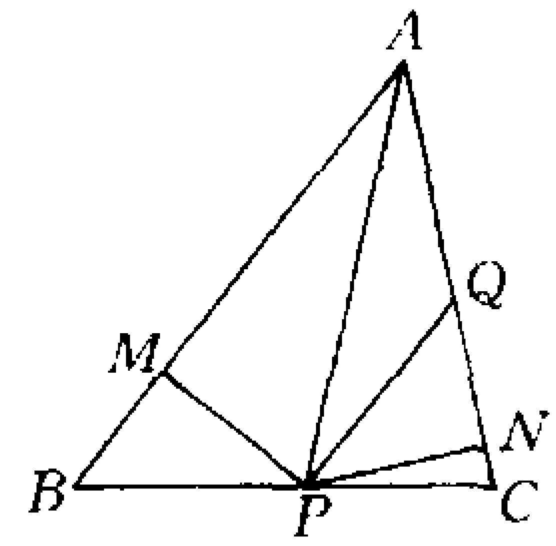
并且　$AM+MO+ON+AN$

$=(AM+MB)+(AN+NC)$

$=AB+AC=12+18=30$.

故选(A).

17·45 如图,在不等边三角形 ABC 中,$AQ=PQ$,$MP=PN$,$PM\perp AB$,$PN\perp AC$,则下面三个结论



(1)$AN=AM$;

(2)$QP/\!/AM$;

(3)$\triangle BMP\cong\triangle QNP$.

其中正确的是

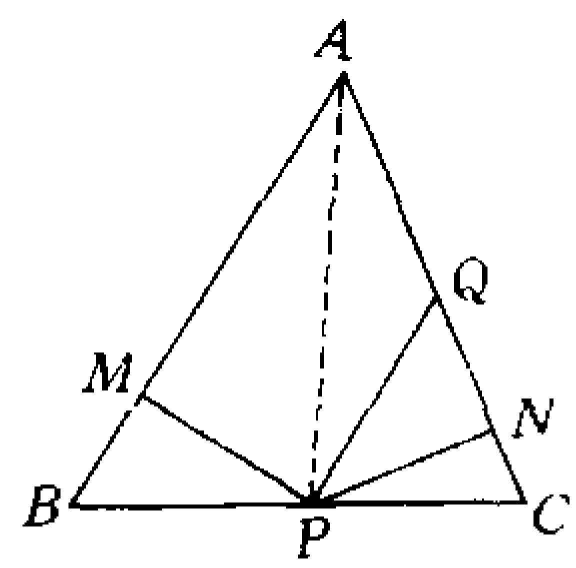
(A) (1),(2),(3).　　　(B)仅(1)和(2).

(C)仅(2)和(3).　　　(D)仅(1).

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1989 年）

[解] 因 P 与 AB,AC 等距,故 AP 平分$\angle BAC$.

又因 $AQ=QP$, 有



$\angle APQ=\angle QAP=\angle PAM$,

故　$PQ/\!/AM$,　即(2)成立.

又由　$Rt\triangle PAM\cong Rt\triangle PAN$,

故　$AM=AN$,即(1)成立.

但若　$\triangle BMP\cong\triangle QNP$, 便有

$$BP=PQ=AQ,$$

$$\angle B=\angle QPC=\angle PQC.$$

从而 $PC=QC$,所以 $BC=AC$,与$\triangle ABC$ 为不等边三角形矛盾.所以(3)不成立.

故选(B).

17·46 在$\triangle ABC$ 中,AL 平分$\angle A$,CM 平分$\angle C$,且点 L 与 M 分别在BC 与AB 上,若$\triangle ABC$ 的三边为a,b,c,则 $\frac{AM}{MB}=k\frac{CL}{LB}$,其中 k 为

(A) 1.　　(B)$\frac{bc}{a^2}$.　　(C)$\frac{a^2}{bc}$.　　(D)$\frac{c}{b}$.　　(E)$\frac{c}{a}$.

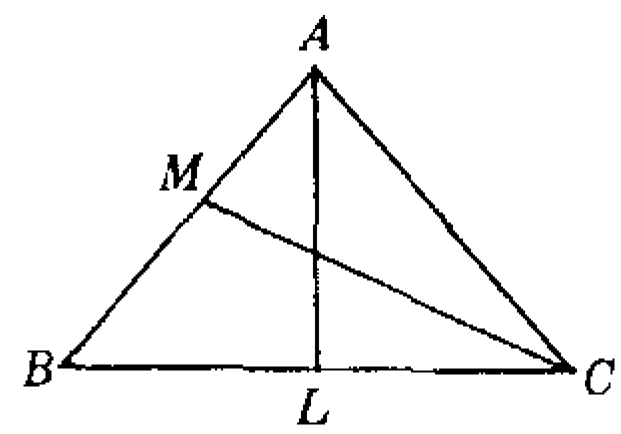
（第 10 届美国高中数学考试,1959 年）

[解] 由三角形内角平分线定理知

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{BC},\quad \frac{CL}{LB}=\frac{AC}{AB}.$$

上两式两边相除则有

$$\frac{AM}{MB}\div\frac{CL}{LB}=\frac{AC}{BC}\div\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}=k.$$



则 $k=\frac{c}{a}$.

故选(E).

17·47 三角形 ABC 的$\angle B$ 为 BD,BE 所三等分,且各交 AC 于D,E,则

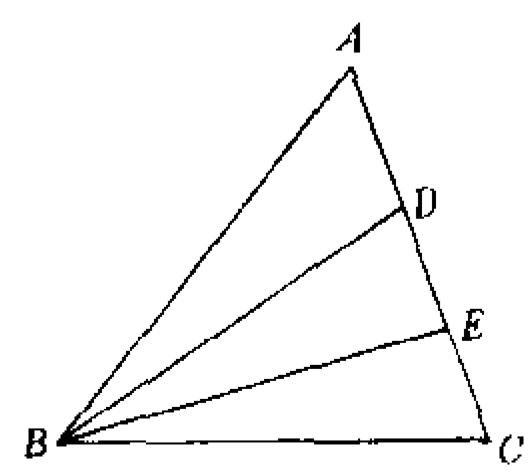
(A)$\frac{AD}{EC}=\frac{AE}{DC}$. (B)$\frac{AD}{EC}=\frac{AB}{BC}$.

(C)$\frac{AD}{EC}=\frac{BD}{BE}$. (D)$\frac{AD}{EC}=\frac{AB\cdot BD}{BE\cdot BC}$.

(E)$\frac{AD}{EC}=\frac{AE\cdot BD}{DC\cdot BE}$.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解] 由设 BD 平分$\angle ABE$,则



$$\frac{AD}{DE}=\frac{AB}{BE},\quad 即\quad AD=\frac{DE\cdot AB}{BE},$$

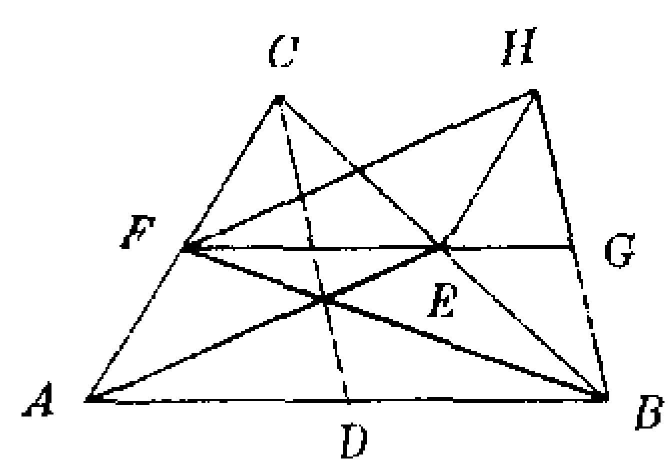
又由设 BE 平分$\angle DBC$, 则

$$\frac{DE}{EC}=\frac{BD}{BC},\quad 即\quad EC=\frac{DE\cdot BC}{BD}.$$

故 $$\frac{AD}{EC}=\frac{DE\cdot AB}{BE}\cdot\frac{BD}{DE\cdot BC}=\frac{AB\cdot BD}{BE\cdot BC}.$$

故选(D).

17·48 已知三角形 ABC. 中线 AE,BF,CD,FH 平行且等于 AE,连 BH 与 HE,延长 FE 交 BH 于 G. 下列叙述不一定正确的是



(A) $AEHF$ 是平行四边形.

(B) $HE=EG$. (C) $BH=DC$.

(D) $FG=\frac{3}{4}AB$. (E) FG 是三角形 BFH 的中线.

(第 6 届美国高中数学考试,1955 年)

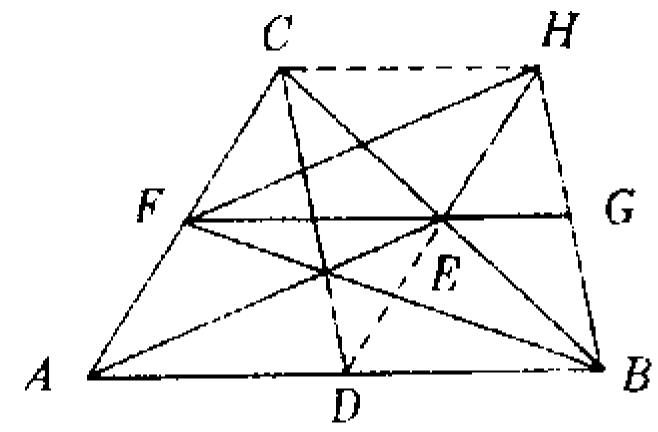
[解] (1)易证 $AE\mathrel{\underline{\parallel}}FH$,故(A)真;

(2)由(A)得 $EH=AF=FC$,且 $EH\parallel FC$,故四边形 $CFEH$ 是平行四边形.

$\therefore$ $CH\parallel EF\parallel AB$, 且 $CH=EF=BD$.

$\therefore$ 四边形 $CDBH$ 是平行四边形. 故(C)真;

(3)由设有 $EF=\frac{1}{2}AB$. 连 ED,且可证 $HE=ED$,且共线($EH /\!/ AF$, $DE /\!/ AF$).



则 $EG=\frac{1}{2}BD$,

有 $FG=EF+EG=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BD=\frac{3}{4}AB$

故(D)真;

(4)由 G 是 BH 中点,则(E)真;

(5)若 $HE=EG$ 成立,须 $DH=DB$,但$\triangle ABC$ 为任意三角形,故 $HE=EG$ 不一定成立.

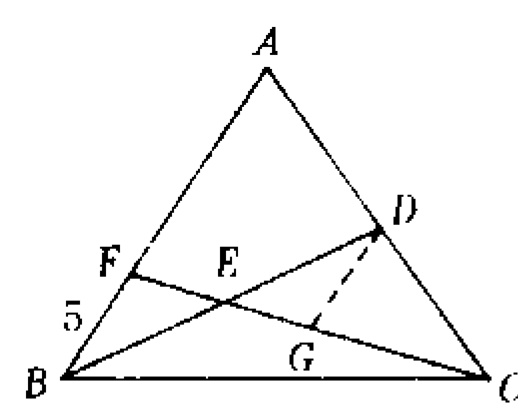
综上,故选(B).

17·49 在$\triangle ABC$ 中,BD 是中线,CF 交 BD 于 E,且 $BE=ED$,点 F 在 AB 上,若 $BF=5$,则 BA 等于

(A) 10. (B) 12. (C) 15. (D) 20. (E)非上述答案.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解] 在 CE 上取一点 G 使 $FE=EG$,连 DG. 由$\triangle EFB\cong\triangle EGD$,可证 $FB \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DG$.



在$\triangle AFC$ 中,DG 为中位线,则有

$$AF=2DG=10.$$

$$\therefore\quad AB=AF+FB=15.$$

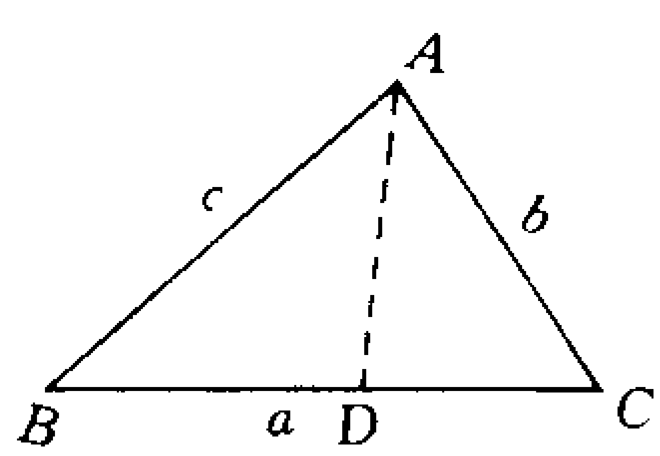
故选(C).

17·50 在$\triangle ABC$ 中,若$\angle A=2\angle B$,边 $b=4$, $c=5$,则边 a 等于

(A)6. (B)7. (C)$3\sqrt{5}$. (D)5.

(中国陕西省初中数学竞赛,1997 年)

[解] 如图,过 A 作$\angle A$ 的平分线 AD.



由角平分线定理知

$$CD=\frac{4}{9}a,\quad BD=\frac{5}{9}a.$$

又 $\angle CDA=2\angle DAB=\angle A$.

$$\therefore\quad \triangle ADC\backsim\triangle BAC.$$

有 $\frac{4a}{9}:4=4:a$. 因而 $a^2=36$, 得 $a=6$.

故选(A).

第十七章 三角形

选择题卷

17·51 在$\triangle ABC$中,$AC:CB=3:4$,$\angle C$的外角平分线交BA的延长线于P(A介于P与B之间),则$PA:AB$为

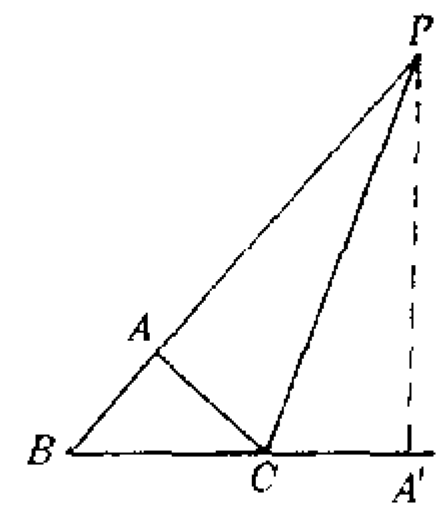
(A) 1:3. (B) 3:4. (C) 4:3. (D) 3:1. (E) 7:1.

(第12届美国高中数学考试,1961年)

[解] 作PA'使$\angle CPA'=\angle APC$交BC延长线于A'.

则 $\triangle APC\cong\triangle A'PC$.

故 $AC=A'C, PA=PA'$.



在$\triangle PBA'$中,由PC平分$\angle A'PB$,有

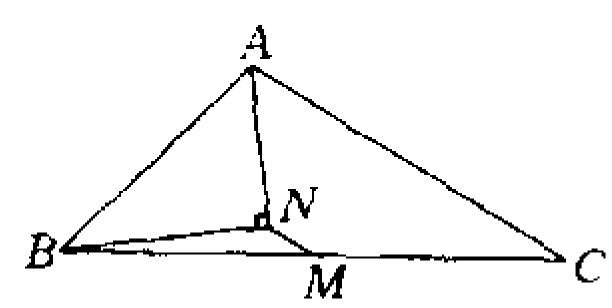
$$\frac{BC}{CA'}=\frac{PB}{PA'},\quad 或\quad \frac{BC}{CA}=\frac{PB}{PA}=\frac{4}{3},$$

而 $\frac{AB}{PA}=\frac{PB-PA}{PA}=\frac{PB}{PA}-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$,

因而 $PA:PB=3:1$.

故选(D).

17·52 如图,在$\triangle ABC$中,M是BC边的中点,AN平分$\angle BAC$,$BN\perp AN$,且$\angle BAC$的角度是θ.如果AB和AC的长度分别是14和19,那么MN的长度是



(A) 2. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $\frac{5}{2}-\sin\theta$.

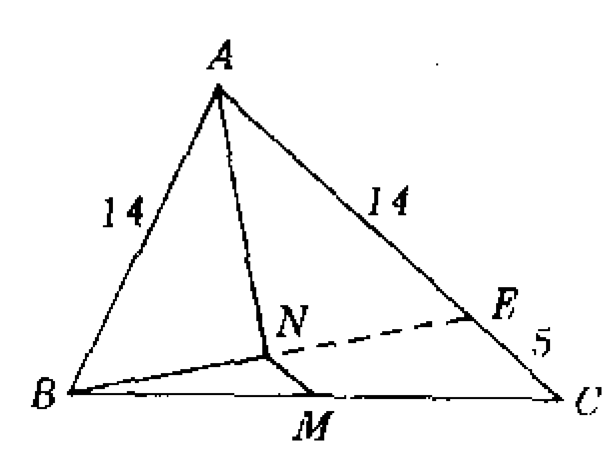
(D) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta$. (E) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{2}\theta)$.

(第32届美国高中数学考试,1981年)

[解] 如下图,在$\triangle ABC$中,延长BN交AC于E.

因为 $\angle BAN=\angle EAN$, $AN=AN$,且$\angle ANB=\angle ANE=90°$,

所以 $\triangle ABN\cong\triangle AEN$.



因而N是BE的中点,且$AB=AE=14$.

由此 $EC=AC-AE=19-14=5$.

又因为M是BC的中点,所以NM是$\triangle EBC$的中位线.

因此 $MN=\frac{1}{2}EC=\frac{5}{2}$.

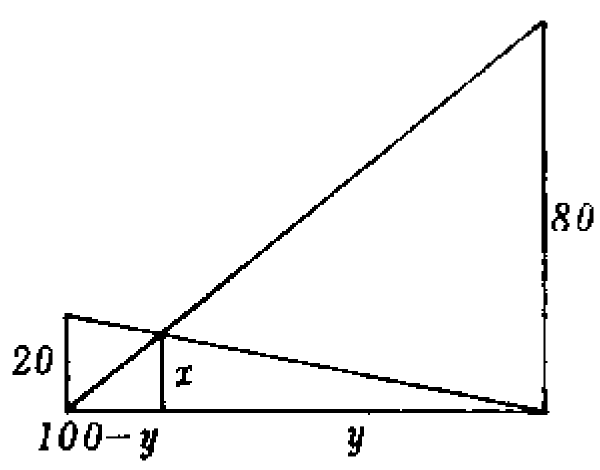
故选(B).

17·53 两柱高 20 及80,相距 100,两柱的顶点分别与另一柱的底的连线,其交点的高度为

(A) 50. (B) 40. (C) 16. (D) 60. (E)非上述的答案.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 如图,由相似三角形性质,可得



$$\frac{1}{x}=\frac{1}{20}+\frac{1}{80},$$

所以 $x=16.$

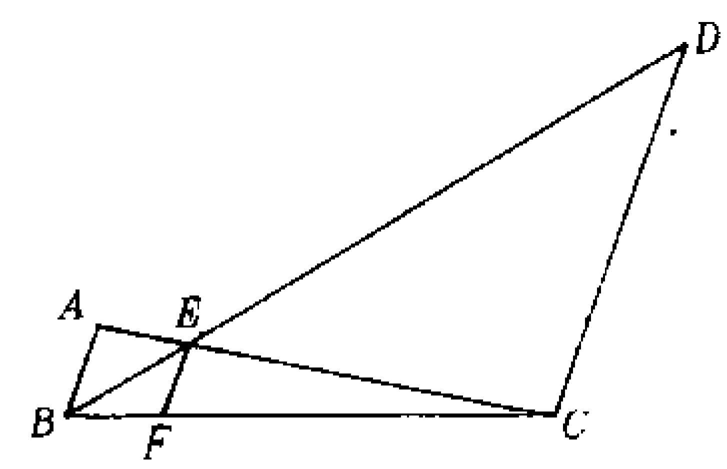
故选(C).

17·54 如图,$AB\parallel EF\parallel CD$. 已知 $AB=20, CD=80, BC=100$,那么,EF 的值是

(A) 10. (B) 12.

(C) 16. (D) 18.

(中国初中数学联赛,1991 年)



[解] 由题设及平行截割定理得

$$\frac{EF}{80}=\frac{BF}{100}, \quad ①$$

$$\frac{EF}{20}=\frac{FC}{100}, \quad ②$$

①+②得 $\frac{EF}{80}+\frac{EF}{20}=\frac{BF+FC}{100}=1.$

所以 $EF+4EF=80$. 即 $5EF=80$. 得 $EF=16$.

故选(C).

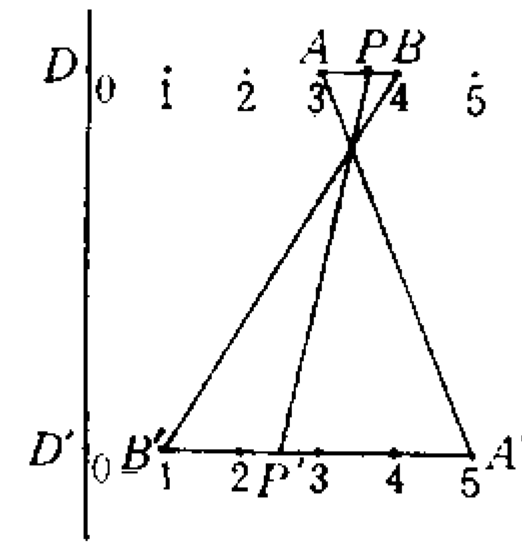
17·55 如图,AB 上所有的点对应于 $A'B'$ 上的点,反之亦可. 设 x 表示 AB 上一点 P 到 D 的距离,而 y 表示 $A'B'$ 上一点 P' 到 D' 的距离,那么对于任一对对应点,若 $x=a$,则 $x+y$ 等于

(A) $13a$. (B) $17a-51$.

(C) $17-3a$. (D) $\frac{17-3a}{4}$.

(E) $12a-34$.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)



[解] 由图及相似三角形性质有 $\frac{PB}{P'B'}=\frac{AP}{A'P'}$,

$\frac{PB}{P'B'}=\frac{AB}{A'B'}$,

即 $$\frac{4-x}{y-1}=\frac{x-3}{5-y}=\frac{1}{4},$$

有 $y=17-4x$, 故 $x+y=a+(17-4a)=17-3a$.

故选(C).

17·56 已知三角形 P 的三边长为 $a,\sqrt{3}a,2a$,三角形 Q 的三边长为 $3a,2\sqrt{3}a,\sqrt{3}a$,三角形 R 为有一锐角等于 $30°$ 的直角三角形,记"$\backsim$"为相似,"$\not\backsim$"为不相似.则

(A) $P\backsim Q$,但 $Q\not\backsim R$, $R\not\backsim P$.

(B) $P\not\backsim Q$, $Q\not\backsim R$,但 $R\backsim P$.

(C) $P\not\backsim Q$, $Q\not\backsim R$, $R\not\backsim P$.

(D) $P\backsim Q\backsim R$.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年)

[解] $\because\ \frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}a}{3a}=\frac{2a}{2\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\therefore\ P\backsim Q$.

又$\because$ $\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2}=2a$, 但 $\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 三角形 P 是一个含有 $30°$ 内角的直角三角形,则有 $P\backsim R$.

从而 $P\backsim Q\backsim R$.

故选(D).

17·57 在$\triangle ABC$ 中,CD 是 AB 上的高,AE 是 BC 上的高,若 AB,CD 和 AE 的长为已知,则 DB 的长为

(A)无法决定.

(B) A 为锐角时才可决定.

(C) $\angle B$ 为锐角时才可决定.

(D) $\triangle ABC$ 为锐角三角形时才可决定.

(E)非上述答案.

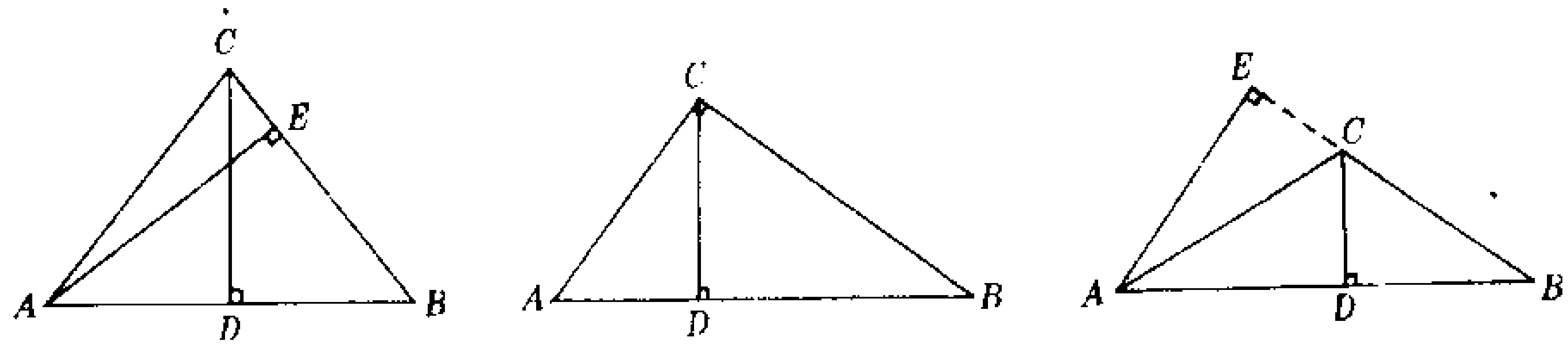
(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 分下面几种情形考虑:

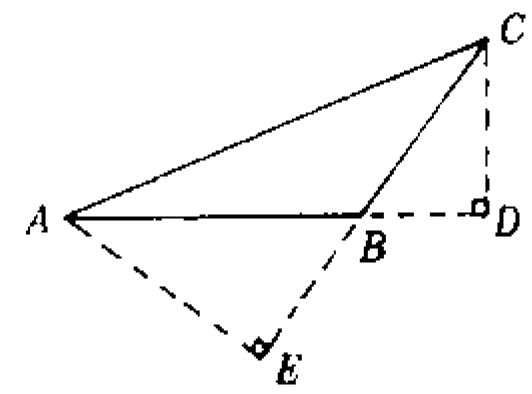
(1)若$\angle A$,$\angle B$ 均为锐角时($\angle C$ 为锐角,直角或钝角).

由$\triangle ABE\backsim\triangle CBD$,可从 AB,CD,AE 的已知中求得 CB.

又在 Rt$\triangle CBD$ 中,由 CB,CD 可求得 BD.



(2)$\angle A$ 为钝角,结论同上.



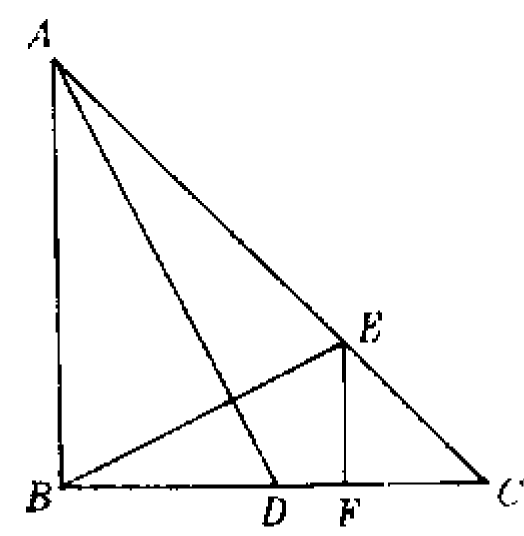
(3)$\angle B$ 为钝角,可由 Rt $\triangle ABE \backsim$ Rt$\triangle CBD$,求得 BD.

(4)若$\angle A$ 为直角,则有 $AB = BD$;

若$\angle B$ 为直角,则 $BD = 0$.

故选(E).

17·58 如图,等腰 Rt$\triangle ABC$ 中,AD 是直角边 BC 上的中线,且 $BE \perp AD$ 交 AC 于 E,$EF \perp BC$.若 $AB = BC = a$,则 EF 等于



(A)$\frac{1}{3}a$.　　(B)$\frac{1}{2}a$.

(C)$\frac{2}{3}a$.　　(D)$\frac{2}{5}a$.

(中国陕西省西安市初中数学竞赛,1990 年)

[解] 易证$\triangle ABD \backsim \triangle BFE$,则 $\frac{AB}{BD} = \frac{BF}{FE}$.

又由题设知 $\angle C = 45°$,故 $EF = FC$,

所以
$$\frac{BF}{FC} = \frac{BF}{FE} = \frac{AB}{BD} = 2,$$

则
$$EF = FC = \frac{a}{3}.$$

故选(A).

17·59 等腰三角形一底角平分线将周长分成 168 与 112 两部分,则该三角形腰长为

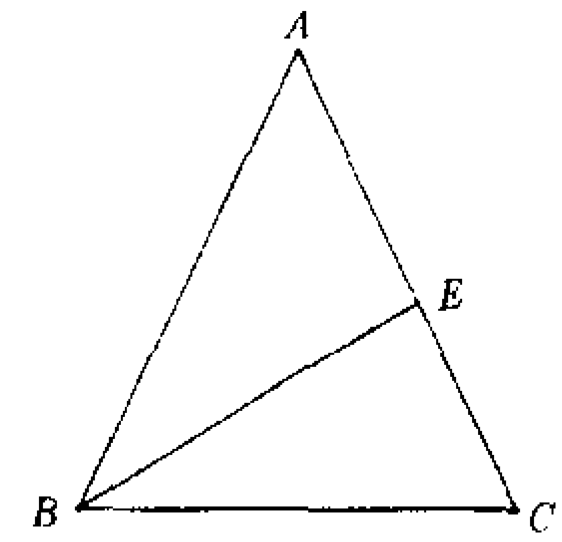
(A) 80.　(B) 105 或 80.　(C) 105.　(D)非上述答案.

(中国辽宁省沈阳市初中数学邀请赛,1986 年)

[解] 设 BE 为等腰$\triangle ABC$ 底角$\angle B$ 的平分线.依角分线性质及题设有

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CE}{EA} = \frac{BC + CE}{AB + EA} = \frac{112}{168},$$

或 $\frac{BC}{AB}=\frac{CE}{EA}=\frac{BC+CE}{AB+EA}=\frac{168}{112}$.



有 $BC=\frac{112}{168}AB$ 或 $BC=\frac{168}{112}AB$,

又因为 $112+168=2AB+BC$, 将上式代入得

$$AB=105 \quad 或 \quad 80.$$

故选(B).

17·60 等腰三角形的一个底角的平分线把周长分成63和35两部分,则腰长一定是

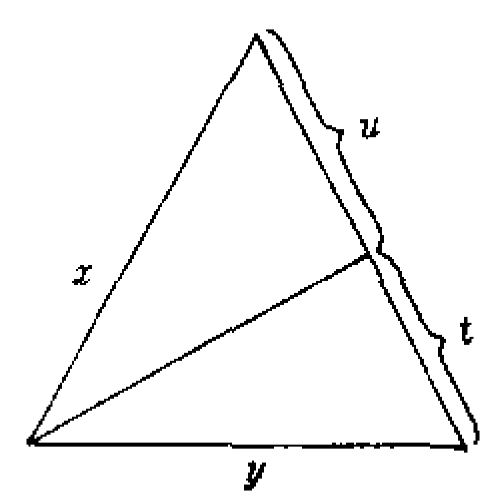
(A) 26.4. (B) 33.

(C) 38.5. (D)以上答案都不对.

(中国上海市初中数学竞赛,1984年)

[**解 1**] 设该三角形腰长为 x,底为 y,依题设有

$2x+y=63+35=98$. ⊛



又由角分线性质 $u=\frac{x}{x+y}x$, $t=\frac{y}{x+y}x$.

则 $(x+u):(y+t)$

$=\left(1+\frac{x}{x+y}\right)x:\left(1+\frac{x}{x+y}\right)y$

$=x:y$,

因而 $x:y=63:35=9:5$, 即 $y=\frac{5}{9}x$, 代入⊛式

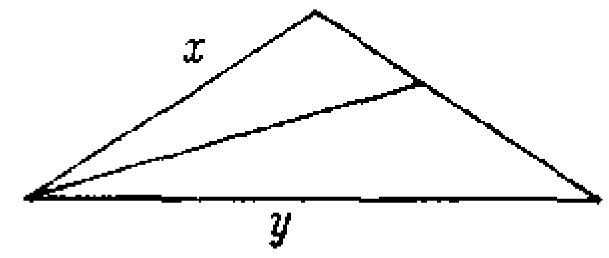
得 $\frac{23}{9}x=98$, 即 $x=\frac{98\cdot 9}{23}\approx 38.3$,

又 $y:x=9:5$ 时, 将 $y=\frac{9x}{5}$ 代入⊛式有

$$\frac{19}{5}x=98, \quad 即 \quad x=\frac{98\cdot 5}{19}\approx 25.8.$$

故选(D).

[**解 2**] 其实从上图及右图出现的两种情形,即知腰长一定的说法不真.



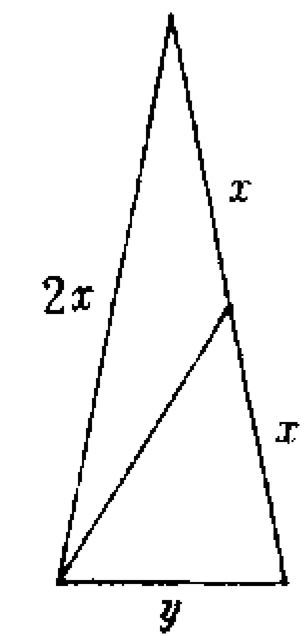
故选(D).

17·61 等腰三角形周长是24,一腰中线将周长分成5∶3的两部分.那么,这个三角形的底边长是

(A) 7.5.　　　(B) 12.　　　(C) 4.　　　(D) 12 或 4.

（第 1 届“希望杯”全国数学邀请赛,1990 年）

[解]　设该三角形腰长为 $2x$,底为 y.这样依题设可有



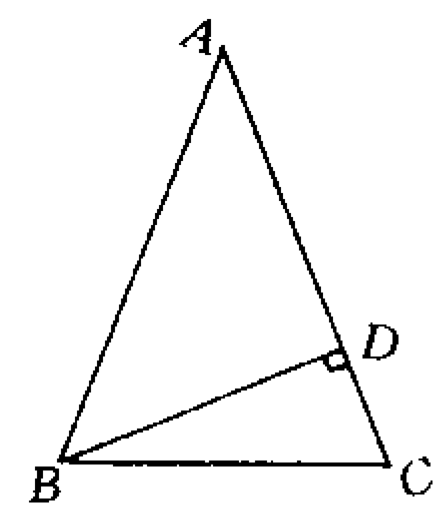
$$\begin{cases}\dfrac{3x}{x+y}=\dfrac{5}{3},\\ 4x+y=24;\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{3x}{x+y}=\dfrac{3}{5},\\ 4x+y=24.\end{cases}$$

它们分别可解得 $\begin{cases}x=5,\\ y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\ y=12.\end{cases}$

但 $y=12$ 时,已为周长之半不妥.因而 $y=4$.

故选(C).

17·62　设△ABC 满足下面条件:$AB=AC$,又 D 是 AC 上一点且使 $BD\perp AC$,而 AD 和 CD 长是整数且 $BD^2=57$.在所有这类三角形中最小的 AC 的值是



(A)9.　(B)10.　(C)11.　(D)12.　(E)13.

（第 50 届美国高中数学考试,1999 年）

[解]　因 AD、CD 长为整数,设 $AD=m$,$DC=n$.则 $AB=AC=m+n$.

在 Rt△ABD 中,$AB^2-AD^2=BD^2$,

即　$(m+n)^2-m^2=57$,有　$n(2m+n)=57$,

又　$57=3\times19=1\times57$,显然　$n=3$,$2m+n=19$,

得　$m=8$;或 $n=1$,$2m+n=57$,得 $m=28$.

从而　$m+n=11$,或　$m+n=29$.

所以最小的 AC 的值为 11.

故选(C).

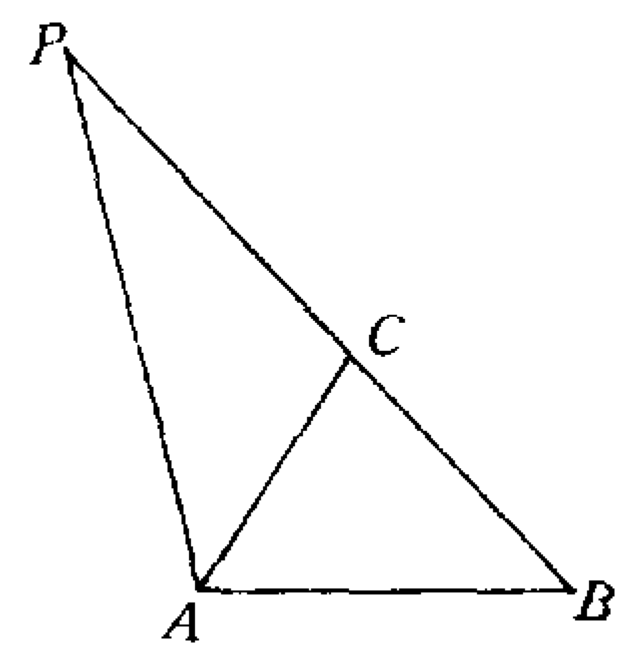
17·63　在△ABC 中 $AB=8$,$BC=7$,$CA=6$.又如图所示把 BC 边延长到点 P,使得△PAB 与△PCA 相似.PC 的长度是

(A) 7.　　(B) 8.　　(C) 9.　　(D) 10.　　(E) 11.

（第 37 届美国高中数学考试,1986 年）

[解]　若△$PAB\backsim$△PCA,则有

$$\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}=\frac{CA}{AB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$



当 $PC=7$ 时， $PA=\frac{4}{3}PC=\frac{28}{3}$， 则

$$PB=PC+CB=14.$$

这时 $$\frac{PA}{PB}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{4}.$$

当 $PC=8$ 时， $PA=\frac{4}{3}PC=\frac{32}{3}$， 则

$$PB=PC+CB=15.$$

这时 $$\frac{PA}{PB}=\frac{32}{45}\neq\frac{3}{4}.$$

当 $PC=9$ 时， $PA=\frac{4}{3}PC=12$， 则 $PB=PC+CB=16$.

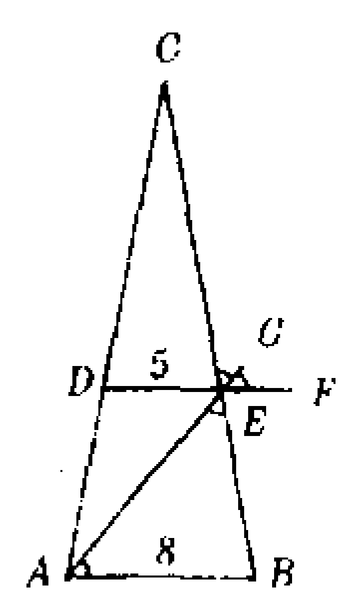
这时 $$\frac{PA}{PB}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}.$$

故选(C).

17·64 $\triangle ABC$ 的边 AB 长 8 英寸，直线 DEF 平行 AB，交 AC 于 D，交 BC 于 E. 此外，AE 的延长线平分 $\angle FEC$，若 DE 长为 5 英寸，则 CE 的长(按英寸计算)为

(A) $\frac{51}{4}$.　　(B) 13.　　(C) $\frac{53}{4}$.　　(D) $\frac{40}{3}$.　　(E) $\frac{27}{2}$.

（第 19 届美国高中数学考试，1968 年）



[**解**] 由设 $DE\parallel AB$，则 $\angle GEF=\angle EAB$，

又 $\angle GEF=\angle GEC=\angle AEB=\angle EAB$，

故 $\triangle AEB$ 为等腰三角形.

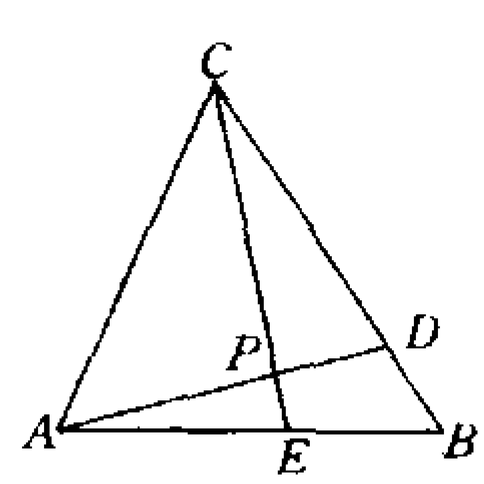
再由 $DE\parallel AB$， 有 $\triangle CDE\backsim\triangle CAB$，则

$\frac{EC}{BC}=\frac{DE}{AB}$， 即 $\frac{EC}{8+EC}=\frac{5}{8}$，

解得 $EC=\frac{40}{3}$.

故选(D).

17·65 在 $\triangle ABC$ 中，如图，$\frac{CD}{DB}=\frac{3}{1}$，$\frac{AE}{EB}=\frac{3}{2}$，设 $r=\frac{CP}{PE}$，其中 P 为 CE 与 AD 的交点，则 r 等于

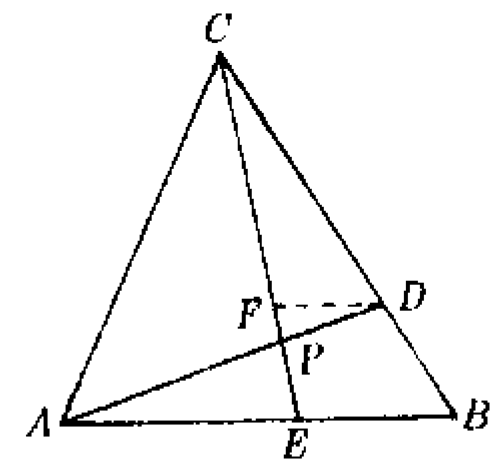


(A) 3.　　(B) $\frac{3}{2}$.　　(C) 4.

(D) 5.　　　(E)$\frac{5}{2}$.

（第 14 届美国高中数学考试，1963 年）

[解] 作 $DF /\!/ AB$，由平行线截线段成比例性质有



$$\frac{CF}{FE}=\frac{CD}{DB}=\frac{3}{1},\quad 且\quad \frac{FD}{EB}=\frac{CD}{CB}=\frac{3}{4}.$$

故　$CF=3FE=3FP+3PE$，

且　$$FD=\frac{3}{4}EB.$$

因而　$$CP=CF+FP=4FP+3PE.$$

又由$\triangle FDP \backsim \triangle EAP$，　有　$\frac{FP}{PE}=\frac{FD}{AE}$，　即　$FD=\frac{FP\cdot AE}{PE}$.

但　$AE=\frac{3}{2}EB$，　则　$FD=\frac{FP}{PE}\cdot\frac{3}{2}EB$.

$\therefore$　$\frac{3}{4}EB=\frac{3}{2}EB\cdot\frac{FP}{PE}$.　而　$FP=\frac{1}{2}PE$，

则　$$CP=4\cdot\frac{1}{2}PE+3PE=5PE.$$

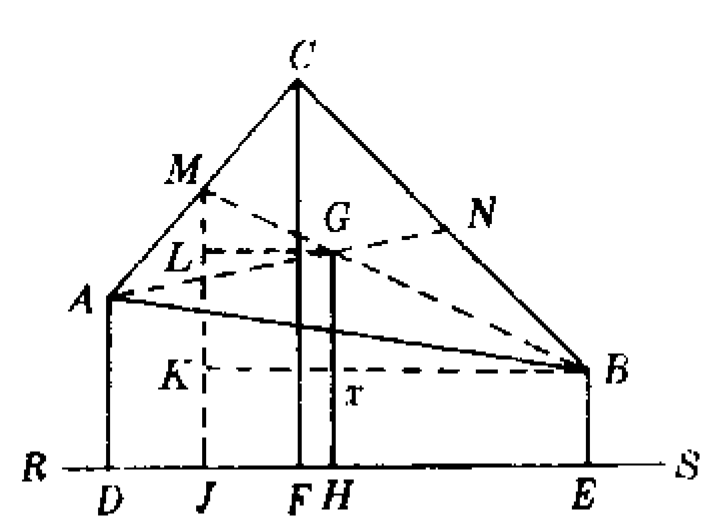
故选(D).

17·66　直线 RS 与$\triangle ABC$ 不相交，由三角形的顶点 A,B,C 向 RS 作垂线，相应的垂足分别是 D,E,F，又 $AD=10$，$BE=6$，$CF=24$，如果记 H 是由$\triangle ABC$ 的中线交点 G 向 RS 作垂线的垂足，x 表示线段 GH 的长，则 x 是

(A)$\frac{40}{3}$.　(B) 16.　(C)$\frac{56}{3}$.　(D)$\frac{80}{3}$.　(E)不能确定.

（第 18 届美国高中数学考试，1967 年）

[解] 作 AC,BC 上的中线 AN,BM 交于 G，过 M 作 $MJ\perp RS$，且作 $GL /\!/ RS$，$BK /\!/ RS$.



故　$$MJ=\frac{1}{2}(AD+FC)$$
$$=\frac{1}{2}(10+24)=17,$$

因而　$$MK=MJ-KJ$$
$$=MJ-BE$$
$$=17-6=11.$$

由于 $MG=\frac{1}{3}MB$，且 $LG /\!/ KB$，故 $ML=\frac{1}{3}MK$.

所以 $$GH=LJ=MJ-ML=MJ-\frac{1}{3}MK$$
$$=17-\frac{1}{3}\cdot 11=\frac{40}{3}.$$

故选(A).

注 此问题的物理意义是明显的.

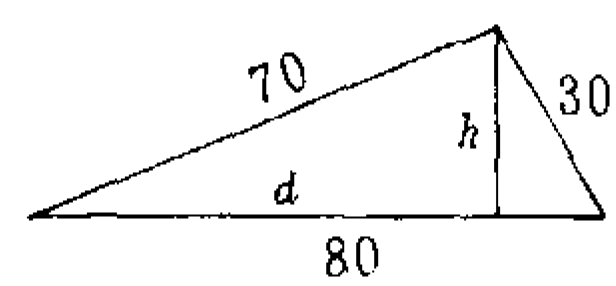
其实，$GH=\frac{1}{3}(AD+BE+CF)$.

17·67 某三角形的三边为30,70和80.在边长为80的边上引一高线,则在此边上所截取的较长线段是

(A) 62. (B) 63. (C) 64. (D) 65. (E) 66.

(第9届美国高中数学考试,1958年)

[解] 设所截较长线段长为 d,由勾股定理有



$$70^2-d^2=h^2=30^2-(80-d)^2,$$

解得 $d=65$,

故选(D).

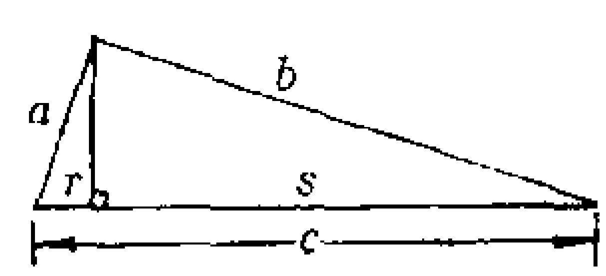
17·68 直角三角形的两直角边为 a,b,斜边为 c,斜边的高分 c 为 r 与 s 两段,依次与 a 与 b 相接,若 $a:b=1:3$,则 r 与 s 之比为

(A) 1:3. (B) 1:9. (C) 1:10.

(D) 3:10. (E) $1:\sqrt{10}$.

(第9届美国高中数学考试,1958年)

[解] 由相似三角形性质可得



$$a^2=rc,\quad b^2=sc.$$

故 $$\frac{r}{s}=\frac{rc}{sc}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

故选(B).

17·69 直角三角形的二直角边为 a,b,斜边为 c,斜边上的高为 x,则

(A) $ab=x^2$. (B) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$. (C) $a^2+b^2=2x^2$.

(D) $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$. (E) $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$.

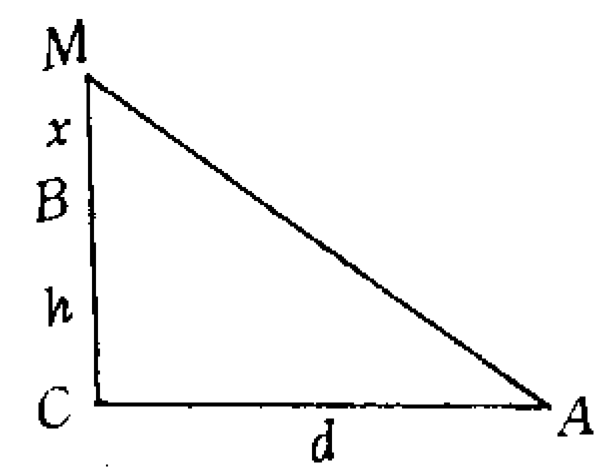
(第7届美国高中数学考试,1956年)

[解] 由设有 $2S_{\triangle}=ab=cx$， 故 $a^2b^2=c^2x^2$.

即 $a^2b^2=(a^2+b^2)x^2$， 从而 $\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{x^2}$.

故选(D).

17·70 在直角三角形中,已知 $BM+MA=BC+CA$,若 $MB=x$, $CB=h$, $CA=d$,则 x 等于



(A) $\dfrac{hd}{2h+d}$. (B) $d-h$.

(C) $\dfrac{1}{2}d$. (D) $h+d=\sqrt{2}d$.

(E) $\sqrt{h^2+d^2}=h$.

(第5届美国高中数学考试,1954年)

[解] 由设及勾股定理有

$$MA^2=(x+h)^2+d^2,$$

又 $MA+x=h+d$， 有 $MA=h+d-x$,

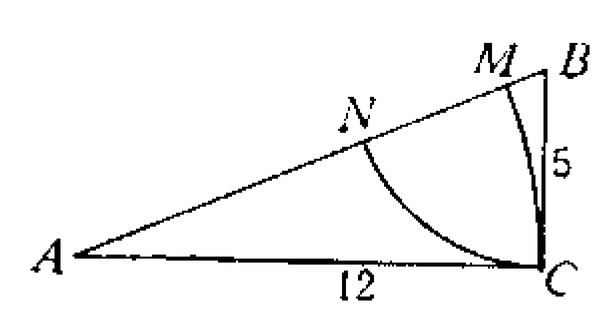
$$\therefore \quad (h+d-x)^2=(x+h)^2+d^2,$$

得

$$x=\frac{hd}{2h+d}.$$

故选(A).

17·71 设直角△ABC 的两直角边边长分别为5与12.我们分别以 A 为中心,12为半径,B 为中心,5为半径作两条圆弧,它们与斜边分别交于 M 与 N,则线段 MN 的长度是



(A) 2. (B) $\dfrac{13}{5}$. (C) 3.

(D) 4. (E) $\dfrac{24}{5}$.

(第36届美国高中数学考试,1985年)

[解] 由勾股定理 $AB=\sqrt{5^2+12^2}=13$,

则 $MN=AM-AN=AM-(AB-BN)=4$.

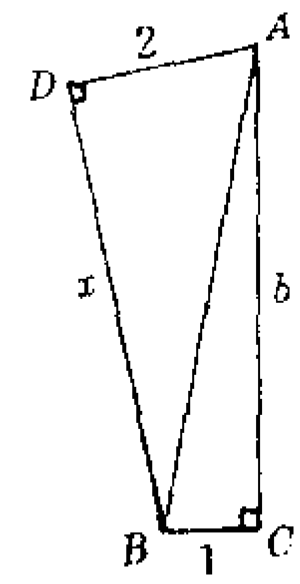
故选(D).

17·72 在直角三角形 ABC 的斜边 AB 上另作一直角三角形 ABD,并以 AB 为斜边.若 $BC=1$,$AC=b$,且 $AD=2$,则 BD 等于

(A) $\sqrt{b^2+1}$. (B) $\sqrt{b^2-3}$. (C) $\sqrt{b^2+1}+2$.

第十七章 三角形

(D) b^2+5.　　(E) $\sqrt{b^2+3}$.



（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

[解] 设 $BD=x$，由勾股定理有

$$x^2+2^2=AB^2=1+b^2,$$

得　　$x=\sqrt{b^2-3}$.

故选(B).

17·73　线段 AB 长为 p 单位，中点 M 的垂线 MR；长 q 单位，自 R 作一弧，其半径等于 $\frac{1}{2}AB$，交 AB 于 T，则下列方程的根为 AT 与 TB 的是

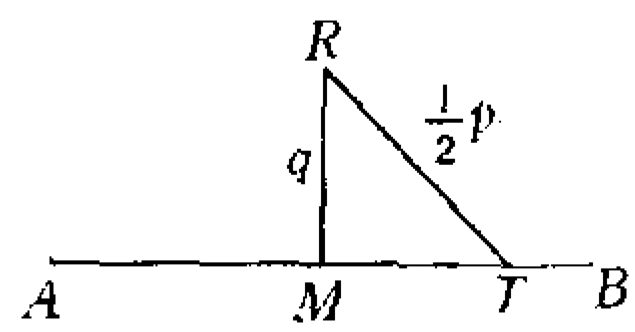
(A) $x^2+px+q^2=0$.

(B) $x^2-px+q^2=0$.

(C) $x^2+px-q^2=0$.

(D) $x^2-px-q^2=0$.

(E) $x^2-px+q=0$.



（第 5 届美国高中数学考试，1954 年）

[解] 由设及勾股定理有　$MT=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}$，从而

$$AT=AM+MT=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2},$$

$$BT=BM-MT=\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

知 AT,BT 分别为方程 $x^2-px+q^2=0$ 的两根.

故选(B).

17·74　自直角三角形的锐角顶点所引的中线长为 5 与 $\sqrt{40}$，那么斜边的长为

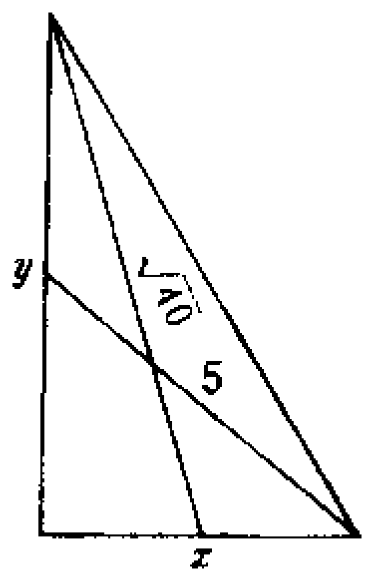
(A) 10.　　(B) $2\sqrt{40}$.　　(C) $\sqrt{13}$.

(D) $2\sqrt{13}$.　　(E)非上述的答案.

（第 2 届美国高中数学考试，1951 年）

[解] 设直角三角形两直角边长分别为 x,y，它们相应中线长分别为 $\sqrt{40}$，5. 由勾股定理有

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=(\sqrt{40})^2,\\ \left(\frac{y}{2}\right)^2+x^2=5^2.\end{cases}$$

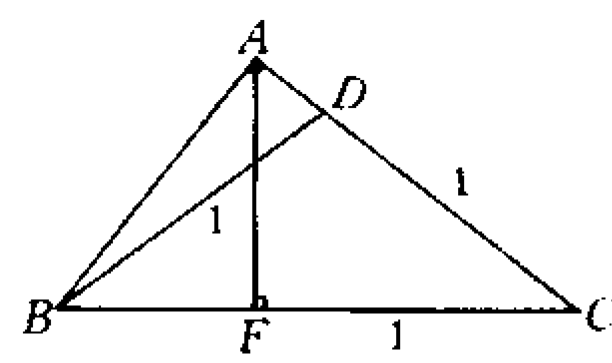


上两式两边相加有 $\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}y^2=65$,

即 $x^2+y^2=52$,得斜边长为 $\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

故选(D).

17·75 如图,在$\triangle ABC$中,D在AC上.F在BC上,并且$AB\perp AC$,$AF\perp BC$,$BD=DC=FC=1$.AC应是



(A)$\sqrt{2}$.　(B)$\sqrt{3}$.　(C)$\sqrt[3]{2}$.

(D)$\sqrt[3]{3}$.　(E)$\sqrt[4]{3}$.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解 1] 设$AC=x$,$\angle DCF=\theta$.

因为在$\triangle DBC$中,$BD=DC=1$,所以$\angle CBD=\theta$.

又由外角定理得$\angle ADB=2\theta$.

在直角三角形AFC中,$\cos\angle DCF=\cos\theta=\frac{1}{x}$.

在直角$\triangle ABD$中,$AD=x-1$,所以

$$\cos\angle ADB=\cos 2\theta=\frac{x-1}{1}=x-1.$$

又由三角公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$,

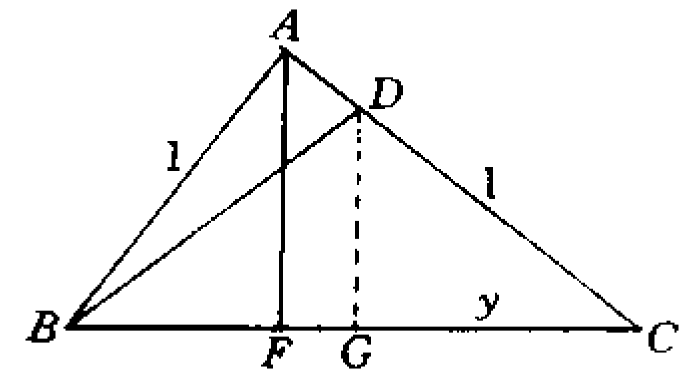
所以 $2\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=x-1$,

即 $2-x^2=x^3-x^2$,

解得 $x=\sqrt[3]{2}$.

故选(C).

[解 2] 作$DG\perp BC$于G,设$AC=x$,$GC=y$.



因为$\triangle BDC$是等腰三角形,DG是BC边上的高,所以 $BC=2y$.

又由 $\triangle DCG\backsim\triangle ACF\backsim\triangle BCA$,

第十七章 三角形

所以有 $\frac{1}{y}=\frac{x}{1}=\frac{2y}{x}$.

于是有 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=\frac{x^2}{2}$, 消 y 有 $x^3=2$, 即得 $x=\sqrt[3]{2}$.

故选(C).

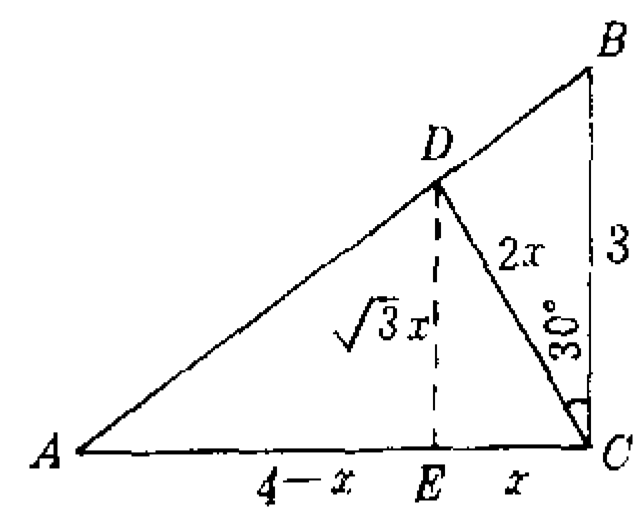
17·76 已知直角三角形 ABC,两直角边 $BC=3$, $AC=4$,求三等分直角的平分线中较短者的长为

(A)$\frac{32\sqrt{3}-24}{13}$. (B)$\frac{12\sqrt{3}-9}{13}$. (C) $6\sqrt{3}-8$.

(D)$\frac{5\sqrt{10}}{6}$. (E)$\frac{25}{12}$.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 设CD 为$\angle C$ 三等分线,过 D 作$DE\perp AC$ 于E.且设 $EC=x$.



在 Rt$\triangle DEC$ 中,$\angle CDE=30°$, 故 $CD=2x$, $DE=\sqrt{3}x$.

由相似三角形性质有 $\frac{AE}{DE}=\frac{AC}{BC}$,

即 $\frac{4-x}{\sqrt{3}x}=\frac{4}{3}$,

得 $x=\frac{12}{3+4\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{3}-12}{13}$.

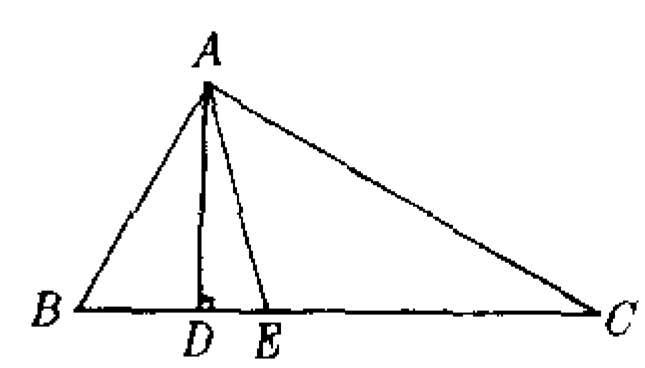
故选(A).

17·77 如图,在以 A 为直角顶点的直角$\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,$AD\perp BC$,AE 平分内角$\angle BAC$,$AB=a$,则 DE 之长是

(A) $(\sqrt{3}-1)a$. (B) $(\sqrt{3}+1)a$.

(C) $(\sqrt{3}-\frac{3}{2})a$. (D) $(\frac{5}{2}-\sqrt{3})a$.

(E) $(\sqrt{3}+\frac{1}{2})a$.



(中国吉林省八市初中数学竞赛,1986 年)

[解] 由题设知 $\angle C=30°$,故由 $AB=a$, 得 $BC=2a$,

从而 $AC=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$.

又 $AD\perp BC$,知$\triangle ABD$ 为 $30°-60°-90°$的三角形,则

$$BD=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}.$$

再 AE 平分$\angle BAC$，有 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，从而

$$BE=2a\cdot\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{2a}{1+\sqrt{3}}=(\sqrt{3}-1)a.$$

所以 $DE=BE-BD=(\sqrt{3}-1)a-\dfrac{a}{2}=(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2})a$.

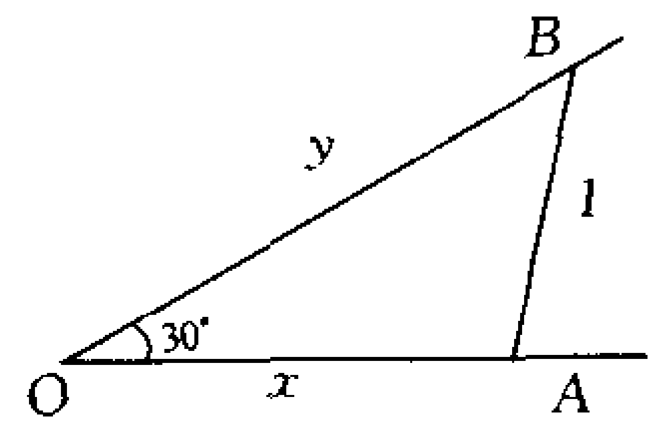
故选(C).

17·78 两条以 O 为起点的射线夹角为 30°,点 A 位于一条射线上,点 B 位于另一条上,又 $AB=1$.则 OB 的最大长度为

(A)1. (B)$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. (C)$\sqrt{3}$. (D)2. (E)$\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解] 设 $OA=x,OB=y$. 在$\triangle ABO$ 中由余弦定理有



$$x^2+y^2-\sqrt{3}xy=1,$$

即 $x^2-\sqrt{3}yx+(y^2-1)=0$.

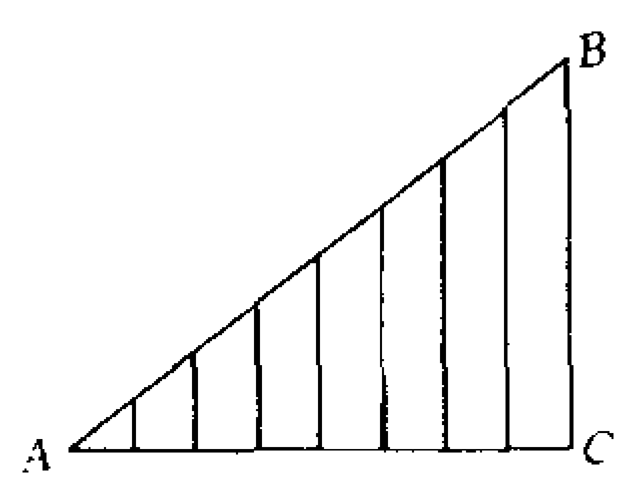
将上式视为 x 的方程有实根,则

$\Delta=3y^2-4(y^2-1)\geqslant 0$.

得 $y\leqslant 2$, 知 $y_{\max}=2$.

故选(D).

17·79 直角$\triangle ABC$ 的边 AC 分成八等分,自各分点引 BC 的平行线段共七条,若 $BC=10$,则这七条线段长之和为



(A)不可能从这些数据求得.

(B) 33. (C) 34.

(D) 35. (E) 45.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)

[解] 设 h_k 为自 A 起第 k 条平行线段长.

由 $\dfrac{h_k}{\frac{k}{8}\cdot AC}=\dfrac{BC}{AC}$, 得 $h_k=\dfrac{5}{4}k$.

故 $$\sum_{k=1}^{7}h_k=\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{7}k=\frac{5}{4}\cdot\frac{8\cdot 7}{2}=35.$$

故选(D).

17·80 一女子营房坐落在距某直路 300 米处,一男子营房坐落在

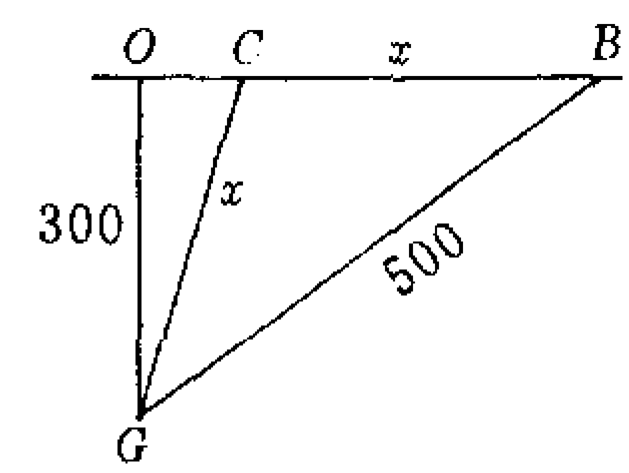
此直路上但距女子营房500米处,今欲在此直路上建一餐厅,距各营房等距,则此距离应为

(A) 400米.　　(B) 250米.　　(C) 87.5米.

(D) 200米.　　(E)非上述答案.

（第4届美国高中数学考试,1953年）

[解]　如图,设G为女子营房,B为男子营房;且设餐厅建在C处,同时设$BC=GC=x$.



$\because\quad OB=\sqrt{500^2-300^2}=400$,

$\therefore\quad GC=\sqrt{OC^2+OG^2}$,

即　　$x=\sqrt{(400-x)^2+300^2}$,

解得　$x=312.5(\text{m})$.

故选(E).

17·81　某三角形底边为80,一底角为60°,另二边长之和为90,则最短边为

(A) 45.　(B) 40.　(C) 36.　(D) 17.　(E) 12.

（第10届美国高中数学考试,1959年）

[解]　若$\triangle ABC$中,$AB=80,BC=a$,则$AC=b=90-a$,且$\angle B=60°$.



作AB上的高CD,且设$BD=x$,有

$$CD=\sqrt{3}x,\quad a=2x,\quad b=90-2x.$$

由勾股定理有　$3x^2+(80-x)^2=(90-2x)^2$,

得　$x=\dfrac{17}{2}$,且　$a=17,\ b=73$.

故选(D).

17·82　$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,又CD是其平分线.已知$AD=p$,$DB=q$,那么AB边上的高h等于

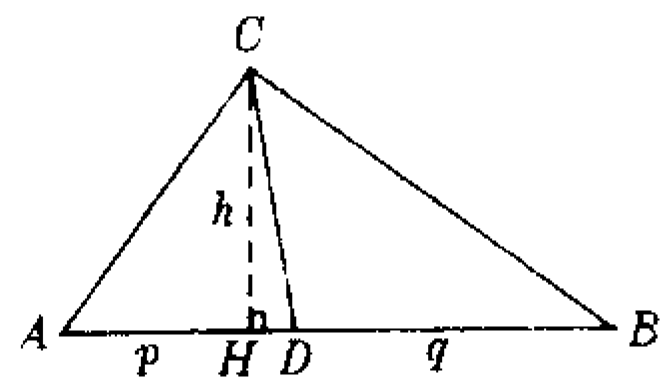
(A)$\dfrac{pq}{p^2+q^2}$.　(B)$\dfrac{p+q}{p^2+q^2}$.　(C)$\dfrac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$.　(D)$\dfrac{p^2+q^2}{pq(p+q)}$.

（中国浙江省杭州市初中数学竞赛,1985年）

[解]　由设CD平分$\angle ACB$,则　$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{p}{q}$,

令$AC=pt$,　$BC=qt$.

由勾股定理有$(pt)^2+(qt)^2=(p+q)^2$,



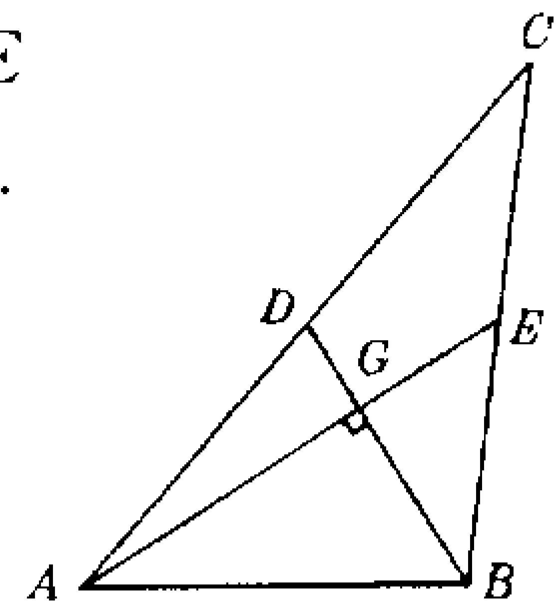
得 $t^2=\dfrac{(p+q)^2}{p^2+q^2}$.

又 $2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BC=h\cdot AB$,

则$h=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{pt\cdot qt}{p+q}=\dfrac{pqt^2}{p+q}=\dfrac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$.

故选(C).

17·83 在$\triangle ABC$中,$BC=3$, $AC=4$.又AE和BD分别是BC和AC边上的中线,且$AE\perp BD$.则AB的长为



(A)$\sqrt{5}$. (B) $3\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{2}$.

(D)$\sqrt{7}$. (E)不能确定.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1983年)

[解] 设$AE=3x$, $BD=3y$,则$AG=2x$, $GE=x$, $BG=2y$, $GD=y$.

又 $AD=\dfrac{1}{2}AC=2$, $BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{3}{2}$.

故 $(2x)^2+y^2=AD^2=4$, 且 $x^2+(2y)^2=BE^2=\dfrac{9}{4}$,

两式相加有 $5x^2+5y^2=\dfrac{25}{4}$, 即 $x^2+y^2=\dfrac{5}{4}$, 则

$$4x^2+4y^2=5,\quad 即\quad AG^2+BG^2=5.$$

所以 $AB^2=AG^2+BG^2=5$, 则 $AB=\sqrt{5}$.

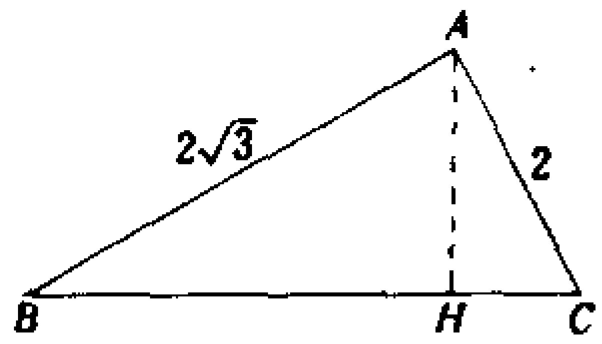
故选(A).

17·84 在$\triangle ABC$中,$AB=2\sqrt{3}$, $AC=2$,且BC边上的高为$\sqrt{3}$.则BC的长是

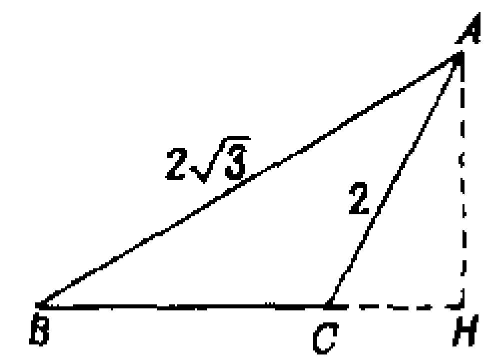
(A) 4. (B) 2. (C) 4或2. (D)非以上结论.

(中国浙江省初中数学竞赛,1993年)

[解] 由设及图②知



图①



图②

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{12-3}=3,$$

又 $$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{4-3}=1.$$

由图①②知　$BC=4$ 或 2.

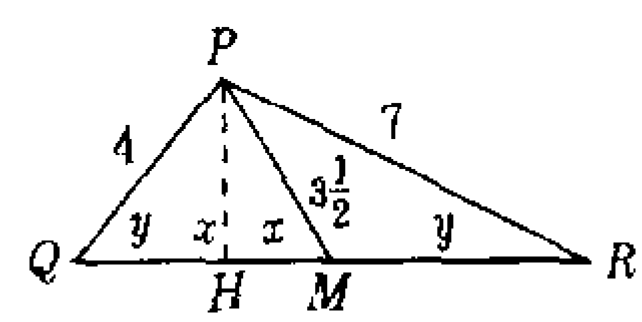
故选(C).

17·85　$\triangle PQR$ 的边 PQ,PR 的长各为 4 与 7,中线 PM 的长为 $3\frac{1}{2}$,则 QR 的长为

(A) 6.　　(B) 7.　　(C) 8.　　(D) 9.　　(E) 10.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解]　令 $MR=y$. 作 $PH\perp QR$ 于 H,且令 $HM=x$. 由勾股定理



$$16-(y-x)^2=(3\frac{1}{2})^2-x^2$$

即　$(y-x)^2-x^2=\frac{15}{4}$,　或　$y^2-2xy=\frac{15}{4}$,

又 $$16-(y-x)^2=49-(x+y)^2,$$

即　$(y+x)^2-(y-x)^2=33$,　或　$4xy=33$.

由上两式可有　$y^2=\frac{33}{2}+\frac{15}{4}=\frac{81}{4}$,　得　$y=\frac{9}{2}$.

则 $$QR=9.$$

故选(D).

17·86　在直角$\triangle ABC$ 中,斜边 $AB=5$,直角边 $AC=3$. $\angle A$ 的平分线交对边于 A_1,然后取斜边 $PQ=A_1B$,直角边 $PR=A_1C$ 作第二个直角$\triangle PQR$,若$\angle P$ 的平分线交对边于 P_1,则 PP_1 的长为

(A) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.　　(B) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.　　(C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

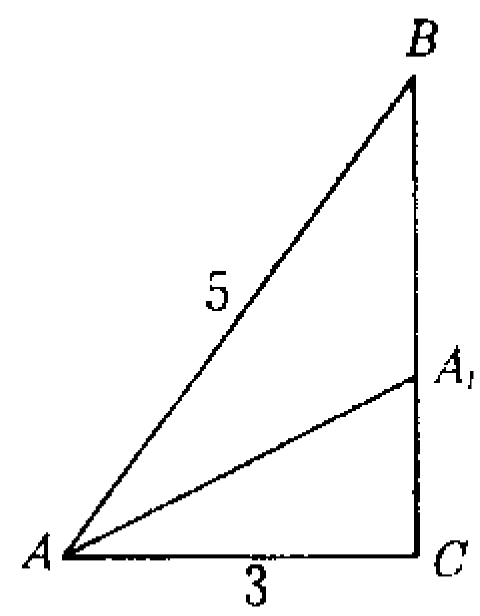
(D) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.　　(E) $\frac{15\sqrt{2}}{16}$.

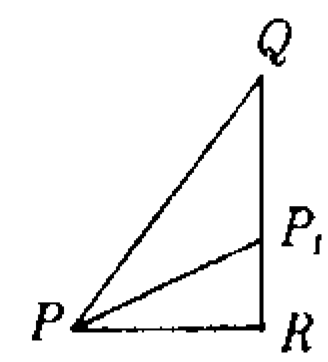
(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解] 设 Rt△ABC 边 BC 被∠A 平分线 AA_1 分成 A_1B 与 A_1C 两段. 由角分线性质知

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_1B}{BC-A_1B}=\frac{AB}{AC},$$

由 $BC=\sqrt{5^2-3^2}=4$, 则





$$\frac{A_1B}{4-A_1B}=\frac{5}{3},$$

且 $$A_1B=\frac{5}{2}=PQ,$$

又 $$A_1C=\frac{3}{2}=PR.$$

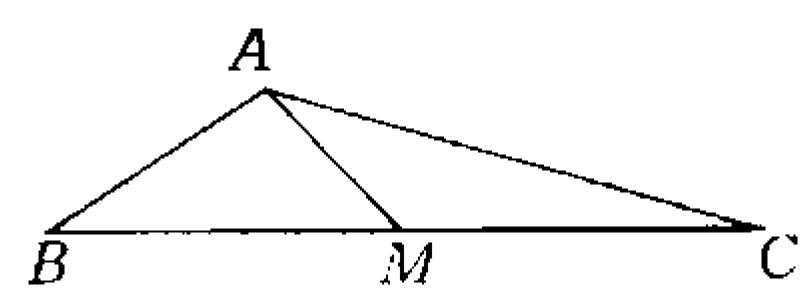
在 Rt△PQR 中, $RQ=\sqrt{PQ^2-PR^2}=2$.

显然, Rt△PQR∽Rt△ABC, 且相似比 1∶2.

故 $$PP_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+A_1C^2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

故选(B).

17·87 如图, △ABC 中, $AB=4$, $AC=8$. 若 M 是 BC 的中点, $AM=3$, BC 长为



(A) $2\sqrt{26}$. (B) $2\sqrt{31}$.

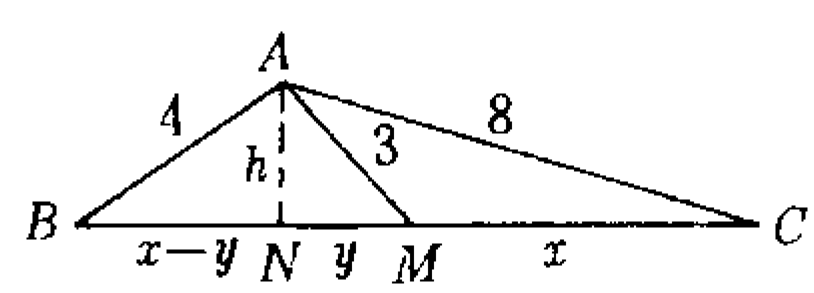
(C) 9. (D) $4+2\sqrt{13}$.

(E)已知条件不足以解此题.

(第 26 届美国高中数学考试, 1975 年)

[解 1] 如图设 h 是所求的边 BC 的高 AN 的长, 且设 $x=BM$, $y=NM$. 那么这样

$$\begin{cases} h^2+(x+y)^2=64, & ① \\ h^2+y^2=9, & ② \\ h^2+(x-y)^2=16. & ③ \end{cases}$$



由①+③−2×②得 $2x^2=62$, 解得 $x=\sqrt{31}$, $BC=2\sqrt{31}$.

故选(B).

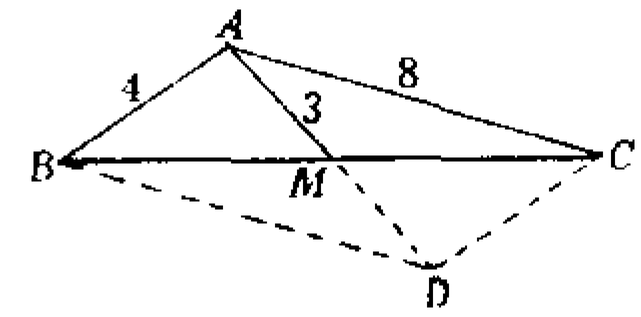
[解 2] 延长 AM 到 D, 使 $AM=MD$, 连结 BD, CD, 则 $ABDC$ 是平行四边形, 故

$$AD^2+BC^2=2(AB^2+AC^2),$$

即 $$BC^2=2(4^2+8^2)-6^2=124.$$

所以　　$BC=2\sqrt{31}$.

故选(B).

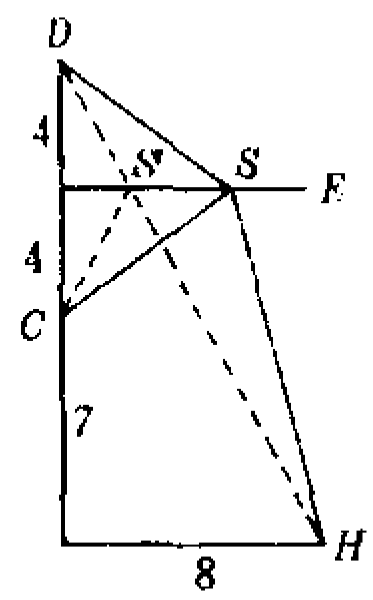


17·88　一个牧童在小河南 4 英里处,河水向正东流.而他也正位于他的小屋西 8 英里北 7 英里处.他想把他的马牵到小河去饮水然后回家.他能够完成这件事所走的最短距离(英里)是

(A) $4+\sqrt{185}$. (B) 16. (C) 17. (D) 18. (E) $\sqrt{32}+\sqrt{137}$.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解]　如图,设 S 表示小河 SE 上的任何一点,且 C,H 和 D 分别是牧童,他的小屋以及 C 点北 8 英里的位置.



易证 $CS+SH=DS+SH$.显然当 DSH 是一条直线时距离最短,从而

$CS'+S'H=DS'H=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$.

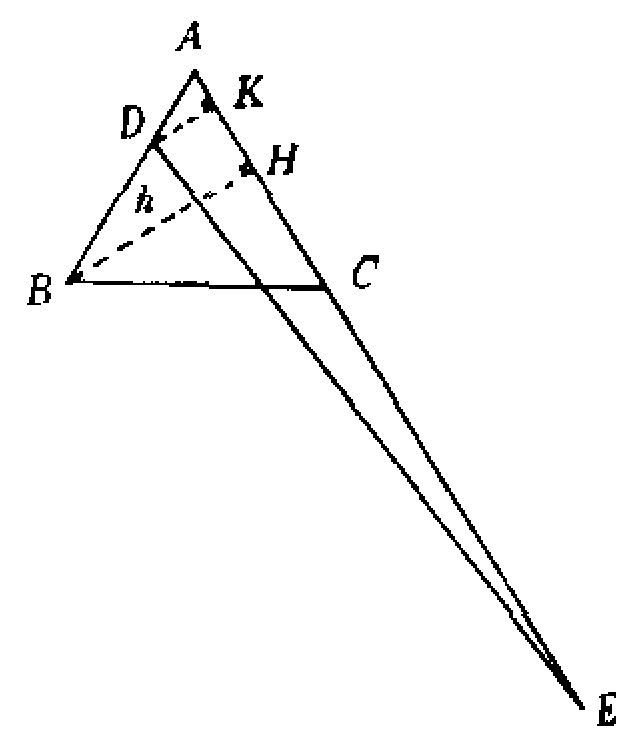
故选(C).

17·89　在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=3.6$,D 点在 AB 上,且 $AD=1.2$,E 点在AC 的延长线上,$\triangle AED$ 的面积等于$\triangle ABC$ 的面积,则 AE 等于

(A) 4.8.　(B) 5.4.　(C) 7.2.　(D) 10.8.　(E) 12.6.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解]　设$\triangle ABC$ 边AC 上的高为h,又



$$AD=1\cdot 2=\frac{1}{3}AB,$$

作 $DK\perp AC$ 于K,则　$DK=\frac{1}{3}h$.

而　$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ABC}$,因而有

$$\frac{1}{2}\cdot AE\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h,$$

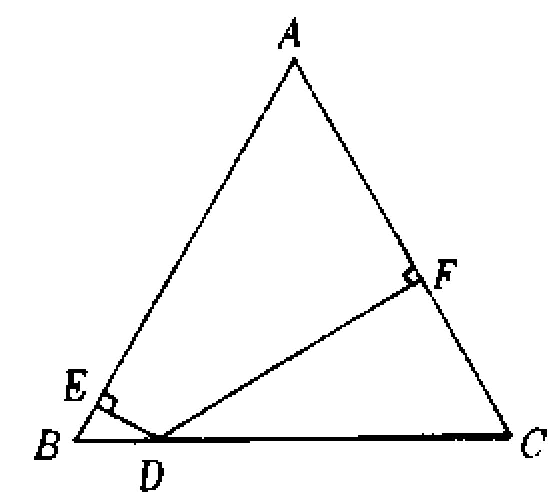
故　$AE=3\cdot AC=10.8$.

故选(D).

17·90　如图,$\triangle ABC$ 为等边三角形,$DE=19$,$DF=89$,则$\triangle ABC$ 的周长为

(A) 216.　　　(B) $216\sqrt{3}$.

(C) 648.　　　(D) $324\sqrt{3}$.



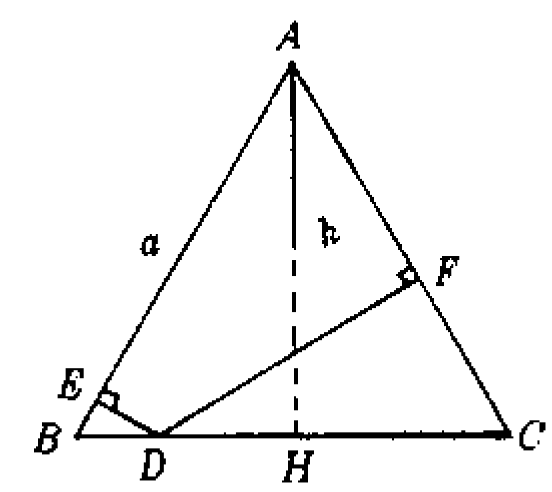
（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛，1989 年）

[解]　由设$\triangle ABC$为等边三角形，则 $DE+DF=h$（一边上的高），这可利用面积公式得到.

故　　$h=19+89=108$.

则　　$3a=3\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}h=2h\sqrt{3}$

$=216\sqrt{3}$.



故选(B).

17·91　已知方程 $x^2-8x+m+6=0$ 有两相等的实根，且它的根是$\triangle ABC$的 BC 边长. 若$\triangle ABC$面积为 6，则它的重心 G 到 BC 的距离是

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) 3.　　(D) $1\dfrac{1}{2}$.

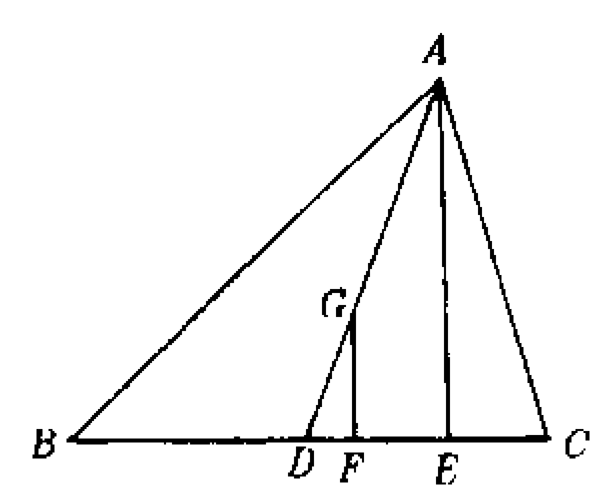
（中国浙江省初中数学竞赛，1992 年）

[解]　由题设方程有等根，则

$\Delta=(-8)^2-4(m+6)=0$，得 $m=10$.

则方程为　$x^2-8x+16=0$.

设 AE 为$\triangle ABC$的高，AD 为 BC 的中线（如图）.



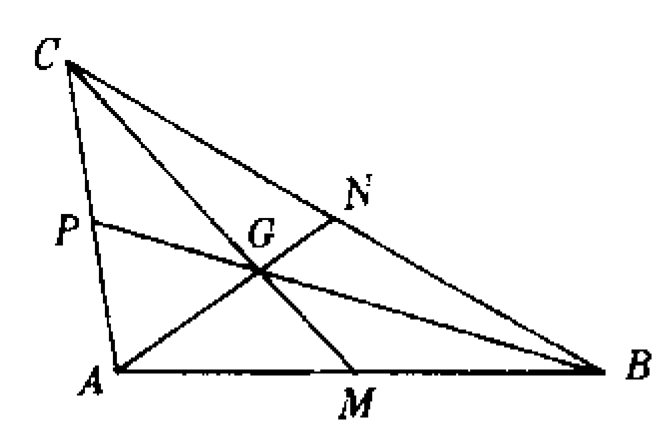
又　$BC=x_1=x_2=4$，且 $\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=6$，知 $AE=3$.

由重心定理　$GF:AE=GD:AD=1:3$，

即　$GF:3=1:3$，　$\therefore$　$GF=1$.

故选(B).

17·92　不等边三角形，其中线 AN 与 BP 的长各为 3 与 6，面积为 $3\sqrt{15}$，第三条中线 CM 长为



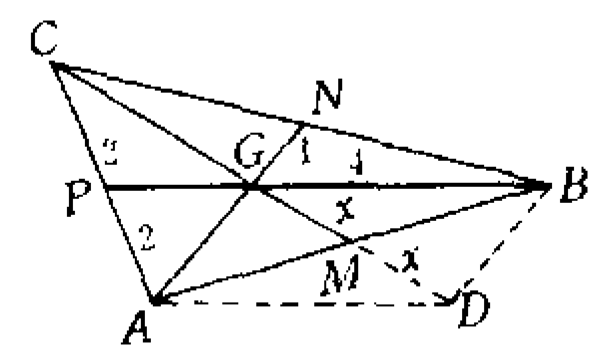
(A) 4.　　(B) $3\sqrt{3}$.　　(C) $3\sqrt{6}$.

(D) $6\sqrt{3}$.　　(E) $6\sqrt{6}$.

（第 13 届美国高中数学考试，1962 年）

选择题卷

[解] 延长 GM 到 D 使 $MD=GM$，连 AD, BD，则四边形 $ADBG$ 为平行四边形.



则 $\frac{1}{2}S_{\square ADBG}=S_{\triangle ABG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\sqrt{15}$，

且 $\frac{1}{2}S_{\square ADBG}=S_{\triangle AGD}$

$=\sqrt{p(p-u)(p-v)(p-t)}$，

这里 u, v, t 分别为 $\triangle AGD$ 的三边长，且 p 为其半周长.

由设 $u=2x$，$v=4$，$t=2$，$p=3+x$，代入上式则有

$$\sqrt{(3+x)(3-x)(x-1)(x+1)}=\sqrt{15},$$

即
$$(x^2-1)(9-x^2)=15,$$

或
$$x^4-10x^2+24=0.$$

解得 $x^2=4$ 或 6，即 $x=2$ 或 $\sqrt{6}$.

由之还有 $CM=6$ 或 $3\sqrt{6}$，但因 $BP=6$，又三角形不等边，则 $CM=6$ 舍之.

因而 $CM=3\sqrt{6}$.

故选(C).

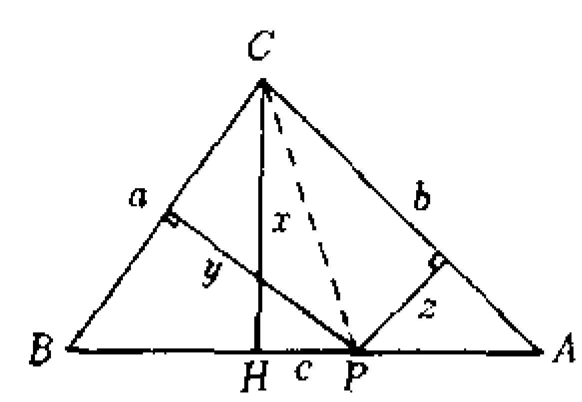
17·93 设三角形的三边互不相等，最大边上的高为 x，最大边上任一点到另外两边的距离分别为 y 和 z. 则

(A) $x<y+z$.　　(B) $x=y+z$.

(C) $x>y+z$.　　(D)以上大小关系依赖于三角形的边长.

(中国江苏省初中数学竞赛，1991 年)

[解] 设三角形三边分别为 a, b, c，且 $a<b<c$.



由
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}cx,$$

又
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bz,$$

因而
$$\frac{1}{2}cx=\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bz，即\quad cx=ay+bz,$$

$\because$
$$ay+bz<cy+cz=c(y+z)$$

$\therefore$
$$cx<c(y+z)，即\quad x<y+z.$$

故选(A).

17·94　在等边三角形内任取一点,由该点作三边的垂线,则这些垂直线段长的和为

(A)当此点为等边三角形的重心时,最小.

(B)大于此三角形的高.

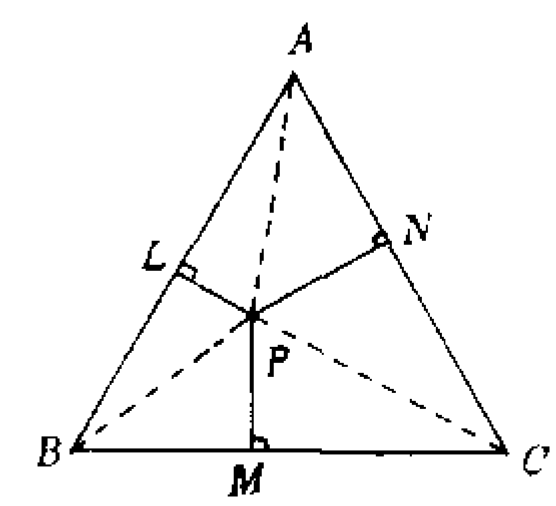
(C)等于此三角形的高.

(D)此三角形三边之和的一半.

(E)当此点为此三角形的重心时,最大.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

[解]　如图 P 为正$\triangle ABC$ 内一点，　P 向三边所作垂线垂足分别为 L,M,N. 连 PA、PB、PC,若 a 为正三角形边长,h 为其一边上的高,由

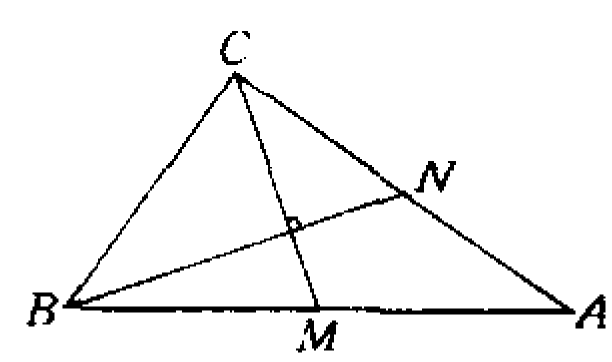


$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$,

可有　$h=PL+PM+PN$.

故选(C).

17·95　如图,三角形 ABC 为直角三角形,其中$\angle BCA=90°$. 中线 CM 垂直于中线 BN,且 $BC=s$. 则 BN 的长度是



(A) $s\sqrt{2}$.　　　　(B)$\frac{3}{2}s\sqrt{2}$.

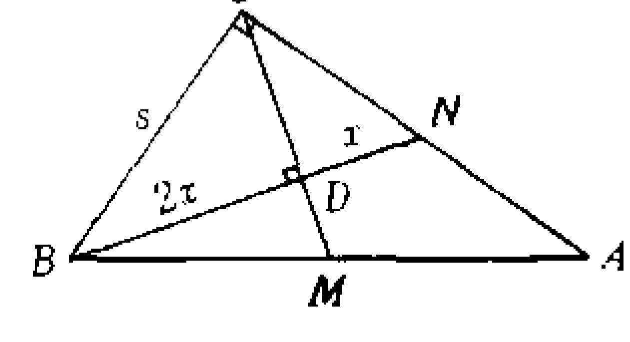
(C) $2s\sqrt{2}$.　　　　(D)$\frac{s\sqrt{5}}{2}$.　　　　(E)$\frac{s\sqrt{6}}{2}$.

（第 33 届美国高中数学考试,1982 年）

[解]　如图,在$\triangle ABC$ 中,因 CM、BN 相交于 D 点,所以,若设 $x=DN$,则 $2x=BD$.

又因为在 $\mathrm{Rt}\triangle CBN$ 中,CD 是 BN 边上的高,所以

$$BC^2=BD\cdot BN,$$



即　$s^2=2x\cdot 3x=6x^2$,　或　$x=\frac{s}{\sqrt{6}}$.

所以　$BN=3x=\frac{3s}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}s$.

故选(E).

17·96　在$\triangle ABC$ 中,过 A 的中线垂直于过顶点 B 的中线,如果 AC 和 BC 的边长分别是 6 和 7,那么 AB 的长是

(A) $\sqrt{17}$.　(B) 4.　(C) $4\frac{1}{2}$.　(D) $2\sqrt{5}$.　(E) $4\frac{1}{4}$.

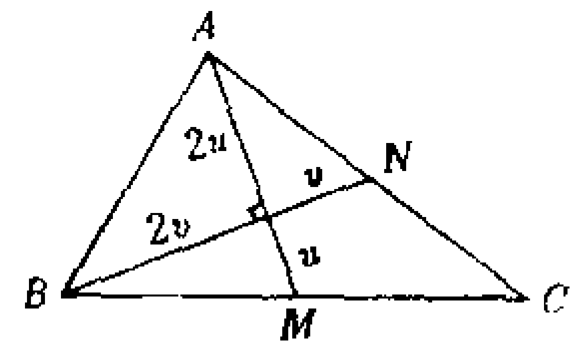
（第 12 届美国高中数学考试，1961 年；
第 21 届美国高中数学考试，1970 年）

[解]　由设中线 AM，BN 的交点 G 为重心.

显然，若设 $GM=u$，$GN=v$，则 $AG=2u$，$BG=2v$.

又由设知　$BM=\frac{1}{2}BC=3\frac{1}{2}$，

$AN=\frac{1}{2}AC=3$.



由勾股定理，于 Rt△AGN 和 Rt△BGM 中有

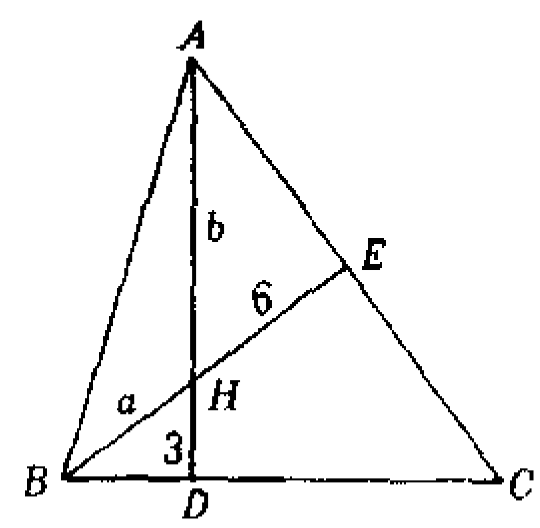
$(2u)^2+v^2=3^2$　和　$(2v)^2+u^2=(3\frac{1}{2})^2$.

两式相加有　　　$5u^2+5v^2=\frac{85}{4}$.

从而　$4u^2+4v^2=17=AB^2$.　则　$AB=\sqrt{17}$.

故选(A).

17·97　如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$AC=16.25$，$BC=13.75$，$HE=6$，$HD=3$，$b-a=5$，则 $a+b$ 的值是



(A) 12.　(B) 13.　(C) 14.　(D) 15.

（第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛，1988 年）

[解]　由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$，

故　$BC\cdot AD=AC\cdot BE$，即 $(3+b)\cdot 13.75=(a+6)\cdot 16.25$，

又　$b=a+5$，代入上式可解得　$a=5$.

则　$b=a+5=10$.　且　$a+b=15$.

故选(D).

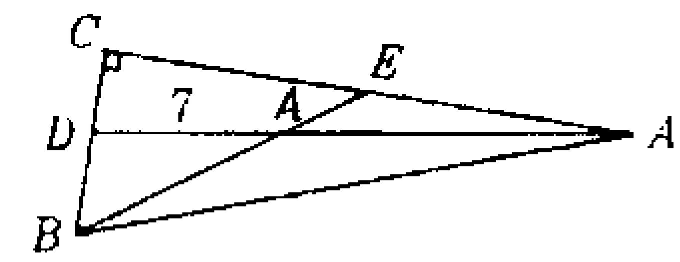
17·98　AB 为直角三角形 ABC 的斜边，中线 AD 的长为 7，中线 BE 的长为 4，则 AB 的长为

(A) 10.　(B) $5\sqrt{3}$.　(C) $5\sqrt{2}$.

(D) $2\sqrt{13}$.　(E) $2\sqrt{15}$.

（第 9 届美国高中数学考试，1958 年）

[**解**] 由设及勾股定理有



$$7^2 = CD^2 + AC^2,$$
$$4^2 = BC^2 + CE^2,$$

故 $7^2 + 4^2 = (CD^2 + BC^2) + (AC^2 + CE^2)$.

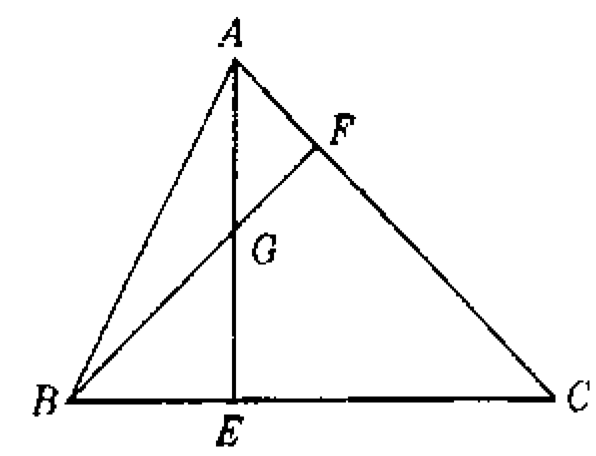
由设 $CD = \frac{1}{2}BC, \quad CE = \frac{1}{2}AC,$

则 $7^2 + 4^2 = \frac{5}{4}(BC^2 + AC^2) = \frac{5}{4}AB^2.$

故 $AB^2 = \frac{4}{5}(7^2 + 4^2) = 52$, 得 $AB = 2\sqrt{13}$.

故选(D).

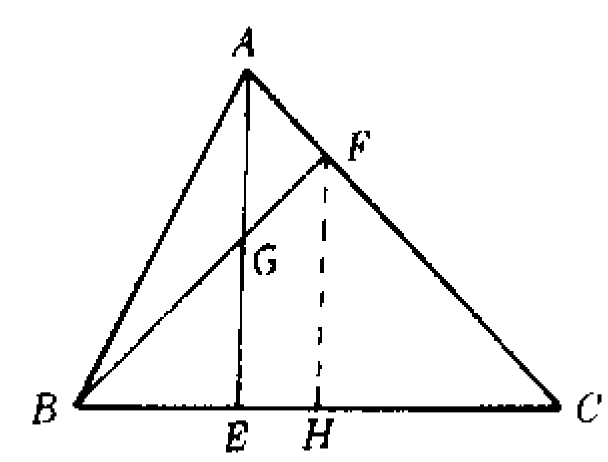
17·99 在三角形 ABC 中,F 点分 AC 边成 1:2 的比.设 E 是 BC 边和 AG 的交点,其中 G 是 BF 的中点.那么 E 分 BC 边成的比是



(A) 1:4. (B) 1:3. (C) 2:5.
(D) 4:11. (E) 3:8.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[**解**] 作 $FH /\!/ AE$.因为 $BG = GF$,



有 $BE = EH$.

同时,由 $2AF = FC$,有 $2EH = HC$.

$\therefore \quad 3BE = EH + HC = EC$.

则 E 分 BC 成为 1:3.

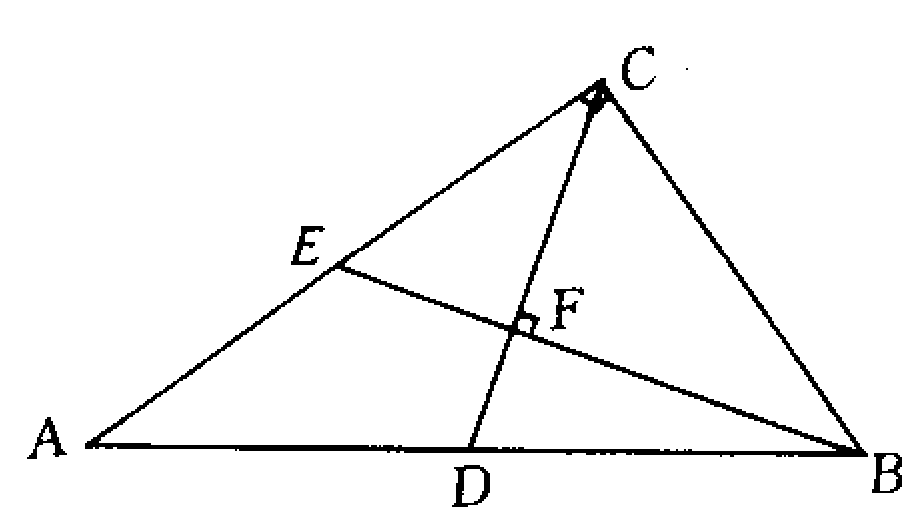
故选(B).

17·100 在△ABC 中,$BC = a$,$AC = b$,$AB = c$,$\angle C = 90°$. CD 和 BE 是△ABC 的两条中线,且 $CD \perp BE$.那么 $a:b:c =$

(A)1:2:3. (B)3:2:1. (C)$\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$. (D)$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

(中国安徽省初中数学竞赛,1997 年)

[**解**] 如图,设 CD 与 BE 交于 F,又设 $EF = x$, $DF = y$, 则 $BF = 2x$, $CF = 2y$.



由相似三角形性质可得

$a^2 = BE \cdot BF = 6x^2$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = EF \cdot$

$EB=3x^2$, $\left(\frac{c}{2}\right)^2=y^2+4x^2$,

即 $a^2=6x^2$, $b^2=12x^2$, $c^2=4y^2+16x^2$.

又 $CF^2=EF\cdot FB$, 即 $4y^2=2x^2$, 则 $c^2=18x^2$,

$\therefore\quad a^2:b^2:c^2=1:2:3$, 即 $a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

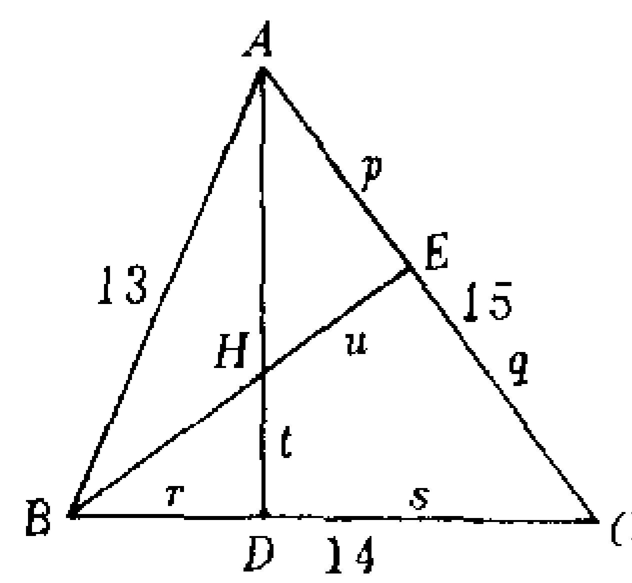
故选(D).

17·101 某三角形三边的长为 13,14,15,垂心为 H,AD 是边长为 14 的边上的高,则 $HD:HA$ 等于

(A) 3:11. (B) 5:11. (C) 1:2. (D) 2:3. (E) 25:33.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[**解**] 三角形中诸线段长所设如图,由勾股定理有



$$14^2-q^2=BE^2=13^2-p^2,$$

即
$$q^2-p^2=27.$$

又 $p+q=15$, 得 $q=\frac{42}{5}$, $p=\frac{33}{5}$.

又由 $13^2-r^2=AD^2=15^2-s^2$,

即 $s^2-r^2=56$, 又 $s+r=14$,

得 $r=5$, $s=9$.

由 $AD^2=13^2-5^2$, 得 $AD=12$;

又 $BE^2=13^2-\left(\frac{33}{5}\right)^2$, 得 $BE=\frac{56}{5}$.

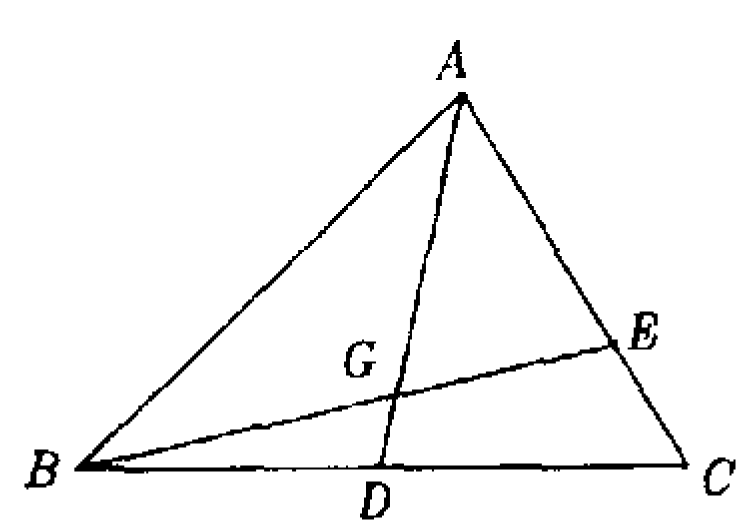
$\because\quad \triangle HDB\backsim\triangle HEA \quad \therefore\quad \frac{t}{u}=\frac{r}{p}=\frac{\frac{56}{5}-u}{12-t}=\frac{HB}{HA}$,

又 $r=5$, $p=\frac{33}{5}$, $u=\frac{33}{25}t$, 代入上式可得 $t=\frac{435}{116}$.

而 $12-t=\frac{957}{116}$. 从而 $HD:HA=435:957=5:11$.

故选(B).

17·102 如图,D 为$\triangle ABC$ 的BC 边的中点,E 为AC 边的内点,$AC=3CE$, BE 和AD 交于 G.则 $AG:GD$ 为

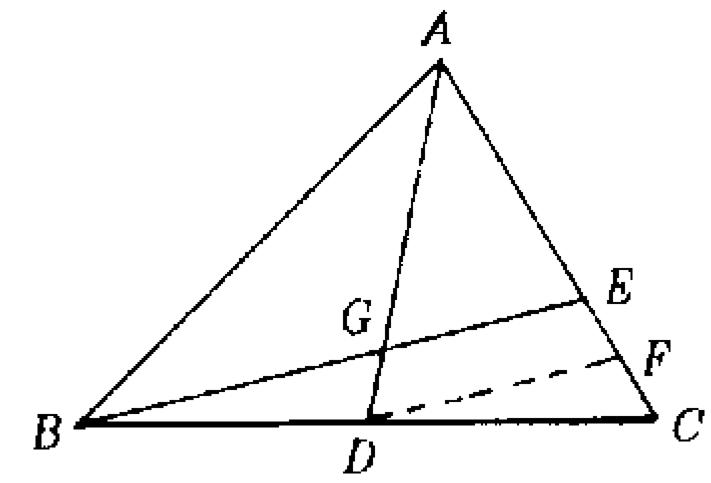


(A) 2. (B) 3.

(C) 3 或 4. (D) 4.

(第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛,1991 年)

［解］ 过 D 作 $DF /\!/ BE$ 交 AC 于 F.



因为 D 为 BC 中点，则 F 为 EC 中点.

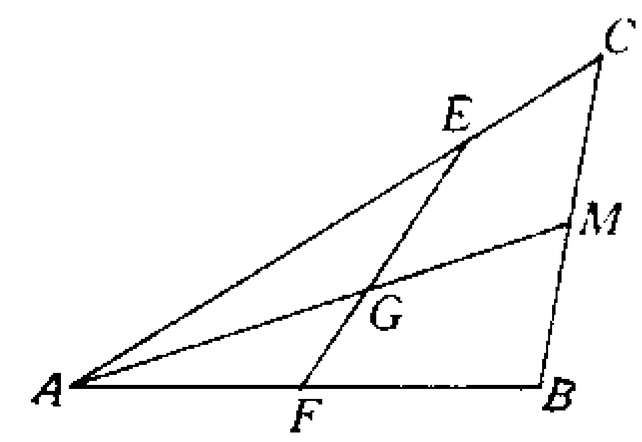
由 $AC=3CE$， 有 $AE=2CE=4EF$，

又 $DF /\!/ BE$，

从而 $AG:GD=AE:EF=4:1=4$.

故选(D).

17·103 如图所示，在△ABC 中，M 是 BC 边的中点，$AB=12$，$AC=16$. E 和 F 点分别在 AC 和 AB 上，直线 EF 和 AM 相交于 G. 若 $AE=2AF$，那么 $\frac{EG}{GF}$ 等于



(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{5}{4}$.

(D) $\frac{6}{5}$. (E)已知条件不足以解此题.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

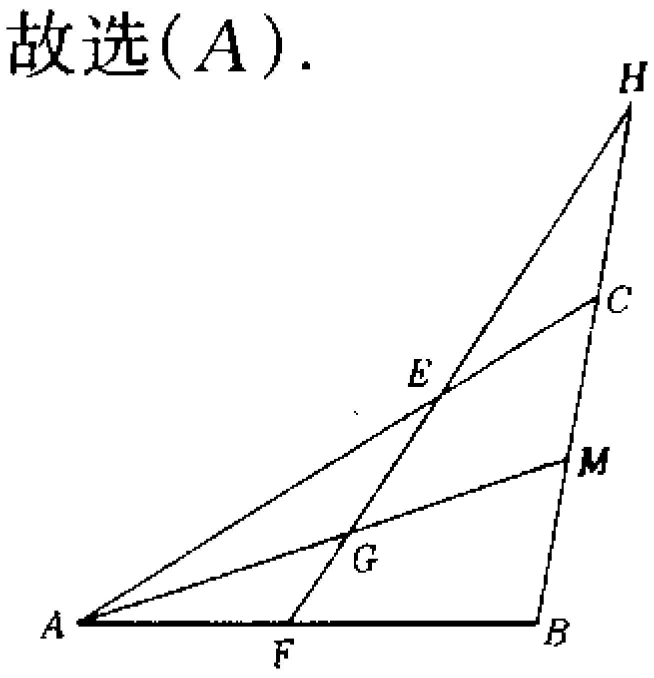
［解 1］ 如图①，作 BC，EF 的延长线相交于 H. 在△FBH 和△HCE 中，由梅尼劳斯(Menelaus)定理我们分别得到

$$\frac{GH}{GF}\cdot\frac{AF}{AB}\cdot\frac{MB}{MH}=1,\quad \frac{GH}{GE}\cdot\frac{AE}{AC}\cdot\frac{MC}{MH}=1,$$

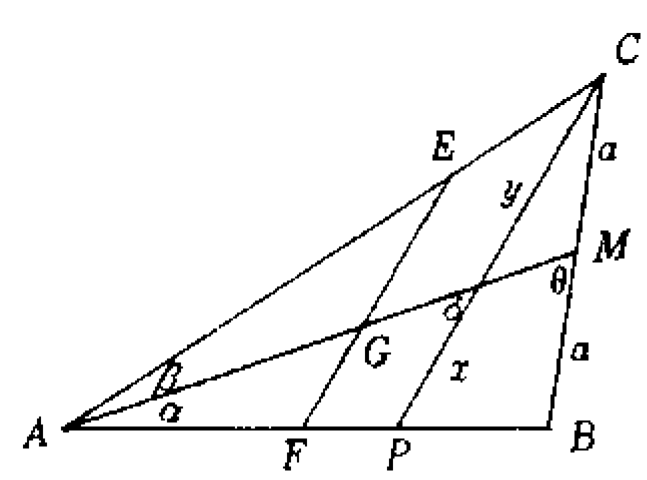
因为 $MC=MB$，$AE=2AF$，上两式两边相除，得

$$\frac{GE}{GF}=2\frac{AB}{AC}=2\cdot\frac{12}{16}=\frac{3}{2}.$$

故选(A).



图①

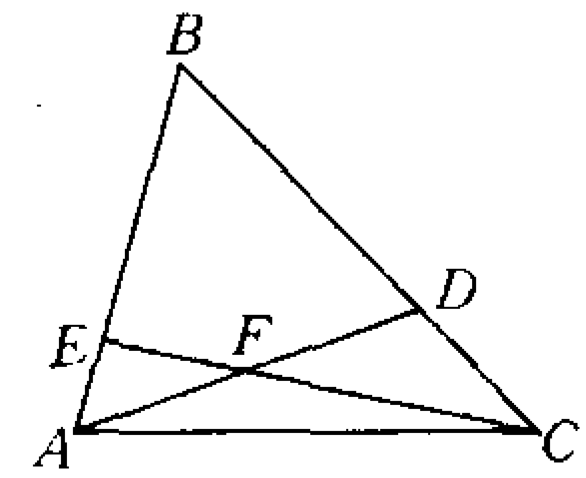


图②

［解 2］ 作直线 $CP /\!/ EF$ 并交 AB 于 P. 依题设有 $AP=8$. 设 a，x，y，α，β，δ 和 θ 如图②所示，那么

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{12}{\sin\theta};\quad \frac{a}{\sin\beta}=\frac{16}{\sin(180^\circ-\theta)};\quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}.$$

所以 $\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{8}{\sin\delta}$；$\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{16}{\sin(180^\circ-\delta)}$；



且 $\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{y}{x}=2\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$.

故选(A).

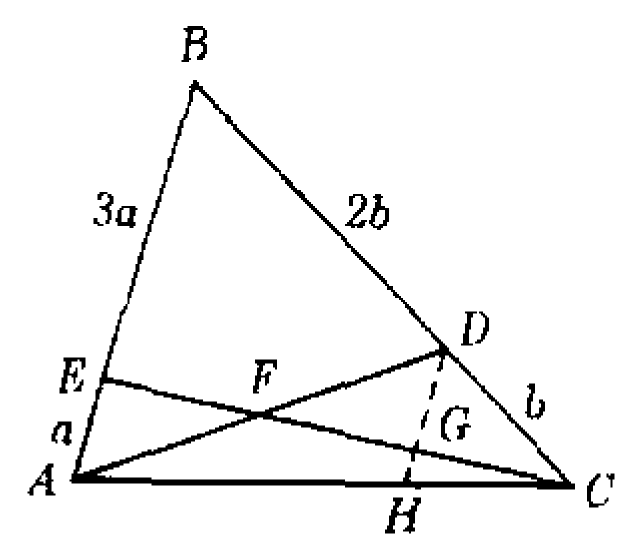
17·104 在$\triangle ABC$的一边AB上取一点E，使$AE:EB=1:3$，又在另一边BC上取一点D，使$CD:DB=1:2$，若AD与CE交于点F，则$\dfrac{EF}{FC}+\dfrac{AF}{FD}$为

(A)$\dfrac{4}{5}$.　(B)$\dfrac{5}{4}$.　(C)$\dfrac{3}{2}$.　(D) 2.　(E)$\dfrac{5}{2}$.

（第16届美国高中数学考试，1965年）

[解] 作$DH/\!/AB$交EC于G，交AC于H，且设$AE=a$，$DC=b$.

则 $\dfrac{DG}{3a}=\dfrac{b}{3b}$，　$DG=a=EA$，



所以 $EF=FG$，　且　$AF=FD$.

从而 $\dfrac{AF}{FD}=1$.　又由　$DG/\!/BE$，

故 $GC=\dfrac{1}{3}EC$，$EG=\dfrac{2}{3}EC$.

又因 $EF=FG$，$FC=\dfrac{2}{3}EC$，故 $\dfrac{EF}{FC}=\dfrac{1}{2}$.

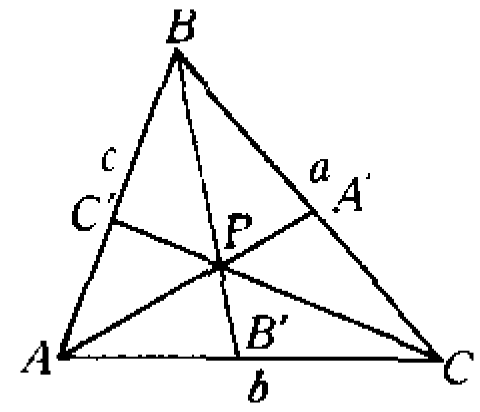
所以 $$\dfrac{EF}{FC}+\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}.$$

故选(C).

注 在$\triangle ABD$和$\triangle EBC$中，由梅尼劳斯定理直接可得结果.

17·105 设$\triangle ABC$三边的长为a,b,c，且$c\leqslant b\leqslant a$，过形内一点P，与A,B,C的连线分别交对边为A',B',C'，设

$$s=AA'+BB'+CC',$$



则对所有P点的位置，s小于

(A) $2a+b$.　(B) $2a+c$.　(C) $2b+c$.

(D) $a+2b$.　　　(E) $a+b+c$.

（第15届美国高中数学考试，1964年）

[解] 容易证明：$AA'<\max\{AB,AC\}=\max\{b,c\}=b$(利用同一

三角形内大角对大边的命题).

同理 $BB' < \max\{a, c\} = a,$

$CC' < \max\{a, b\} = a.$

故 $AA' + BB' + CC' < 2a + b.$

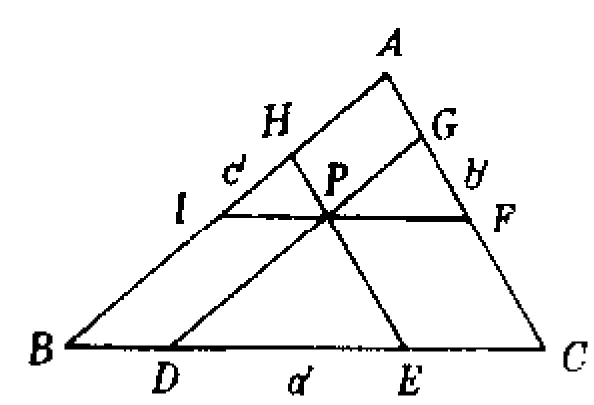
故选(A).

17·106 过$\triangle ABC$内任一点P,作 $IF \parallel BC$, $EH \parallel AC$, $DG \parallel AB$.则$\frac{IF}{BC}+\frac{EH}{AC}+\frac{DG}{AB}$的值是

(A)$\frac{3}{2}$. (B) 2. (C)$\frac{4}{3}$. (D)$\frac{5}{3}$.

(中国江苏省苏州市初中数学竞赛,1985 年;
中国江西省南昌市初中数学竞赛,1989 年)

[解 1] 设$\triangle ABC$三边分别为a, b, c,且设 $DE = a'$, $GF = b'$, $HI = c'$.由上题结论有



$$\frac{IF}{BC}=\frac{a-a'}{a}=1-\frac{a'}{a}=1-\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}},$$

同理 $$\frac{EH}{AC}=1-\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}},$$

$$\frac{DG}{AB}=1-\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}},$$

故 $$\frac{IF}{BC}+\frac{EH}{AC}+\frac{DG}{AB}=3-\frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=2.$$

故选(B).

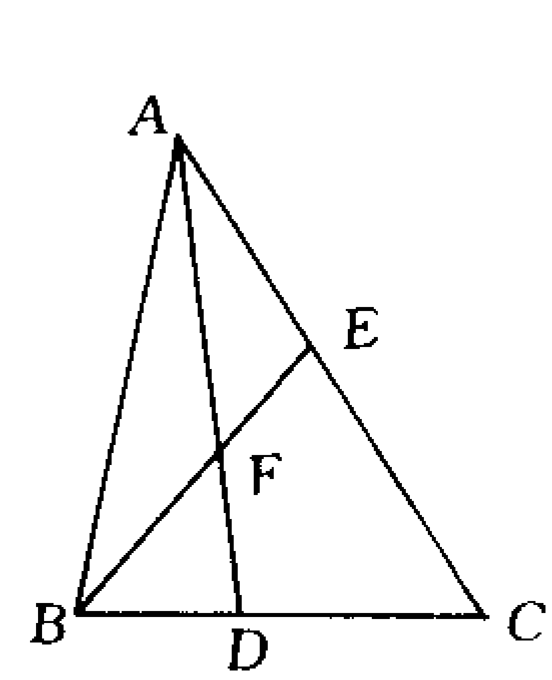
[解 2] 考虑 P 为$\triangle ABC$的重心情形,此时由三角形重心性质有

$$\frac{IF}{BC}=\frac{EH}{AC}=\frac{DG}{AB}=\frac{2}{3},$$

则 $$\frac{IF}{BC}+\frac{EH}{AC}+\frac{DG}{AB}=2.$$

故选(B).

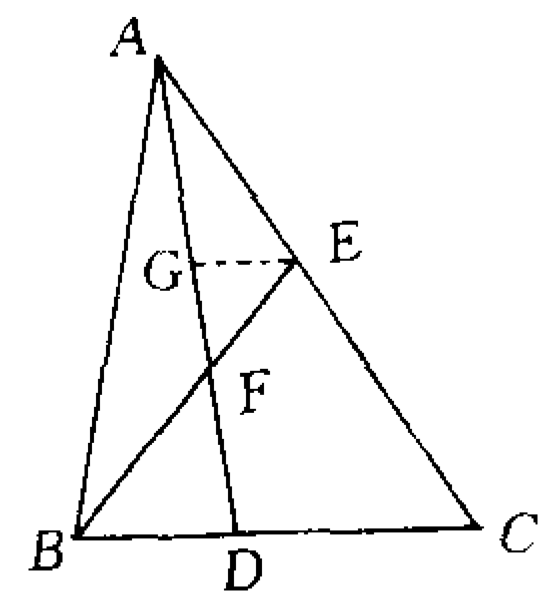
17·107 如图在$\triangle ABC$中,D、E分别为边BC、AC上一点,且$\frac{BD}{DC}=\frac{2}{3}$,$\frac{AE}{EC}=\frac{3}{4}$,则$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{BF}{FE}$的值是



(A)$\frac{7}{3}$. (B)$\frac{14}{9}$. (C)$\frac{35}{12}$. (D)$\frac{56}{15}$.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1997 年)

[解] 作 $EG/\!/BC$ 交 AD 于 G. 由题设



$$\frac{GE}{BD}=\frac{GE/DC}{BD/DC}=\frac{AE/AC}{BD/DC}=\frac{3/7}{2/3}=\frac{9}{14}.$$

从而 $\frac{FG}{DF}=\frac{FE}{BF}=\frac{GE}{BD}=\frac{9}{14}$,

由合比定理有 $\frac{DG}{DF}=\frac{23}{14}$,

又 $\frac{AG}{AD}=\frac{3}{7}$, 则 $\frac{GD}{AD}=\frac{4}{7}$,

即
$$GD=\frac{4}{7}AD.$$

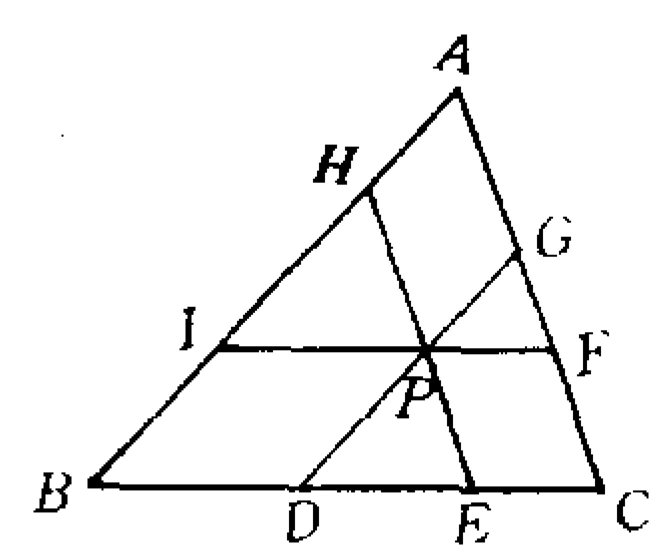
因而
$$\frac{AD}{DF}=\frac{\frac{7}{4}GD}{DF}=\frac{7}{4}\cdot\frac{23}{14}=\frac{23}{8}.$$

再由分比定理有 $\frac{AF}{DF}=\frac{15}{8}$.

从而
$$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{BF}{FE}=\frac{15}{8}\cdot\frac{14}{9}=\frac{35}{12}.$$

故选(C).

17·108 若△ABC 的三边长分别为 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 在△ABC 内任取一点 P, 过 P 作三边的平行线与三边相截(如图), 若 $DE=a'$, $FG=b'$, $HI=c'$, 那么 $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}$ 的值是



(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 1.

(D)不能确定, 与 P 点的位置有关.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛, 1989 年)

[解 1] 由 $IF/\!/BC, HE/\!/AC$, 有 $\triangle ABC\backsim\triangle HIP$,

则有
$$\frac{c'}{c}=\frac{IP}{a}=\frac{BD}{a}.$$

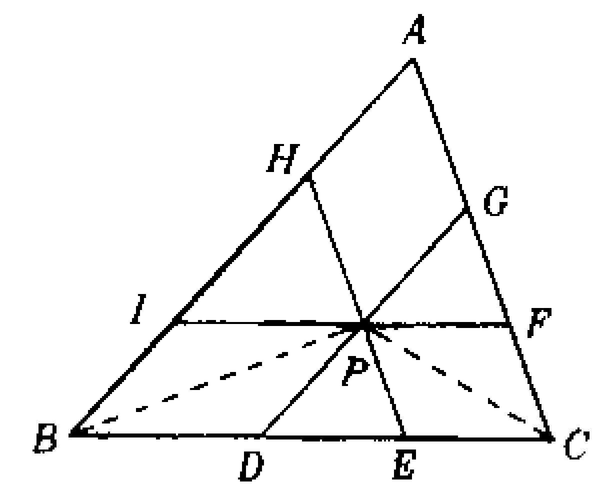
又 $\triangle ABC\backsim\triangle GPF$, 有 $\frac{b'}{b}=\frac{PF}{a}=\frac{EC}{a}$.

$$\therefore\ \frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=\frac{a'}{a}+\frac{BD}{a}+\frac{EC}{a}=\frac{a'+BD+EC}{a}=1.$$

故选(C).

[解 2] 设 BC 上的高为 h_a, P 到 BC 的距离为 h_a', 连结 PB, PC.

则 $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{h_a'}{h_a}=\dfrac{ah_a'}{ah_a}=\dfrac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$,



同理 $\dfrac{b'}{b}=\dfrac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}$, $\dfrac{c'}{c}=\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$,

所以 $\dfrac{a'}{a}+\dfrac{b'}{b}+\dfrac{c'}{c}$

$$=\frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

故选(C).

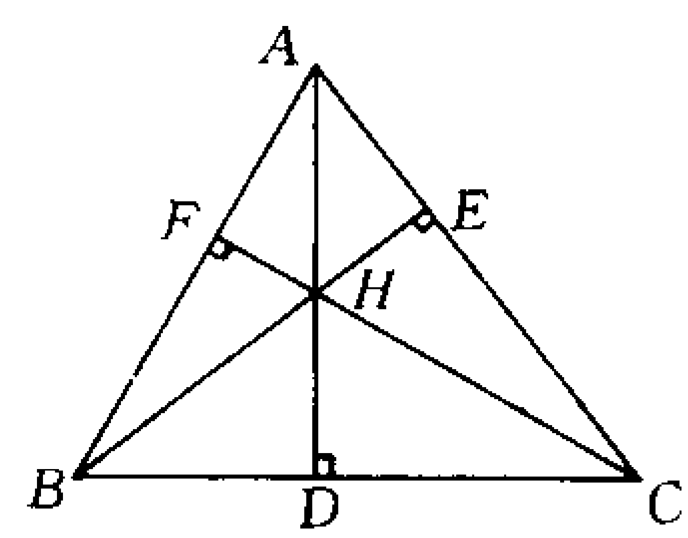
17·109 设锐角$\triangle ABC$的三条高AD,BE,CF相交于H.若$BC=a,AC=b,AB=c$,则$AH\cdot AD+BH\cdot BE+CH\cdot CF$的值是

(A)$\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)$.　　(B)$\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

(C)$\dfrac{2}{3}(ab+bc+ca)$.　　(D)$\dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

(中国初中数学联赛,1994年)

[解] 由题设可知,H,D,C,E四点共圆,因此,有



$$AD\cdot AH=AC\cdot AE=AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAE$$
$$=\frac{1}{2}(AC^2+AB^2-BC^2)$$
$$=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2).$$

同理 $$BH\cdot BE=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2),$$
$$CH\cdot CF=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

$$\therefore\quad AH\cdot AD+BH\cdot BE+CH\cdot CF=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

故选(B).

17·110 已知直角三角形的边为$a,a+d$和$a+2d$,其中a及d都是正数,则a与d之比为

(A) 1:3.　(B) 1:4.　(C) 2:1.　(D) 3:1.　(E) 3:4.

(第10届美国高中数学考试,1959年)

[解] 由设及勾股定理有

$$(a+2d)^2=(a+d)^2+a^2,$$

即 $a^2-2ad-3d^2=0$, 或 $(a-3d)(a+d)=0$.

由 $a-3d=0$ 得 $a:d=3:1$.

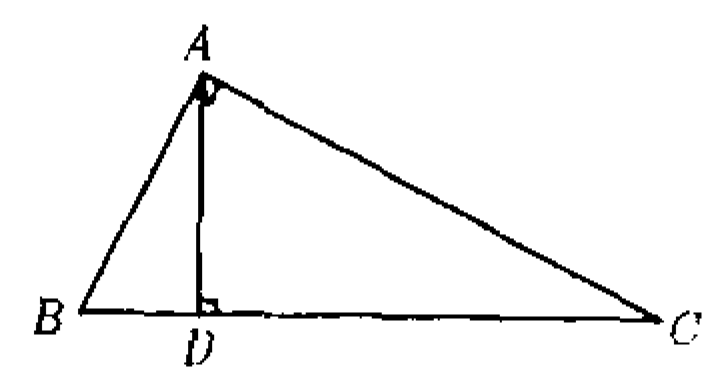
故选(D).

17·111 若一个直角三角形的两条直角边在斜边上的射影的比是1:4.则这两条直角边的比是

(A) $1:\sqrt{2}$. (B) 1:2. (C) 1:3. (D) 1:4.

(中国四川省初中数学竞赛,1989年)

[解] 如图,在Rt△ABC中,$AD\perp BC$,



且 $BD:DC=1:4$.

设 $BD=1$, 则 $DC=4$.

又 $AD^2=BD\cdot DC=1\cdot4=4$,则 $AD=2$.

$\therefore$ $$AB^2=AD^2+BD^2=2^2+1^2=5,$$

且 $$AC^2=AD^2+CD^2=2^2+4^2=20.$$

则 $$\frac{AB}{AC}=\sqrt{\frac{5}{20}}=\frac{1}{2}.$$

故选(B).

17·112 △ABC三边a,b,c上的高依次为$h_a=6,h_b=4,h_c=3$,那么三边a,b,c之比$a:b:c$为

(A) 1:2:3. (B) 2:3:4.

(C) 3:4:6. (D)不确定.

(中国天津市初中数学竞赛,1983年)

[解] 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,

即 $$ah_a=bh_b=ch_c.$$

又 $h_a:h_b:h_c=6:4:3$,则 $a:b:c=2:3:4$.

故选(B).

17·113 三角形的三条边的比为3:4:5,则其相应边上的高的比是

(A) 10:8:5. (B) 20:15:12.

(C) 3:4:5. (D) 5:4:3.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988年)

[解 1] 设三边为 $3x, 4x, 5x$，高分别为 h_1, h_2, h_3. 则

三角形的面积 $=\frac{1}{2}3x\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot h_2=\frac{1}{2}\cdot 5x\cdot h_3$.

即 $3h_1=4h_2=5h_3$. 则 $h_2=\frac{3}{4}h_1$, $h_3=\frac{3}{5}h_1$.

$\therefore\ h_1:h_2:h_3=h_1:\frac{3}{4}h_1:\frac{3}{5}h_1=1:\frac{3}{4}:\frac{3}{5}=20:15:12$.

故选(B).

[解 2] 设三角形三边长分别为 3,4,5，由解 1 知

$3h_1=4h_2=5h_3$, 则 $\frac{h_1}{4\cdot 5}=\frac{h_2}{3\cdot 5}=\frac{h_3}{3\cdot 4}$,

即 $h_1:h_2:h_3=4\cdot 5:3\cdot 5:3\cdot 4=20:15:12$.

故选(B).

17·114 下列的各组数中，哪组数不能为一个三角形的三条高的长

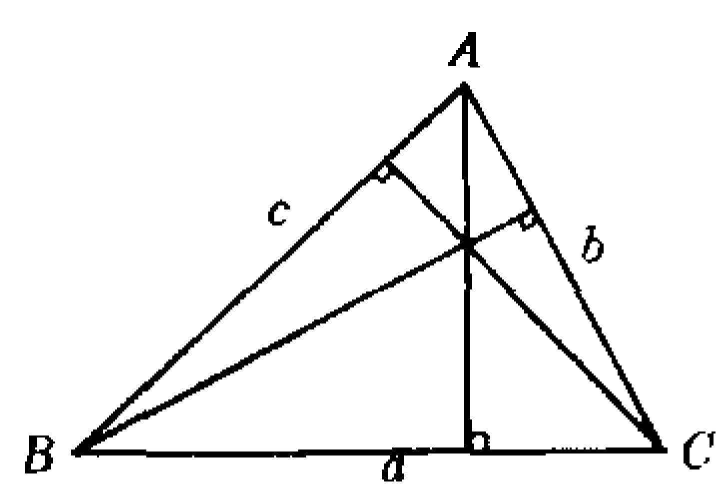
(A) $1,\sqrt{3},2$. (B) 3,4,5. (C) 5,12,13.

(D) $7,8,\sqrt{113}$. (E) 8,15,17.

(第 41 届美国高中数学考试，1990 年)

[解 1] 若 h_a, h_b, h_c 分别为$\triangle ABC$ 三边 a, b, c 上的高，则三角形面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c,$$



即 $$ah_a=bh_b=ch_c.$$

则 $a:b:c=h_bh_c:h_ah_c:h_ah_b$.

对于(C)来讲，$a:b:c=12\cdot 13:5\cdot 13:5\cdot 12$.

注意到 $12\cdot 13>5\cdot 13+5\cdot 12$，则这种比例的 a, b, c 不能构成三角形. 此即说 5,12,13 不能成为某三角形的三条高. (易验证其余四组皆可)

故选(C).

[解 2] 仿上解还可有 $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$，则对于$(C)$来讲，则有

$$a:b:c=\frac{1}{5}:\frac{1}{12}:\frac{1}{13},\quad 而\quad \frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}>\frac{1}{12}+\frac{1}{13},$$

$\therefore$ 此组数(5,12,13)不能作为三角形的三条高.

故选(C).

17·115 在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$的对边为$a,b,c$,已知$a^2=b(b+c)$,$\angle C$为钝角,则$a,2b,c$的大小关系是

(A)$a<2b<c$.　　　　(B)$a<c<2b$.

(C)$2b<a<c$.　　　　(D)$a=2b<c$.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1996年)

[解] $\because\quad a+b>c$,

$\therefore\quad a^2=b(b+c)<b(2b+a),(a-2b)\cdot(a+b)<0$,

$\therefore\quad a<2b$.

又$\because\quad \angle C$为钝角, $\therefore\quad a^2+b^2<c^2$,

即 $b(b+c)+b^2<c^2$, $(2b-c)(b+c)<0$,

$\therefore\quad 2b<c$, 则 $a<2b<c$.

故选(A).

17·116 P是高为h的等边三角形内部一点,设P到各边的距离分别为x,y,z,若以x,y,z为长度的三线段可以构成一个三角形,则x,y,z各自所应满足的条件是

(A) $x<h,y<h,z<h$.　　　　(B) $x<\frac{h}{2},y<\frac{h}{2},z<\frac{h}{2}$.

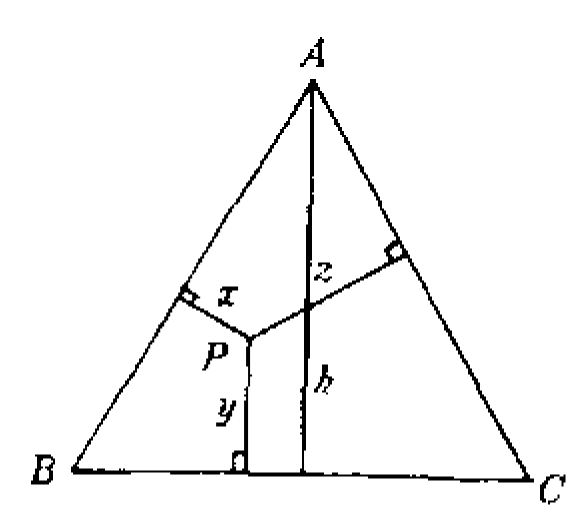
(C) $x\leqslant\frac{h}{2},y\leqslant\frac{h}{2},z\leqslant\frac{h}{2}$.　　　　(D) $x<\frac{h}{3},y<\frac{h}{3},z<\frac{h}{3}$.

(E) $x\leqslant\frac{h}{3},y\leqslant\frac{h}{3},z\leqslant\frac{h}{3}$.

(中国吉林省八市初中数学竞赛,1986年)

[解] 利用三角形面积关系易证

$$h=x+y+z. \quad ①$$



又x,y,z可构成三角形,则

$$\begin{cases}x+y>z, & ②\\ y+z>x, & ③\\ z+x>y. & ④\end{cases}$$

将①分别代入②,③,④可有　$x<\frac{h}{2}$,　$y<\frac{h}{2}$,　$z<\frac{h}{2}$.

故选(B).

17·117 锐角$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c,三边上的高分别

为 h_a，h_b，h_c. 若 $a>b>c$，那么 $a+h_a$，$b+h_b$，$c+h_c$ 的大小关系为

(A) $a+h_a>b+h_b>c+h_c$.

(B) $a+h_a<b+h_b<c+h_c$.

(C) $b+h_b<a+h_a<c+h_c$.

(D) $b+h_b>a+h_a>c+h_c$.

（中国安徽省合肥市初中数学竞赛，1990年）

[解1] ∵ $a>b>c$，显然 $h_c>h_b>h_a$.

设锐角△ABC 面积为 s.

欲证 $a+h_a>b+h_b$，只须证 $a+\frac{2s}{a}>b+\frac{2s}{b}$，

即
$$a-b>2s\frac{(a-b)}{ab}，或 ab>2s，$$

即
$$ab>ab\sin C.$$

即只须证
$$1>\sin C.$$

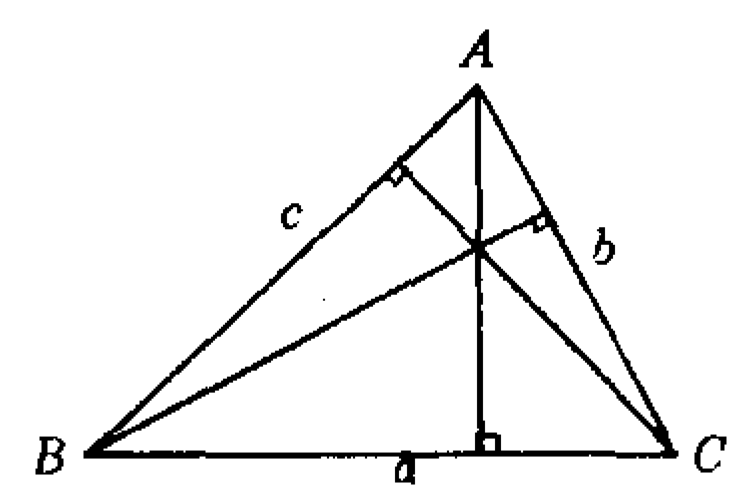
∵ △ABC 是锐角三角形，故 $1>\sin C$ 成立.

∴ $a+h_a>b+h_b$ 成立.

同理可证 $b+h_b>c+h_c$.

故选(A).

[解2] 如图，则有



$a+h_a=a+b\sin C$，

$b+h_b=b+a\sin C=b+c\sin A$，

$c+h_c=c+b\sin A$.

∴ $(a+h_a)-(b+h_b)=(a-b)+(b-a)\sin C$
$=(a-b)(1-\sin C)$，

∵ $a>b$，$\sin C<1$，知上式大于 0.

∴
$$a+h_a>b+h_b.$$

又
$$(b+h_b)-(c+h_c)=(b-c)(1-\sin A)>0，$$

知
$$b+h_b>c+h_c.$$

∴
$$a+h_a>b+h_b>c+h_c.$$

故选(A).

17·118 已知等腰△ABC 中，AD 是底边 BC 上的高，BE 是 AC 上

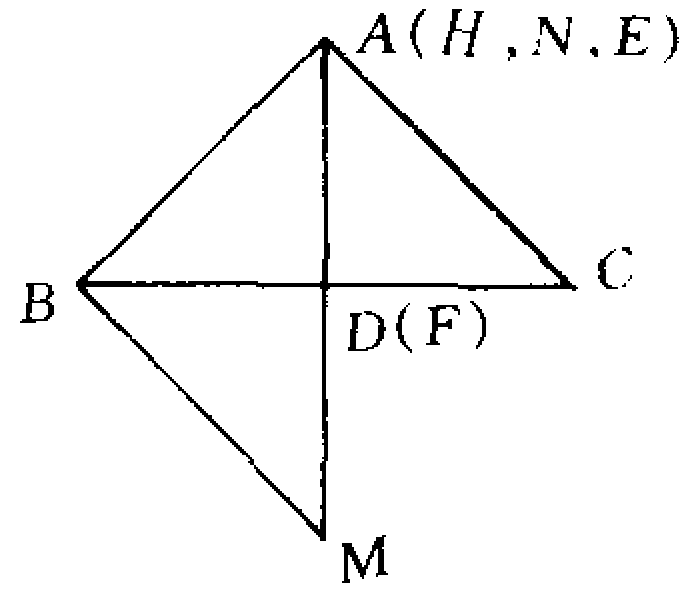
的高，又 AD 与 BE 交于 H. 同时 $EF \perp BC$ 交 BC 于 F，而 M 是 AD 延长线上一点，且 $DM = EF$，又 N 是 AH 的中点. 设 $MN^2 = b$，$BN^2 = m$，$BM^2 = n$，则 b, m, n 之间的关系是

(A) $b < m + n$.　　　　(B) $b = m + n$.

(C) $b > m + n$.　　　　(D) b 与 $m + n$ 大小不确定.

（中国安徽省初中数学竞赛，1996 年）

[解] 不失一般性，取三角形为等腰直角三角形即$\triangle ABC$（如图），这时 A、E、H、N 四点合一，D、F 两点合一.



显然易知，$\triangle BMA$ 即$\triangle NBM$ 亦为等腰三角形，即$\angle NBM = 90°$.

从而知　　$b = m + n$.

故选(B).

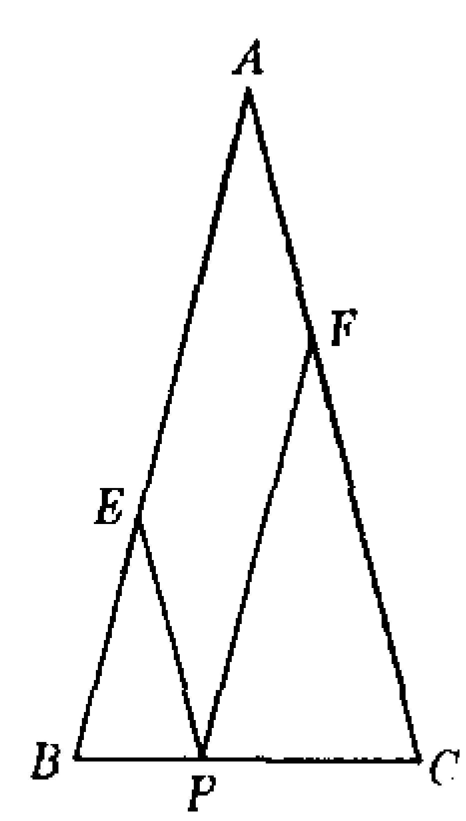
17·119　等腰$\triangle ABC$ 的底边 BC 是周长的$\frac{1}{4}$，自底边上任意一点 P 引平行于两腰的直线，分别交两腰于 E, F. 则四边形 $AEPF$ 周长与$\triangle ABC$ 周长之比

(A)等于$\frac{1}{4}$.　(B)等于$\frac{2}{3}$.　(C)等于$\frac{3}{4}$.　(D)不能确定.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛，1990 年）

[解] 设腰长为 l，$\triangle ABC$ 的周长为 L. 由已知可得

$L = 2AB + BC = 2l + \frac{L}{4}$，则 $L = 2l \cdot \frac{4}{3}$.



又∵　$AEPF$ 是平行四边形，

∴　$PE = BE$，$PF = CF$，

∴　$\square AEPF$ 的周长为 $2l$.

则四边形 $AEPF$ 周长与$\triangle ABC$ 周长之比为

$$2l : (2l \cdot \frac{4}{3}) = 3 : 4.$$

故选(C).

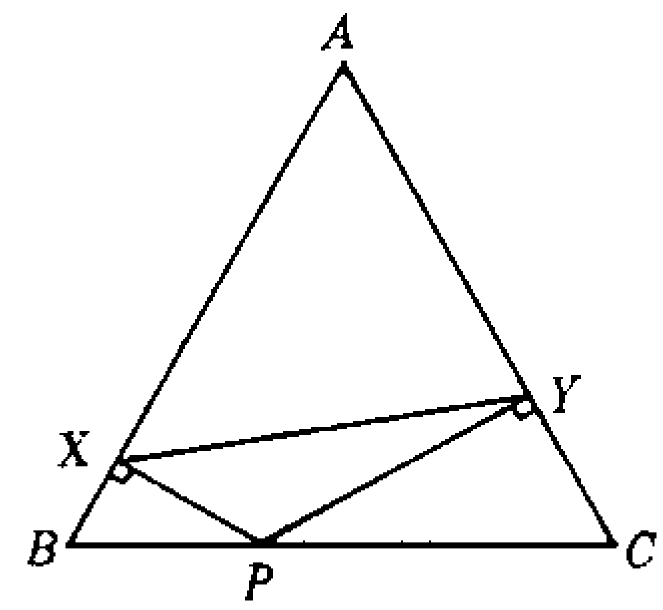
17·120　P 是等边$\triangle ABC$ 边 BC 上任一点，$PX \perp AB$，$PY \perp AC$，连 XY，并记$\triangle XAY$ 周长为 L，四边形 $BCYX$ 的周长为 S，则 L 与 S 的

大小关系为

(A) $S>L$.　　(B) $S=L$.　　(C) $S<L$.　　(D)不确定.

（中国浙江省初中数学竞赛,1992 年）

[解]　设等边$\triangle ABC$边长为a,由$BX=\frac{1}{2}BP$, $YC=\frac{1}{2}PC$($\triangle PXB$,$\triangle PYC$均为30°-60°-90°的三角形).



则　$BX+BC+CY=BC+\frac{1}{2}(BP+PC)$

$=\frac{3}{2}a$.

而　$AX+AY=2a-(BX+CY)=2a-\frac{a}{2}$

$=\frac{3}{2}a$.

$\therefore$　$AX+AY+XY=BX+BC+CY+XY$,　即　$S=L$.

故选(B).

17·121　在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=120°$,点P是$\triangle ABC$内一点,则

(A) $PA+PB+PC<AB+AC$.

(B) $PA+PB+PC>AB+AC$.

(C) $PA+PB+PC=AB+AC$.

(D) $PA+PB+PC$与$AB+AC$的大小关系与点P的位置有关.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛;

中国部分省、市初中数学通讯赛,1984 年）

[解]　将$\triangle APC$绕A点逆时针旋转60°得$\triangle AP'C'$.连PP',CC'.

则　$\triangle APC\cong\triangle AP'C'$,

$\because$　$\angle BAC=120°$,$\angle C'AC=60°$,

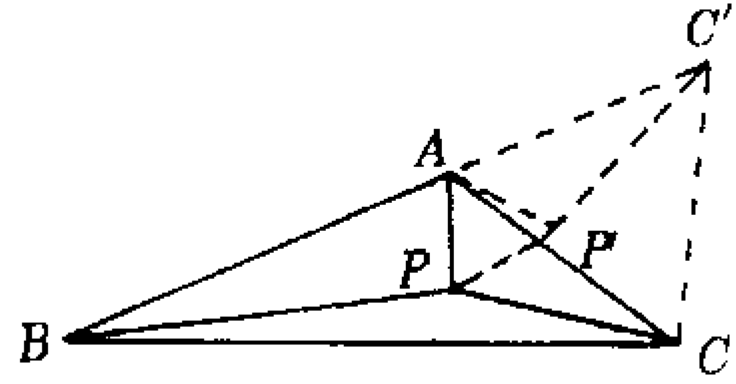
$\therefore$　B,A,C'共线.

又$\because$　$\angle PAP'=60°$,　$AP=AP'$,

$\therefore$　$\triangle PAP'$为正三角形.

$\therefore$　$PA=P'A=PP'$.

$\because$　$AC'=AC$,　$PC=P'C'$,



$\therefore \quad PA+PB+PC=PP'+PB+P'C'.$

$\because \quad AB+AC=AB+AC'<PP'+PB+P'C',$

$\therefore \quad PA+PB+PC>AB+AC.$

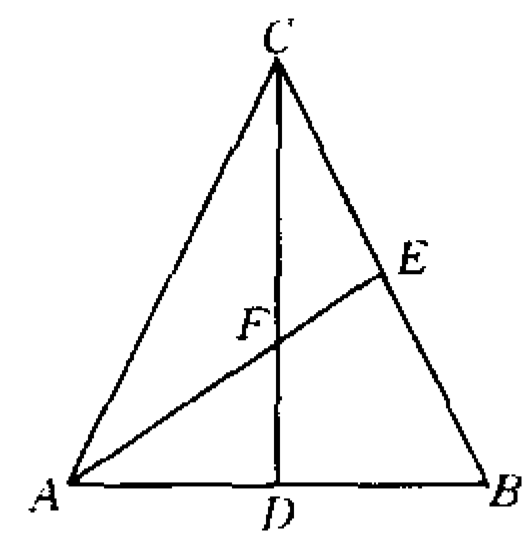
故选(B).

17·122 如图,在等腰△ABC 中,CD 是底边 AB 上的高,E 是腰 BC 的中点,AE 交 CD 于 F.现在给出三条路线:

(a)$A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$;

(b)$A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$;

(c)$A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$;



设它们的长度分别是 $L(a)$,$L(b)$,$L(c)$.那么下列三种关系式:

$L(a)<L(b)$, $L(a)<L(c)$, $L(b)<L(c)$

中,一定能够成立的个数是

(A) 0个. (B) 1个. (C) 2个. (D) 3个.

(中国初中数学联赛,1985年)

[解] 由题设条件可知,F 是△ABC 的重心,因而 $CF=2DF$,$AF=2EF$.

因 $L(c)=AB+BE+EF+FC+CA,$

$L(a)=AF+FC+CB+BA,$

故 $L(c)-L(a)=BE+EF-AF=BE+EF-BF>0,$

即 $L(c)>L(a).$

又 $L(b)=AC+CE+EB+BD+DF+FA,$

则

$$\begin{aligned}&L(c)-L(b)\\&=(AB-BD)+(EF-FA)+(FC-DF)-CE\\&=AD+DF-CE-EF.\end{aligned}$$

当△ABC 为等边三角形时,$AD=CE$, $DF=EF$, 则 $L(c)=L(b)$,这说明 $L(b)<L(c)$不恒成立.

再因 $L(a)-L(b)=FC+DA-AC-DF=DF+DA-AC,$

当$\angle ACB=120°$, 且 $AC=BC=1$ 时,

$$AD=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad CD=\frac{1}{2},\quad DF=\frac{1}{6}.$$

故 $L(a)-L(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}-1=\frac{3\sqrt{3}+1}{6}-1>0.$

即 $L(a)>L(b)$. 知不等式 $L(a)<L(b)$不恒成立.

综上,故选(B).

17·123 设 O 为$\triangle ABC$ 的一个内点, $s_1=OA+OB+OC$, $s_2=AB+BC+CA$,则

(A)不论 ABC 为怎样的三角形, $s_2>2s_1$ 及 $s_1\leqslant s_2$.

(B)不论 ABC 为怎样的三角形, $s_2\geqslant 2s_1$ 及 $s_1<s_2$.

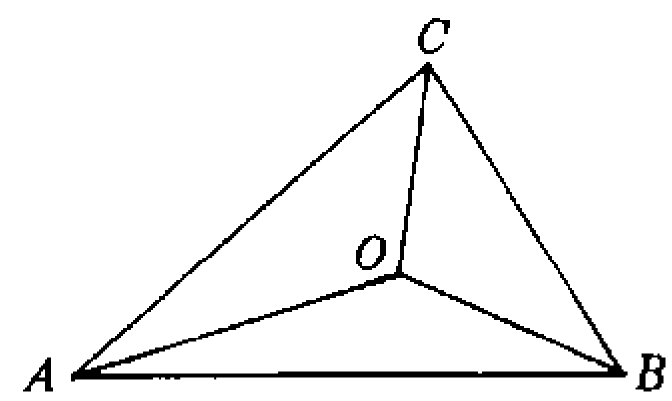
(C)不论 ABC 为怎样的三角形, $s_1>\frac{1}{2}s_2$ 及 $s_1<s_2$.

(D)不论 ABC 为怎样的三角形, $s_2\geqslant 2s_1$ 及 $s_1\leqslant s_2$.

(E)上述(A),(B),(C),(D)每一项都不是对任何三角形常真.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解] 由三角形边角关系有



$$AB<OA+OB<AC+CB,$$
$$BC<OB+OC<BA+AC,$$
$$CA<OC+OA<CB+BA.$$

上面诸式分别相加得 $s_2<2s_1<2s_2$, 即 $\frac{1}{2}s_2<s_1<s_2$.

故选(C).

17·124 线段 AD 上有两点B,C,线段 AB,AC,AD 的长分别为 $a,b,c(a<b<c)$. 如果线段 AB,CD 分别绕B,C 旋转,使 A 点与D 点重合于 E 点,组成$\triangle BCE$,则下列三个不等式

(Ⅰ)$a<\frac{c}{2}$; (Ⅱ)$b<a+\frac{c}{2}$; (Ⅲ)$b<\frac{c}{2}$,

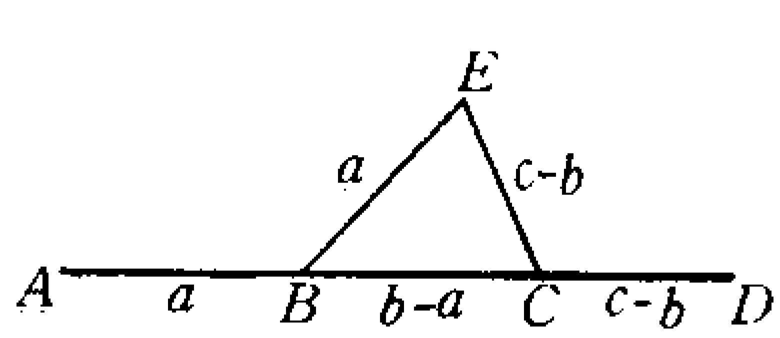
能成立的情况是

(A)只有(Ⅰ)成立. (B)只有(Ⅱ)成立.

(C)只有(Ⅰ)与(Ⅱ)成立. (D)只有(Ⅱ)与(Ⅲ)成立.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987 年)

[解] 如图,由三角形两边之和大于第三边得



$$\begin{cases} a+(b-a)>c-b, \\ (b-a)+(c-b)>a, \\ a+(c-b)>b-a. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2b>c, \\ 2a<c, \\ 2b<2a+c. \end{cases}$$

因此只有(Ⅰ),(Ⅱ)正确.

故选(C).

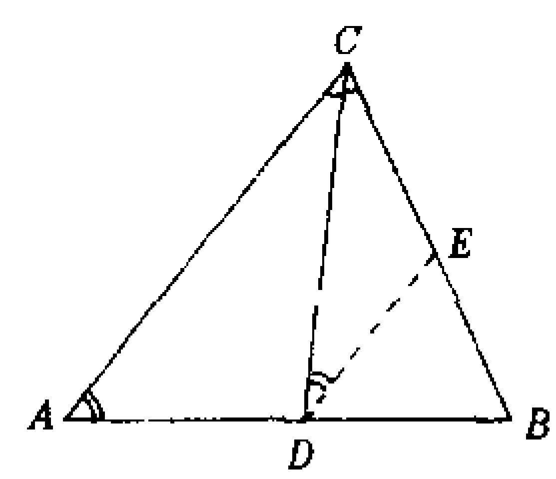
17·125 若 CD 为 $\triangle ABC$ 的内角 C 的平分线,则

(A) $CD^2<CA\cdot CB$. (B) $CD^2>CA\cdot CB$.

(C) $CD^2=CA\cdot CB$. (D) 以上都有可能.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1990 年)

[解] $\because$ $\angle CDB$ 是 $\triangle ACD$ 中 $\angle CDA$ 的外角,则 $\angle A<\angle CDB$,作 $\angle CDE=\angle CAD$,



$\therefore$ $\triangle ACD\backsim\triangle DCE$, 则 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{CD}{CE}$,

即 $CD^2=AC\cdot CE$,

又 $CE<BC$, 则 $CD^2<AC\cdot BC$.

故选(A).

17·126 D 是等腰锐角 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上一点,则 AD, BD, CD 满足关系式

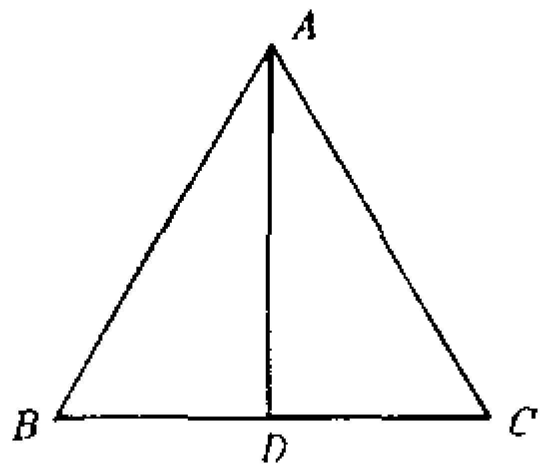
(A) $AD^2=BD^2+CD^2$. (B) $AD^2>BD^2+CD^2$.

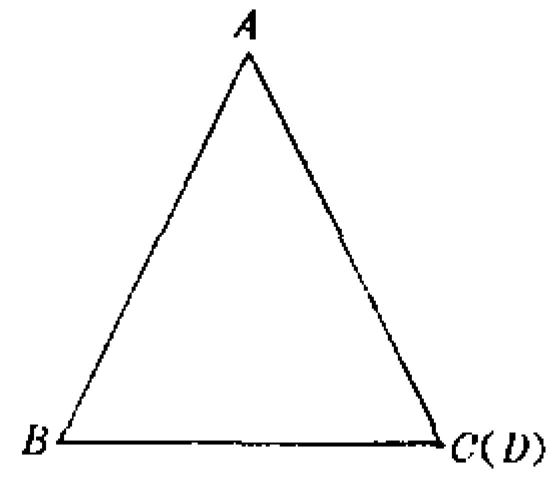
(C) $2AD^2=BD^2+CD^2$. (D) $2AD^2>BD^2+CD^2$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 考虑极端的情形:$\triangle ABC$ 为等边三角形,且 D 是 BC 中点.

显然 $AD^2>BD^2+CD^2$.





再若 D 为 BC 端点有

$$AD^2=BD^2+CD^2\quad(\text{注意 } CD=0),$$

综上可有 $$2AD^2>BD^2+CD^2.$$

故选(D).

17·127 $\triangle ABC$ 的三边长分别为a,b,c.那么关于 x 的二次方程 $b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 的根的情况是

(A)有实数根. (B)无实数根.

(C)有相等的两实根. (D)有不等的两实根.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1989 年)

[解] 由题设知方程判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\&=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)\\&=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]\\&=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a),\end{aligned}$$

$\because$ $b+c+a>0,\quad b+c>a,\quad b+a>c,\quad c+a>b,$

$\therefore$ $\Delta<0$,则方程无实根.

故选(B).

17·128 已知 a,b,c 是一个三角形的三边长,则 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ 的值

(A)恒正. (B)恒负. (C)可正可负. (D)非负.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1991 年)

[解 1] $$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\\&=a^4+(b^2-c^2)^2-[a^2(b+c)^2+a^2(b-c)^2]\\&=a^4-[a^2(b+c)^2+a^2(b-c)^2]+(b+c)^2(b-c)^2\\&=[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]\\&=(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),\end{aligned}$$

$\because$ $a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a,$

$\therefore$ 上式恒小于 0.

故选(B).

[解 2] 由三项式平方公式有

原式$=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c),$$

其余步骤同上.

故选(B).

17·129 一边长为 a 的等边三角形,一新的等边三角形由连接原三角形各边中点而得,第三个等边三角形亦由连接第二个等边三角形的各边中点而得,如此继续下去.这些三角形周长的和的极限为

(A)不定. (B) $5\frac{1}{4}a$. (C) $2a$. (D) $6a$. (E) $4\frac{1}{2}a$.

(第2届美国高中数学考试,1951年)

[解] 依题意这些三角形周长和为

$$3a+\frac{1}{2}\cdot(3a)+\frac{1}{2^2}\cdot(3a)+\cdots$$

$$=3a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)=3a\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=6a.$$

故选(D).

第3节　三角形的面积

17·130 条件甲:两个三角形的面积和二条边对应相等.条件乙:两个三角形全等.则

(A)甲是乙的充分必要条件.

(B)甲是乙的必要条件.

(C)甲是乙的充分条件.

(D)甲不是乙的必要条件,也不是充分条件.

(中国高中数学联赛,1981年)

[解] 由条件乙显然可推出条件甲,然而由条件甲推不出条件乙.

例如$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,$AB=A'B'$,$AC=A'C'$,$\angle A=120°$,$\angle A'=60°$,这符合条件甲,然而这两个三角形不全等.

即甲是乙的必要条件.

故选(B).

17·131 在$\triangle ABC$中,$AB=12$, $AC=7$, $BC=10$.若边 AB,AC 的长各2倍,而 BC 的长不变,那么,$\triangle ABC$ 的

(A)面积变 2 倍.　　(B)高变 2 倍.　　(C)面积变 4 倍.

(D)中线不变.　　(E)面积变为 0.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解]　由设　$2AB=24$,　$2AC=14$,且 $BC=10$,

故　$2AB=2AC+BC$,此三条直线不再能构成三角形而共线,故其面积为 0.

故选(E).

17·132　一个边长为整数,周长为 8 的三角形的面积是

(A) $2\sqrt{2}$.　　(B) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$.　　(C) $2\sqrt{3}$.

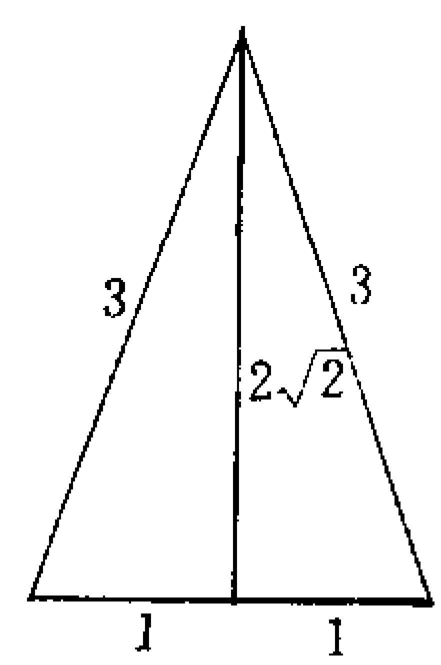
(D) 4.　　(E) $4\sqrt{2}$.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解 1]　若三角形三边分别为 a,b,c,且 $a\leqslant b\leqslant c$,由题设知

$$a+b+c=8,$$

又　$a,b,c\in N$.　则 a 只能取 1 或 2.



当 $a=1$ 时,$b+c=7$,则 b,c 只能是 3,4 或 2,5.这时不满足 $a+b>c$,故不妥;

当 $a=2$ 时,$b+c=6$,则 b,c 均为 3.

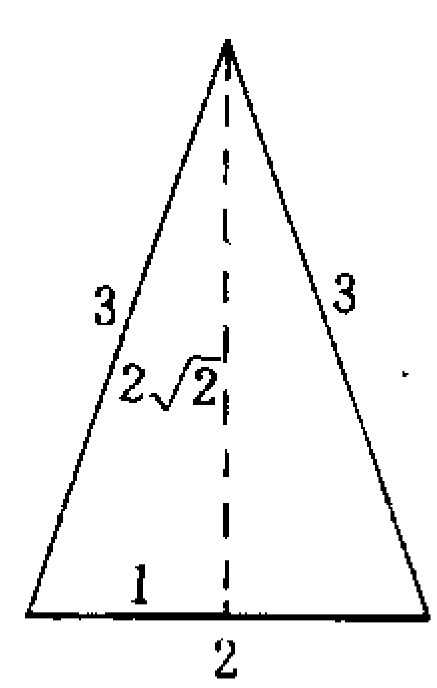
即　$\triangle ABC$ 三边分别为 2,3,3,

则
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

故选(A).

[解 2]　设三角形三边长分别为 x,y,z,依题意有

$$\begin{cases}x+y+z=8,\\x+y>z,\\y+z>x,\\z+x>y,\end{cases}\quad 则\begin{cases}8-z>z,\\8-x>x,\\8-y>y,\end{cases}\quad 或\begin{cases}x<4,\\y<4,\\z<4.\end{cases}$$



因而 x,y,z 只能取 3 或 2 或 1.但 $x+y+z=8$,故(x,y,z)只能是$(3,3,2)$的某个排列.

则
$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}.$$

故选(A).

17·133　$\triangle ABC$ 的周长是 24,M 是 AB 的中点,$MC=MA=5$.则

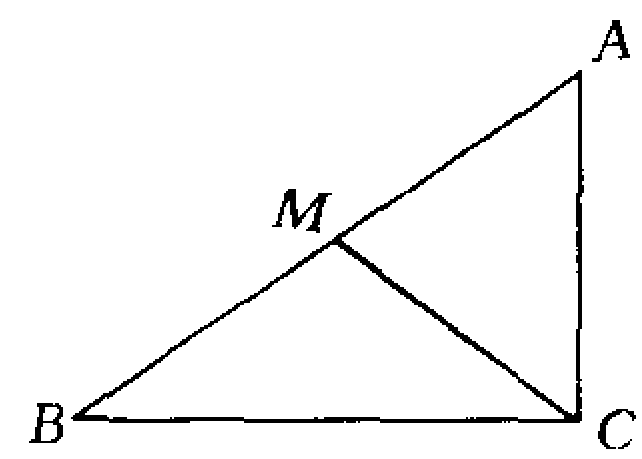
$\triangle ABC$ 的面积是

(A)12.　　(B)16.　　(C)24.　　(D)30.

（中国初中数学联赛，1999 年）

[解]　∵　$MA=MB=MC=5$，

∴　$\angle ACB=90°$.



已知周长是 24，则　$AC+BC=14$，　$AC^2+BC^2=10^2$.

∴　$$2AC\cdot BC=(AC+BC)^2-(AC^2+BC^2)=14^2-10^2=4\times 24.$$

∴　$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=24.$$

故选（C）.

17·134　等腰$\triangle ABC$ 中一腰上的高线长为 1. 这个高与底边夹角为 45°. 则$\triangle ABC$ 的面积是

(A) 1.　　(B) 0.5.　　(C) 0.25.

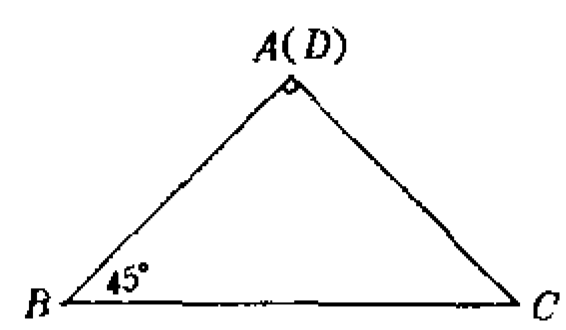
(D)$\sqrt{3}$.　　(E)以上答案都不对.

（中国北京市初中数学竞赛，1983 年）

[解]　一腰上的高 BD 与底边夹角$\angle DBC=45°$，故底角$\angle C=45°$. 则$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形（D 与 A 重合，如图）.

故　$AB=AC=1$，

所以　$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}=0.5.$$



故选（B）.

17·135　等腰三角形底边上的高是 8，周长是 32，则三角形的面积是

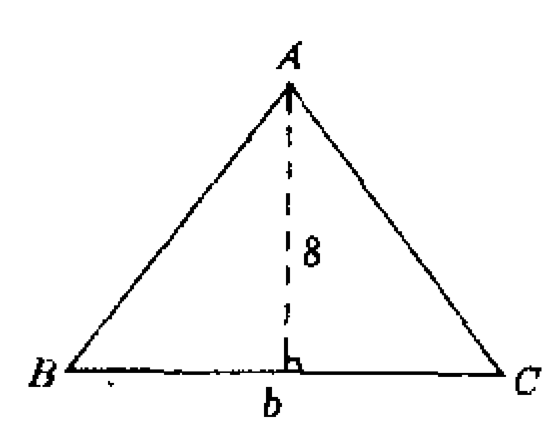
(A) 56.　　(B) 48.　　(C) 40.　　(D) 32.　　(E) 24.

（第 9 届美国高中数学考试，1958 年）

[解]　设等腰三角形底边为 b，则腰为$\frac{1}{2}(32-b)$. 由勾股定理

$$\left[\frac{1}{2}(32-b)\right]^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+8^2,$$

得　$$b=12,\quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48.$$



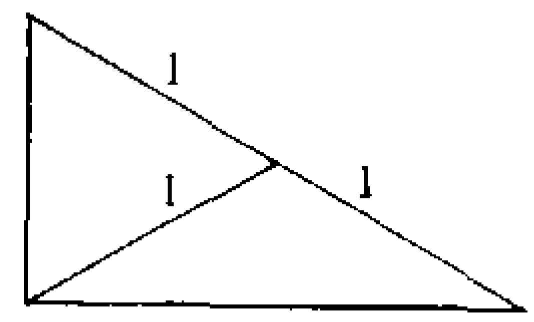
故选（B）.

17·136　一个三角形的一边是2，这边上的中线为1，另两边之和为$1+\sqrt{3}$，那么这个三角形的面积为

(A) 1.　　(B)$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.　　(C)$\sqrt{3}$.　　(D)不能确定.

（中国天津市初中数学竞赛，1983年）

[解]　由设三角形一边长为2，且该边中线长为1，则知该三角形为直角三角形，且斜边长为2.



又其两直角边和为$1+\sqrt{3}$，由勾股定理可求得它们的长分别为1和$\sqrt{3}$.

则　$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

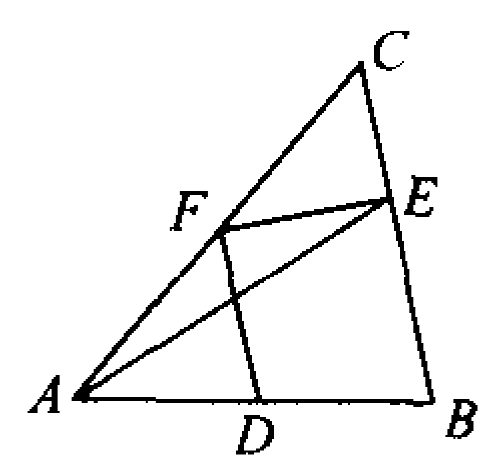
或由其两边和为$1+\sqrt{3}$，令其两边分别为a,b，

即　$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+4S_\triangle,$$

则　$$S_\triangle=\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2]=\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选(B).

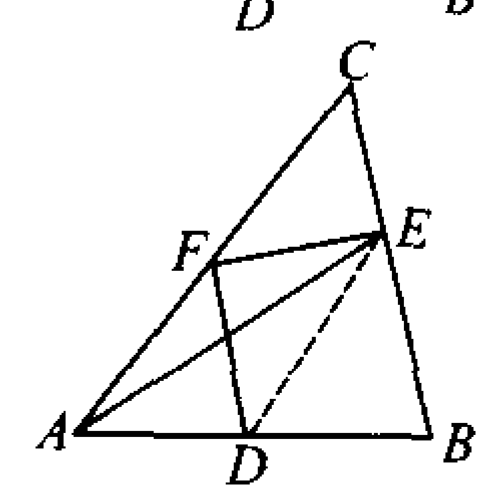
17·137　如图，$S_{\triangle ABC}=10$，又$AD=2,BD=3$，且$S_{\triangle ABE}=S_{四边形DBEF}$，则$S_{\triangle ABE}$等于



(A)5.　　(B)6.　　(C)7.　　(D)8.

（新加坡数学奥林匹克，1988年）

[解]　连DE，如图显然有



$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDE},$$

又　$S_{四边形DBEF}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle BDE}$,

∴　$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle DEF}$，知　$AF/\!/DE$.

∴　$BE:BC=BD:AB=3:5$,

有　$S_{\triangle ABE}=\frac{BE}{BC}\quad S_{\triangle ABC}=\frac{3}{5}\cdot 10=6$.

故选(B).

注　*原题为填空题，这里改为选择题.*

17·138　九条直线平行于一个三角形的底边，分其他各边成为10个相等的线段，同时将面积分为10个不同部分.若这些部分中的最大面积是38，那么原三角形的面积是

(A) 180.　(B) 190.　(C) 200.　(D) 210.　(E) 240.

（第22届美国高中数学考试，1971年）

[解] 用 b 和 h 分别表示底和高的长度,因为

$$38=\frac{1}{2}(b+0.9b)\cdot 0.1h,$$

即

$$\frac{1}{2}\cdot 0.19bh=38,$$

则

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bh=\frac{38}{0.19}=200.$$

故选(C).

17·139 在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,AC,BC,DF和EF的长都相等. AB的长是$\triangle DEF$边DE上高的2倍.下列说法:

Ⅰ.$\angle ACB$和$\angle DFE$必须互余.

Ⅱ.$\angle ACB$和$\angle DFE$必须互补.

Ⅲ.$\triangle ABC$的面积必须和$\triangle DEF$的面积相等.

Ⅳ.$\triangle ABC$的面积必须与$\triangle DEF$面积的两倍相等.

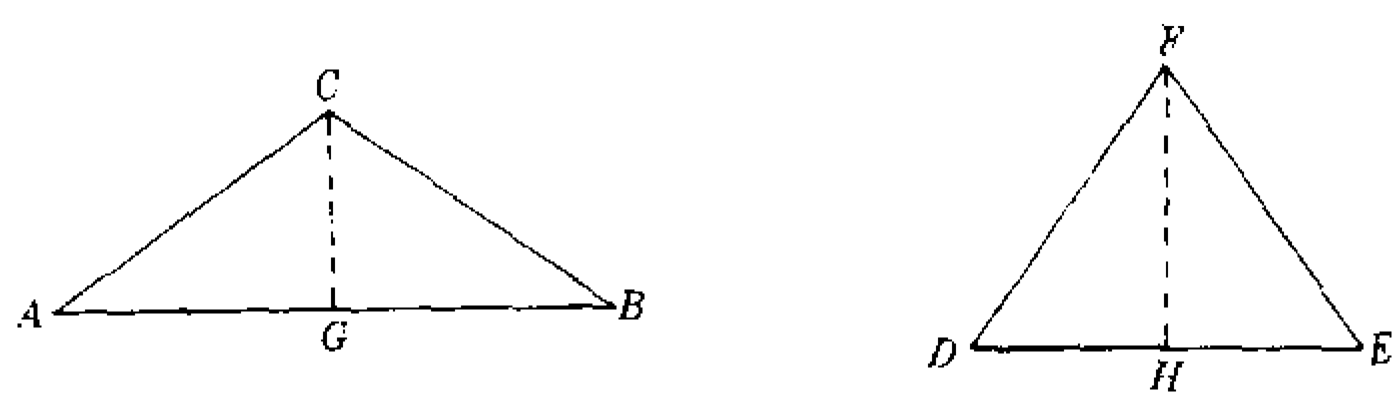
正确的是

(A)仅Ⅱ.　　(B)仅Ⅲ.　　(C)仅Ⅳ.

(D)仅Ⅰ和Ⅲ.　　(E)仅Ⅱ和Ⅲ.

(第27届美国高中数学考试,1976年)

[解] 设CG和FH分别是AB和DE上的高.因为 $AG=HF$,且$AC=DF$,则$\mathrm{Rt}\triangle AGC\cong\mathrm{Rt}\triangle FHD$.



所以 $\angle ACB+\angle DFE=2\angle ACG+2\angle DFH=180°$,

因而

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ACG}=2S_{\triangle DFH}=S_{\triangle DEF}.$$

故选(E).

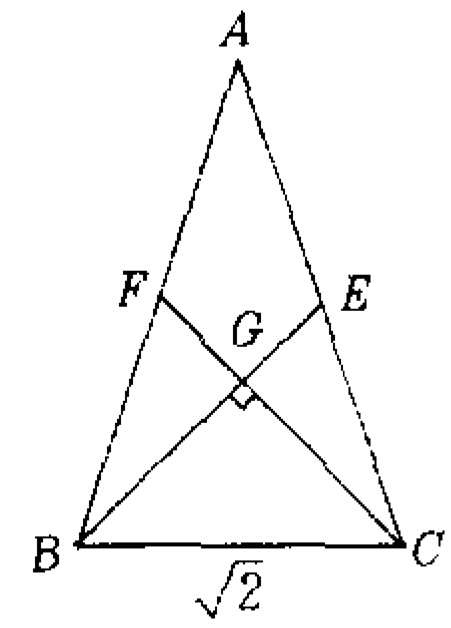
17·140 底为$\sqrt{2}$的等腰三角形,两腰上的中线相交成直角,则此三角形的面积为

(A) 1.5.　(B) 2.　(C) 2.5.　(D) 3.5.　(E) 4.

(第10届美国高中数学考试,1959年)

[解] 由设BE、CF系等腰三角形两腰上的中线,则其交点G为三角形重心,且$\triangle BGC$为等腰三角形.

又由设两中线交成直角，则$\triangle BGC$为等腰直角三角形. 故 $S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}$.



又 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BGC}$(注意到 G 为重心)，

则 $$S_{\triangle ABC}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

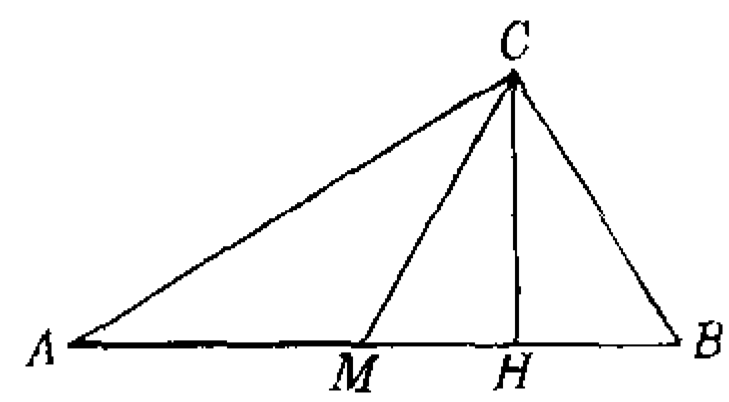
故选(A).

17·141 在 C 为直角的$\triangle ABC$中，高 CH 和中线 CM 三等分该直角. 若$\triangle CHM$的面积是k，那么$\triangle ABC$的面积是

(A) $6k$. (B) $4\sqrt{3}k$. (C) $3\sqrt{3}k$. (D) $3k$. (E) $4k$.

(第 24 届美国高中数学考试，1973 年)

[解] $\triangle ABC$，$\triangle AMC$，$\triangle MBC$ 和 $\triangle HBC$ 都有同样的高 HC，所以它们的面积与它们的底成正比例.



因为 $AM=BM$，我们有

$$S_{\triangle AMC}=S_{\triangle MBC}.$$

类似地 $S_{\triangle MBC}=S_{\triangle MHC}+S_{\triangle HBC}=k+k=2k$，注意到$\triangle MHC$和$\triangle HBC$是全等的 30°-60°直角三角形.

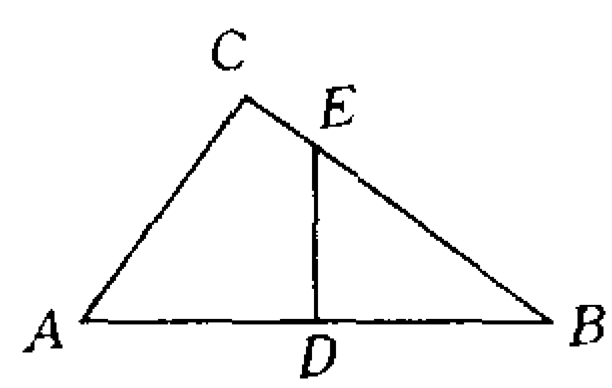
$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMC}+S_{\triangle MBC}=2k+2k=4k$.

故选(E).

17·142 如图，已知$\angle C=90°$，$AD=DB$，$DE\perp AB$，$AB=20$及 $AC=12$，则四边形 $ADEC$ 的面积为

(A) 75. (B) $58\frac{1}{2}$. (C) 48.

(D) $37\frac{1}{2}$. (E)其他.



(第 3 届美国高中数学考试，1952 年)

[解] 由设知$\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，则

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{BD^2}{BC^2},$$

其中 $BC^2=AB^2-AC^2=20^2-12^2=16^2$，

又 $BD=\frac{1}{2}AB=10$，得

$$S_{\triangle BDE}=\left(\frac{10}{16}\right)^2 S_{\triangle BCA}=\left(\frac{5}{8}\right)^2 S_{\triangle BCA},$$

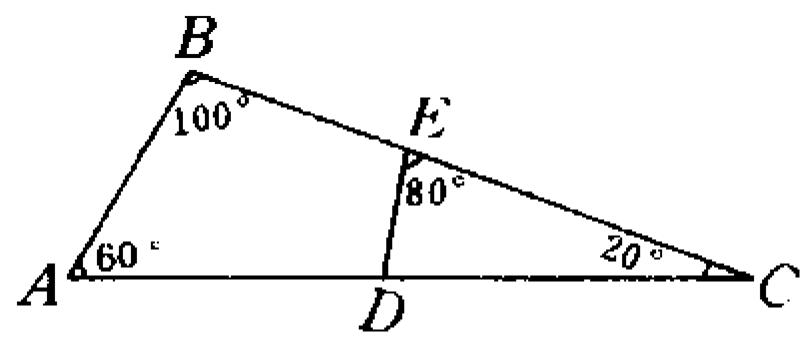
有

$$S_{四边形ADEC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BDE}=\left[1-\left(\frac{5}{8}\right)^2\right]S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{13\cdot 3}{8^2}\cdot\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{13\cdot 3}{8^2}\cdot\frac{12\cdot 16}{2}=58\frac{1}{2}.$$

故选(B).

17·143 在$\triangle ABC$中,E是BC边的中点,D在AC边上.若AC的长是1,$\angle BAC=60°$,$\angle ABC=100°$,$\angle ACB=20°$,$\angle DEC=80°$,那么$\triangle ABC$的面积加上二倍的$\triangle CDE$的面积等于



(A)$\frac{1}{4}\cos 10°$.　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(C)$\frac{1}{4}\cos 40°$.　　(D)$\frac{1}{4}\cos 50°$.　　(E)$\frac{1}{8}$.

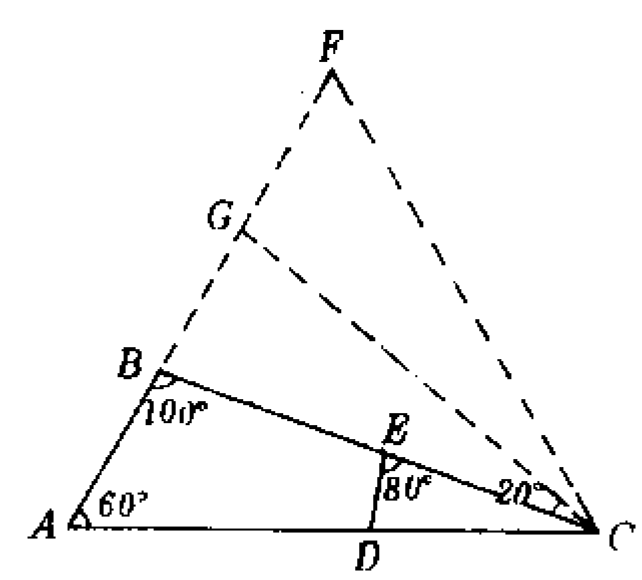
(第30届美国高中数学考试,1979年)

[解] 设F是过B的AB边延长线上的点,并且$AF=1$.因为$AF=AC$且$\angle FAC=60°$,$\triangle ACF$是等边三角形.设G是线段BF上的点,并且$\angle BCG=20°$,那么$\triangle BCG\backsim\triangle DCE$,且$BC=2EC$.又$\triangle FGC\cong\triangle ABC$,

所以 $S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle GCF}+S_{\triangle BCG}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=2S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle CDE}$$

因而 $S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle CDE}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.



故选(B).

17·144 已知$AC\perp CE$,D为CE的中点,B为AC的中点,连AD,EB,若AD与EB交于F,且$BC=CD=15$,则$\triangle DEF$的面积为

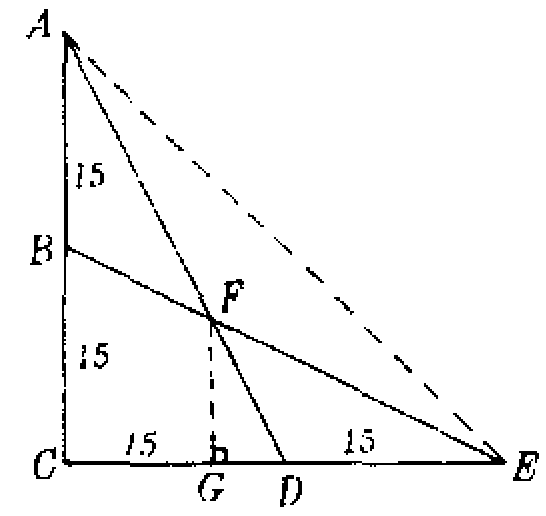
(A) 50.　(B) $50\sqrt{2}$.　(C) 75.　(D)$\frac{15}{2}\sqrt{105}$.　(E) 100.

(第16届美国高中数学考试,1965年)

[解] 作$FG\perp CE$于G,连结AE.由题设则F为$\triangle ACE$的重心.

$\therefore\quad FD=\frac{1}{3}AD,$

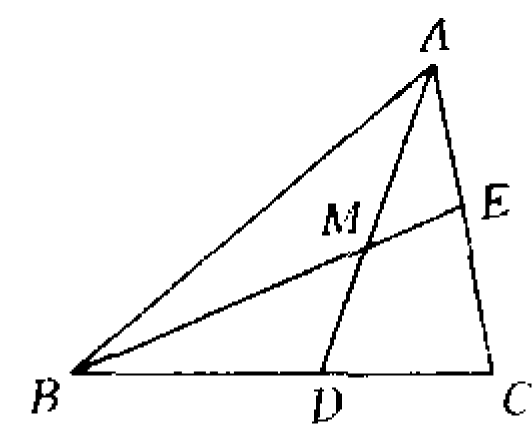
且 $\quad FG=\frac{1}{3}AC=\frac{1}{3}\cdot 30=10,$



$\therefore\quad S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot FG=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10$
$=75.$

故选(C).

17·145　如图,在$\triangle ABC$中,已知$BD:DC=3:2$, $AE:EC=3:4$, M是AD与BE的交点,且$\triangle ABC$的面积为1,那么$\triangle BMD$的面积是

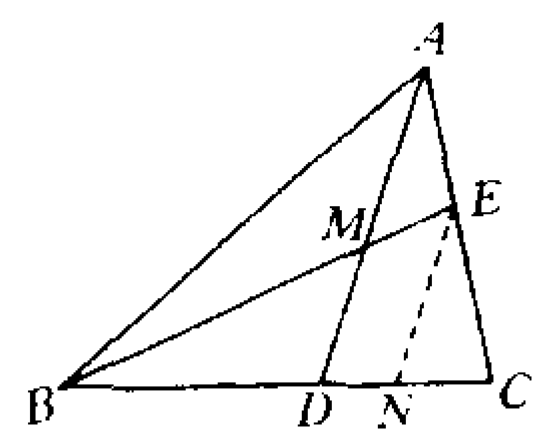


(A)$\frac{3}{5}$.　　(B)$\frac{3}{7}$.　　(C)$\frac{12}{35}$.

(D)$\frac{4}{15}$.　　(E)$\frac{4}{9}$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1985年)

[解]　如图,作$EN/\!/AD$交BC于N.



因为　$\frac{AE}{EC}=\frac{DN}{NC}=\frac{3}{4}$, 及　$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{2}$,

则　$NC:DN:BD=8:6:21$.

因为　$S_{\triangle BEC}=\frac{4}{7}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{7}$, 有

$$S_{\triangle BNE}=\frac{27}{35}S_{\triangle BEC}=\frac{27\cdot 4}{35\cdot 7},$$

又因为　$DM/\!/EN$,　则　$\triangle BDM\backsim\triangle BNE$.

所以　　$S_{\triangle BDM}=\left(\frac{21}{27}\right)^2S_{\triangle BNE}=\frac{49}{81}\cdot\frac{27\cdot 4}{35\cdot 7}=\frac{4}{15}.$

故选(D).

17·146　在$\triangle ABC$中,边AB、AC的中线CE、BD互相垂直,又$BD=8$, $CE=12$,则$S_{\triangle ABC}$等于

(A)24.　　(B)32.　　(C)48.　　(D)64.　　(E)96.

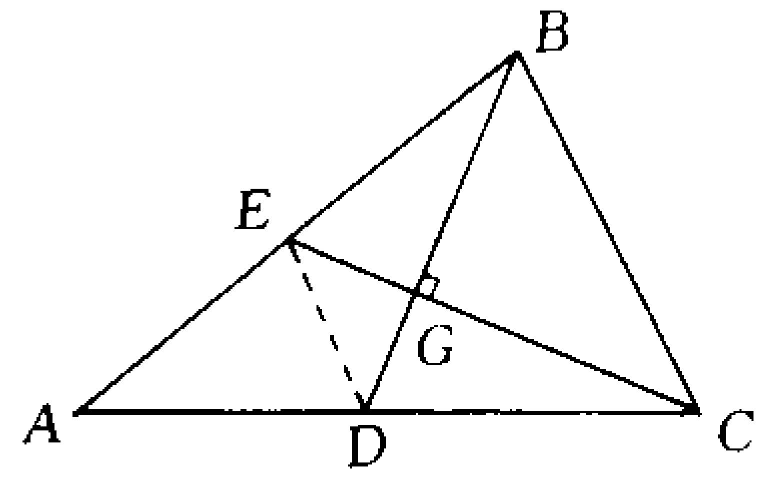
(第48届美国高中数学考试,1997年)

[解]　连接ED,由设$BD\perp CE$,则$S_{四边形BCDE}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CE=48$,又$BD$、$CE$是三角形中线则$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$, 从而$S_{四边形BCDE}=$

$\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$,

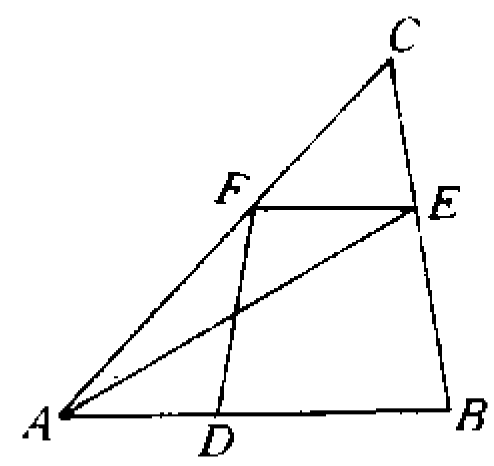
故 $S_{\triangle ABC}=48\cdot\frac{4}{3}=64$.

故选(D).



注 $BD=4, CE=6$ 时问题为中国初中数学联赛1998年试题.

17·147 如图,$\triangle ABC$ 的面积为10.又 D,E,F 分别是 AB,BC,AC 上不同于 A,B,C 的三个点,且 $AD=2,DB=3$.如果$\triangle ABE$ 和四边形 $DBEF$ 的面积相等,那么它的面积是



(A) 4. (B) 5.

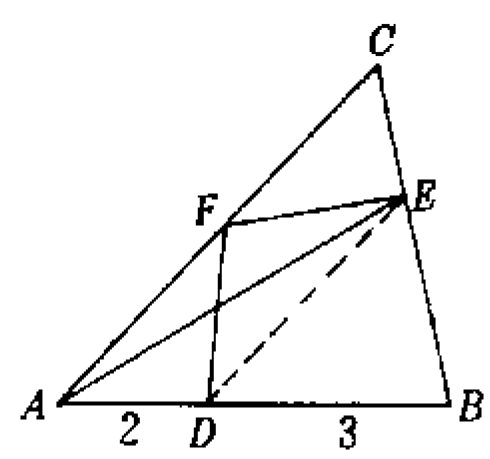
(C) 6. (D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$.

(E)不能惟一确定.

(第34届美国高中数学考试,1983年)

[解] 连结 DE,由 $S_{\triangle ABE}=S_{BEFD}$,

有 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle FDE}$, 则 $ED\parallel AC$.



又 $AD:DB=2:3$,

则 $$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle EDB}=2:3.$$

由 $ED\parallel AC$, 有

$$S_{\triangle EDB}:S_{\triangle ABC}=3^2:(3+2)^2=9:25,$$

故 $$S_{\triangle EDB}=\frac{9}{25}S_{\triangle ABC}=\frac{9}{25}\cdot 10=\frac{18}{5},$$

而 $$S_{\triangle ADE}=\frac{2}{3}S_{\triangle EDB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{18}{5}=\frac{12}{5}.$$

因此 $$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle EDB}+S_{\triangle ADE}=\frac{18}{5}+\frac{12}{5}=6.$$

故选(C).

17·148 在$\triangle ABC$ 中,AM 和 CN 分别为 BC 和 AB 两边上的中线,且相交于 O 点.P 为 AC 的中点,且 MP 与 CN 相交于 Q.若$\triangle OMQ$ 的面积为 n,则$\triangle ABC$ 的面积为

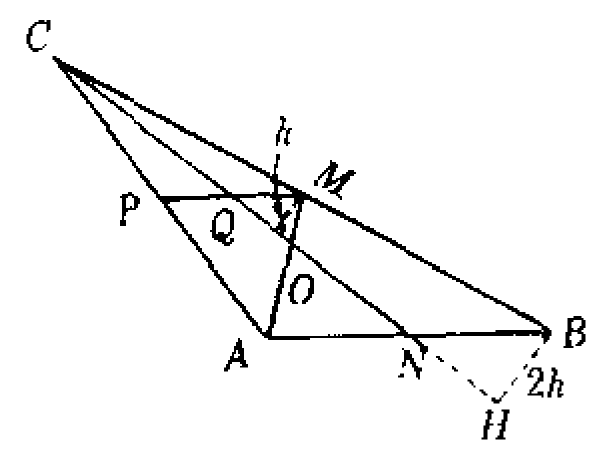
(A) $16n$. (B) $18n$. (C) $21n$. (D) $24n$. (E) $27n$.

(第17届美国高中数学考试,1966年)

［解］ 由设 O 为重心.故有

$$OQ=CO-CQ=\frac{2}{3}CN-\frac{1}{2}CN=\frac{1}{6}CN.$$

再设 h 为 $\triangle OMQ$ 边 OQ 上的高,则 $\triangle CNB$ 边 CN 上的高为 $2h$.



所以 $S_{\triangle OMQ}=\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot h=\frac{1}{12}\cdot CN\cdot h=n$,

则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle CNB}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot CN\cdot 2h=2CN\cdot h=24n.$

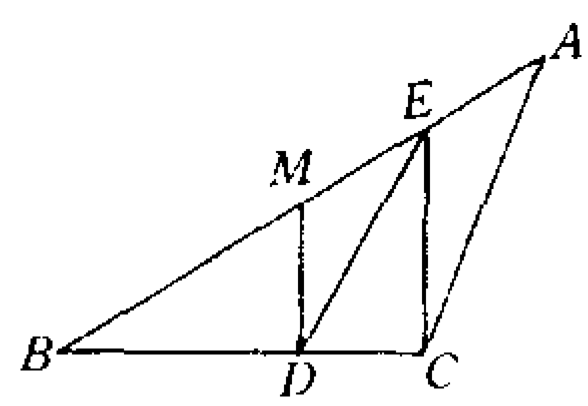
故选(D).

17·149 如图,在钝角三角形 ABC 中,$AM=MB$, $MD\perp BC$, $EC\perp BC$.如果 $\triangle ABC$ 的面积是 24,那么 $\triangle BED$ 的面积是

(A) 9. (B) 12. (C) 15.

(D) 18. (E)不能被惟一确定.

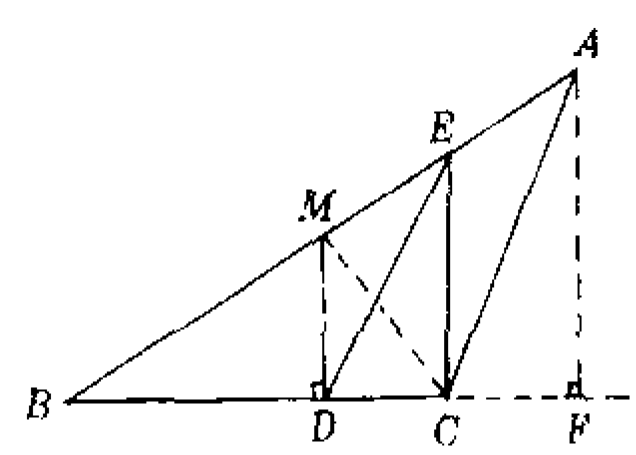
(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)



［解］ 连 MC,在 $\triangle DMC$ 和 $\triangle DME$ 中,它们有公共的底 MD,且在 MD 上的高相等,所以这两个三角形是等面积的.

而 $S_{\triangle BMC}=S_{\triangle BMD}+S_{\triangle DMC}$,

$S_{\triangle BED}=S_{\triangle BMD}+S_{\triangle DME}$.



所以 $S_{\triangle BMC}=S_{\triangle BED}$.

下面有两种方法可证明

$$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BAC}.$$

因此 $S_{\triangle BED}=S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BAC}=12.$

第一种证法:从 A 作 BC 边上的高,交 BC 的延长线于 F,所以 $MD/\!/AF$.

又因为 M 是 BA 的中点,因此 $MD=\frac{1}{2}AF$.

再者 $\triangle BMC$ 和 $\triangle BAC$ 有公共的底边 BC,所以

$$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BAC}.$$

第二种证法：$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}BM\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}BA\cdot BC\sin B\right]$

$$=\frac{1}{2}S_{\triangle BAC}.$$

故选(B).

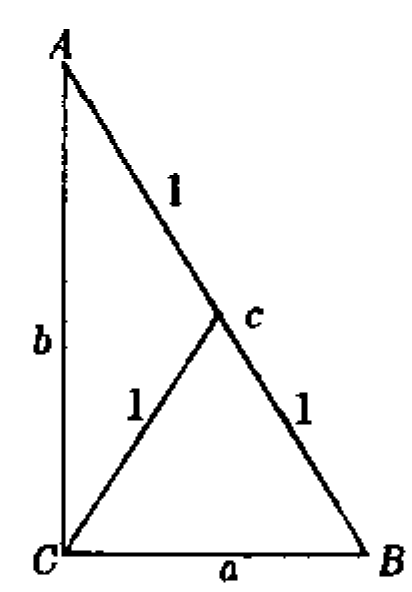
17·150　直角三角形周长为$2+\sqrt{6}$,斜边上的中线为1.则这个三角形的面积是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 4.　　(D)$\frac{1}{2}$.

（中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1987年）

[解]　由题设知其斜边长为2.如图可有

$$\begin{cases}a+b+c=2+\sqrt{6}, & ①\\ a^2+b^2=c^2, & ②\end{cases}$$



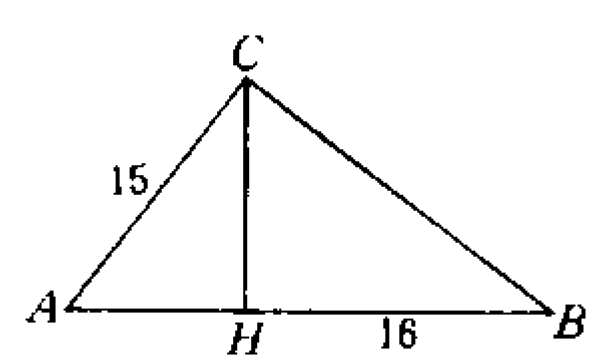
由①及$c=2$有　$a+b=\sqrt{6}$,　则

$$a^2+b^2+2ab=6,$$

有　$ab=1$.　$\therefore$　$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$.

故选(D).

17·151　如图,斜边为AB的直角三角形ABC,其中边$AC=15$.斜边上的高CH分AB为AH和HB,其中$HB=16$.三角形ABC的面积是



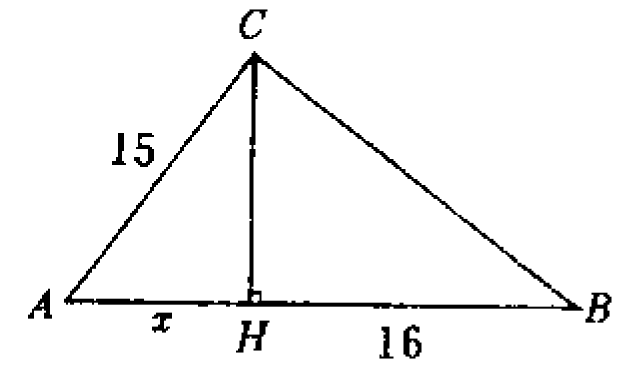
(A) 120.　　(B) 144.

(C) 150.　　(D) 216.

(E) $144\sqrt{5}$.

（第35届美国高中数学考试,1984年）

[解]　设$AH=x$,则由题设有



$$225=x(x+16),$$

即　$$x^2+16x-225=0,$$

或　$$(x+25)(x-9)=0.$$

得　$x=9$.（已舍负值）

这样 $AB=25,\quad CH=\sqrt{15^2-9^2}=12.$

所以△ABC 的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 12=150.$

故选(C).

17·152 △ABC 的中线 $AD=1$; $AB+AC=\frac{5}{2}$, $BC=2$, 则△ABC 的面积等于

(A)$\frac{9}{8}$. (B)$\frac{9}{4}$. (C) 1. (D)$\frac{9}{16}$.

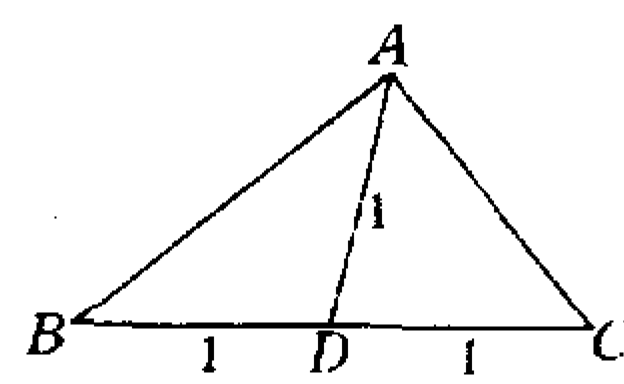
(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987 年)

[解] 由已知,中线 $AD=1$,又因为 $BC=2$,则 $BC=2AD$.

于是△ABC 为直角三角形,且 $\angle BAC=90°$.

由题设及勾股定理可得

$$\begin{cases}AB+AC=\frac{5}{2},\\ AB^2+AC^2=4.\end{cases}$$



所以 $AB\cdot AC=\frac{9}{8}.$

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{9}{16}.$

故选(D).

17·153 周长(以 cm 计)与面积(以 cm^2 计)在数值上相等的不全等的直角三角形的个数有

(A)没有. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E)无数个.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解 1] 设 a,b,c 分别是一个直角三角形的两条直角边和斜边的长(以 cm 为单位),那么周长 (cm) 与面积 (cm^2) 的比是

$$r=\frac{2(a+b+c)}{ab}.$$

现考虑边长为 ka,kb,kc 的直角三角形,于是这个比变为

$$\frac{2(ka+kb+kc)}{kakb}=\frac{1}{k}\cdot\frac{2(a+b+c)}{ab}=\frac{r}{k}.$$

只要取 $k=r$,即比值为 1,它们就相等.

这就说明:直角三角形的周长与面积的比可根据替换与原直角三角形相似的三角形而任意改变,并且其中总有一个,它的周长(无论以

什么为长度单位)和它的面积(以与长度单位相应的面积单位)在数量上是相等的.

因为有无穷多个不相似的直角三角形,因此也就有无穷多个不相似的直角三角形,使得它们的周长等于它们的面积.

故选(E).

[解 2] 设 a,b 是直角三角形的两条直角边,则它的斜边长为

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

此直角三角形的周长与面积在数量上相等当且仅当

$$\frac{1}{2}ab=a+b+\sqrt{a^2+b^2},$$

这是一个含有两个非负实变量的方程.一般地,这种方程有无穷多组解.

故选(E).

17·154 设 P_1,P_2,P_3 分别是以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$(C 为直角)的边 AB, BC, CA 为边的正三角形.则 P_1 的(　　)为 P_2、P_3 的(　　)之和.

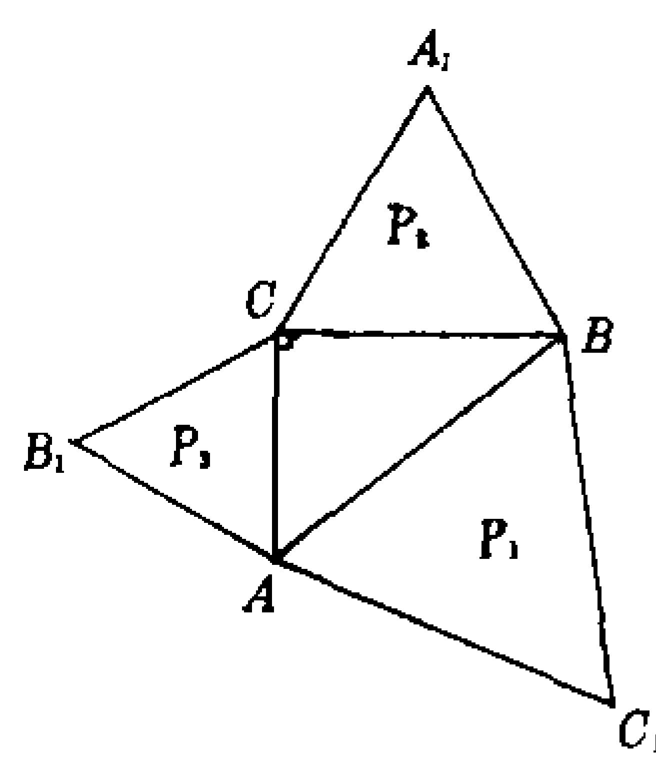
(A)面积,面积.　　(B)周长,周长.

(C)内角和,内角和.　　(D) AB 边上的高,BC 与 CA 边上的高.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由勾股定理及题设知

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$



又
$$S_{p_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2,\ S_{p_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2,$$

$$S_{p_3}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2.$$

则
$$S_{p_1}=S_{p_2}+S_{p_3}.$$

故选(A).

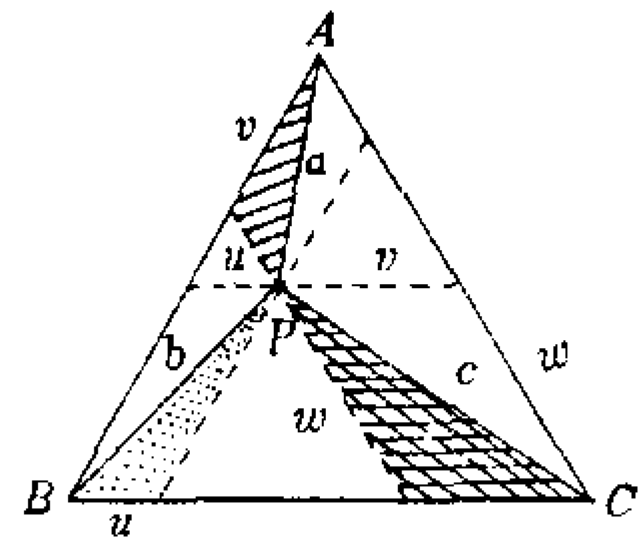
17·155 位于等边三角形 ABC 内的点 P 与三个顶点的距离为 $PA=6$, $PB=8$, $PC=10$,则最接近这个$\triangle ABC$ 面积的整数是

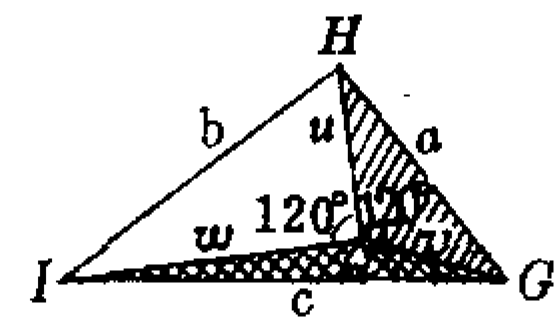
(A) 159.　(B) 131.　(C) 95.　(D) 79.　(E) 50.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

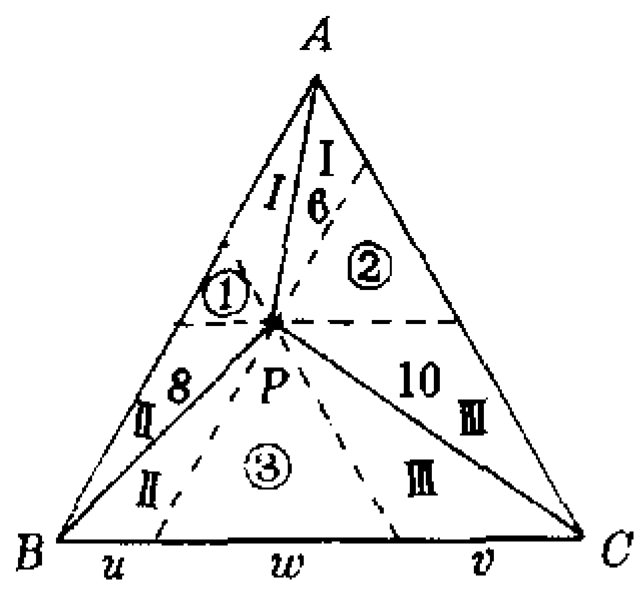
[解 1] 如图,我们利用它已证明:若 P 为正$\triangle ABC$ 内一点,且 $PA=a,PB=b,PC=c$,又过 P 与三边的平行线被 P 截得的三段长分

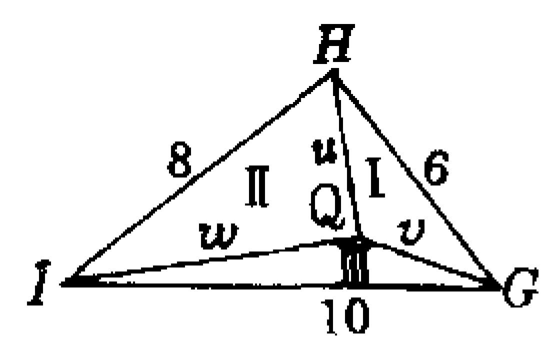
别是 u,v,w,则以 a,b,c 为边长的三角形 HIG 内一点 Q 与三顶点连线夹角均为 $120°$,则这三条线段长分别为 u,v,w.





回到我们的命题,





$$S_{\triangle ABC}=2(S_{\triangle \mathrm{I}}+S_{\triangle \mathrm{II}}+S_{\triangle \mathrm{III}})+S_{\triangle ①}+S_{\triangle ②}+S_{\triangle ③}$$

$$=2S_{\triangle IHG}+\frac{\sqrt{3}}{4}(u^2+v^2+w^2),$$

在$\triangle QIH$,$\triangle QIG$,$\triangle QGH$ 中由余弦定理有

$$\begin{cases} u^2+v^2+uv=8^2, & ① \\ u^2+w^2+uw=10^2, & ② \\ v^2+w^2+vw=6^2, & ③ \end{cases}$$

①+②+③得 $2(u^2+v^2+w^2)+uv+uw+vw=200.$

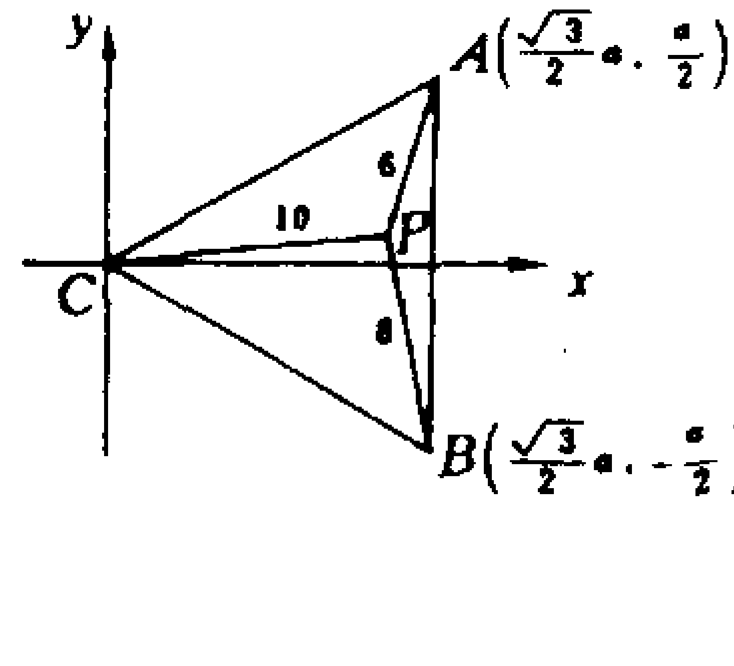
又 $uv+vw+wu\leqslant u^2+v^2+w^2$, (由排序不等式),则

$$2(u^2+v^2+w^2)\leqslant 200\leqslant 3(u^2+v^2+w^2),$$

即 $$\frac{200}{3}\leqslant u^2+v^2+w^2\leqslant 100.$$

又 $$2S_{\triangle IHG}=6\cdot 8=48,$$

因此 $48+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{200}{3}\leqslant S_{\triangle ABC}\leqslant 48+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 100.$



即 $76\cdot 9\leqslant S_{\triangle ABC}\leqslant 91.3.$

故选(D).

[解 2] 以正$\triangle ABC$ 顶点 C 为原点,AB

上的高为横轴建立坐标系.

若设正$\triangle ABC$边长为a,则A,B点的坐标分别为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{a}{2}\right).$$

又由题设可有方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2, & ① \\ \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}a\right)^2=8^2, & ② \\ \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2=6^2. & ③ \end{cases}$$

②-③得　$2ay=28$　即　$ay=14$,代入②且利用①得

$$10^2-\sqrt{3}ax+a^2+14=64,\quad 则\quad ax=\frac{a^2+50}{\sqrt{3}}.$$

故由　$(ax)^2+(ay)^2=a^2(x^2+y^2)$　得

$$\left(\frac{a^2+50}{\sqrt{3}}\right)^2+14^2=10^2a^2,$$

即　$a^4-200a^2+3088=0$.

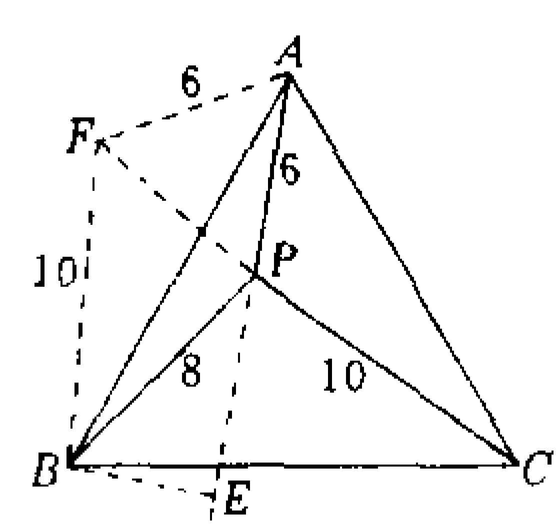
解得　$a^2=100\pm48\sqrt{3}$(舍去$100-48\sqrt{3}$,因$a^2>100$).

则　$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=25\sqrt{3}+36\approx79.$$

故选(D).

[解3]　以PA为边向形外作等边$\triangle PAF$,连BF.

过B作AP延长线的垂线,垂足是E.于是



$$\angle PAC=60°-\angle PAB=\angle BAF.$$

又　$BA=CA$,$AP=AF$,

故　$\triangle PAC\cong\triangle FAB$.

从而　$BF=CP=10$,

则　$\triangle BPF$为直角三角形.

又　$\angle BPE=180°-90°-60°=30°$,则　$BE=4$,$EP=4\sqrt{3}$.

因此　$$AB=\sqrt{BE^2+EA^2}=\sqrt{4^2+(6+4\sqrt{3})^2}$$
$$=2\sqrt{25+12\sqrt{3}},$$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}(25+12\sqrt{3})=36+25\sqrt{3}$

$\approx 79.30.$

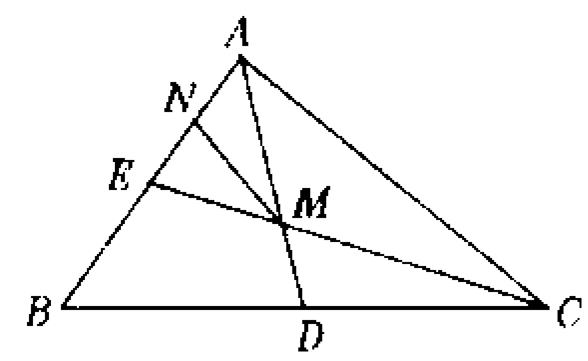
故选(D).

17·156 $\triangle ABC$ 的中线 AD 和 CE 交于 M, AE 的中点为 N, 设 $\triangle MNE$ 的面积为$\triangle ABC$ 的面积的k 倍, 则 k 等于

(A)$\frac{1}{6}$. (B)$\frac{1}{8}$. (C)$\frac{1}{9}$. (D)$\frac{1}{12}$. (E)$\frac{1}{16}$.

(第 12 届美国高中数学考试, 1961 年)

[解] $S_{\triangle MNE}=\frac{1}{2}S_{\triangle AME}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}S_{\triangle AEC}\right)$

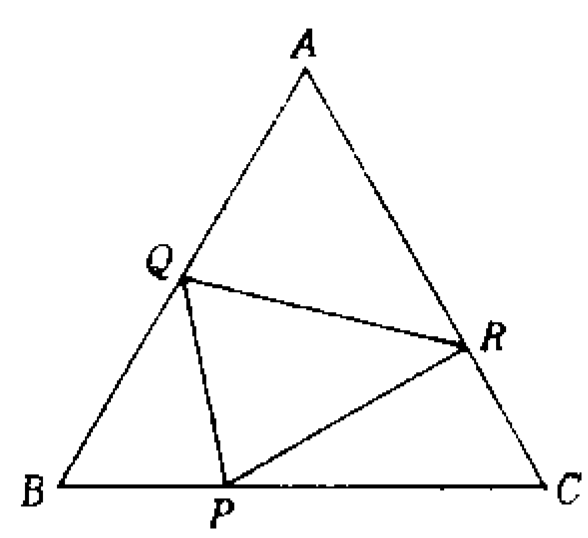


$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\right)\right]$

$=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}.$

故选(D).

17·157 如图, 正$\triangle ABC$ 面积为 1. $BP=\frac{1}{3}BC$, $AQ=BQ$, $PR\perp AC$ 于 R. 则$\triangle PRQ$ 的面积为



(A)$\frac{7}{12}$. (B)$\frac{1}{2}$. (C)$\frac{1}{3}$.

(D)$\frac{3}{8}$. (E)$\frac{5}{18}$.

(中国北京市高中数学竞赛, 1984 年)

[解] 容易证明 $RC=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{3}AC$(作 $BD\perp AC$ 于D, 由相似三角形性质可得). 因而有

$$S_{\triangle QBP}=\frac{1}{6},\quad S_{\triangle PRC}=\frac{2}{9},\quad S_{\triangle AQR}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \qquad S_{\triangle PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{18}.$$

故选(E).

17·158 等边三角形 ABC 的面积为 36, 又 P, Q, R 分别是 BC, AB, CA 上的点, 且 $BP=\frac{1}{3}BC$, $AQ=QB$, $PR\perp AC$, 则$\triangle PQR$ 的面积等于

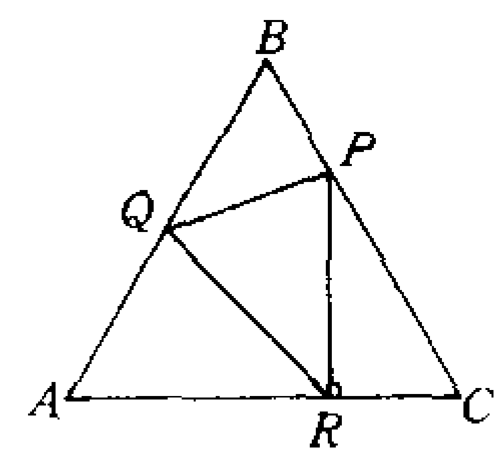
选择题卷

(A) 10.　　(B) 12.　　(C) 14.　　(D) 15.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1988 年）

[解] 设等边$\triangle ABC$的边长为$6a$，

则有 $AQ=QB=3a$，$BP=2a$，$PC=4a$，$CR=2a$，$RA=4a$.



∵　　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(6a)^2\sin 60^\circ=36$,

∴　　$\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=1$.

于是

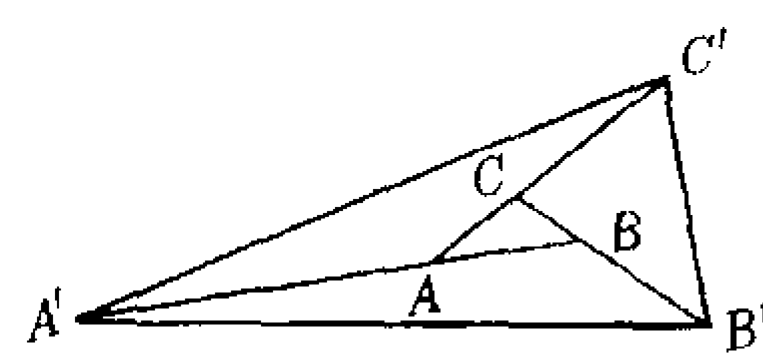
$$S_{\triangle PQR}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle ARQ}+S_{\triangle BQP}+S_{\triangle CPR})$$

$$=36-(\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 3a\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 2a\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a\sin 60^\circ)$$

$$=36-26\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=36-26=10.$$

故选(A).

17·159　如图，把$\triangle ABC$的各边延长2倍至A'，B'，C'，则$\triangle A'B'C'$的面积是$\triangle ABC$面积的



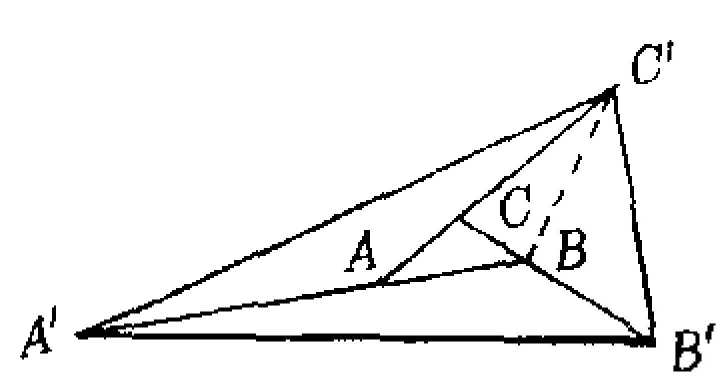
(A) 13 倍.　　(B) 4 倍.

(C) 19 倍.　　(D) 7 倍.

（第 5 届“缙云杯”初中数学邀请赛，1988 年）

[解] 连BC'，且设$S_{\triangle ABC}=S$. 由三角形面积公式及题设有

$S_{\triangle BCC'}=2S_{\triangle ABC}=2S$.



同理　$S_{\triangle C'B'B}=2S_{\triangle BCC'}=4S$.

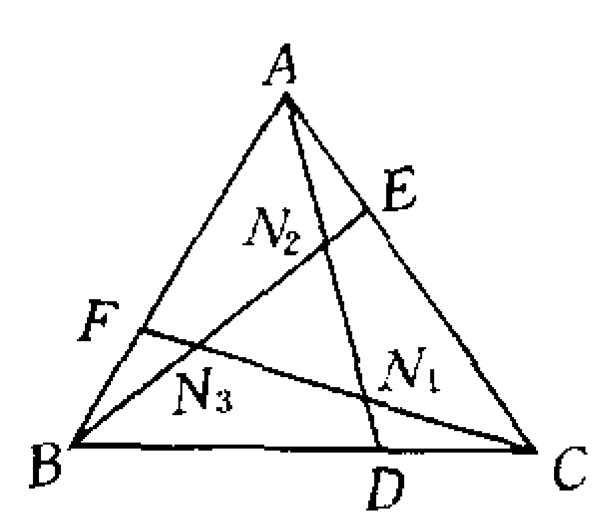
则　$S_{\triangle CC'B'}=S_{\triangle BCC'}+S_{\triangle C'B'B}=6S$.

同理仿上方法可有　$S_{\triangle AA'C'}=S_{\triangle BB'A'}=6S$.

则　　$S_{\triangle A'B'C'}=3\cdot 6S+S=19S$.

故选(C).

17·160　如图，CD，AE与BF为各边长的$\frac{1}{3}$，据此，$AN_2:N_2N_1:N_1D=3:3:1$. 仿此，BE与CF亦然，则三角形$N_1N_2N_3$的面积是



(A)$\frac{1}{10}\triangle ABC$.　　(B)$\frac{1}{9}\triangle ABC$.　　(C)$\frac{1}{7}\triangle ABC$.

(D)$\frac{1}{6}\triangle ABC$.　　(E)非上述答案.

（第3届美国高中数学考试,1952年）

[解] 由设 $CD=\frac{1}{3}BC$, 则 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

又 $AN_2:N_2N_1:N_1D=3:3:1$,有 $N_1D=\frac{1}{7}AD$.

则 $S_{\triangle CDN_1}=\frac{1}{7}S_{\triangle ACD}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

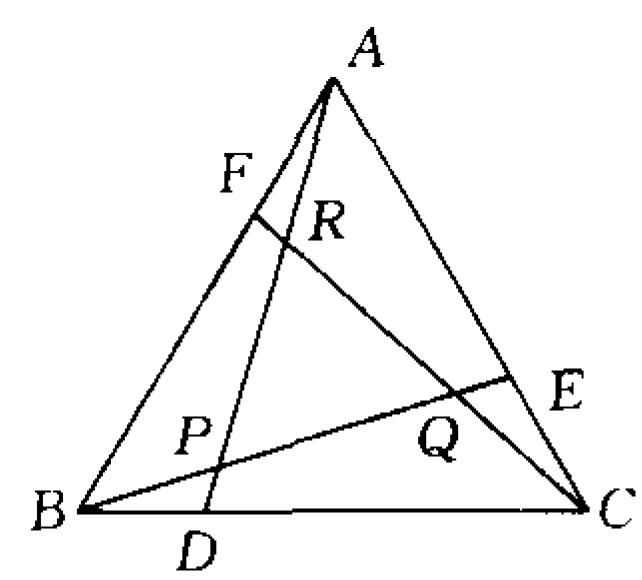
同理 $S_{\triangle AEN_2}=S_{\triangle BFN_3}=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

故

$$\begin{aligned}S_{\triangle N_1N_2N_3}&=S_{\triangle ABC}-[S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CBF}]+S_{\triangle CDN_1}\\&\quad+S_{\triangle AEN_2}+S_{\triangle BFN_3}\\&=S_{\triangle ABC}-3\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}+3\cdot\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

故选(C).

17·161 如图,在正$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上分别有内分点D,E,F,将边分成$2:(n-2)$(其中$n>4$),线段AD,BE,CF相交所成的$\triangle PQR$的面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{7}$.则n的值是



(A)5.　　(B)6.　　(C)7.　　(D)8.

（中国河北省初中数学竞赛,1995年）

[解] 如题图,$BD:DC=CE:EA=AF:FB=2:(n-2)$.

注意到直线BPE分别交$\triangle ADC$的边或其延长线于P,B,E,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-2}=1.$$

因此 $\frac{AP}{PD}=\frac{n(n-2)}{4}$, $\frac{AP}{AD}=\frac{n(n-2)}{n(n-2)+4}$.

从而 $S_{\triangle ABP}=\frac{n(n-2)}{n(n-2)+4}S_{\triangle ABD}=\frac{n(n-2)}{n(n-2)+4}\cdot\frac{2}{n}S_{\triangle ABC}$

$$=\frac{2(n-2)}{n(n-2)+4}S_{\triangle ABC}.$$

同理 $S_{\triangle BCQ}=S_{\triangle CAR}=\frac{2(n-2)}{n(n-2)+4}S_{\triangle ABC}.$

因而 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCQ}+S_{\triangle CAR}=\frac{6(n-2)}{n(n-2)+4}S_{\triangle ABC}.$

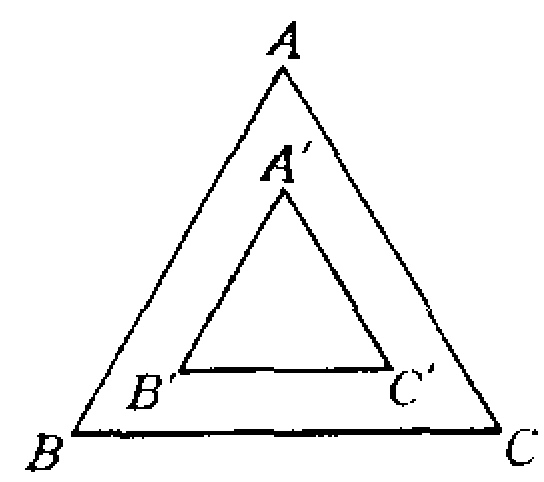
由已知 $\frac{6(n-2)}{n(n-2)+4}=\frac{6}{7}$，解得 $n=6.$

故选(B).

17·162 $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是等边三角形，且对应边平行，两者具有共同的中心(如图)，BC与$B'C'$之间的距离为$\triangle ABC$的高的$\frac{1}{6}$，则$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的面积之比为

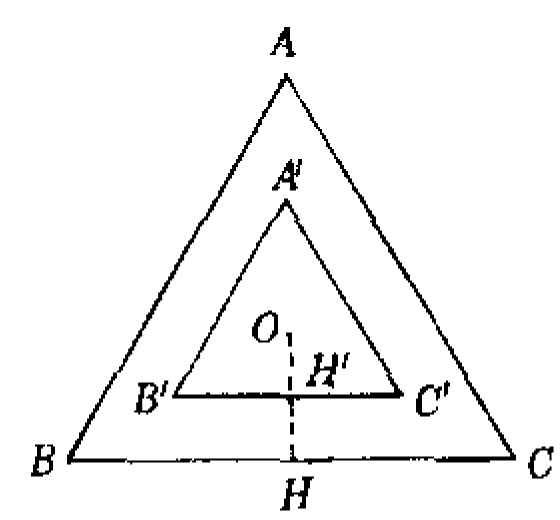
(A)$\frac{1}{36}$. (B)$\frac{1}{6}$. (C)$\frac{1}{4}$.

(D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$. (E)$\frac{9+8\sqrt{3}}{36}$.



(第39届美国高中数学考试，1988年)

[解] 设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高分别为h和h'，且设它们的中心为0.



则 $OH'=\frac{1}{3}h'$, $OH=\frac{1}{3}h.$

又 $H'H=\frac{1}{6}h$, 则 $OH'=\frac{1}{6}h.$

故 $h':h=OH':OH=\frac{1}{6}h:\frac{1}{3}h=1:2.$

则 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=1^2:2^2=1:4.$

故选(C).

17·163 三角形三边长分别是2,3,4,其中最大角的平分线分原三角形成两个小三角形.则较小的较大的小三角形面积之比是

(A) 4:9. (B) 2:3. (C) 1:3. (D) 1:2.

("江汉杯"初中数学竞赛,1991年)

[解] 题设如图所示,则

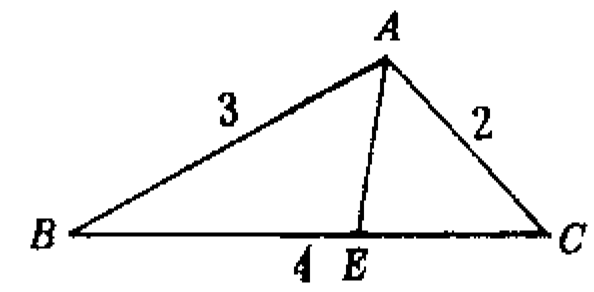
$S_{\triangle AEC}:S_{\triangle AEB}$

$=(\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AE\cdot\sin\angle EAC):(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AE\cdot\sin\angle EAB)$

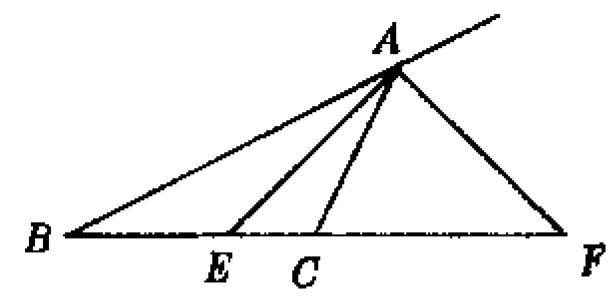
$=AC:AB$

$=2:3.$

故选(B).



17·164 在$\triangle ABC$中,$AC:AB=1:2$.$\angle A$的内,外角平分线分别为AE和AF,则面积$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABF}$等于



(A) 3:2:4.　　(B) 3:2:6.

(C) 3:1:4.　　(D) 2:1:4.

(中国四川省初中数学竞赛,1992年)

[解] 由设AE为$\angle A$的平分线,且$AC:AB=1:2$,则

$$CE:BE=1:2.$$

同理

$$FC:FB=1:2.$$

设 $S_{\triangle ABC}=S$, 则 $S_{\triangle ABE}=\frac{2}{3}S$, $S_{\triangle ABF}=2S$.

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABF}=S:\frac{2}{3}S:2S=3:2:6.$$

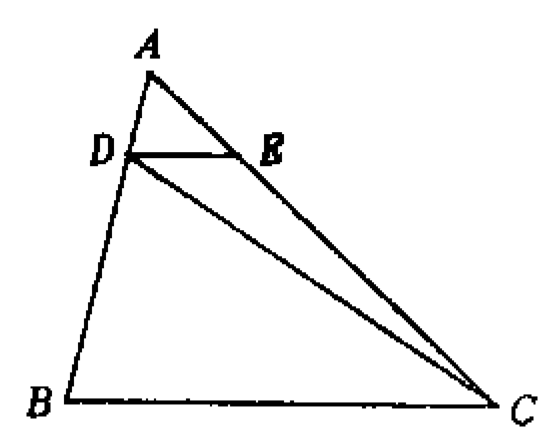
故选(B).

17·165 如图,在$\triangle ABC$中,$DE/\!/BC$,且$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle CDE}=1:3$.则$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DBC}$等于

(A) 1:5.　　(B) 1:12.

(C) 1:8.　　(D) 1:9.

(中国四川省初中数学竞赛,1990年)



[解] 由设$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle CDE}=1:3$,则

$AE:EC=1:3.$

又 $DE/\!/BC$, 则 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

故 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=1^2:(1+3)^2=1:16.$

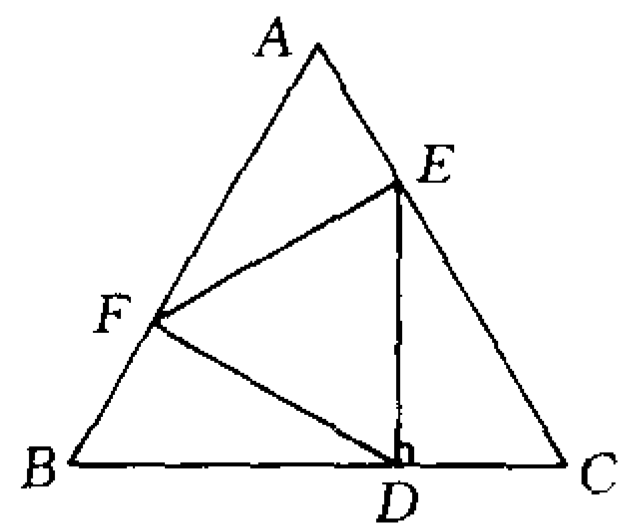
则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DBC}=1:(16-1-3)=1:12.$

故选(B).

17·166 正$\triangle DEF$内接于正$\triangle ABC$(如图),又$DE\perp BC$,则$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}$等于

(A)$\frac{1}{6}$.　　(B)$\frac{1}{4}$.　　(C)$\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{2}{5}$.　　　　(E) $\frac{1}{2}$.



(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解]　显然　$\triangle AFE \cong \triangle BDF \cong \triangle CED$,有 $BD=EC$.

$\therefore$　$\frac{CD}{BD}=\frac{CD}{EC}=\cos\angle C=\frac{1}{2}$,知　$CD=\frac{1}{3}BC$.

且　$ED=\sqrt{3}\quad CD=\frac{\sqrt{3}}{3}BC$,因而　$\frac{DE}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$　　$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=ED^2:BC^2=1:3$.

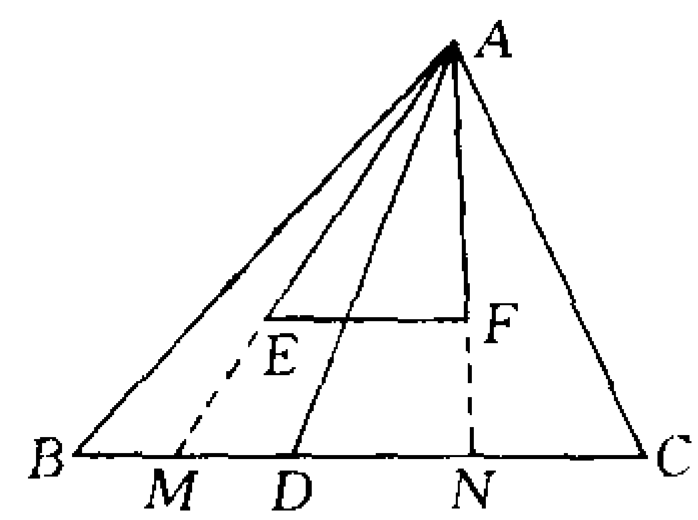
故选(C).

17·167　若 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点,又 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心分别是 E、F,则 $S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}$ 等于

(A) $4:9$.　　(B) $1:3$.　　(C) $2:9$.　　(D) $1:9$.

(中国四川省初中数学竞赛,1994 年)

[解]　如图,延长 AE,AF 分别交 BC 于 M,N,于是 M,N 分别是 BD 和 DC 中点。



由三角形重心性质知:

$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AMN}=2^2:3^2=4:9$,

又　$S_{\triangle AMN}:S_{\triangle ABC}=1:2$,

从而　$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}=2:9$.

故选(C).

17·168　设 M 为 $\triangle ABC$ 中 AB 边的中点,P 在 AB 上且位于 A,M 之间的一点,作 MD 平行于 PC 并与 BC 交于 D.若 r 表示 $\triangle BPD$ 对 $\triangle ABC$ 的面积比,则

(A) $\frac{1}{2}<r<1$,按 P 的位置而定.

(B) $r=\frac{1}{2}$,不论 P 位于何处.

(C) $\frac{1}{2}\leqslant r<1$,按 P 的位置而定.

(D) $\frac{1}{3}<r<\frac{2}{3}$,按 P 的位置而定.

(E) $r=\frac{1}{3}$,不论 P 位于何处.

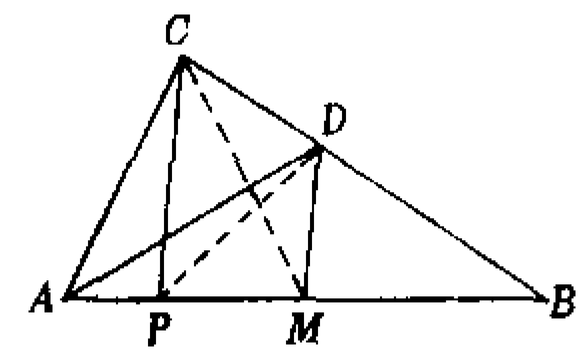
(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解] 连 CM,DP.由设 $PC/\!/MD$,则有 $S_{\triangle MDC}=S_{\triangle MDP}$.

因而 $S_{\triangle BPD}=S_{\triangle BMD}+S_{\triangle MDP}=S_{\triangle BMD}+S_{\triangle MDC}$

$$=S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

注意到 CM 为 AB 上的中线即可.



故 $$r=\frac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}.$$

故选(B).

17·169 在$\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 上分别取点 D,E,F,使得 $AD:DB=BE:CE=CF:FA=1:n$.则$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 的面积之比为

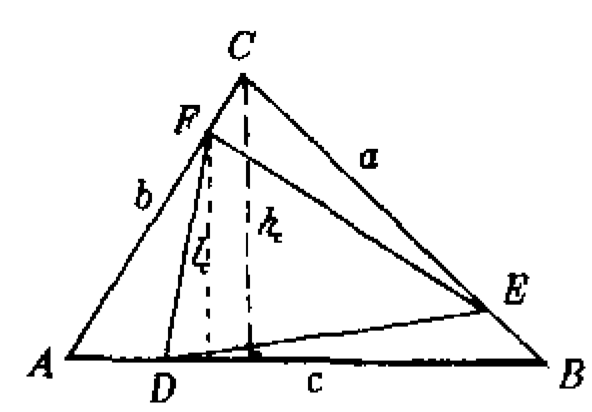
(A)$\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}$.　　(B)$\frac{1}{(n+1)^2}$.　　(C)$\frac{2n^2}{(n+1)^2}$.

(D)$\frac{n^3}{(n+1)^3}$.　　(E)$\frac{n(n-1)}{n+1}$.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解] 设$\triangle ABC$ 三边分别为 a,b,c,其边上的高分别为 h_a,h_b,h_c.

又令 $S=S_{\triangle ABC}$,同时令$\triangle ADF$,$\triangle BED$,$\triangle CEF$ 边 AD,BE,CF 上的高分别为 l_c,l_a,l_b.由设知



$$\frac{l_a}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}=\frac{l_c}{h_c}=\frac{n}{n+1},$$

故 $S_{\triangle EFD}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADF}-S_{\triangle BED}-S_{\triangle CEF}$

$$=S-\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2}ch_c+\frac{1}{2}bh_b+\frac{1}{2}ah_a\right)$$

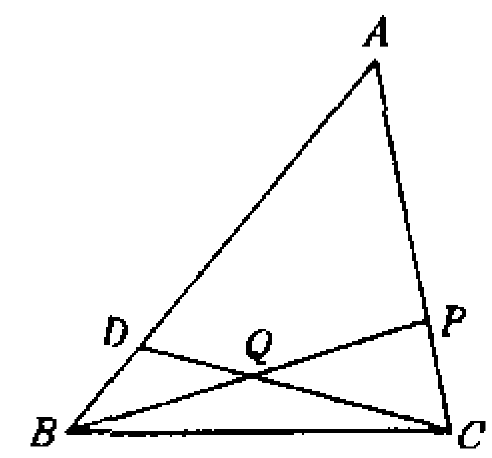
$$=S-\frac{3nS}{(n+1)^2}=\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}S.$$

故选(A).

17·170 如图,在$\triangle ABC$ 中,P 是 AC 上一点,取 BP 的中点 Q,连结 CQ 并延长与 AB 交于 D.则$\triangle ABP$ 的面积 $S_{\triangle ABP}$与$\triangle ACD$ 的面积

选择题卷

$S_{\triangle ACD}$的大小关系是



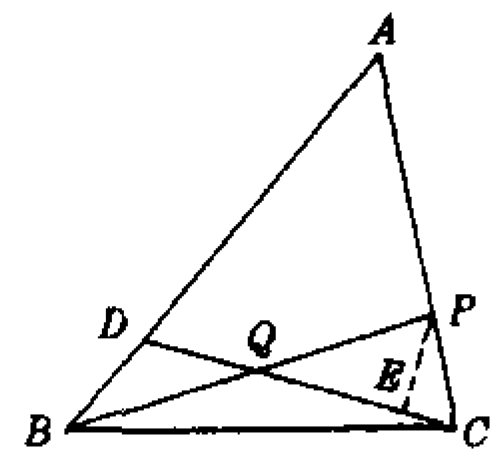
(A) $S_{\triangle ABP}<S_{\triangle ACD}$.

(B) $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ACD}$.

(C) $S_{\triangle ABP}>S_{\triangle ACD}$.

(D)不能确定.

(中国北京市初中数学竞赛,1990 年)



[解] 过 P 作 $PE/\!/AB$ 交 DC 于 E.

∵ $\angle BPC>\angle ABP$, 则 E 在 QC 上.

又 $BQ=QP$, 则 $\triangle BDQ\cong\triangle PEQ$.

∴ $$S_{\triangle BDQ}=S_{\triangle PEQ}<S_{\triangle PQC},$$

则 $$S_{\triangle ABP}<S_{\triangle ACD}.$$

故选(A).

17·171 在$\triangle ABC$中,$AB+AC=10$,且$\angle A=30°$,则这个三角形的面积

(A)有最大值和最小值. (B)有最小值,没有最大值.

(C)有最大值,没有最小值. (D)没有最大值和最小值.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 设 $AB=x$, 则 $AC=10-x$,

由 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}x(10-x)\sin 30°=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x$$

$$=-\frac{1}{4}(x-5)^2+\frac{25}{4},$$

因为 $0<x<10$, 且 $5\in(0,10)$,

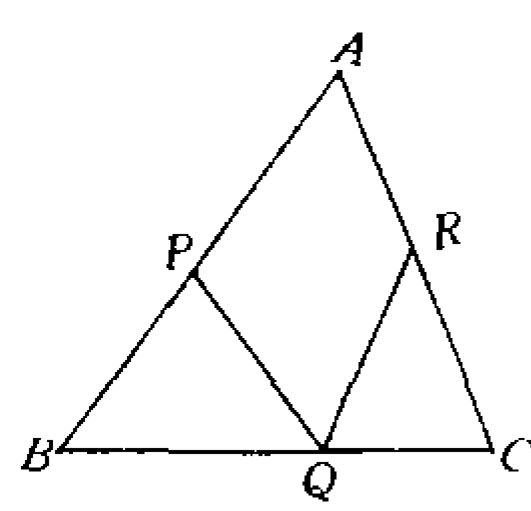
则 $$S_{\max}=S|_{x=5}=\frac{25}{4}.$$

因而 $$S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\max}=\frac{25}{4}.$$

又 $x\to 10$ 时, $S_{\triangle ABC}\to 0$, 则 $S_{\min}$不存在.

故选(C).

17·172 如图,点 P,Q,R 分别在$\triangle ABC$ 的边AB,BC,CA上,且$BP=PQ=QR=RC=1$,那么,$\triangle ABC$面积的最大值是



(A)$\sqrt{3}$. (B) 2. (C)$\sqrt{5}$. (D) 3.

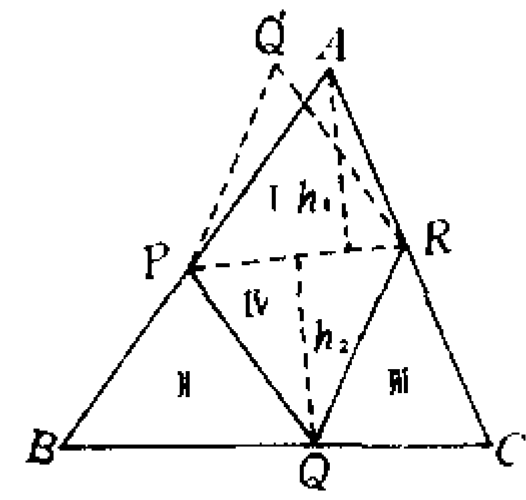
(中国初中数学联赛,1990 年)

[解] 首先,若以号码Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ分别表示

$\triangle APR, \triangle BQP, \triangle CRQ, \triangle PQR$，则 $S_{\text{Ⅱ}}, S_{\text{Ⅲ}}, S_{\text{Ⅳ}}$ 均不大于 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

又因为 $\angle PQR=180^\circ-(\angle B+\angle C)=\angle A$,

所以易证：$h_2\leqslant h_1$（h_1, h_2 分别为 $\triangle QRP$, $\triangle APR$ 公共边 PR 上的高. 因若作出 $\triangle PQR$ 关于 PR 的对称图形 $\triangle PQ'R$, A 都在以 PR 为弦的含 $\angle A$ 的弓形弧上，且因 $PQ'=Q'R$，所以 Q' 为这弧中点，故可得出 $h_2\leqslant h_1$）.



从而 $S_{\text{Ⅰ}}\leqslant S_{\text{Ⅳ}}\leqslant\frac{1}{2}$,

这样 $S_{\triangle ABC}=S_{\text{Ⅰ}}+S_{\text{Ⅱ}}+S_{\text{Ⅲ}}+S_{\text{Ⅳ}}\leqslant 4\cdot\frac{1}{2}=2.$

最后，当 $AB=AC=2$，$\angle A=90^\circ$时，$S_{\triangle ABC}=2$ 即可以达到最大值.

故选(B).

17·173 如果一个三角形的面积和周长都被一直线所平分，那么该直线必通过这个三角形的

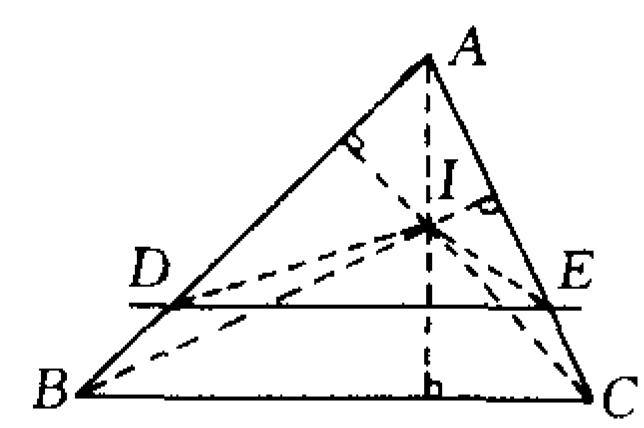
(A)内心. (B)外心. (C)重心. (D)垂心.

（中国初中数学联赛，1996 年）

［**解**］ 如图，设平分$\triangle ABC$ 的面积和周长的直线分别交AB 和AC 于 D, E，且 I 为$\triangle ABC$ 之内心，r 为其内切圆半径. 则有

$$S_{IEAD}=\frac{1}{2}r(AE+AD),$$

$$S_{BCEID}=\frac{1}{2}r(BD+BC+CE).$$



因直线 ED 平分三角形周长，故有

$$AE+AD=BD+BC+CE,$$

于是有 $S_{IEAD}=S_{BCEID}$.

由已知 $S_{\triangle ADE}=S_{BCED}$,

故 $S_{\triangle IDE}=0$, 即直线 DE 过 I.

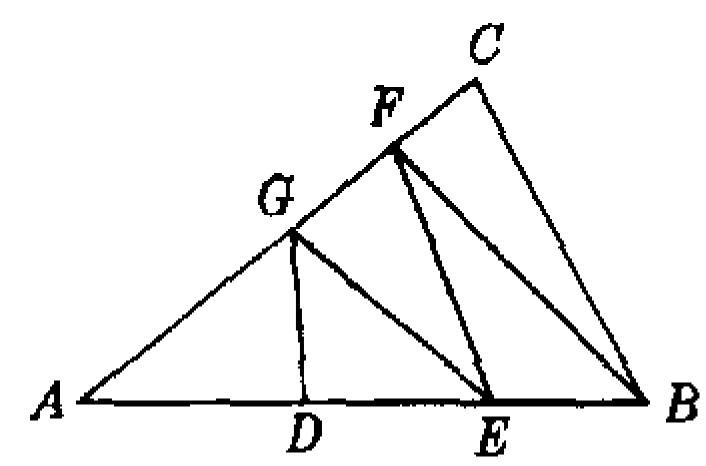
故选(A).

17·174 在$\triangle ABC$ 的 AB 边上取点 D, E，在 CA 边上取点 F, G,

连接 BF,FE,EG,GD. 将$\triangle ABC$分割成五个面积相等的小三角形，即

$$S_{\triangle CBF}=S_{\triangle FBE}=S_{\triangle EFG}=S_{\triangle GED}=S_{\triangle DGA}.$$

则比值 $\frac{FG}{CA}$ 等于



(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $\frac{4}{15}$.

(C) $\frac{2}{5}$.　　(D) $\frac{7}{30}$.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛，1990 年）

[解] 依题意有 $S_{\triangle CFB}=\frac{1}{5}S_{\triangle CAB}$，∴ $CF=\frac{1}{5}CA$.

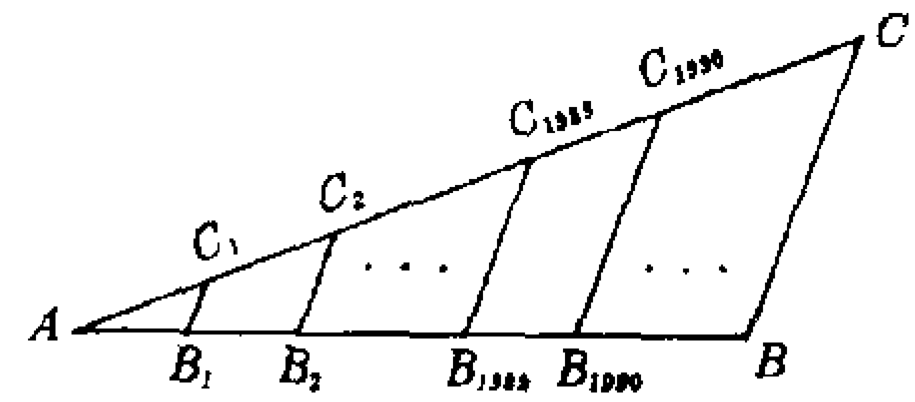
又 $S_{\triangle AGE}=2S_{\triangle GEF}$，∴ $AG=2GF$.

∵ $CA=AG+GF+FC=2GF+GF+\frac{1}{5}CA$.

∴ $\frac{4}{5}CA=3GF$，因而 $\frac{FG}{CA}=\frac{4}{15}$.

故选(B).

17·175　如图，将$\triangle ABC$的边AB进行 n 等分（$n>1990$），过这 $n-1$ 个分点分别作 $B_iC_i\,/\!/\,BC$ （$i=1,2,3,\cdots,n-1$），那么



$$S_{\triangle AB_1C_1}:S_{四边形B_{1989}B_{1990}C_{1990}C_{1989}}$$

的比值是

(A) 1∶1989.　(B) 1∶1990.　(C) 1∶3979.　(D) 1∶3977.

（第 6 届“缙云杯”初中数学邀请赛，1989 年）

[解] 由题设及相似形性质有

$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{\triangle AB_{1990}C_{1990}}}=\frac{1}{1990^2},$$

又 $S_{四边形B_{1989}B_{1990}C_{1990}C_{1989}}=S_{\triangle AB_{1990}C_{1990}}-S_{\triangle AB_{1989}C_{1989}}$,

则
$$\frac{S_{四边形B_{1989}B_{1990}C_{1990}C_{1989}}}{S_{\triangle AB_{1990}C_{1990}}}=\frac{1990^2-1989^2}{1990^2},$$

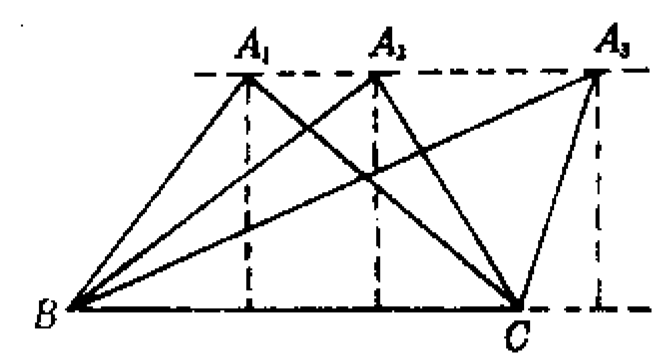
∴
$$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{四边形B_{1989}B_{1990}C_{1990}C_{1989}}}=\frac{1}{1990^2-1989^2}$$

$$=\frac{1}{(1990+1989)(1990-1989)}=\frac{1}{3979}.$$

故选(C).

第4节　三角形的形状与计数

17·176　某三角形三边的比为6:8:9,则



(A)此三角形是钝角三角形.

(B)三个角度量成6:8:9.

(C)此三角形为锐角三角形.

(D)对最大边的角为对最大边的角的两倍.

(E)非上述答案.

(第2届美国高中数学考试,1951年)

[解]　由设注意到$(6t)^2+(8t)^2=(10t)^2>(9t)^2$,知三角形最大边所对角为锐角.

故选(C).

17·177　设一个直角三角形的两条直角边为 a,b,斜边为 c,斜边上的高为 h,那么,以 $c+h$,$a+b$,h 为边构成的三角形的形状是

(A)直角三角形.　　(B)锐角三角形.　　(C)钝角三角形.

(D)不能确定,形状与 a,b,c 大小有关.

(中国"祖冲之杯"初中数学邀请赛,1989年)

[解]　根据勾股定理,有 $a^2+b^2=c^2$,又三角形面积

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch.$$

则　$$(c+h)^2=c^2+2ch+h^2.$$

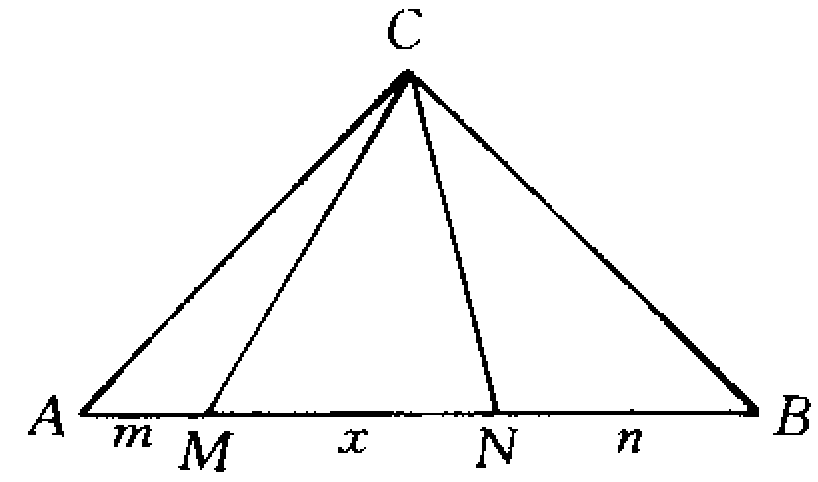
又　$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+2ch+c^2-a^2=c^2+2ch.$$

∴　$$(c+h)^2=(a+b)^2+h^2.$$

则新构成的为直角三角形.

故选(A).

17·178　在等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 上取两点 M、N,使$\angle MCN=45°$,记 $AM=m$,$MN=x$,$BN=n$.则以 x、m、n 为边长的三角形的形状是



(A)锐角三角形.　　(B)直角三角形.
(C)钝角三角形.　　(D)随 x、m、n 的变化而变化的.

(中国安徽省初中数学竞赛,1997 年)

[解] ∵ $\angle MCN=\angle A=\angle B=45°$,

∴ $\triangle CMN\backsim\triangle ACN\backsim\triangle BMC$.

∴ $\dfrac{BC}{x+n}=\dfrac{m+x}{AC}$.

∵ $BC=AC$.　∴ $BC^2=(x+n)(x+m)$.

又 $2BC^2=AB^2$, ∴ $2(x+m)(x+n)=(m+x+n)^2$,

化简得　$x^2=m^2+n^2$.

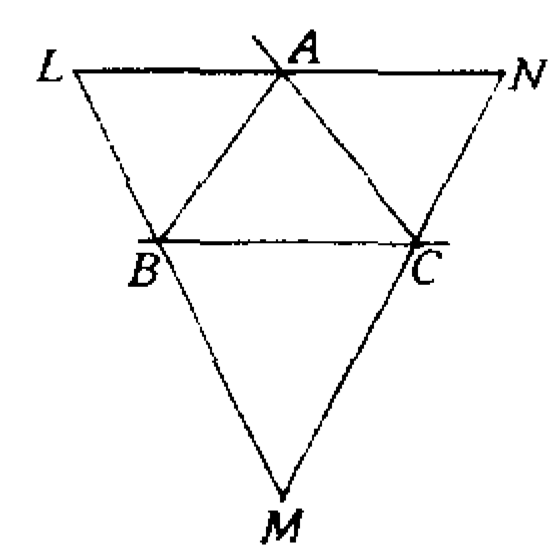
故选(B).

17·179　$\triangle ABC$ 的三条外角平分线相交成一个 $\triangle LMN$,则 $\triangle LMN$

(A)一定是直角三角形.　(B)一定是钝角三角形.
(C)一定是锐角三角形.　(D)不一定是锐角三角形.
(E)一定不是锐角三角形.

(中国天津市初中数学竞赛;中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 如图,L 是$\triangle ABC$ 的外角平分线的一个交点,则



$$\angle LAB=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

$$\angle LBA=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C),$$

故
$$\angle LAB+\angle LBA$$
$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+2\angle C)$$
$$=90°+\frac{1}{2}\angle C>90°$$

则$\angle L<90°$,即为锐角.同理$\angle M$,$\angle N$ 也是锐角.

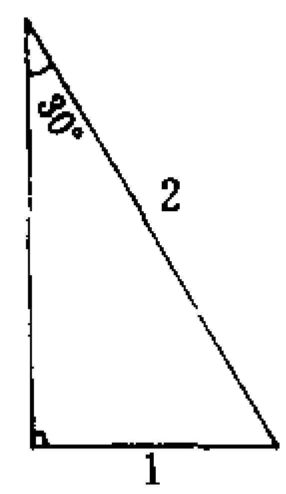
故选(C).

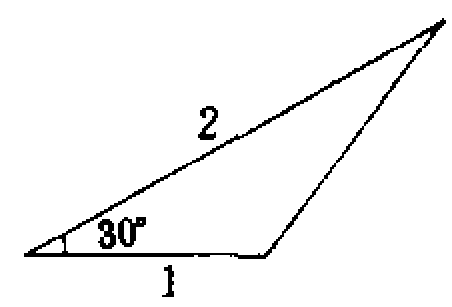
17·180　$\triangle ABC$ 中有一边是另一边的 2 倍,又有一个内角等于 30°,则正确的结论是

(A) $\triangle ABC$ 不是直角三角形.　(B) $\triangle ABC$ 不是锐角三角形.
(C) $\triangle ABC$ 不是钝角三角形.　(D)这样的$\triangle ABC$ 不存在.

(中国山东省初中数学竞赛;中国北京市初中数学竞赛,1993 年)

[解] 如下图所示知(A),(C)不真,进而可否(D).





故选(B).

17·181 对于全体边长为整数,周长为 12 的三角形,以下结论不正确的是

(A)其中必有一个等边三角形.

(B)其中必有一个直角三角形.

(C)其中必有一个等腰直角三角形.

(D)其中每一个都是等腰三角形或直角三角形.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解] 设三角形三边长为 a,b,c,且 $a\leqslant b\leqslant c$.

由 $a+b+c\leqslant 3c$, 即 $12\leqslant 3c$, 知 $c\geqslant 4$.

又 $a+b+c=(a+b)+c>2c$, 即 $12>2c$, 知 $c<6$.

故 $c=4$ 或 5.

这样符合题设的三角形边长仅三种

$$(4,\ 4,\ 4),\quad (3,\ 4,\ 5),\quad (2,\ 5,\ 5).$$

它们中无等腰直角三角形.

故选(C).

17·182 若方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有一个相同的根,且 a,b,c 为一个三角形的三条边,则此三角形是

(A)锐角三角形. (B)钝角三角形.

(C)以 c 为斜边的直角三角形. (D)以 a 为斜边的直角三角形.

(第 3 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1986 年)

[解] 设 α 为两方程相同的根,由题设有

$$\alpha^2+2a\alpha+b^2=\alpha^2+2c\alpha-b^2,$$

即

$$b^2=(c-a)\alpha.$$

又由设知 $b\neq 0$, 故 $c-a\neq 0$.

则　$\alpha=\frac{b^2}{c-a}$. 代入方程有

$$\frac{b^4}{(c-a)^2}+\frac{2ab^2}{c-a}+b^2=0,$$

即
$$b^2+c^2-a^2=0 \quad 或 \quad a^2=b^2+c^2.$$

故选(D).

17·183　若$\triangle ABC$的三边长为a,b,c且同时满足

$$a^4=b^4+c^4-b^2c^2,\ b^4=c^4+a^4-a^2c^2.$$

则$\triangle ABC$是

(A)不等边三角形.　(B)等边三角形.　(C)直角三角形.

(D)钝角三角形.　(E)等腰直角三角形.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1985年）

[解]　由题设我们有

$$\begin{cases}a^4-b^4=c^4-b^2c^2, & ①\\ b^4-a^4=c^4-a^2c^2, & ②\end{cases}$$

于是
$$2c^4=(a^2+b^2)c^2,$$

则
$$a^2+b^2=2c^2. \qquad ③$$

把③式代入①,②可得

$$a^2+c^2=2b^2,\qquad b^2+c^2=2a^2,$$

于是$a=b=c$. 即$\triangle ABC$为等边三角形.

故选(B).

17·184　三角形三边之长a,b,c,满足关系式

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-b+c}$$

的三角形一定是

(A)等边三角形.　　(B)以a为底边的等腰三角形.

(C)以c为底边的等腰三角形.(D)不等腰的三角形.

(E)以上结论都不对.

（中国北京市初中数学竞赛，1982年）

[解]　由设有$\frac{bc-ac+ab}{abc}=\frac{1}{a-b+c}$, 即

$$(a-b+c)(bc-ac+ab)=abc,$$

则
$$(a-b)(bc-ac+ab)+bc^2-ac^2+abc=abc,$$

或　$(a-b)(bc-ac+ab)-c^2(a-b)=0$.

即　$(a-b)(bc-ac+ab-c^2)=0$.

亦即　$(a-b)(b-c)(a+c)=0$.

由设知　$a+c\neq0$，则　$a-b=0$　或　$b-c=0$，所以 $a=b$ 或 $b=c$.

即三角形为等腰三角形.

故选(E).

17·185　边长为 a,b,c 的三角形满足：

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b-c},$$

则此三角形是

(A)等边三角形.　　(B)等腰三角形.

(C)不等边三角形.　　(D)直角三角形.

（第1届"五羊杯"初中数学竞赛,1989年）

[解]　由　$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b-c}$,

两边同乘 $abc(a+b-c)$移项化简后有

$$(b-c)(a^2+ab-ca+bc)=0.$$

故　$b-c=0$　或　$a^2+ab-ca+bc=0$.

下证 $a^2+ab-ca+bc=0$ 不可能.

若 $a=b$，则　$a^2+ab-ca+bc\neq0$;

若 $a\neq b$，则　$c=\frac{a^2+ab}{a-b}>0$，故　$a>b$.

又　$a+b>c$，则　$a+b>\frac{a^2+ab}{a-b}$.

故有　$1>\frac{a}{a-b}$　或　$a-b>a$,

这也是不可能的.

因而　$b-c=0$　或　$b=c$.

故选(B).

17·186　P 为已知线段 MN 上一点，且 $\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MN}$. 以长 $|MP|^2$, $|NP|^2$, $|MN|^2$ 的线段为边，则

(A)能作成锐角三角形.　　(B)能作成直角三角形.

(C)能作成钝角三角形.　　　　(D)不能作成三角形.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988年)

[解]　设 $MN=a$, $PN=x$,则 $MP=a-x$.代入等式

$$\frac{MP}{PN}=\frac{PN}{MN},$$

得 $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$, 即 $x^2+ax-a^2=0$.

解得　$|PN|=x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $|MP|=a-x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$.

则　$|PN|^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2$, $|MP|^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}a^2$.

$$\because\quad |MP|^2+|PN|^2-|MN|^2$$
$$=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}a^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2-a^2$$
$$=(4-2\sqrt{5})a^2<0,$$
$$\therefore\quad |MP|^2+|PN|^2<|MN|^2.$$

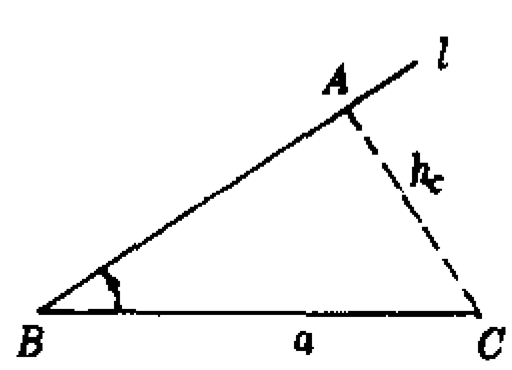
则以 $|MP|^2$, $|PN|^2$, $|MN|^2$ 线段为边作不成三角形.

故选(D).

17·187　已知△ABC 由给定的边 a(其对角为 A),角 B 以及过 C 的高 h_c 所构成,N 为由此确定的不重叠的三角形的数目,则 N 等于

(A) 1.　(B) 2.　(C) 0.　(D)无限.　(E) 0或无限.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

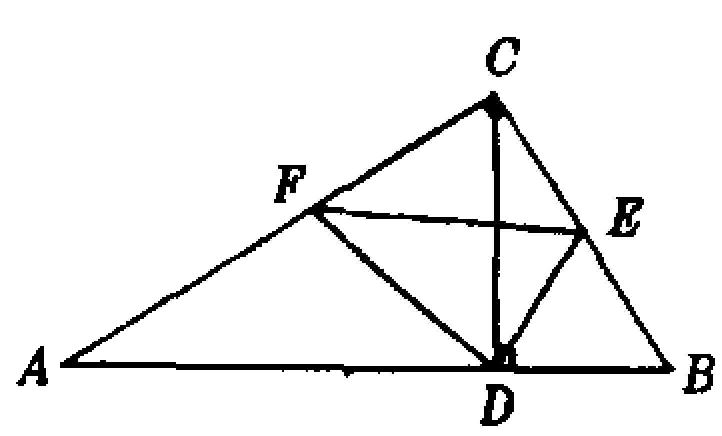


[解]　如图,设 $BC=a$,且过 B 引直线 l 使其与 BC 夹角为∠B.

(1)若 C 到 l 距离为 h_c,则顶点 A 可位于 l 上任何点(除 B 点外),即有无穷多解;

(2)若 C 到 l 的距离不等于 h_c,则问题无解.

综上,故选(E).



17·188　如图,在 Rt△ABC 中∠$C=90°$,CD 是斜边 AB 上的高,在 BC 和 CA 上分别取 E 和 F,使△FED 和△ABC 相似.这样的△FED 个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D)多于3.

(中国江苏省初中数学竞赛,1991年)

[解] 显然,只要$\angle EDF=90°$,由F,D,E,C四点共圆可证

$$\angle EFD=\angle BCD.$$

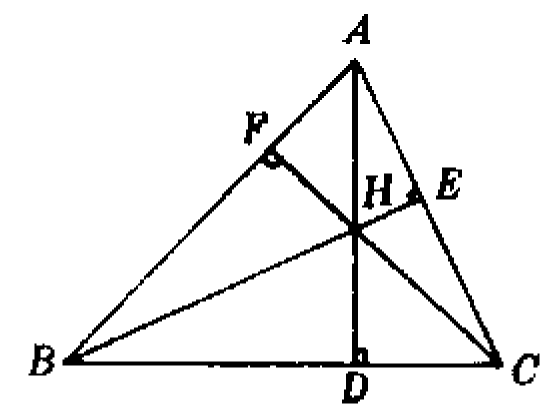
而由 $CD\perp AB$, 知 $\angle BCD=\angle CAB$,这样就有

$$Rt\triangle FDE\backsim Rt\triangle ACB.$$

则使与$\triangle ABC$相似的$\triangle FED$有无穷多个.

故选(D).

17·189 如图所示,锐角$\triangle ABC$的三边各不相等,三条高AD,BE,CF交于H点.则图中形状不同(互不相似)的三角形共有



(A) 6种. (B) 7种.

(C) 9种. (D) 10种.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1990年)

[解1] 图中共有大小三角形16个,它们是$\triangle ABC$,$\triangle AFH$,$\triangle FHB$,$\triangle BHD$,$\triangle HDC$,$\triangle CEH$,
$\triangle AEH$,$\triangle ABE$,$\triangle ACF$,$\triangle BEC$,$\triangle BFC$,$\triangle ABD$,
$\triangle ADC$,$\triangle AHB$,$\triangle AHC$,$\triangle BHC$.

其中有9对相似三角形,它们是

$\triangle BHD$,$\triangle BCE$; $\triangle AHE$,$\triangle ACD$; $\triangle BHF$,$\triangle BAE$;
$\triangle AFH$,$\triangle CDH$; $\triangle FHB$,$\triangle EHC$; $\triangle AHE$,$\triangle BHD$;
$\triangle ABE$,$\triangle ACF$; $\triangle BEC$,$\triangle ADC$; $\triangle BFC$,$\triangle BDA$.

故图中形状不同的三角形共7种.

故选(B).

[解2] 图中互不相似的三角形有三类:

(1)$\triangle ABC$;

(2)$\triangle AHF$,$\triangle BHD$,$\triangle CHE$;

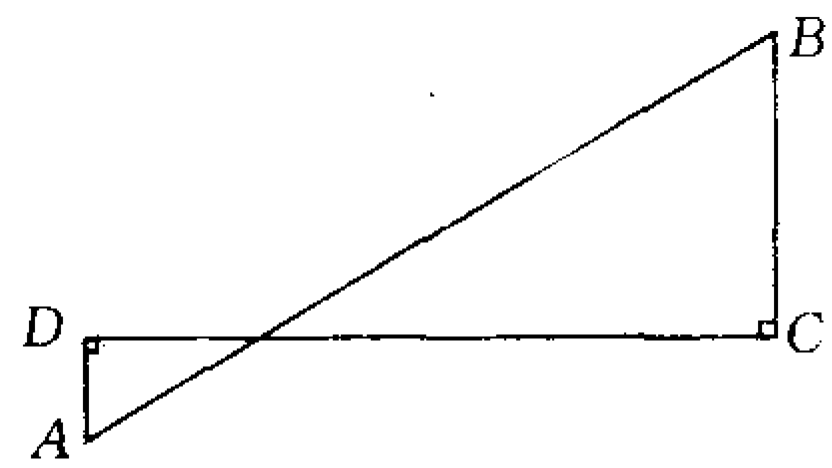
(3)$\triangle AHB$,$\triangle BHC$,$\triangle CHA$.

总计七种.

故选(B).

17·190 四条线段的长分别为$1,9,x,5$(其中x为正实数),用它们拼成两个相似的直角三角形,且AB与CD是其中的两条线段(如

图).则 x 可取值的个数为



(A)1 个.(B)3 个.(C)6 个.(D)9 个.

(中国河北省初中数学竞赛,1995 年)

[解] 显然,AB 是最长的,长度为 9 或 x.

若 $AB=x, CD=9$,则 $x=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$;

若 $AB=x, CD=5$,则 $x=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$;

若 $AB=x, CD=1$,则 $x=\sqrt{197}$;

若 $AB=9, CD=x$,则 $x=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$;

若 $AB=9, CD=5$,则 $x=\sqrt{81-25}-1=2\sqrt{14}-1$;

若 $AB=9, CD=1$,则 $x=\sqrt{81-1}-5=4\sqrt{5}-5$.

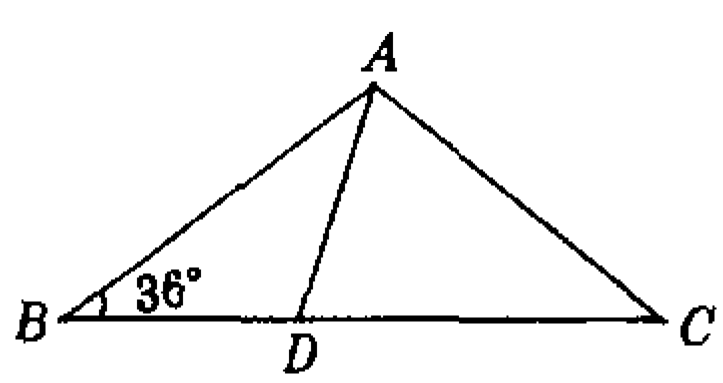
故选(C).

17·191 在△ABC 中,有一内角为 36°,过顶点 A 的直线 AD 把这个三角形分成两个等腰三角形.则满足上述条件的不同形状的(相似的认为是同一形状)△ABC 的个数是

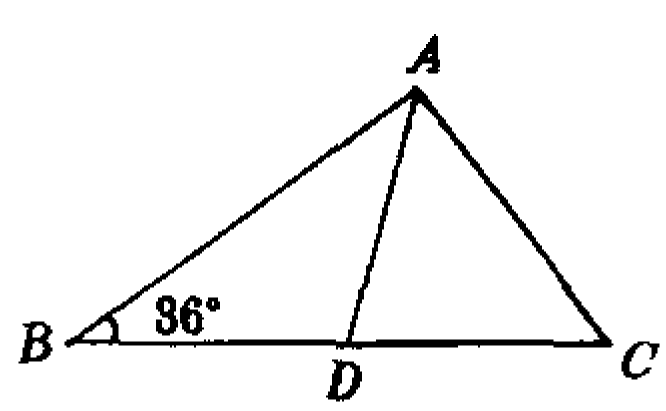
(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1991 年)

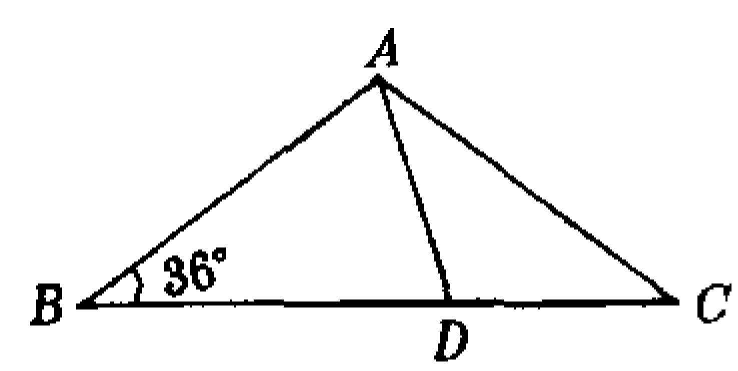
[解] 只须注意到下面五种情形:



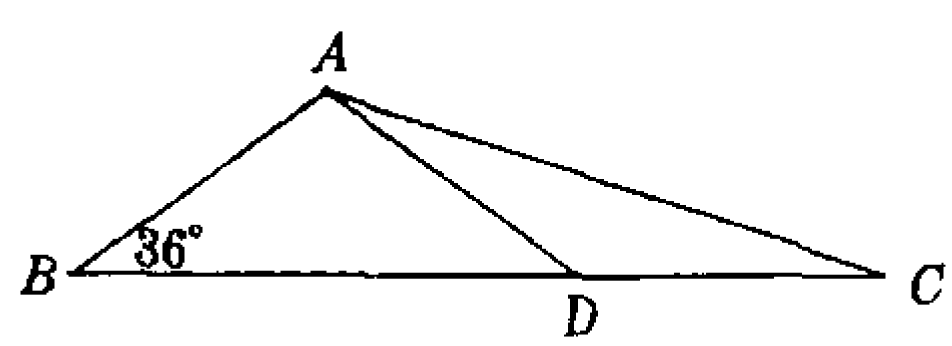
①



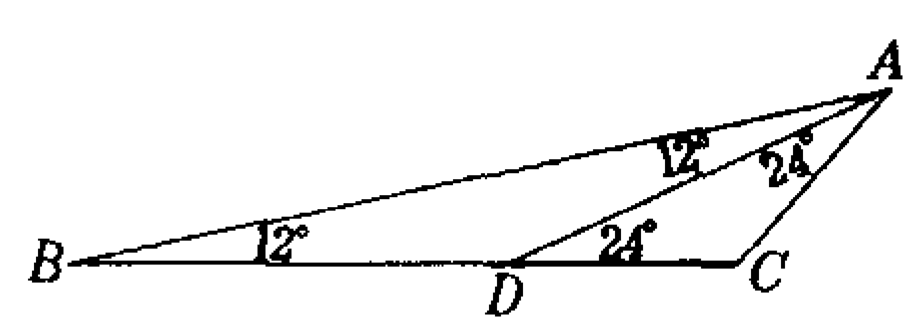
②



③



④

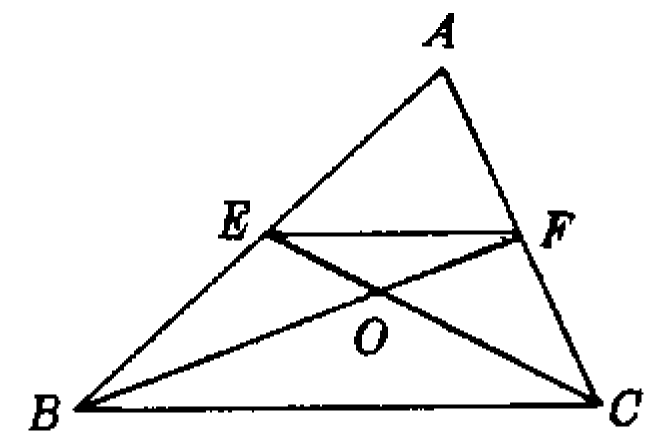


⑤

它们均为符合题意的△ABC.

故选(D).

17·192 如图，E，F 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，则图中面积相等的三角形共有



(A) 10 对.　　(B) 9 对.

(C) 8 对.　　(D) 6 对.

(中国四川省初中数学竞赛，1988 年)

[解] 图中面积相等的三角形有：

$\triangle ABF$，$\triangle CBF$；　$\triangle ACE$，$\triangle CBE$；　$\triangle BEF$，$\triangle CEF$；

$\triangle EBC$，$\triangle FBC$；　$\triangle EOB$，$\triangle FOC$；　$\triangle ABF$，$\triangle ACE$；

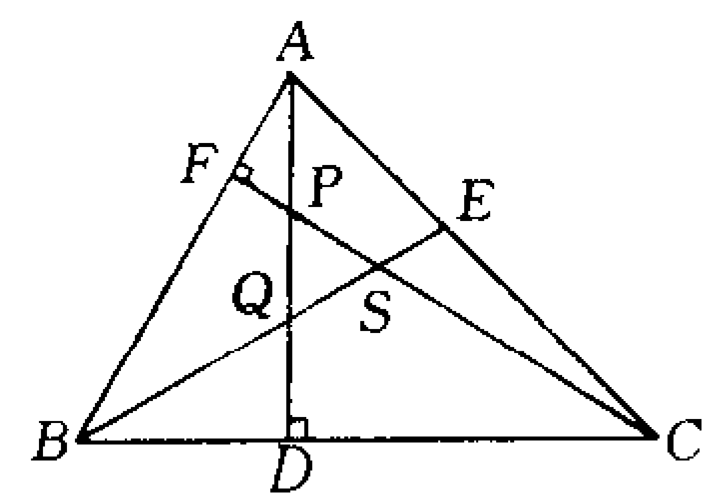
$\triangle AFE$，$\triangle BFE$；　$\triangle AEF$，$\triangle CEF$；　$\triangle ACE$，$\triangle BCF$；

$\triangle ABF$，$\triangle BCE$.

共 10 对.

故选(A).

17·193 在$\triangle ABC$ 中(如图)$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=45°$，又 AD，CF 都为三角形边上的高，它们交于 P，而$\angle ABC$ 的平分线 BE 分别交 AD，CF 于 Q，S. 则图中等腰三角形个数为



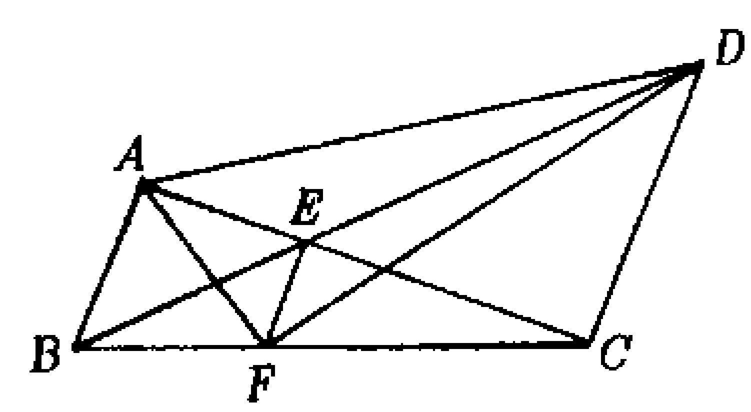
(A)2.　(B)3.　(C)4.　(D)5.

(中国安徽省初中数学竞赛，1994 年)

[解] 易知$\triangle QAB$，$\triangle SBC$，$\triangle BAE$，$\triangle PQS$ 和$\triangle DAC$ 都是等腰三角形，共 5 个.

故选(D)

17·194 如图，E 是凸四边形 $ABCD$ 对角线的交点，F 在 BC 边上，$AB/\!/CD/\!/EF$，$\triangle BCE$ 面积为 S. 则图中面积为 S 的三角形个数为



(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛，1991 年)

[解] 由三角形面积公式及题设有

$$S_{\triangle AFC}=S_{\triangle BCE}=S.$$

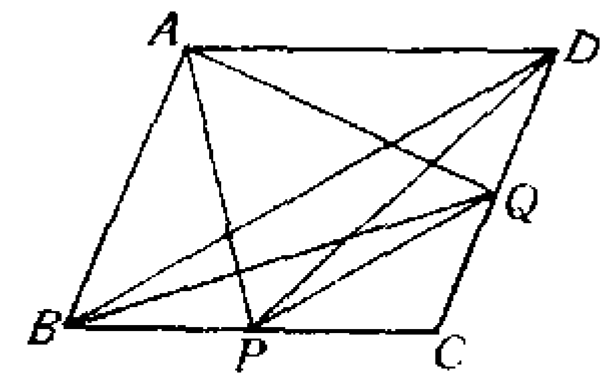
同理　$S_{\triangle DFB}=S$.

又　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}$，则　$S_{\triangle ADE}=S$.

这样，图中有 4 个三角形面积为 S.

故选(D).

17·195 在平行四边形$ABCD$中,P为BC的中点,过P作BD的平行线交CD于Q,连PA,PD,QA,QB,则图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形,除$\triangle ABP$外还有



(A)3个. (B)4个. (C)5个. (D)6个.

(中国初中数学联赛,1985年)

[解] 由题设条件,Q是CD的中点,这样图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形有两类:

(1)与$\triangle ABP$等底等高的三角形有两个:$\triangle BPD$,$\triangle PCD$,

(2)一边为BP边的二倍,而高为BP上的高之半的三角形有三个:$\triangle BCQ$,$\triangle ADQ$,$\triangle QDB$.

故选(C).

17·196 已知五条线段的长分别是3,5,7,9,11.若每次以其中三条线段为边组成三角形,则最多可构成互不全等的三角形

(A) 10个. (B) 7个. (C) 3个. (D) 2个.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1992年)

[解] 由三角形三边长性质知这些线段中可构成三角形三边的组有

3, 5, 7; 3, 7, 9; 3, 9, 11; 5, 7, 9;

5, 7, 11; 5, 9, 11; 7, 9, 11.

故选(B).

17·197 以1995的质因数为边长的三角形共有

(A)4个. (B)7个. (C)13个. (D)60个.

(中国河北省初中数学竞赛,1995年)

[解] $1995=3\times5\times7\times19$,可组成的三角形有:

等边三角形:(3,3,3),(5,5,5),(7,7,7),(19,19,19);

等腰三角形:(3,3,5),(5,5,3),(5,5,7),(7,7,3),(7,7,5),(19,19,3),(19,19,5),(19,19,7);

不等边三角形:(3,5,7).

综上 共有13个.

故选(C).

17·198　三角形的三边长分别为 11,15 和 $k(k\in Z^{+})$,使得三角形为钝角三角形的 k 值个数为

(A)5.　　(B)7.　　(C)12.　　(D)13.　　(E)14.

（第 46 届美国高中数学考试,1995 年）

[解]　首先由三角形一边小于其他两边和、大于其他两边差知

$$4<k<26.$$

又三角形为钝角三角形则有

$11^2+15^2-k^2<0$ 或 $11^2+k^2-15^2<0$ 或 $15^2+k^2-11^2<0$.

解得 $k\leqslant 10$ 或 $k\geqslant 19$.

综上,满足题目要求的 k 值有

5,6,7,8,9,10 和 19,20,21,22,23,24,25 共 13 个.

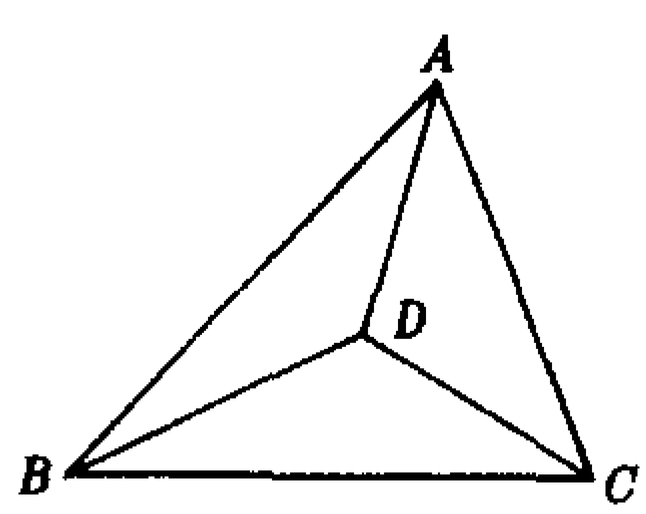
故选(D).

17·199　平面上给定四点,其中无三点共线者.它们可组成四个三角形.其中锐角三角形最多有

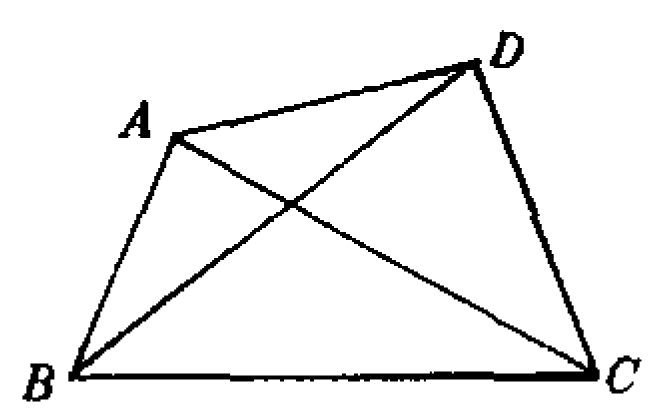
(A) 4 个.　　(B) 3 个.　　(C) 2 个.　　(D) 1 个.

（中国江苏省苏州市初中数学竞赛,1987 年）

[解]　若其中一点在其余三点连线组成的三角形内,如图①可知,四点组成的四个三角形至少有一个不是锐角三角形.



图①



图②

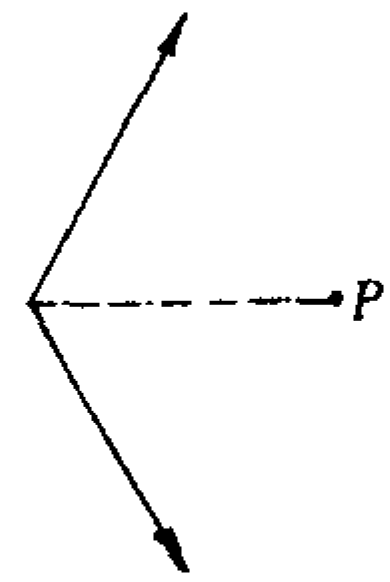
若四点恰好为一凸四边形四个顶点如图②,则该四边形至少有一个内角不是锐角(否则其四个内角和将小于 360°),则其四点组成的四个三角形至少有一个不是锐角三角形.

换言之,四点组成的三角形中最多有 3 个锐角三角形.

故选(B).

17·200　设 S 是相交成 120°角的两条射线上的点组成的集合,P

是角平分线上且在角内的一个定点，考虑一切不同的等边$\triangle PQR$，其中Q和R是S中的点.(点Q和R可以在同一条射线上；另外，本题中约定："交换Q和R的名称并不产生一个不同的三角形")这样的三角形



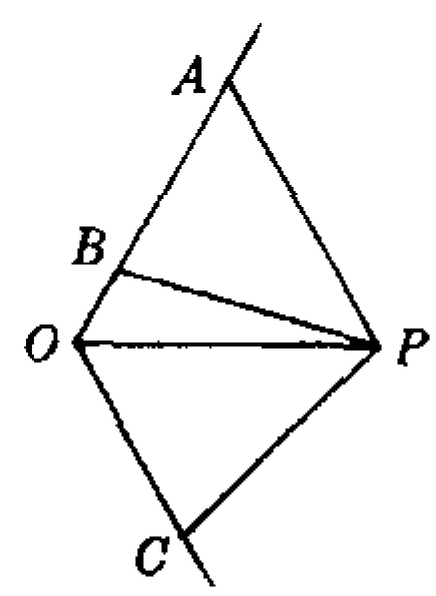
(A)恰有2个.　(B)恰有3个.　(C)恰有7个.

(D)恰有15个.　(E)多于15个.

(第44届美国高中数学考试,1993年)

[**解1**]　如图，记O为120°角的顶点，A,B,C是S上的三点，且满足$\angle APO=60^\circ$，因此$\triangle APO$是等边三角形.

点B是AO上的任一点，点C在另一条边上，且有$AB=OC$.



因为　$PA=PO,\ AB=OC,$

$\angle PAB=60^\circ=\angle POC,$

所以　$\triangle PAB\cong\triangle POC.$

因此　$\angle APB=\angle OPC,$

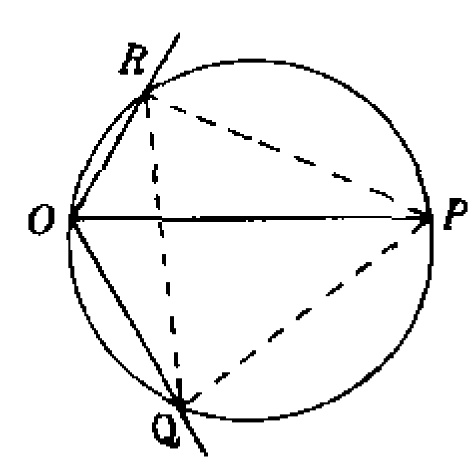
则　$\angle APO=\angle BPC.$

又因为$BP=CP,\angle BPC=60^\circ$，所以$\triangle BPC$也是等边三角形.

因为B是AO上任一点，这表明有无穷多个等边三角形满足条件.

故选(E).

[**解2**]　以OP为弦作任意圆交角的两边于R,Q点.则$\triangle PQR$为正三角形.



注意到　$\angle PRQ=\angle POQ=60^\circ,\angle PQR=\angle POR=60^\circ$即可.

则这样的三角形可作无穷多个.

故选(E).

17·201　平面上5个点，其中无三点共线者.则以它们为顶点所组成的钝角三角形最少个数是

(A) 4个.　(B) 3个.　(C) 2个.　(D) 1个.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1986年)

[解] 若该 5 点不构成凸五边形的顶点，则其所组成的钝角三角形多于 2 个(注意无三点共线者).

若该 5 点恰为一凸五边形的顶点，因凸五边形的钝角不少于 2 个，则以该 5 点为顶点的钝角三角形最少有 2 个.

故选(*C*).

17·202　一不等边三角形，其边各为整数，周长小于 13，则这种三角形的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 18.

(第 7 届美国高中数学考试，1956 年)

[解] 设 x,y,z 为三角形三边长，依题意及三角形两边和大于第三边有

$$\begin{cases} x+y+z<13, & ① \\ x+y>z, & ② \\ y+z>x, & ③ \\ z+x>y, & ④ \end{cases}$$

因 x,y,z 均为整数，故由①有　$x+y+z\leqslant 12$.

再设 z 为最大边，由②有　$2z<12$，　即　$z<6$.

又 $z\geqslant 4$，否则若 $z=3$，其他两边分别为 1,2，这不能构成三角形.

综上即有　　$4\leqslant z<6$,

$z=4$ 时，有　$y=3$，$x=2$;

$z=5$ 时，有　$y=4$，$x=3$　或　$y=4$，$x=2$.

由上分析，故选(*C*).

第十八章　四边形

第1节　四边形

18·1　平面内到凸四边形四个顶点距离都相等的点如果存在，则这个点

(A) 在四边形内.　　(B) 在四边形外.

(C) 在一边上.　　(D) 以上都有可能.

（第2届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛，1988年）

[**解**]　题设的点即为凸四边形外心，它可能在四边形形内，形外或一边上.

故选(D).

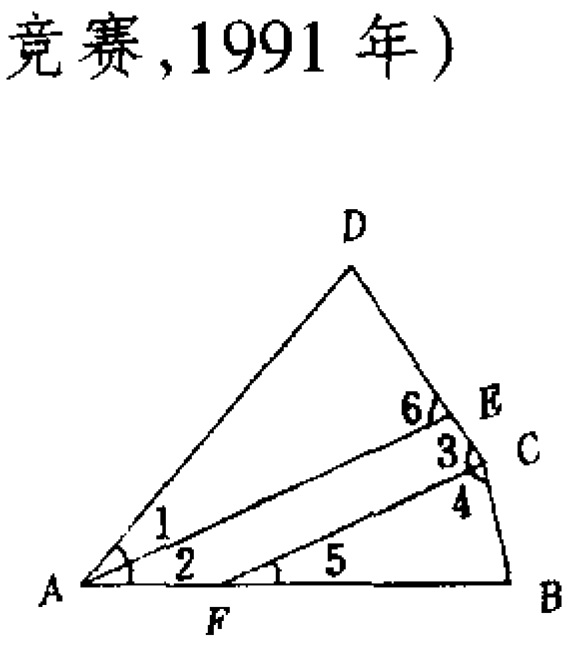
18·2　若四边形$ABCD$的对角$\angle BAD$与$\angle BCD$的平分线互相平行，则$\angle B$与$\angle D$的关系为

(A) $\angle B=\angle D$.　　(B) $\angle B$与$\angle D$互补.

(C) $\angle B>\angle D$.　　(D) $\angle B<\angle D$.

（中国北京市初中数学竞赛，1991年）

[**解**]　设AE，CF分别为四边形$ABCD$对角$\angle BAD$和$\angle BCD$的平分线，且$AE \parallel CF$. 则



$$\begin{aligned}\angle D&=180^\circ-(\angle 1+\angle 6)\\&=180^\circ-(\angle 2+\angle 3)\\&=180^\circ-(\angle 5+\angle 4)=\angle B,\end{aligned}$$

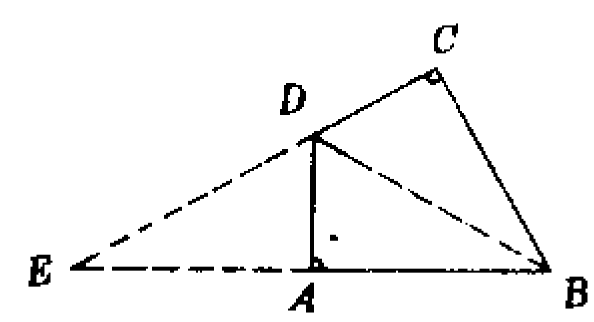
故选(A).

18·3　凸四边形 $ABCD$ 中,已知 $\angle DAB = \angle BCD = 90°$,并且 $\angle CDA : \angle ABC = 2 : 1$, $AD : CB = 1 : \sqrt{3}$. 则 $\angle BDA$ 的度数是

(A) 30°.　　(B) 45°.　　(C) 60°.　　(D) 不能确定.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1990 年)

[解]　如图,由 $\angle CDA + \angle ABC = 180°$ 及题设 $\angle CDA : \angle ABC = 2 : 1$ 可有



$\angle CDA = 120°$, $\angle ABC = 60°$.

延长 CD 与 BA 交于 E,连结 BD.

则由 $\angle C = 90°$, 得 $\angle E = 30°$.

设 $AD = x$, 则 $BC = \sqrt{3}x$, 且 $DE = 2x$.

又 $BE = 2BC = 2\sqrt{3}x$, 故 $CE = 3x$.

于是 $CD = x$, 此时 $\angle CDB = 60°$, 则 $\angle BDA = 60°$.

故选(C).

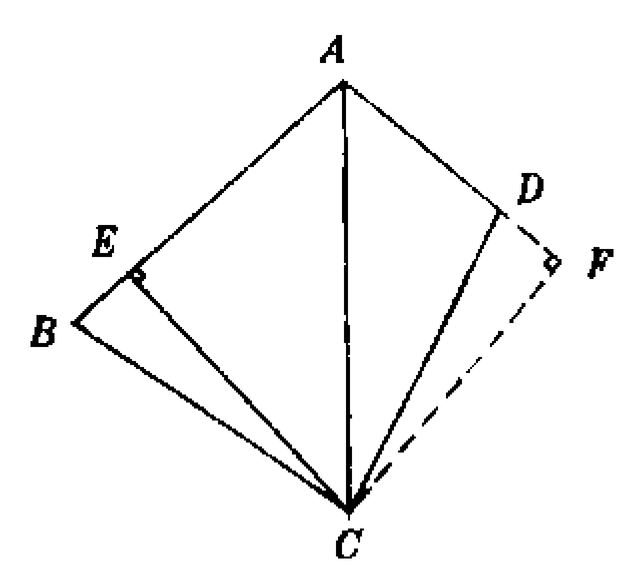
18·4　在凸四边形 $ABCD$ 中,AC 平分 $\angle BAD$. 过 C 点作 $CE \perp AB$ 于 E,且 $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$. 那么,$\angle ABC$ 与 $\angle ADC$ 的关系是

(A) $\angle ABC = \angle ADC$.　　(B) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

(C) $\angle ABC + \angle ADC = 150°$. (D) $\angle ABC \neq \angle ADC$.

(中国北京市初中数学竞赛,1991 年)

[解]　$\because$ $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$,



则

$$AE = AB + AD - AE,$$

或

$$AE = AD + EB.$$

延长 AD 到 F,使 $DF = EB$,则 $AF = AE$.

连结 FC,又 AC 平分 $\angle BAD$,

则

$$\triangle AEC \cong \triangle AFC,$$

有 $\angle F = 90°$, 且 $CE = CF$.

故 $\triangle CBE \cong \triangle CDF$, 则 $\angle B = \angle CDF, \angle DCF = \angle BCE$.

因而 $\angle ADC = \angle F + \angle DCF = \angle CEB + \angle BCE$.

$\therefore$ $\angle B + \angle ADC = \angle B + \angle CEB + \angle BCE = 180°$.

故选(B).

(C) 小于 2.　　　　　　(D) 大于$\frac{1}{2}$且小于 2.

（中国北京市初中数学竞赛，1986 年）

[解]　长为 4 的线段分成长为 x,y,z,u 的四段，意即

$$x+y+z+u=4.$$

对其中任一边比如 u，都有 $x+y+z>u$. 所以 $x+y+z+u>2u$，即 $2u<4$，因而 $u<2$.

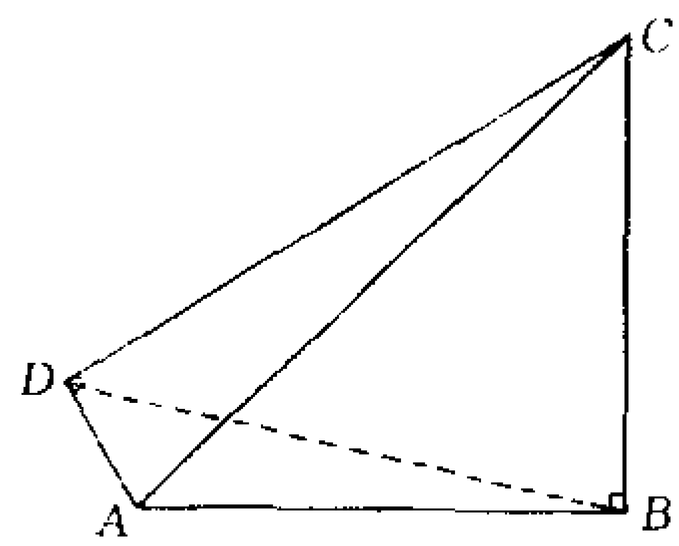
故选(C).

18·8　在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=120^\circ$，而$\angle B$、$\angle D$ 是直角，同时 $AB=13$，$AD=46$，则 AC 等于

(A)60.　　(B)62.　　(C)64.　　(D)65.　　(E)72.

（第 49 届美国高中数学考试，1998 年）

[解]　由题设知 A、B、C、D 四点共圆，且 AC 为该圆直径.



连结 BD，设 $BD=a$. 在 $\triangle ABD$ 中由正弦定理有：

$$\begin{aligned}2R&=\frac{a}{\sin A}\\&=\frac{\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD}}{\sin 120^\circ}\\&=\frac{\sqrt{2883}}{\sqrt{3}/2}=62.\end{aligned}$$

故选(B).

18·9　长度为 1 的线段分成四段，则当且仅当每一线段满足哪个条件时，才存在以此四线段为边的四边形.

(A) 等于$\frac{1}{4}$.　　　　(B) 等于或大于$\frac{1}{8}$且小于$\frac{1}{2}$.

(C) 大于$\frac{1}{8}$或小于$\frac{1}{2}$.　　(D) 大于$\frac{1}{8}$或小于$\frac{1}{4}$.

(E) 小于$\frac{1}{2}$.

（第 19 届美国高中数学考试，1968 年）

[解]　首先证明下面的事实：

四条线段可组成四边形 $\Leftrightarrow$ 四线段中的每一段皆小于其他三线段

之和.

$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 若四线段长记为 S_1,S_2,S_3,S_4,若其中任一线段皆小于其他三线段和,则必有其中两条线段和不大于另外两条线段和.无妨设为

$$S_1+S_2\leqslant S_3+S_4.$$

这样便存在以 S_1+S_2,S_3,S_4 为边长的三角形,此可视为四边形的特殊情况.

由上面的结论,若 S_1,S_2,S_3,S_4 可组成四边形,则

$$S_1<S_2+S_3+S_4,\ \text{又}\ S_1+S_2+S_3+S_4=1.$$

显然 $$S_1+S_1=2S_1<1,\ \text{即}\ S_1<\frac{1}{2}.$$

同理 $$S_2<\frac{1}{2},\ S_3<\frac{1}{2},\ S_4<\frac{1}{2}.$$

另一方面,若 $S_i<\frac{1}{2}(i=1,2,3,4)$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4=1$,

则 $$S_2+S_3+S_4=1-S_1>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

这样 $$S_1<\frac{1}{2}<S_2+S_3+S_4.$$

同理可有其他线段相应的不等式.此即说长为 S_1,S_2,S_3,S_4 的线段可组成四边形.

故选(E).

18·10 四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 之长,分别是1,9,8,6(如图),对于以下命题:

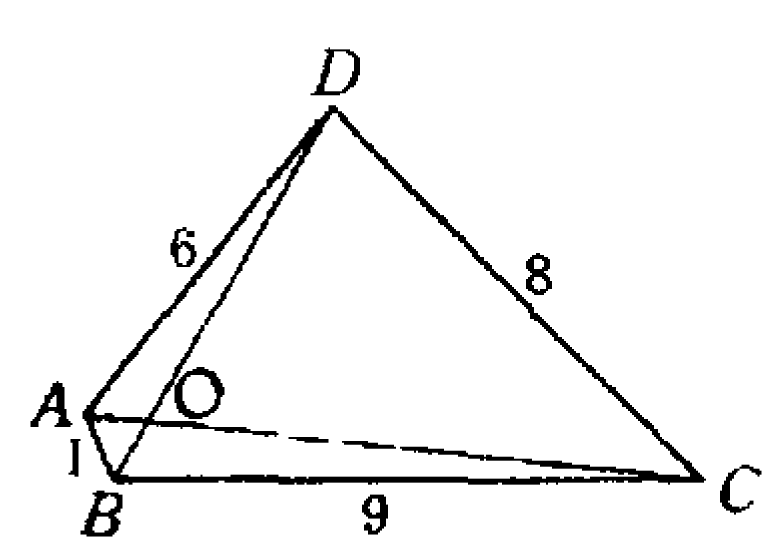
① 四边形 $ABCD$ 外切于圆;

② 四边形 $ABCD$ 不内接于圆;

③ 对角线不互相垂直;

④$\angle ADC\geqslant 90°$;

⑤$\triangle BCD$ 是等腰三角形.



正确的认识是

(A) ① 真,② 假,④ 真.　　(B) ③ 真,④ 假,⑤ 真.

(C) ③ 真,④ 假,⑤ 假.　　(D) ② 假,③ 假,④ 真.

(中国初中数学联赛,1986 年)

[解] 若 $\angle ADC = 90°$，则 $AC = 10$；

且若 $\angle ADC > 90°$，则 $AC > 10$， 得 $AC \geqslant 10$.

但在 $\triangle ABC$ 中， $AC < AB + BC = 10$，矛盾. $\therefore$④ 假.

又 $\because$ $1^2 + 8^2 \neq 6^2 + 9^2$ 知 AC, BD 不互相垂直， $\therefore$③ 真.

同时 $\because$ $BD < 1 + 6$， $\therefore \triangle BCD$ 不是等腰三角形， 即 ⑤ 假.

故选(C).

18·11 已知四边形 $ABCD$ 内有一点 E. 连接 AE, BE, CE, DE，将四边形 $ABCD$ 分成四个面积相等的三角形，那么命题

甲：$ABCD$ 是凸四边形，

乙：E 是对角线 AC 的中点或对角线 BD 的中点，

丙：$ABCD$ 是平行四边形，

之中

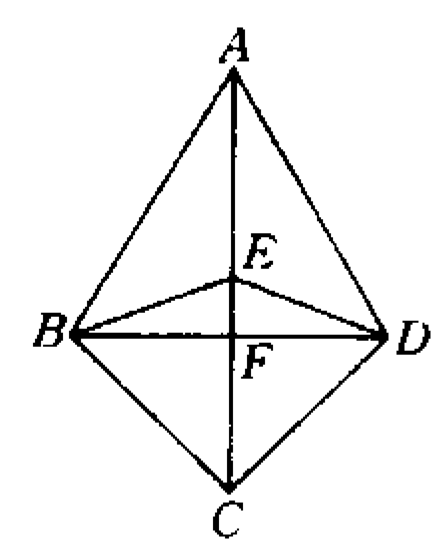
(A) 只有甲正确. (B) 只有乙正确.

(C) 甲，乙，丙都正确. (D) 甲，乙，丙都不正确.

(中国初中数学联赛，1987 年)

[解 1] 如果 $ABCD$ 是以 AC 为对称轴的凹四边形，易见 AC 的中点具有题中 E 点所要求的性质. 所以甲，丙都不正确.

设 AE, BE, CE, DE 将四边形 $ABCD$ 分成四个面积相等的三角形.



由 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}$ 得 B, D 到直线 AE 的距离相等.

设直线 BD, AE 交于 F，则 F 是 BD 的中点，即 E 在直线 AF 上.

如果 F 与 E 重合，则 E 是 BD 的中点，乙成立.

如果 F 与 E 不重合，同理由 $S_{\triangle BEC} = S_{\triangle DEC}$ 得 E 在直线 CF 上，也就是说 A, C 都在直线 EF 上，所以 A, E, F, C 在一条直线上.

再由 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BEC}$ 得 $AE = EC$. 所以 E 是 AC 的中点，乙成立.

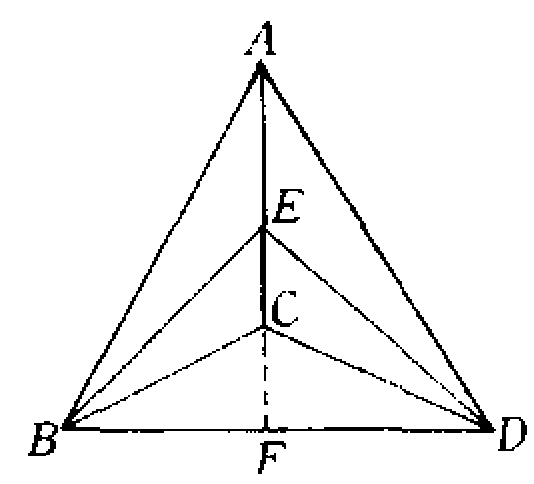
故选(B).

[解 2] 如下页图，点 E 在四边形 $ABCD$ 内，线段 AE 也在图内，即射线 AE 在 $\angle BAD$ 内.

从而，B, D 两点分别在射线 AE 的两侧.

由 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}$，可知 B, D 到 AE 的距离相等，AE 与 BD 的交点 F，F 为 BD 的中点.

如果 F 与 E 重合，则 E 也是 BD 的中点. 则乙成立.

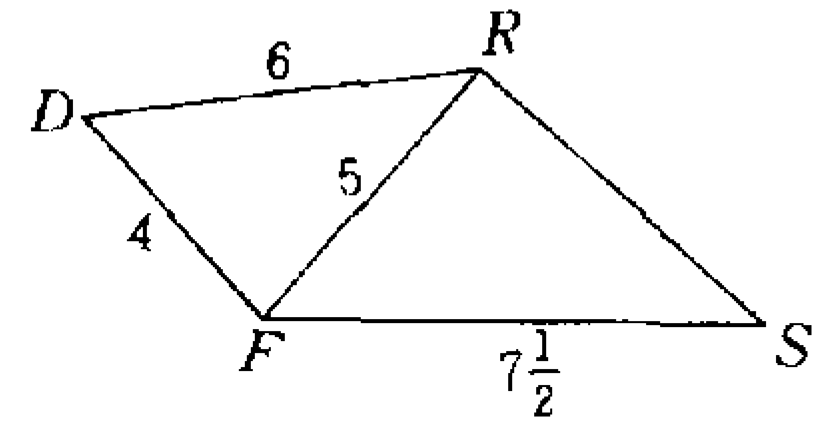


若 F 与 E 不重合，同理由 $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle DEC}$ 得 CE 也过 BD 的中点 F，即 A,C 都在直线 EF 上，故 A,C,E,F 在一条直线上.

于是，由 $S_{\triangle AEB}=S_{\triangle BEC}$ 可知 E 点是 AC 的中点，则乙成立.

故选(B).

18·12　如图，在四边形 $DFSR$ 中，$\angle RFS=\angle FDR$，$FD=4$，$DR=6$，$FR=5$，$FS=7\frac{1}{2}$，则 RS 为



(A) 无法决定.　(B) 4.　(C) $5\frac{1}{2}$.

(D) 6.　(E) $6\frac{1}{4}$.

(第 15 届美国高中数学考试，1964 年)

[解]　由设 $\angle RFS=\angle FDR$，又 $\frac{4}{6}=\frac{5}{7.5}$ 或 $\frac{DF}{DR}=\frac{FR}{FS}$，

有　$\triangle RFD\backsim\triangle SRF$.

所以　$\frac{RS}{RF}=\frac{SF}{RD}$，

则　$RS=\frac{SF\cdot RF}{RD}=\frac{5\cdot 7.5}{6}=6\frac{1}{4}$.

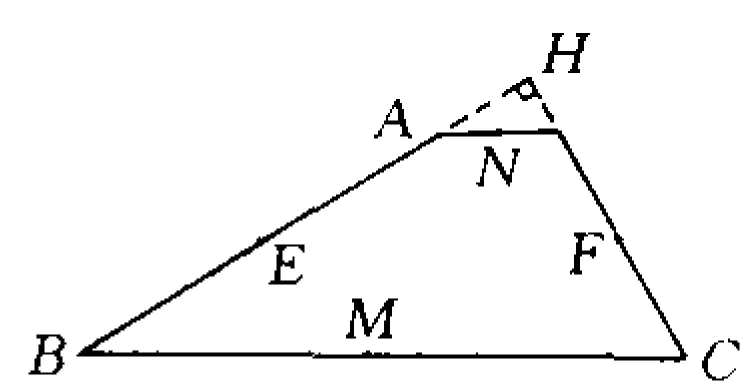
故选(E).

18·13　在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，E、M、F、N 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，已知 $BC=7$，$MN=3$. 则 EF 之值是

(A)4.　(B)$4\frac{1}{2}$.　(C)5.　(D)6.

(中国初中数学联赛，1997 年)

[解]　如图，延长 BA，CD 交于点 H.



$\because$　$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，

$\therefore$　$\angle BHC=90^\circ$.

在 $Rt\triangle BHC$ 中，

$\because$　M、N 分别为 BC、AD 的中点，

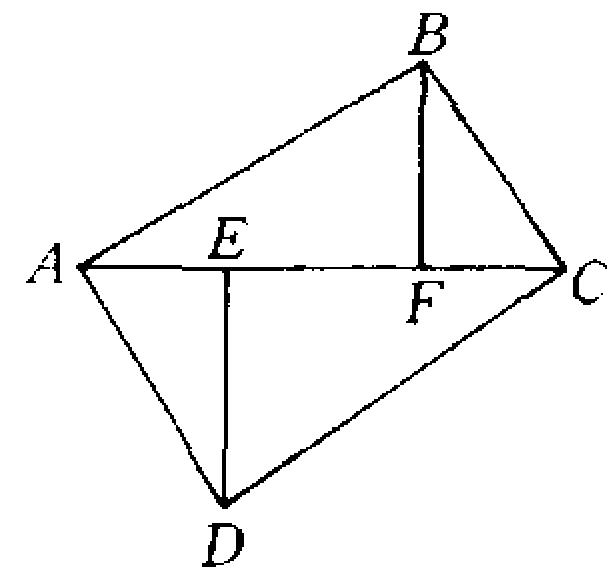
$\therefore$　M,N,H 三点共线，

则 $HM = \frac{1}{2}BC = \frac{7}{2}$，因而 $HN = \frac{1}{2}$，$\therefore\ AN = HN = \frac{1}{2}$，

故 $AD = 1$，$EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$.

故选(A).

18·14 如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$，$\angle C$ 为直角，点 E，F 在 AC 上，DE，BF 垂直于 AC，如果 $AE = 3$，$DE = 5$，$CE = 7$，那么 BF 为.



(A) 3.6. (B) 4. (C) 4.2.

(D) 4.5. (E) 5.

(第41届美国高中数学考试，1990年)

[解] 由设易证 $\triangle AED \backsim \triangle BFA$，$\triangle BFC \backsim \triangle CED$，则

$$\frac{BF}{AE} = \frac{AF}{ED}, \quad 且 \quad \frac{BF}{EC} = \frac{FC}{ED},$$

设 $FC = x$，则 $AF = 10 - x$，则上两式化为

$$\frac{BF}{3} = \frac{10 - x}{5}, \quad 且 \quad \frac{BF}{7} = \frac{x}{5},$$

因此 $\frac{BF}{3} = 2 - \frac{x}{5} = 2 - \frac{BF}{7}$，

即 $$\frac{BF}{3} + \frac{BF}{7} = 2,$$

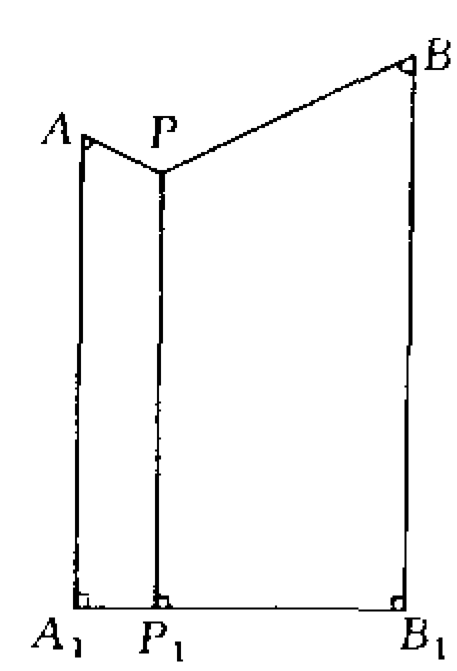
得 $BF = 4.2$.

故选(C).

18·15 如图，已知 $\angle A = \angle B$，AA_1、PP_1、BB_1 均垂直于 A_1B_1，又 $AA_1 = 17$，$PP_1 = 16$，$BB_1 = 20$，$A_1B_1 = 12$. 则 $AP + PB$ 的值是

(A)12. (B)13. (C)14. (D)15.

(中国初中数学联赛，1997年)



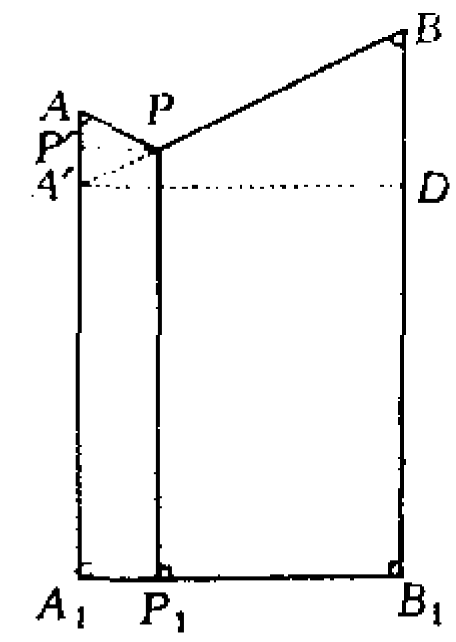
[解] 如下页图，延长 BP 交 AA_1 于 A'_1，过 P 作 $PP' \parallel A_1B_1$ 交 AA_1 于点 P'，又过 A' 作 $A'D \parallel A_1B_1$ 交 BB_1 于点 D.

$\because\ \angle A = \angle B$，

$\therefore\ AP = A'P$.

$\therefore\ AP' = P'A'$.

$\because \quad AP' = AA_1 - PP_1$
$= 17 - 16 = 1,$



$\therefore \quad AA' = 2 \times 1 = 2.$

$\therefore \quad BD = BB_1 - A'A_1$
$= 20 - (27 - 2) = 5.$

由勾股定理

$$A'B = \sqrt{A_1B_1{}^2 + BD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

即 $\quad AP + PB = 13.$

故选(B).

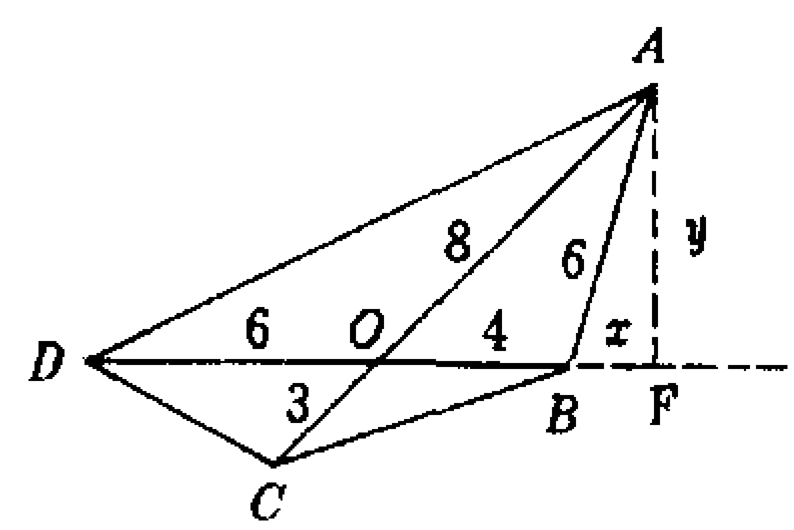
18·16　在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 交于 O,$OB = 4$, $OD = 6$, $OA = 8$, $OC = 3$ 以及 $AB = 6$, 则 AD 的长度为

(A) 9.　(B) 10.　(C) $6\sqrt{3}$.　(D) $8\sqrt{2}$.　(E) $\sqrt{166}$.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　过 A 作 DB 延长线的垂线 AF,且令 $BF = x$, $AF = y$. 故由勾股定理有

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6^2 & ① \\ (x + 4)^2 + y^2 = 8^2 & ② \end{cases}$$



② − ① 得　$8x + 16 = 28$, 得 $x = \dfrac{3}{2}$.

将 x 代入 ① 得　$y^2 = \dfrac{135}{4}$.

$\therefore \quad AD^2 = (10 + x)^2 + y^2 = (\dfrac{23}{2})^2 + \dfrac{135}{4} = 166.$

即　$AD = \sqrt{166}.$

故选(E).

18·17　在凸四边形 $ABCD$ 中,$AD = DC = CB = x$,$AC = BD = AB = y$. 则 $\dfrac{x}{y}$ 的值为

(A) $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.　(B) $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.　(C) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.　(D) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1990 年)

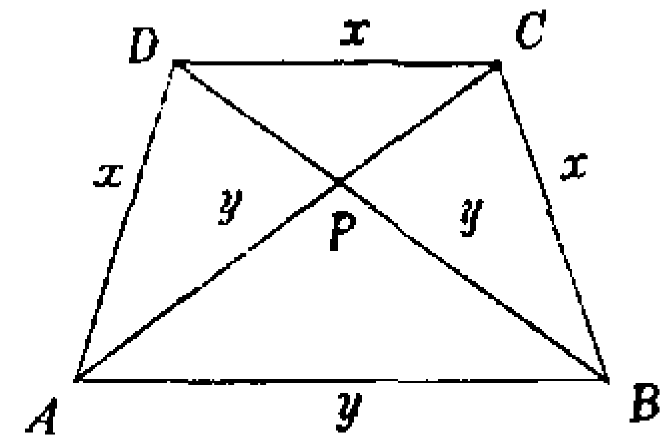
[解]　由题设易证 $\triangle DBA \cong \triangle CAB$.

再由 D,C 到 AB 距离相等可证 $DC \parallel AB$.

由平行线及全等三角形性质可证

$$\angle DAC = \angle CAB,$$

即 AP 平分 $\angle DAB$.



又 $PB = PA = AD = x$,

则 $PD = y - x$.

于是由 $\dfrac{PD}{PA} = \dfrac{AD}{AB}$ 有 $\dfrac{y-x}{x} = \dfrac{x}{y}$,

即 $x^2 + xy - y^2 = 0$,

或 $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} - 1 = 0$.

解得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选(A).

18·18　将凸四边形 $ABCD$ 的边 AD,BC 各经 D,C 延长交于点 E,设 $s = \angle CDE + \angle DCE$,　$s' = \angle BAD + \angle ABC$. 如果 $r = \dfrac{s}{s'}$, 则

(A) 或者 $r = 1$, 或者 $r > 1$.　(B) 或者 $r = 1$, 或者 $r < 1$.

(C) $0 < r < 1$.　(D) $r > 1$.

(E) $r = 1$.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

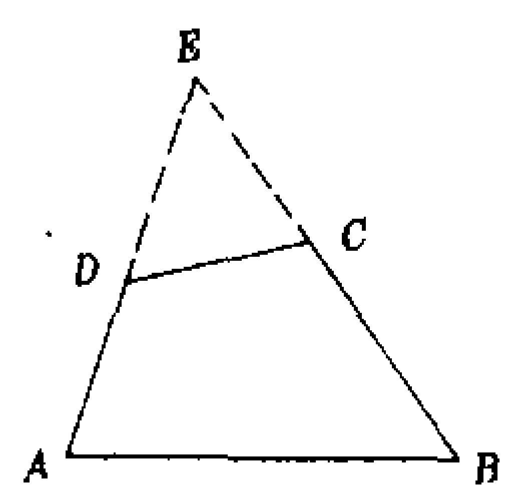
[解]　在 $\triangle EDC$ 中,由设有

$\angle E + \angle CDE + \angle DCE = \angle E + s = 180°$.

而在 $\triangle EAB$ 中,由设亦有

$\angle E + \angle BAE + \angle ABE = \angle E + s' = 180°$.

则　$s = s' = 180° - \angle E$.



故选(E).

18·19　在连接下列四边形各边中点所得的四边形中,是中心对称图形,但不是轴对称的是

(A) 对角线互相垂直的四边形.

(B) 对角线相等的四边形.

(C) 对角线垂直且相等的四边形.

(D) 对角线既不垂直又不相等的四边形.

（第 5 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1988 年）

[解] 任意四边形四边中点连线成一平行四边形.一般平行四边形系中心对称图形.

若原四边形对角线互相垂直,则中点四边形为矩形,其为轴对称图形,故(A)不真.

若原四边形对角线相等,则中点四边形为菱形,其亦为轴对称图形,故(B)不真.

从而(C)不真.

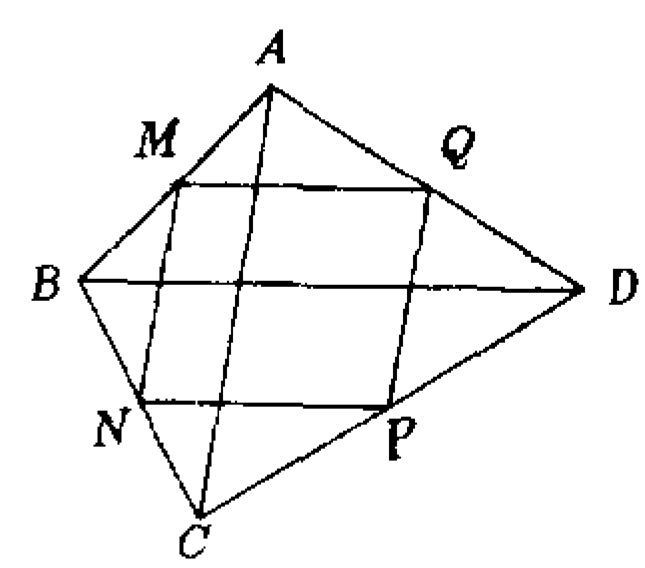
故选(D).

18·20 在下列四个命题中:

① 若 a,b 为实数,则$(a+b)^0=1$;

② 若 $a<0$,且 $-1<b<0$.则 $ab>ab^4>ab^2$;

③ 若一个四边形的两条对角线把它分成四个面积相等的三角形,则这个四边形是平行四边形;



④ 若 P 是矩形$ABCD$内任一点,点 E,F,G,H 分别是P点关于矩形四边的对称点,则 $S_{EFGH}=2S_{ABCD}$.

正确命题的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（中国四川省初中数学竞赛,1992 年）

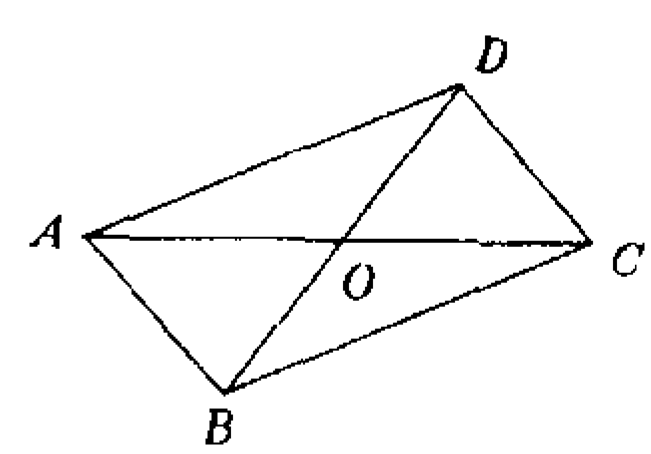
[解] ① 中当 $a=-b$ 时命题不真;

② 由设知 $ab>0$,且 $ab^4<0$, $ab^2<0$,

又 $-1<b<0$, 则 $b^4<b^2$, 因而 $ab^4>ab^2$.

综上有 $ab>ab^4>ab^2$;

③ 若四边形 $ABCD$ 两对角线交于O,且把四边形分成四个等积的三角形.



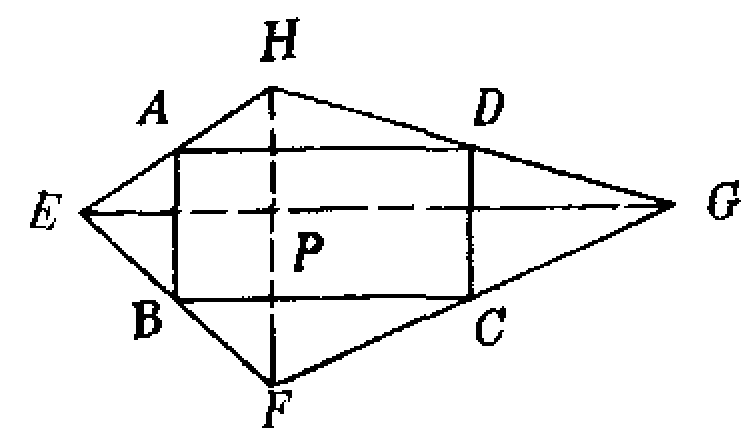
$\because$ $S_{\triangle ADO}=S_{\triangle DCO}$, $\therefore$ $AO=OC$;

又 $S_{\triangle CDO}=S_{\triangle CBO}$, $\therefore$ $DO=OB$,

又对角线互相平分的四边形是平行四边形.知命题 ③ 成立.

对于④,由设知 $EG=2BC$, $HF=2AB$(注意到 E,P,G 和F,P,

H 共线).



$$
\begin{aligned}
S_{EFGH} &= S_{\triangle EFG} + S_{\triangle EHG} \\
&= \frac{1}{2} \cdot EG \cdot FP + \frac{1}{2} \cdot EG \cdot HP \\
&= \frac{1}{2} \cdot EG(FP + HP) \\
&= \frac{1}{2} \cdot EG \cdot HF = 2 \cdot BC \cdot AB \\
&= 2S_{\square ABCD}.
\end{aligned}
$$

即结论正确.

综上知有 3 个命题正确.

故选(C).

18·21 设 E 是凸四边形 $ABCD$ 对角线的交点,又设 P,Q,R 和 S 分别是 $\triangle ABE,\triangle BCE,\triangle CDE$ 和 $\triangle ADE$ 外接圆的圆心.那么

(A) $PQRS$ 是平行四边形.

(B) $PQRS$ 是平行四边形当且仅当 $ABCD$ 是菱形.

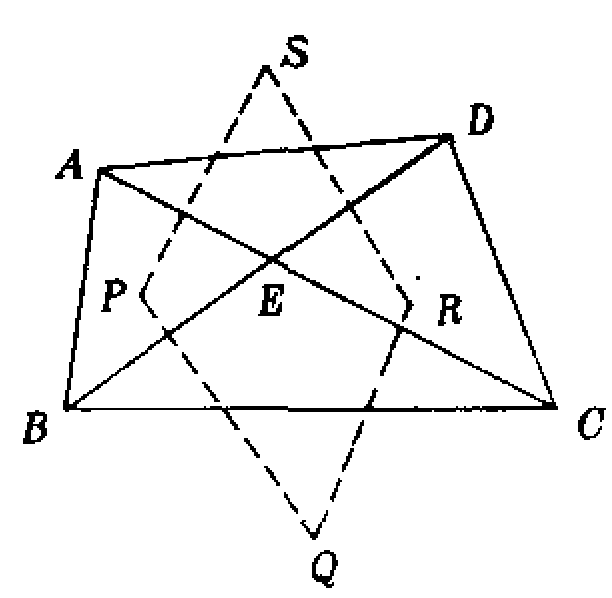
(C) $PQRS$ 是平行四边形当且仅当 $ABCD$ 是矩形.

(D) $PQRS$ 是平行四边形当且仅当 $ABCD$ 是平行四边形.

(E) 以上没有一个是正确的.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 三角形外接圆的圆心是该三角形三边的垂直平分线的交点,所以 P,Q,R 和 S 是线段 AE,BE,CE 和 DE 的垂直平分线的交点.



因为垂直于同一条直线的线段是平行的(又因为直线 AE 和 CE 重合,BE 和 DE 重合),因而四边形 $PQRS$ 是一个平行四边形.

故选(A).

18·22 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A = \angle C$.则各内角平分线相交所围成的四边形 $KLGH$ 是

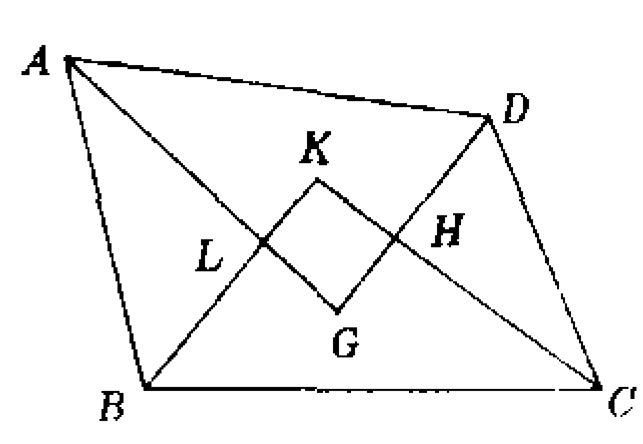
(A) 只有两个角相等的四边形.

(B) 平行四边形.

(C) 梯形.

(D) 等腰梯形.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991 年)



［解］ 由设 $\angle A = \angle C$，则 $\angle DAG = \angle DCH$.

又 $\angle ADG = \angle CDH$，

$\therefore$ $\triangle ADG \backsim \triangle CDH$. $\therefore$ $\angle DHC = \angle AGD$.

又 $\angle DHC = \angle KHG$， $\therefore$ $\angle KHG = \angle LGH$.

由

$$\angle BKC + \angle AGD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle LKH + \angle KHG = 180^\circ$$

因而 $KL /\!/ GH$.

综上知四边形 $KLGH$ 是等腰梯形.

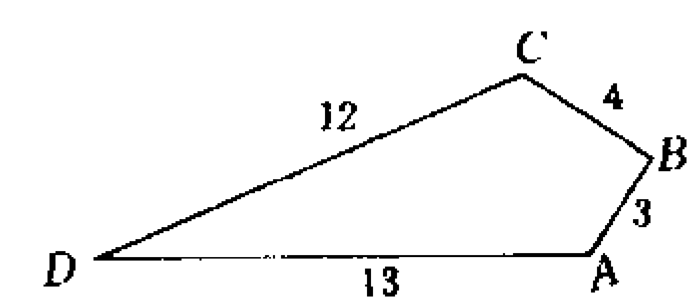
故选(D).

18·23 凸四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD 和 DA 分别长 3，4，12 和 13，$\angle CBA$ 是直角. 四边形的面积是

(A) 32. (B) 36.

(C) 39. (D) 42.

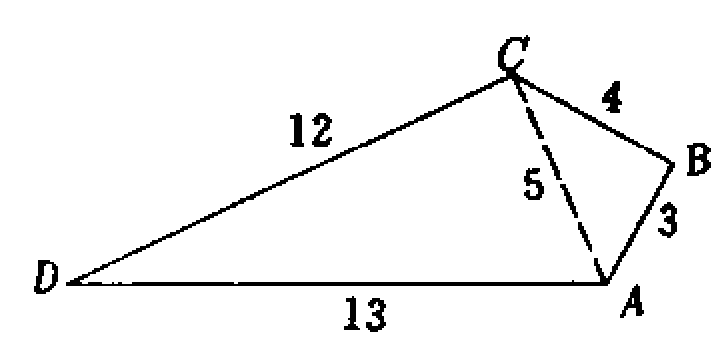
(E) 48.



（第 31 届美国高中数学考试，1980 年）

［解］ 连 AC，在 Rt$\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

又因为 $5^2 + 12^2 = 13^2$，根据勾股定理的逆定理得到 $\triangle DAC$ 是直角三角形.



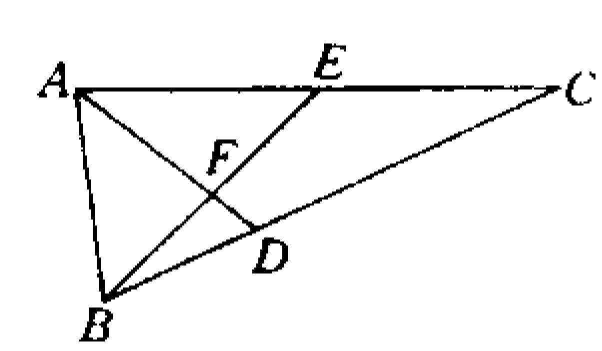
$$\therefore \quad S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 12 = 36.$$

故选(B).

18·24 在三角形 ABC 中，$\angle CBA = 72^\circ$，E 是边 AC 的中点，D 在 BC 边上且 $2BD = DC$，AD 与 BE 相交于 F. 则 $\triangle BDF$ 和四边形 $FDCE$ 的面积之比是

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{3}$.

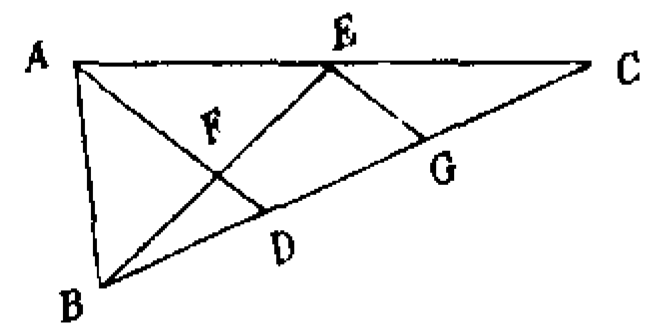
(D) $\frac{2}{5}$. (E) 这些都不对.



（第 31 届美国高中数学考试，1980 年）

[解]　如图,从 E 作 DC 中点 G 的连线.

因为 EG 是 $\triangle ACD$ 中 AC 边和 DC 边中点的连线,$EG \parallel AD$,则



$$S_{\triangle EBG}=\frac{2}{3}S_{\triangle EBC},$$

且
$$S_{\triangle BDF}=\frac{1}{4}S_{\triangle EBG}=\frac{1}{6}S_{\triangle EBC}.$$

所以　$S_{FDCE}=\frac{5}{6}S_{\triangle EBC}$.

因而　$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{FDCE}}=\frac{1}{5}$.

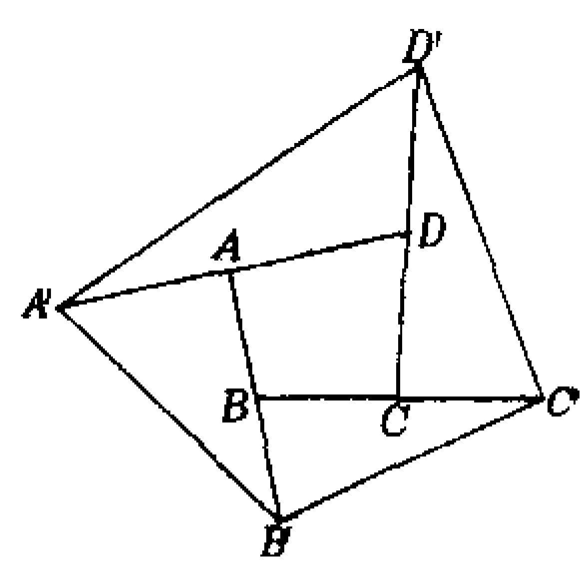
故选(A).

18·25　凸四边形 $ABCD$,分别过 B,C,D 和 A 延长边 AB,BC,CD 和 DA 到点 B',C',D' 和 A'.同时 $AB=BB'=6,BC=CC'=7$,$CD=DD'=8$ 和 $DA=AA'=9$.若 $ABCD$ 的面积是10,则 $A'B'C'D'$ 的面积是

(A) 20.　(B) 40.　(C) 45.　(D) 50.　(E) 60.

(第29届美国高中数学考试,1978年)

[解]　因为 $\triangle AA'B'$ 的底 AA' 的长与 $\triangle ABD$ 的底 AD 的长相同,$\triangle AA'B'$ 的对应高是 $\triangle ABD$ 对应高的两倍,则



$$S_{\triangle AA'B'}=2S_{\triangle ABD}.$$

同样地　$S_{\triangle BB'C'}=2S_{\triangle BAC}$,

及　$S_{\triangle CC'D'}=2S_{\triangle CBD}$,

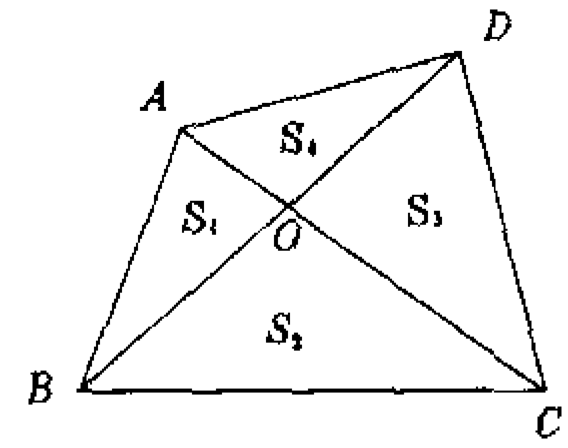
且　$S_{\triangle DD'A'}=2S_{\triangle DCA}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad & S_{A'B'C'D'}\\ &=(S_{\triangle AA'B'}+S_{\triangle BB'C'})+(S_{\triangle CC'D'}+S_{\triangle DD'A'})+S_{ABCD}\\ &=2(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BAC})+2(S_{\triangle CBD}+S_{\triangle DCA})+S_{ABCD}\\ &=5S_{ABCD}\\ &=50.\end{aligned}$$

故选(D).

18·26　任意凸四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 O,记 $\triangle ABO$,$\triangle BCO$,$\triangle CDO$,$\triangle DAO$ 的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4,下面结论一定正确

的是



(A) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

(B) $S_1 - S_3 = S_2 - S_4$.

(C) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

(D) $S_1 : S_3 = S_2 : S_4$.

（“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1991 年）

[解] 由三角形面积公式有

$$S_1 = \frac{1}{2}AO \cdot BO \cdot \sin\angle AOB,\quad S_2 = \frac{1}{2}BO \cdot CO \cdot \sin\angle COB,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}CO \cdot DO \cdot \sin\angle COD,\quad S_4 = \frac{1}{2}DO \cdot AO \cdot \sin\angle AOD.$$

这样 $S_1S_3 = \frac{1}{4}AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO \cdot \sin\angle AOB \cdot \sin\angle COD$,

且 $S_2S_4 = \frac{1}{4}AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO \cdot \sin\angle BOC \cdot \sin\angle AOD$.

由 $\angle AOB + \angle BOC = 180°$, $\angle COD + \angle AOD = 180°$,

有 $\sin\angle AOB = \sin\angle BOC$, 且 $\sin\angle COD = \sin\angle AOD$.

因而 $S_1S_3 = S_2S_4$.

故选(C).

18·27 凸四边形内一点称作“好点”,假如它与四顶点的连线将此四边形分成四个面积相等的三角形.

命题甲:凸四边形内存在一个“好点”.

命题乙:凸四边形一条对角线平分另一条对角线.

则正确的是

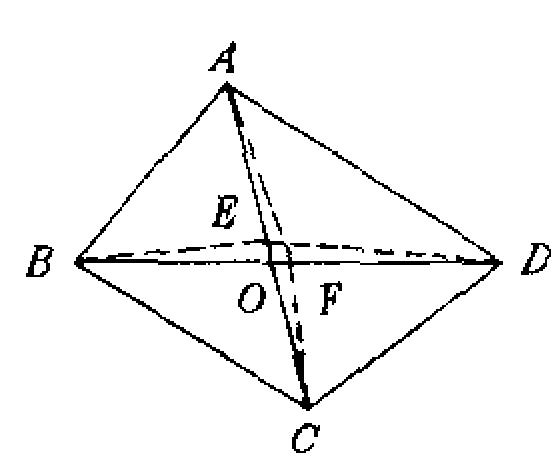
(A) 甲是乙的充分但不必要的条件.

(B) 乙是甲的充分但不必要的条件.

(C) 甲是乙的充分必要条件.

(D) 乙是甲的既不充分又不必要的条件.

（中国安徽省芜湖市高中数学竞赛,1990 年）



[解] 若 O 为凸四边形 $ABCD$ 内的一个“好点”,且设 E,F 分别为对角线 AC,BD 中点.

由 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC}$,知点 O 应在 BE 上.

类似地分析知点 O 应在 CF,DE,AF 上,换言

之，O 为 BE，CF，DE，AF 的交点.

今证直线 AF 和 CF，或 BE 和 DE 重合.

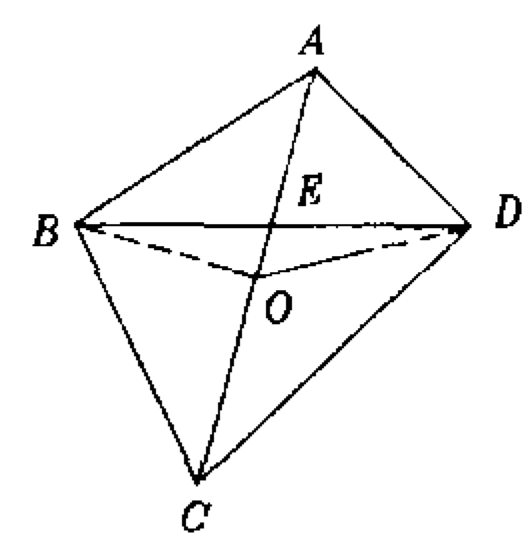
若 AF 与 CF 不重合，则 O 是它们惟一的公共点，则 O 与 F 重合.

又直线 BE，DE 过 O 即过 F，又 F 在 BD 上，则 BE，DE 和 BD 重合.

即 B，E，D 共线，因而 BD 过对角线 AC 的中点.

反之，若四边形 $ABCD$ 对角线 BD 被 AC 平分，易证得

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AED},\quad S_{\triangle BCE} = S_{\triangle DCE},$$



则 AC 中点 O 即为"好点".

$\because \quad S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BCO}$，

而 $\quad S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BEO}$，

又 $\quad S_{\triangle BEO} = S_{\triangle EDO}$，$\quad\therefore\quad S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ADO}$，

$\because\quad O$ 是 AC 中点，$\quad\therefore\quad S_{\triangle ADO} = S_{\triangle DOC}$，

$\therefore\quad S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COD}$.

即命题甲是命题乙的充要条件.

故选(C).

18·28　若方程 $2x^2 - 18x + 36 = 0$ 和 $x^2 - 20x + 75 = 0$ 的根分别为四条线段的长，则这些线段

(A) 能围成周长是 38 的四边形.

(B) 能围成周长是 29 的四边形.

(C) 不能构成四边形.

(D) 非上述答案.

（中国江苏省初中数学竞赛，1989 年）

［解］　不难求得两方程的根分别为 3，6 和 5，15.

由 $$3 + 5 + 6 = 14 < 15,$$

即其中一条线段长大于其他三条线段和，显然不能构成四边形.

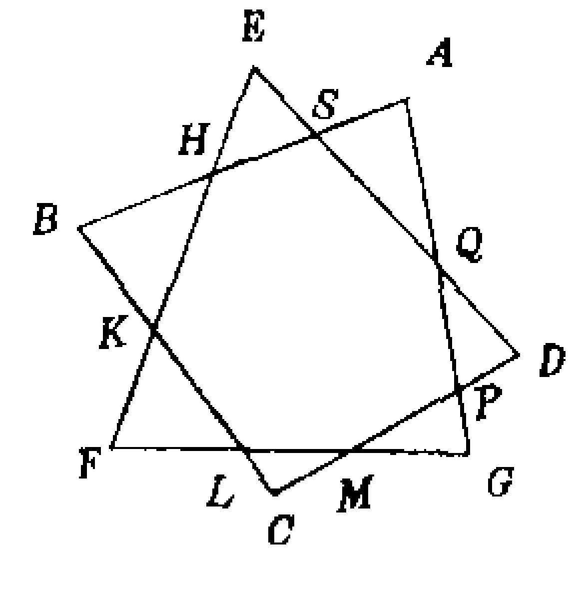
故选(C).

18·26　七角星形中凸四边形的个数有

(A) 7 个.　　(B) 8 个.

(C) 9 个.　　(D) 10 个.

（中国上海市初中数学竞赛，1982 年）



［解］　逐条边来分析：

以 AB 为一边的四边形中，凸四边形有 $ABLG$

第十八章 四边形

和 $ABCP$ 两个.

同理对其他 6 条边亦有同样结果.

注意到每个凸四边形在上述计算中算了两次,则图中凸四边形有 7 个.

故选(A).

第 2 节　平行四边形

18·29　下列四个命题:

① 一组对边平行,另一组对边相等的四边形是平行四边形;

② 一组对边平行,一组对角相等的四边形是平行四边形;

③ 一组对边相等,一组对角相等的四边形是平行四边形;

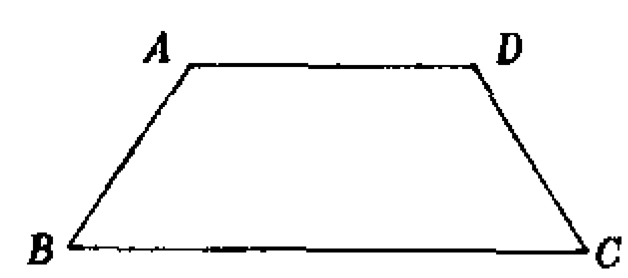
④ 两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

其中正确的命题是

(A) ②,③.　(B) ②,④.　(C) ①,③.　(D) ③,④.

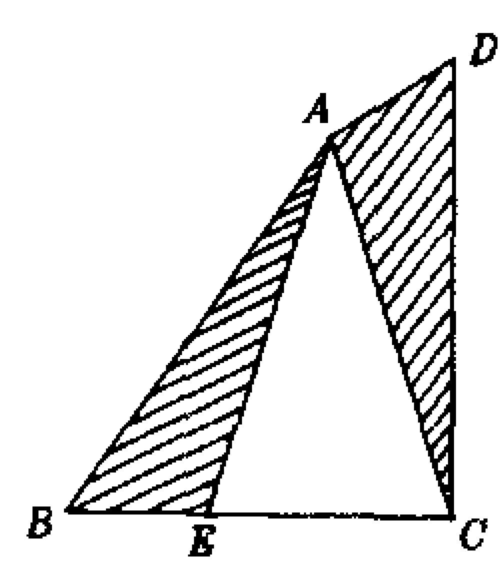
(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1991 年)

[解]　如图①,$AD \parallel BC$,且 $AB = CD$,但 $ABCD$ 不是平行四边形. 故否①;



图①

如图②,作 $\triangle ABC$,其中 $AB > AC$,以 A 为端点,在 BC 上截取 $AE = AC$,交 BC 于 E 点,再分别以 A、C 为圆心,BE、AB 长为半径作弧,两弧交于 D 点,则 $AB = CD$, $\triangle ABE \cong \triangle CDA$,



图②

所以 $\angle B = \angle D$,但 $AD \neq BC$,所以 $ABCD$ 不是平行四边形. 故否③;

易证结论②、④都正确.

故选(B).

18·30　下列命题中为真命题的是

(A) 一组对边相等,且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

(B) 一组对边相等,且两条对角线也相等的四边形是平行四边形.

(C) 顺次连结四边形四边中点得到一矩形,则该四边形是菱形.

(D) 若四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和,则四边形两条对角线互相垂直.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1989 年)

[解] 如图 ①,考虑四边形 $ABC'D$ 满足题设,但其不是平行四边形.可否(A).

考虑等腰梯形 $ABCD$(如图 ②),则可否(B).

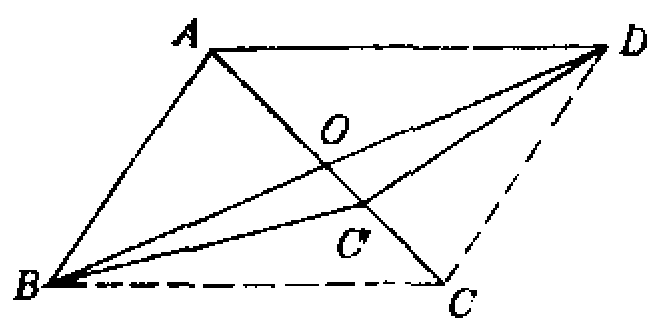


图 ①

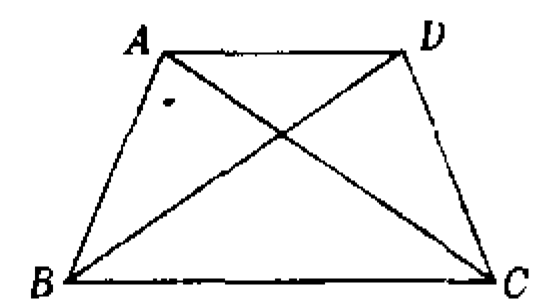


图 ②

考虑筝形 $ABCD$(如图 ③),则可否(C).

考察图 ④,若 $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$,

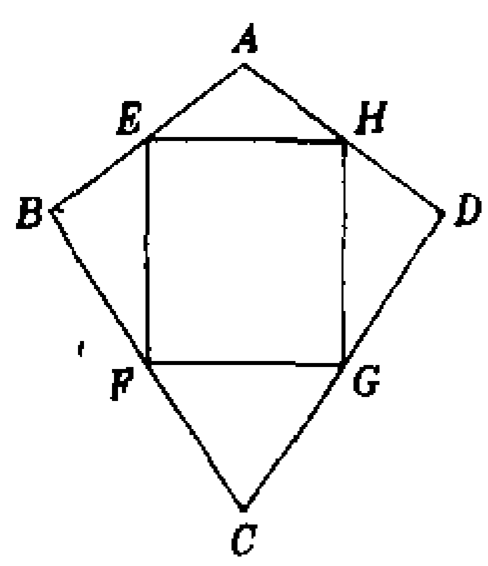


图 ③

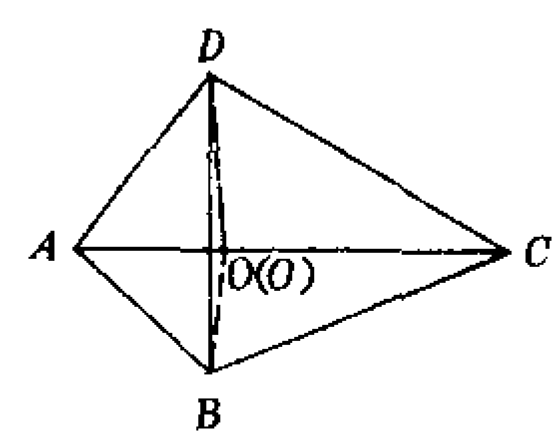


图 ④

则 $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$.

作 $BO \perp AC$ 于O, 则 $AB^2 - BC^2 = AO^2 - CO^2$.

作 $DO' \perp AC$ 于O', 则 $AD^2 - CD^2 = AO'^2 - CO'^2$.

由前式有 $AO^2 - CO^2 = AO'^2 - CO'^2$,故 O' 与O 重合.则(D)真.

故选(D).

18·31 下面有四个命题:

(1) 一组对边相等且一组对角相等的四边形是平行四边形;

(2) 一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形;

(3) 一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形;

(4) 一组对角相等且这一组对角的顶点所连结的对角线被另一条对角线平分的四边形是平行四边形.

其中,正确的命题的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(中国初中数学联赛,1988 年)

[解] 对于(1),(2),(4) 可分别给出反例. 例如:

(1) 如图 ① 中的四边形 $ABCD$,其中 $\triangle ABD \cong \triangle CDE$.

(2) 如图 ②,作等腰 $\triangle ADP$,延长底边 PD 至任意点 O,以 O 为对角线的交点可作出平行四边形 $ABCP$.

而此时的四边形 $ABCD$ 满足条件 $AD = (AP =)BC$,且 $AO = CO$,但不是平行四边形.

(4) 如图 ③ 中的四边形 $ABCD$,其中,B,D 是 AC 的垂直平分线上的任意两点.

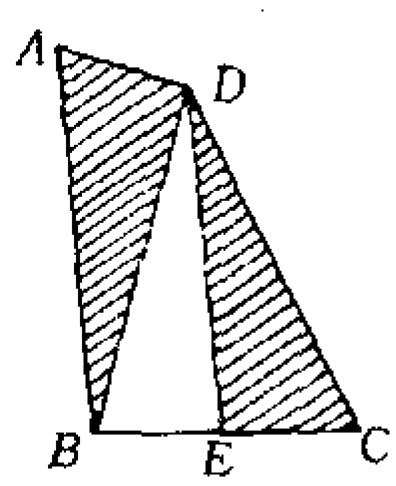


图 ①

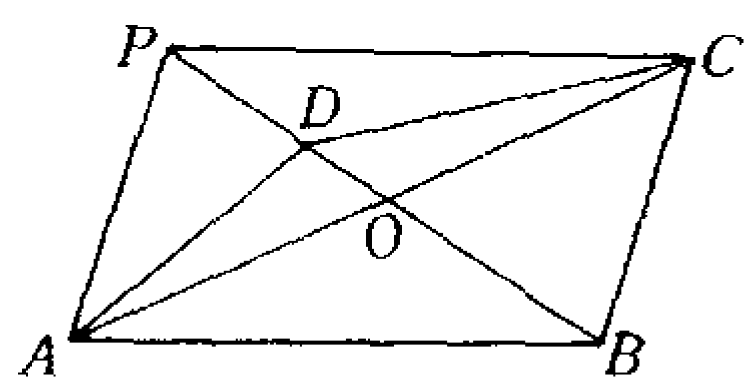


图 ②

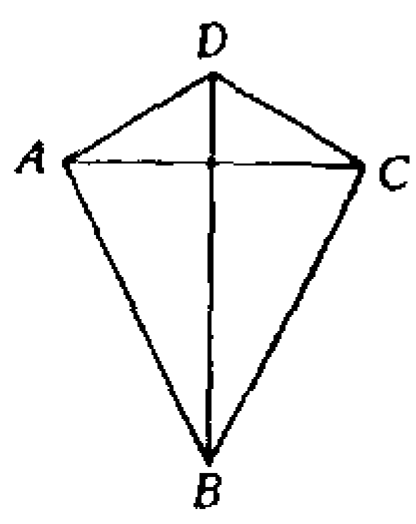


图 ③

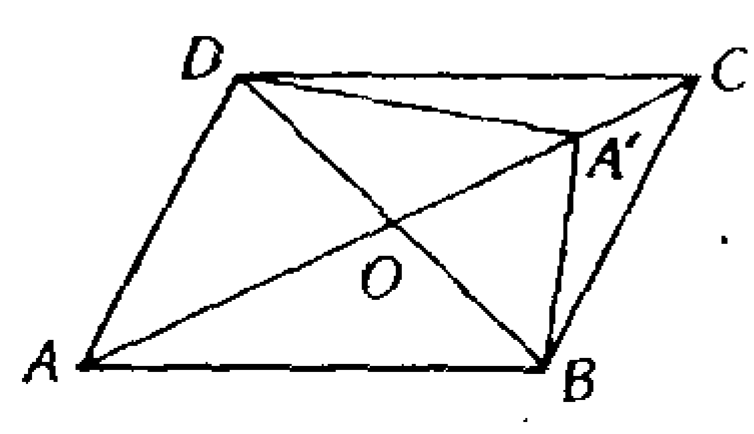


图 ④

以下证明命题(3) 是正确的.

如图 ④,已知 $\angle BAD = \angle DCB$,且 $OB = OD$.

以 O 为中心,将 $\triangle ABD$ 逆时针旋转 180°,由于 $OB = OD$,所以 D 与 B 重合,B 与 D 重合,点 A 与射线 OC 上的某点 A' 重合.

如果 A' 不是 C，则 $\angle BA'D > \angle BCD$（A' 在线段 OC 内部）或 $\angle BA'D < \angle BCD$（A' 在 OC 的延长线上），都与 $\angle BA'D = \angle BAD = \angle BCD$ 矛盾.

从而 A' 即是 C，即 $OA = OA' = OC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

综上，仅有命题(3)正确.

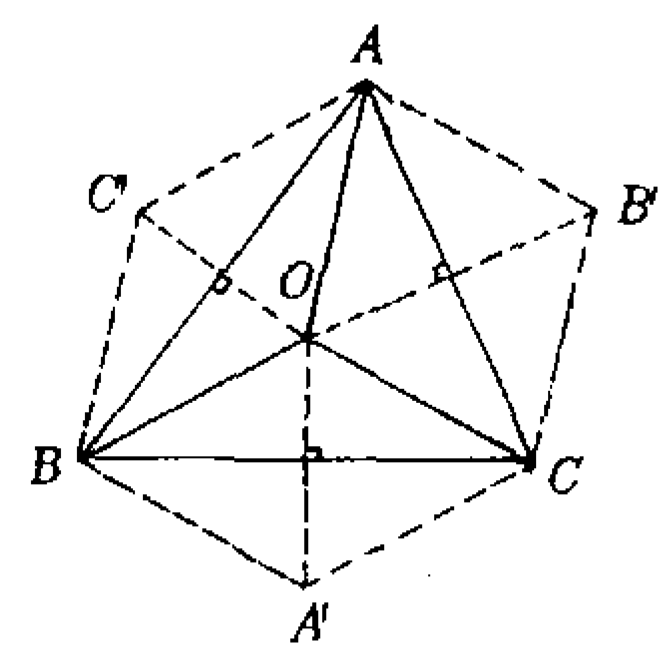
故选(A).

18·32　$\triangle ABC$ 为非等边的锐角三角形，O 为 $\triangle ABC$ 内一点且满足：$OA = OB = OC$，分别作 O 点关于 BC，CA，AB 的对称点 A'，B'，C'，以 A，B，C，O，A'，B'，C' 中任四点作四边形，其中平行四边形有

(A) 3 个.　　(B) 6 个.　　(C) 9 个.　　(D) 12 个.

（第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛，1985 年）

［解］　由题设知 O 为 $\triangle ABC$ 外心.



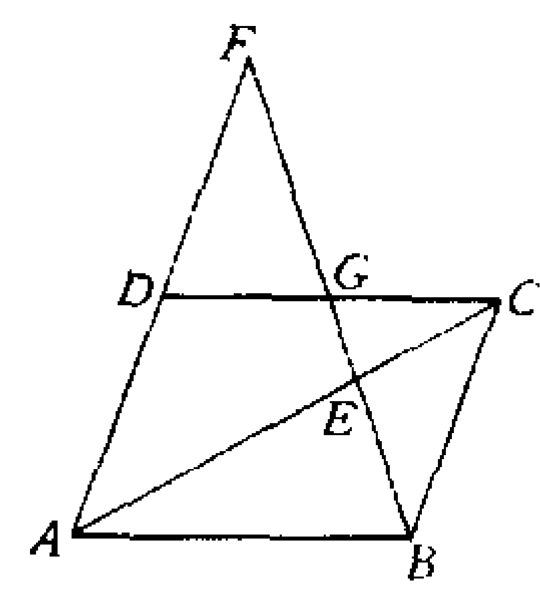
又由题设知图中以所给七点组成的四边形中为平行四边者有两类：

$\square AOBC'$，$\square AOCB'$，$\square BOCA'$ 等共 3 个. 又易知四边形 $BCB'C'$ 亦为平行四边形，这类图形亦有 3 个（另两个是 $\square ABA'B'$，$\square ACA'C'$）.

此外再无其他平行四边形.

故选(B).

18·33　F 为 $\square ABCD$ 的边 AD 延长线上的一点，BF 交 AC 于 E，交 CD 于 G，若 $EF = 32$，$GF = 24$，则 BE 等于



(A) 4.　　(B) 8.　　(C) 10.

(D) 12.　　(E) 16.

（第 14 届美国高中数学考试，1963 年）

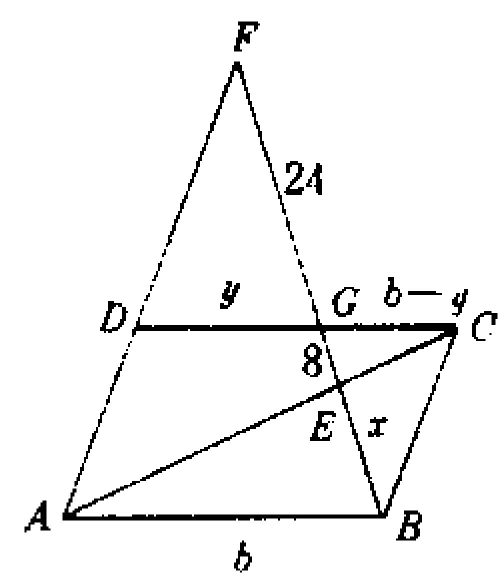
［解］　设 $BE = x$，$DG = y$，且 $AB = b$.

易证 $\triangle BEA \backsim \triangle GEC$，如图有 $\dfrac{8}{x} = \dfrac{b-y}{b}$，

即　$y = \dfrac{b(x-8)}{x}$.

又　$\triangle FDG \backsim \triangle BCG$，则

$$\frac{24}{x+8}=\frac{y}{b-y}.$$



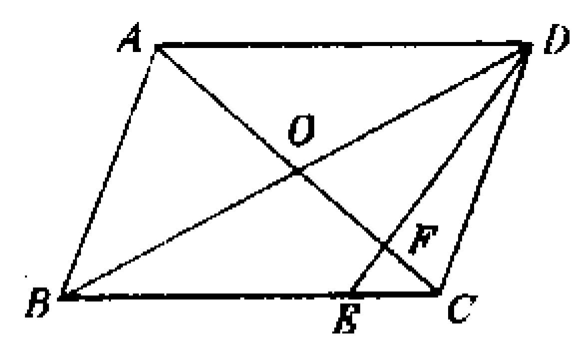
将 $y=\frac{b(x-8)}{x}$ 代入化简后为

$$x^2-64=192,$$

解得 $x=16$(已舍负值).

故选(E).

18·34 如图,在$\square ABCD$中,对角线AC和BD交于O,在BC上取点E,使$EC=\frac{1}{4}BC$,DE交AC于F.则$AO:OF:FC$等于



(A) $3:2:1$. (B) $4:3:1$.

(C) $5:3:2$. (D) $7:4:3$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1990年)

[解] 由题设知 $EC=\frac{1}{4}BC$, 且 $AD=BC$, 则

$$AD:EC=4:1,$$

且 $AF:FC=AD:EC=4:1$.

因而 $AO:FC=\frac{AF+FC}{2}:FC=\frac{4+1}{2}:1=5:2$.

又 $OF=OC-FC=AO-FC$,

$\therefore$ $AO:OF:FC=5:(5-2):2=5:3:2$.

故选(C).

18·35 已知菱形的一对角线长是另一对角线长的2倍,若k表示此菱形的面积,则其边长为

(A) $\sqrt{k}$. (B) $\frac{\sqrt{2k}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3k}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{4k}}{4}$. (E) 非上述答案.

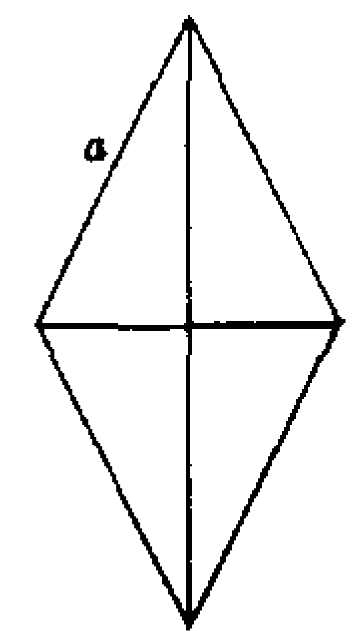
(第12届美国高中数学考试,1961年)

[解] 设菱形边长为a,两对角线分别为d和$2d$.

由题设

$$\frac{1}{2}\cdot d\cdot 2d=k,\quad 即\quad d^2=k.$$

又 $a^2 = d^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = k + \frac{k}{4} = \frac{5}{4}k$,



则 $$a = \frac{\sqrt{5k}}{2}.$$

故选(E).

18·36 已知 E 为▱$ABCD$ 的对角线 BD 的中点,在 AD 上取一点 F,使 $DF = \frac{1}{3}DA$,连 EF,则 $\triangle DEF$ 的面积与四边形 $ABEF$ 的面积之比等于

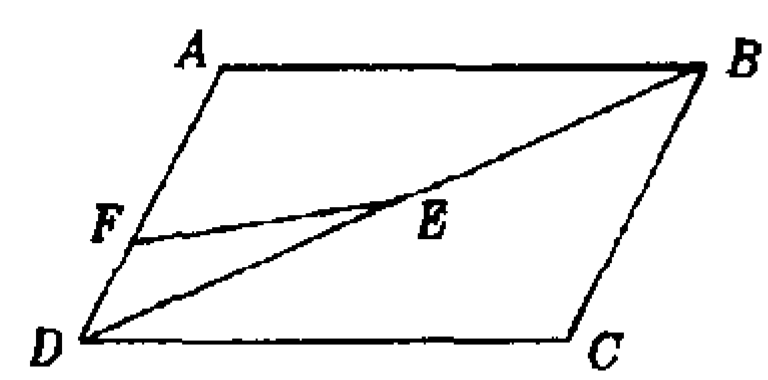
(A) 1 : 2. (B) 1 : 3. (C) 1 : 5.

(D) 1 : 6. (E) 1 : 7.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解] 由设 $DF = \frac{1}{3}DA$, 则 $S_{\triangle DFE} = \frac{1}{3}S_{\triangle DEA}$.

又 E 是 BD 中点,则 $S_{\triangle DEA} = \frac{1}{2}S_{\triangle DBA}$,



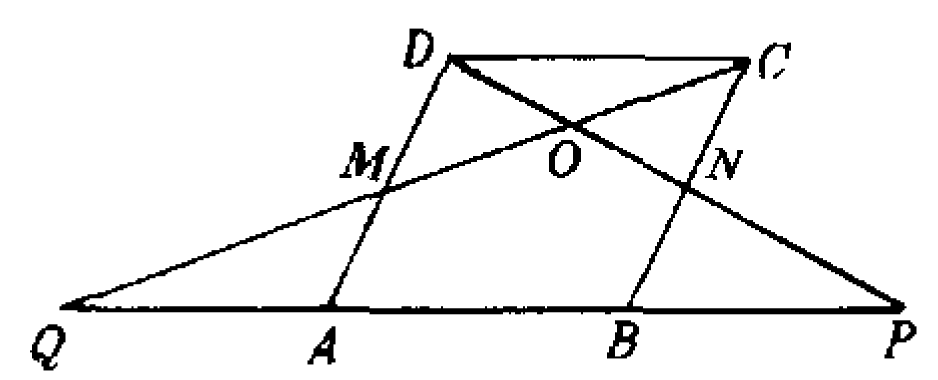
$$\therefore \quad S_{\triangle DFE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle DBA} = \frac{1}{6}S_{\triangle DBA},$$

从而 $S_{四边形ABEF} = \frac{5}{6}S_{\triangle DBA}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle DFE} : S_{四边形ABEF} = 1 : 5.$$

故选(C).

18·37 如图,$ABCD$ 是平行四边形,直线 DP 平分 BC 于 N 并与 AB(延长线)相交于 P,CQ 平分边 AD 于 M 并与 BA(延长线)相交于 Q. 且 DP 和 CQ 相交于 O. 若平行四边形 $ABCD$ 的面积是 k,那么 $\triangle QPO$ 的面积等于



(A) k. (B) $\frac{6}{5}k$. (C) $\frac{9}{8}k$. (D) $\frac{5}{4}k$. (E) $2k$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 因为 $DM = AM$, $\angle QMA = \angle DMC$ 及 $\angle CDM =$

$\angle QAM$，则 $\triangle QAM \cong \triangle CDM$.

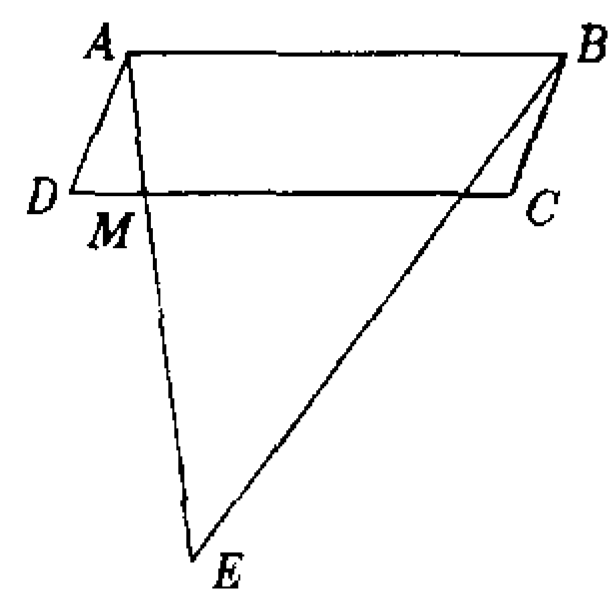
类似地有 $\triangle BPN \cong \triangle CDN$.

又 $$S_{\triangle QPO} = S_{\square ABCD} + S_{\triangle DOC},$$

并且 $$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}S_{\square ABCD}\right) = \frac{k}{8},$$

所以 $$S_{\triangle QPO} = k + \frac{k}{8} = \frac{9k}{8}.$$

故选(C).

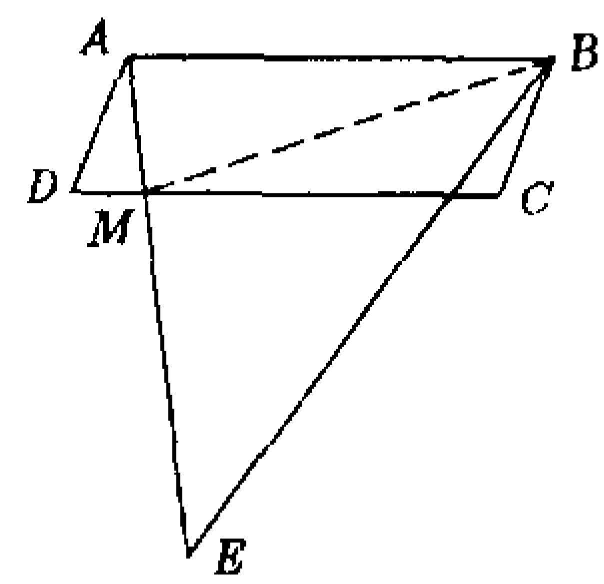


18·38 如图，M 是 $\square ABCD$ 中 CD 边上的一点，也是 $\triangle ABE$ 中 AE 边上的点，且 $EM = 3AM$. 则 $S_{\square ABCD} : S_{\triangle ABE}$ 等于

(A) 3 : 2. (B) 2 : 3.

(C) 2 : 1. (D) 1 : 2.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛，1990 年)



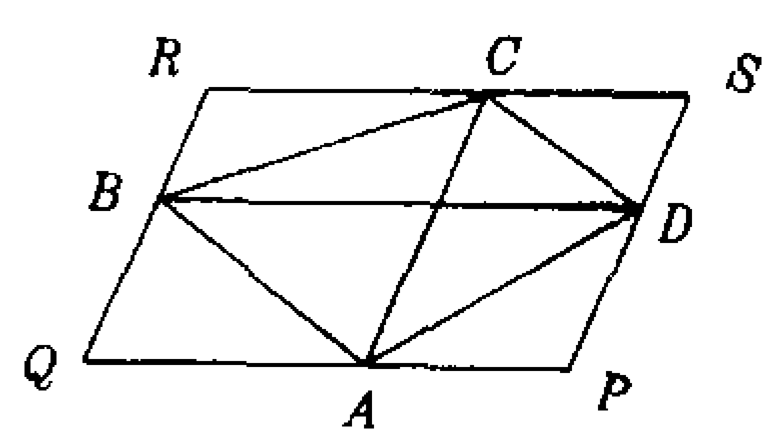
[解] 连 BM，由多边形面积性质有

$$S_{\square ABCD} = 2S_{\triangle ABM} = 2 \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle ABE},$$

所以 $S_{\square ABCD} : S_{\triangle ABE} = 1 : 2$.

故选(D).

18·39 如图：$\square PQRS$ 四边上分别有点 A，B，C，D，使得 $S_{\square PQRS} = 2S_{四边形ABCD}$，则必有



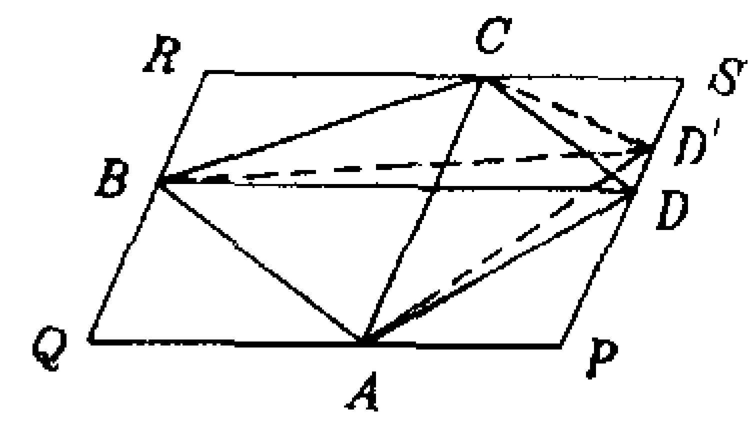
(A) $AC \parallel QR$ 或 $BD \parallel PQ$.

(B) $AC \parallel QR$ 且 $BD \parallel PQ$.

(C) $AC \perp PQ$ 或 $BD \perp QR$.

(D) $AC \perp PQ$ 且 $BD \perp QR$.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛，1989 年)



[解] 若 BD 与 PQ 不平行，则在 SP 上另取一点 D' 使 $BD' \parallel PQ$，如图. 这样有

$$\begin{aligned} &S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD'} \\ &= S_{四边形ABCD'} = S_{\triangle ABD'} + S_{\triangle BCD'} \\ &= \frac{1}{2}S_{\square PQBD'} + \frac{1}{2}S_{\square D'BRS} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{2} S_{\square PQRS}$

$= S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$,

$\therefore \quad S_{\triangle ACD'} = S_{\triangle ACD}$,

故 $AC \parallel DD'$，即 $AC \parallel RQ$.

同理,若 AC 与 QR 不平行,可证 $BD \parallel PQ$.

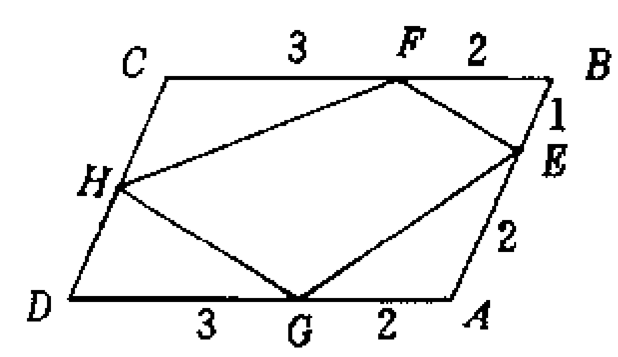
$\therefore AC \parallel RQ$ 和 $BD \parallel PQ$ 两者至少之一成立.

故选(A).

18·40 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 10， $AB = 3$， $BC = 5$.在 AB,BC 和 AD 上分别取点 E,F 和 G,使 $AE = BF = AG = 2$.过 G 作 $GH \parallel EF$ 交 CD 于 H.则四边形 $EFHG$ 的面积为

(A) 4.　(B) 4.5.　(C) 5.　(D) 5.5.　(E) 6.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)



[解] 由题设 $GH \parallel EF$，则 $\triangle BEF \backsim \triangle DHG$.

所以 $DH = \frac{3}{2}$，且 $CH = \frac{3}{2}$.

又 $S_{\square ABCD} = 10 = 3 \cdot 5 \cdot \sin A$，则

$$\sin A = \frac{2}{3}.$$

故 $S_{\triangle AGE} = \frac{1}{2} AG \cdot AE \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

同理 $S_{\triangle BEF} = \frac{2}{3}$， $S_{\triangle CHF} = \frac{3}{2}$， $S_{\triangle DHG} = \frac{3}{2}$，

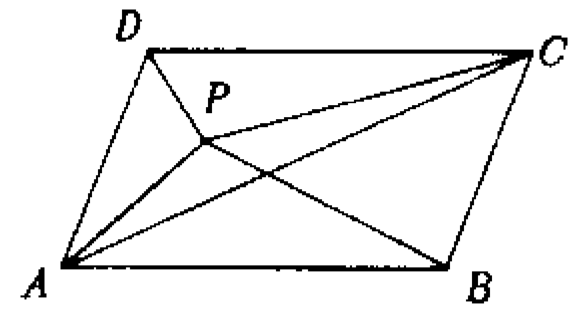
则 $S_{EFHG} = S_{\square ABCD} - (S_{\triangle AGE} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle CHF} + S_{\triangle DHG}) = 5$.

故选(C).

18·41 如图,P 是$\square ABCD$ 内一点,且 $S_{\triangle PAB} = 5$， $S_{\triangle PAD} = 2$,则 $S_{\triangle PAC}$ 等于

(A) 2.　(B) 3.　(C) $3\frac{1}{2}$.　(D) 4.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年)



[解] 考虑极端的情形,P 在$\square ABCD$ 对角线 BD 上.

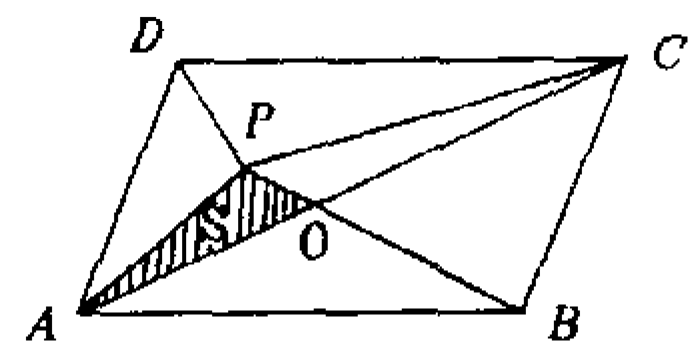
由题设知 $S_{\triangle PAB} = 5$， $S_{\triangle PAD} = 2$. 又设 $S_{\triangle APO} = S$,

则 $S_{\triangle AOB}+S=5,\quad S_{\triangle AOD}-S=2,$

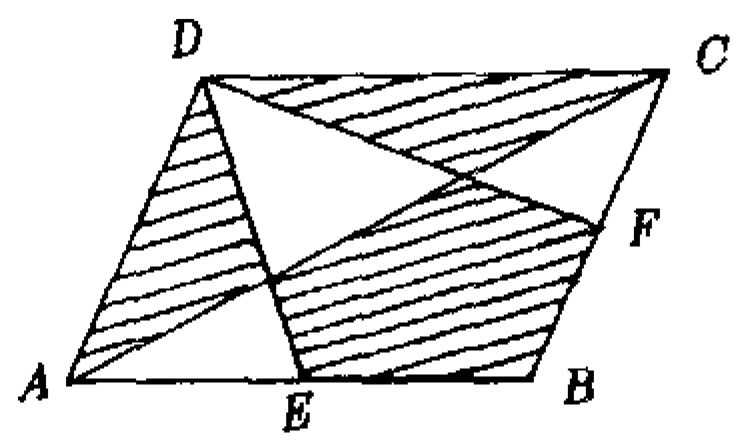
又 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD},$

解得 $S=1.5$，从而 $S_{\triangle APC}=2S=3.$

故选(*B*).



18·42 点 E,F 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 AB,BC 的中点，记图中阴影部分面积的和为 S_1（见图），记非阴影部分的三个三角形的面积和为 S_2. 那么，$S_1:S_2$ 等于

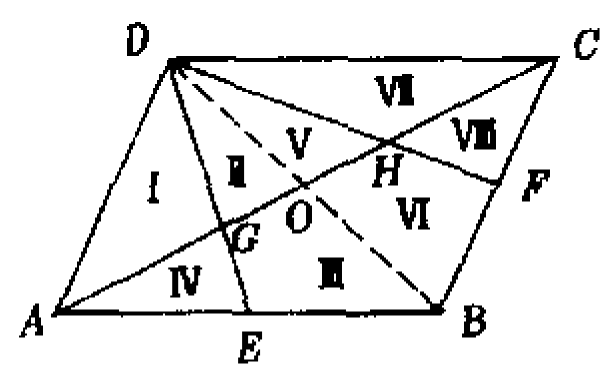


(A) $1:1$. (B) $3:2$.

(C) $2:1$. (D) $AB:BC$.

（"祖冲之杯"初中数学邀请赛，1990 年）

[解 1] 连 BD 交 AC 于 O. 且设各部分图形分别为 Ⅰ，Ⅱ…，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ. 设平行四边形面积为 S.



由 $S_{\text{Ⅰ}}+S_{\text{Ⅱ}}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABD},$

且 $S_{\text{Ⅱ}}+S_{\text{Ⅲ}}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABD},\quad$ 故 $S_{\text{Ⅰ}}=S_{\text{Ⅲ}}.$

同理有 $S_{\text{Ⅱ}}=S_{\text{Ⅳ}},\quad S_{\text{Ⅵ}}=S_{\text{Ⅶ}},\quad S_{\text{Ⅷ}}=S_{\text{Ⅴ}}.$

易证 $AG=GH=HC.$

故 $S_{\text{Ⅱ}}+S_{\text{Ⅴ}}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{6}S,$

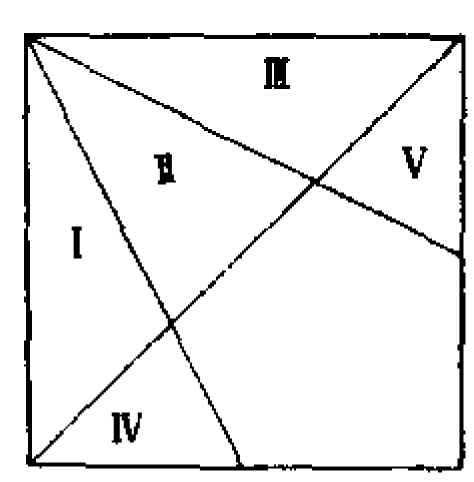
且 $S_{\text{Ⅰ}}+S_{\text{Ⅶ}}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{3}S.$

注意到上面的等积关系，则 $S_1:S_2=2\cdot\dfrac{1}{3}S:2\cdot\dfrac{1}{6}S=2:1.$

故选(*C*).

[解 2] 考虑正方形的情形，且设其面积为 1.

如图，则有 $S_{\text{Ⅰ}}=S_{\text{Ⅱ}}=S_{\text{Ⅲ}}=\dfrac{1}{6}.$



又 $S_{\text{Ⅰ}}+S_{\text{Ⅳ}}=\dfrac{1}{4},$

则 $S_{\text{Ⅳ}}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}.$

故 $S_{Ⅱ} + S_{Ⅳ} + S_{Ⅴ} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$,

从而 $S_1 : S_2 = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

故选(C).

[解 3] 由前解 1 知 $AG = \frac{1}{3}AC$, 又 $AE = \frac{1}{2}AB$, 则

$$S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot AE \cdot \sin\angle GAE$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}AC \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \sin\angle GAE$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin\angle GAE$$
$$= \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\square ABCD},$$

同理 $S_{\triangle CFH} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\square ABCD}$.

又 $S_{\triangle DGH} = \frac{1}{3}S_{\triangle ADC} = \frac{1}{6}S_{\square ABCD}$ ($\because$ $GH = \frac{1}{3}AC$),

则 $S_2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right)S_{\square ABCD} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}$,

且 $S_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)S_{\square ABCD} = \frac{2}{3}S_{\square ABCD}$,

$\therefore$ $S_1 : S_2 = 2 : 1$.

故选(C).

18·43 若四边形四条边 a,b,c,d 满足关系式 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$,则此四边形是

(A) 任意四边形. (B) 矩形. (C) 菱形.

(D) 等腰梯形. (E) 梯形.

(中国江苏省徐州市初中数学竞赛,1985 年)

[解 1] 由设知 $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0$, 而

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd$$
$$= (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + 2(a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2)$$
$$= (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2,$$

若上式为 0,则有 $a = b = c = d$.知四边形是菱形.

故选(C).

［解 2］ 由设 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$,由算术-几何平均不等式

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4\sqrt[4]{a^4b^4c^4d^4}=4abcd,$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立.

故选(C).

18·44 在菱形 $ABCD$ 中引平行于对角线 BD 的线段,此线段长视为 A 点至此线段距离的函数时,其图像为

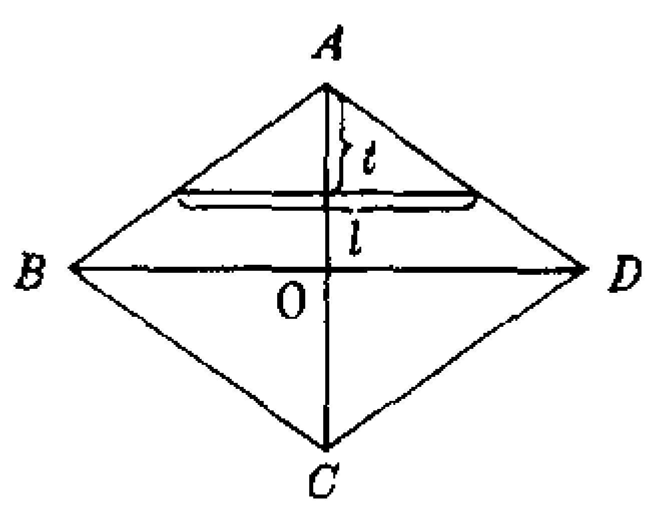
(A) 过原点的一条直线. (B) 与两坐标轴正向都相交的直线.

(C)"∨"型折线段. (D)"∧"型折线段.

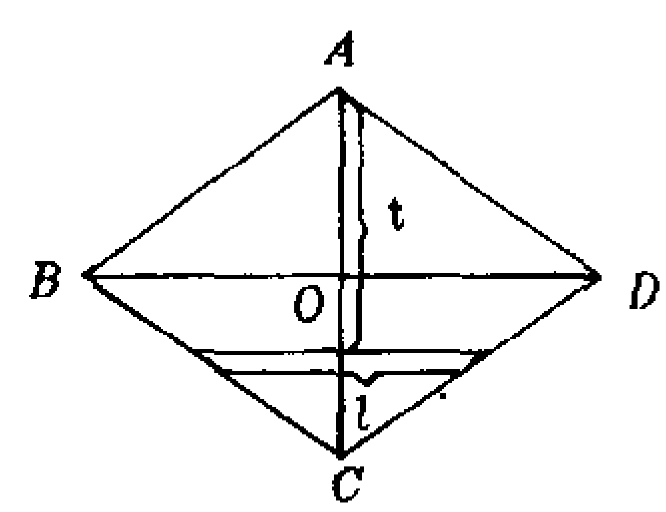
(E) 非上述答案.

（第 5 届美国高中数学考试,1954 年）

［解］ 分两种情形考虑:



图①



图②

对于图形①由

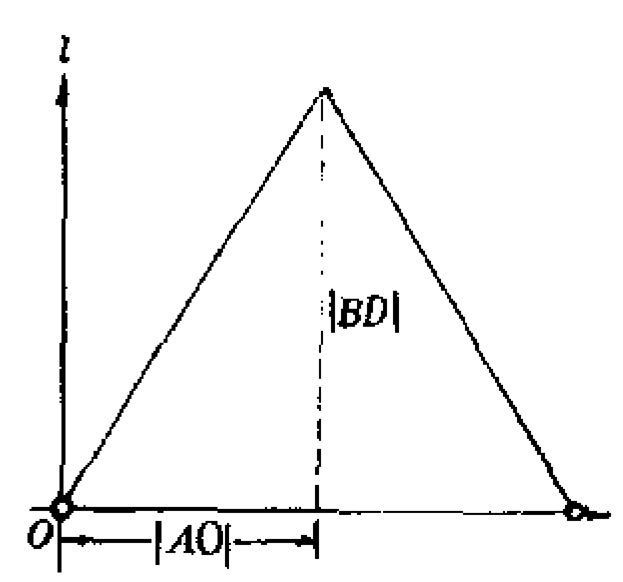
$$\frac{l}{t}=\frac{2BO}{AO},\ 0<t\leqslant|AO|,$$

有 $$l=\frac{2BO}{AO}t,\ 0<t\leqslant|AO|.$$

对于图形②同理有

$$l=\frac{2BO}{AO}(AC-t),$$

$$|AO|\leqslant t<|AC|.$$



图③

综上,函数图像见图③.

故选(D).

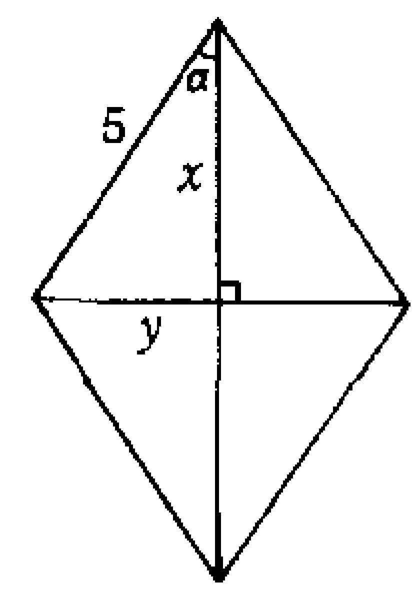
18·45 边长为 5 的菱形,它的一条对角线的长不大于 6,另一条不小于 6,则这个菱形两条对角线长度之和的最大值是

(A) $10\sqrt{2}$. (B) 14. (C) $5\sqrt{6}$. (D) 12.

（中国高中数学联赛,1987 年）

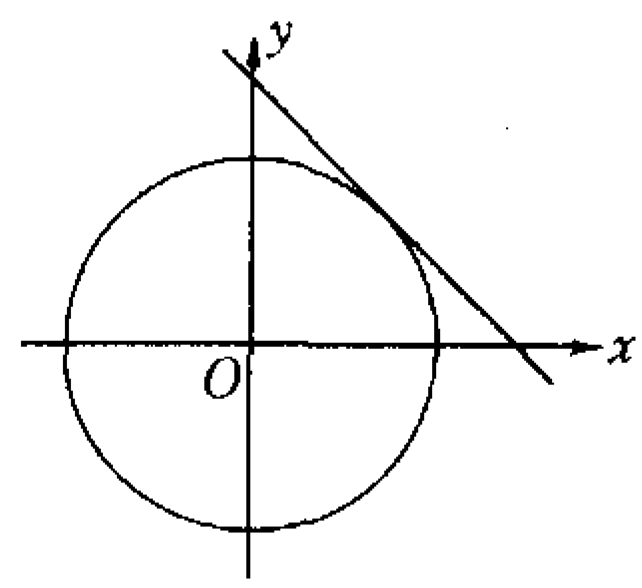
[解 1] 设菱形的两条对角线长分别为 x 及 y,因平行四边形两条对角线长的平方和等于四边的平方和,于是问题归结为:在条件

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, & ① \\ x \geqslant 6, & ② \\ y \leqslant 6. & ③ \end{cases}$$



下求函数 $x+y$ 的最大值.

考虑平行直线族 $x+y=c$,当直线 $x+y=c$ 与圆周 $x^2+y^2=100$ 相切,且切点位于第一象限时(如图),易知 $c=10\sqrt{2}$.这时只考虑条件 ① 时,$x+y$ 的最大值.



由于 x,y 还受到约束条件 ② 及 ③ 的限制,我们把直线 $x+y=c$ 向下平移,显然,当此直线过点(8,6)时,得 $x+y$ 的最大值 14.

故选(B).

[解 2] 设 $x=6+\alpha, y=6-\beta$,

其中 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$,将 x,y 值代入 ①,

得
$$(6+\alpha)^2+(6-\beta)^2=100,$$

即
$$(\alpha-\beta)^2+12(\alpha-\beta)+2\alpha\beta-28=0.$$

解得
$$\alpha-\beta=-6\pm\sqrt{64-2\alpha\beta}.$$

当 $\beta=0$,并取正号得 $\alpha-\beta$ 的最大值 2.

$\therefore$ $x+y=12+(\alpha-\beta)$ 的最大值为 14.

故选(B).

第3节 矩 形

18·46 在矩形 $ABCD$ 的各边 AB,BC,CD,DA 上分别取点 E,F,G,H,使 $EFGH$ 为矩形,则这样的矩形

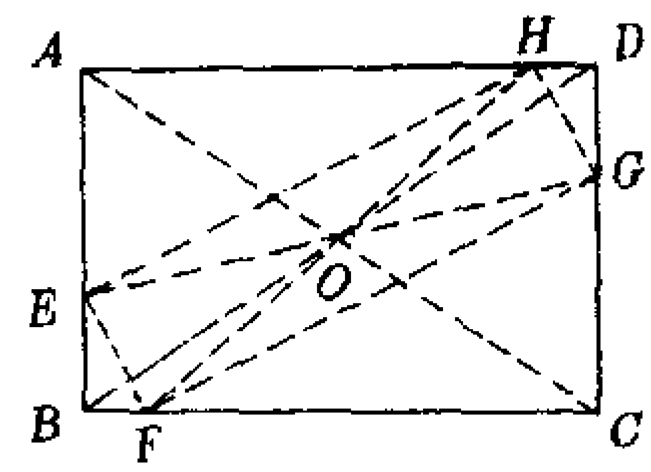
(A) 仅能作一个. (B) 可以作 4 个.

(C) 一般情况下不可作. (D) 可作无穷多个.

(中国河北省初中数学竞赛,1993 年)

[解] 对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

设 O 为矩形 $ABCD$ 对角线交点. 过 O 任作一直线 EG 交矩形 AB，CD 边分别于 E，G.



在过 O 与矩形边 AD，BC 相交的线段 HF 中，至少有一条与 EG 相等.

这时，四边形 $EFGH$ 为矩形.

由于 EG 的任意性，知矩形可作无穷多个.

故选(D).

18·47　将一矩形的每一角三等分，连接靠近同一边上的两三等分线所交成的四点形成

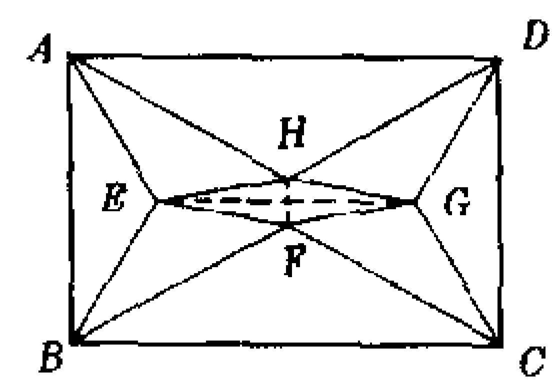
(A) 一正方形.　　(B) 一矩形.

(C) 一不等边的平行四边形.　　(D) 一菱形.

(E) 一任意四边形.

(第 4 届美国高中数学考试，1953 年)

[解]　由题设可证明



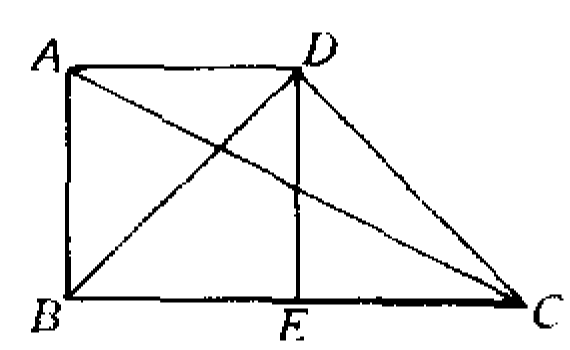
$\triangle AHE \cong \triangle BFE \cong \triangle CFG \cong \triangle DHG$，

有　　$EF = FG = GH = EH.$

又　$AB \neq BC$，　可证　$EG \neq FH.$

故选(D).

18·48　已知四边形 $ABCD$ 中，$AD \mathbin{/\!/} BC$，$\angle A = 90°$，　$CD \perp BD$，　$DE \perp BC$，垂足为 E，　E 为 BC 的中点，则下列判断中错误的是



(A) CD 是过 A，B，D 的圆的切线.

(B) BD 是过 C，D，E 的圆的切线.

(C) AD 是过 B，D，C 的圆的切线.

(D) CB 是过 B，D，E 的圆的切线.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1988 年)

[解]　根据题设，知 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，故 $\triangle BDC$ 的外接圆是以 E 为圆心，以 BC 为直径的. 则(C) 成立.

同理可证(A)，(B) 也是成立的.

$\because$　BC 不垂直 BD，

$\therefore$　BC 不可能是 $\triangle BED$ 外接圆的切线.

故选(D).

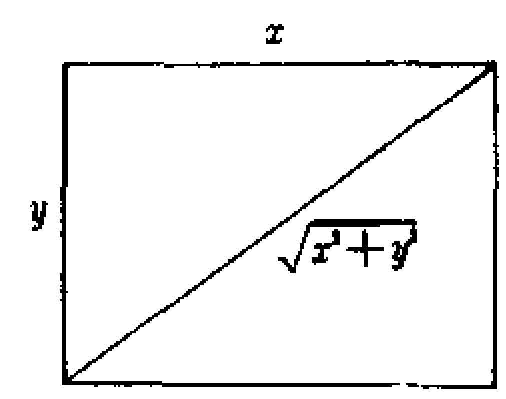
18·49　一人不绕矩形农场的两邻边走，而取捷径沿农场的对角

线走，如此省去了$\frac{1}{2}$矩形长边的距离．那么，短边对长边的比为

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $\frac{1}{4}$.　(D) $\frac{3}{4}$.　(E) $\frac{2}{5}$.

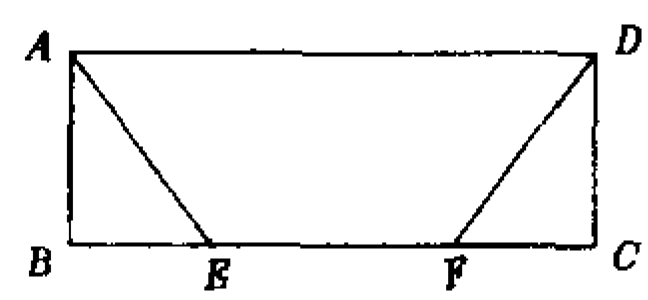
（第 4 届美国高中数学考试，1953 年）

［解］　设矩形长，宽分别为 x，y，则其对角线长为 $\sqrt{x^2+y^2}$．依题意有 $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x}{2}=x+y$，



化简后有
$$\frac{3}{4}x^2=xy,$$
即
$$\frac{y}{x}=\frac{3}{4}.$$
故选(D)．

18·50　如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，$BC=22$，E，F 是 BC 上的点，且 $AE=EF=FD$．则 EF 的长为



(A) 9.　(B) 10.　(C) 11.　(D) 12.

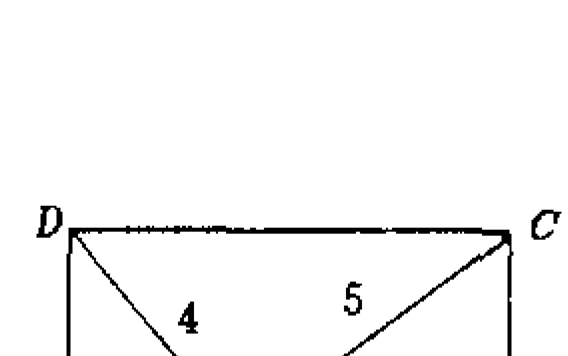
（中国四川省初中数学竞赛，1991 年）

［解］　设 $AE=x$，则 $BE=11-\frac{x}{2}$．

由
$$AE^2-AB^2=BE^2,$$
有
$$x^2-64=\left(11-\frac{x}{2}\right)^2,$$
即
$$3x^2+44x-740=0.$$
解得　$x=10$ 或 $-\frac{74}{3}$（舍去）．　即 $EF=10$．

故选(B)．

18·51　P 为矩形 $ABCD$ 内一点，具有 $PA=3$，$PD=4$，$PC=5$，则 PB 等于



(A) $2\sqrt{3}$.　(B) $3\sqrt{2}$.

(C) $3\sqrt{3}$.　(D) $4\sqrt{2}$.　(E) 2.

（第 15 届美国高中数学考试，1964 年）

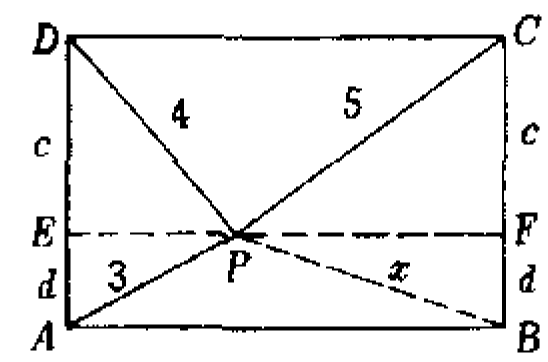
［解］　过 P 作 $EF\parallel AB$，且设 $DE=c$，$AE=d$，$PB=x$．

由勾股定理有 $\begin{cases}16 - c^2 = 9 - d^2, \\ 25 - c^2 = x^2 - d^2,\end{cases}$

得 $x^2 - 18 = 0$, 故 $x = 3\sqrt{2}$(已舍负值).

故选(B).

18·52 长方形场地上竖有一根电线杆,如果已知电线杆底部到三个顶点的距离,则电线杆底部到第四个顶点的距离



(A) 可以确定.

(B) 必须知场地两条边长后才能确定.

(C) 当且仅当已知场地一边的长后可以确定.

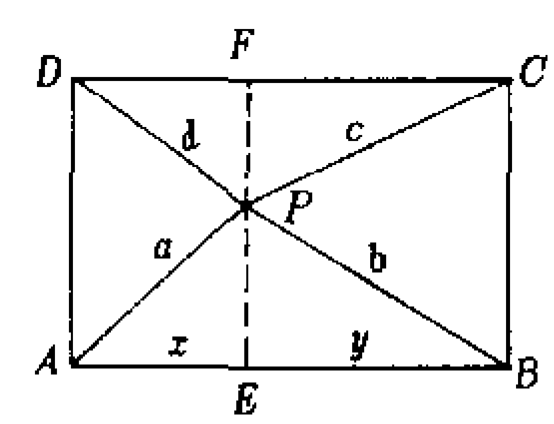
(D) 当且仅当场地是正方形时可以确定.

(中国江苏省初中数学竞赛,1986 年)

[解] 设长方形为 $ABCD$(如图),且过 P 作 $EF \perp AB$.

令 $AE = x$, $BE = y$, $PD = d$.

又 $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$.



由勾股定理有

$$\begin{cases}b^2 - a^2 = y^2 - x^2, \\ c^2 - d^2 = y^2 - x^2.\end{cases}$$

所以 $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$,

即 $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$, 或 $d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

故选(A).

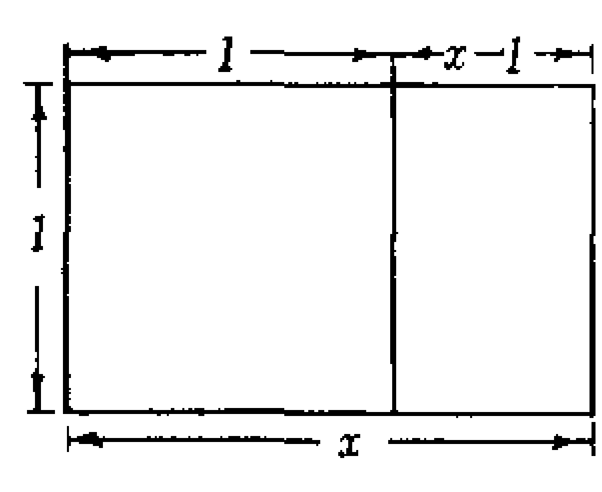
18·53 把一个矩形剪去一个正方形,所剩矩形与原矩形相似,则原矩形长边与短边之比为

(A) $(1 + \sqrt{5}) : 2$. (B) $3 : 2$.

(C) $(1 + \sqrt{3}) : 2$. (D) $(1 + \sqrt{6}) : 2$.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1984 年;
中国浙江省初中数学竞赛,1992 年)

[解 1] 设矩形长为 x,宽为 1,依题设有



$$1 : x = (x - 1) : 1,$$

即 $$x^2 - x - 1 = 0,$$

解得 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$(舍负值).

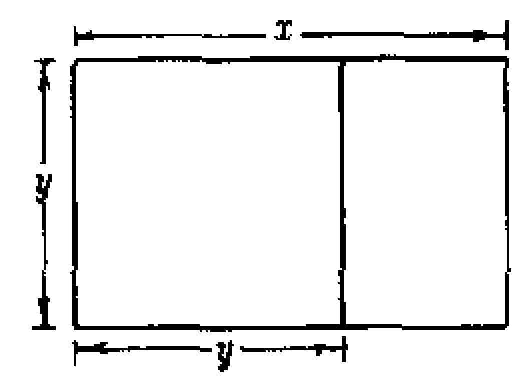
故　矩形长边：短边 $= (1+\sqrt{5}):2$，

故选(A).

[解 2]　设矩形长为 x，宽为 y，且 $x > y$.

剪去正方形后，所剩矩形长宽分别为 y 和 $x-y$.

依题意有　$x : y = y : (x-y)$，



即　$x^2 - xy - y^2 = 0$.

有　$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$，

解得　$\frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　(舍去负值).

故选(A).

注　若设 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $\tau - 1$ 或 $\frac{1}{\tau}$ 即为 $0.618\cdots$，它即为有名的"黄金数"，相应的线段分割，称为"黄金分割".

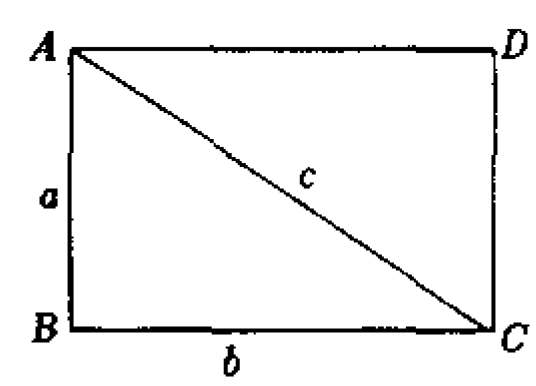
18·54　若矩形 $ABCD$ 的周长为 20 英寸，则对角线 AC 的最小值(以英寸计)为

(A) 0.　(B) $\sqrt{50}$.　(C) 10.　(D) $\sqrt{200}$.　(E) 以上都不是.

(第 18 届美国高中数学考试，1967 年)

[解]　设矩形边及对角线长分别为 a, b, c，周长为 p，则

$$p = 2(a+b).$$



由　$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$= \frac{p^2}{4} - 2ab.$$

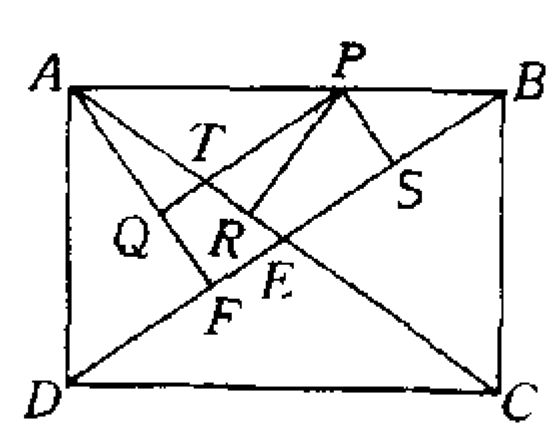
由题设 p 给定，则当 ab 最大时，c^2 最小.

由 $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$，等号当且仅当 $a = b$ 时成立.

此即说：周长给定的矩形中，以正方形对角线长最短.

故选(B).

18·55　$ABCD$ 是矩形(如图)，P 是 AB 上任一点，$PS \perp BD$，$PR \perp AC$，$AF \perp BD$，$PQ \perp AF$，则 $PR + PS$ 等于



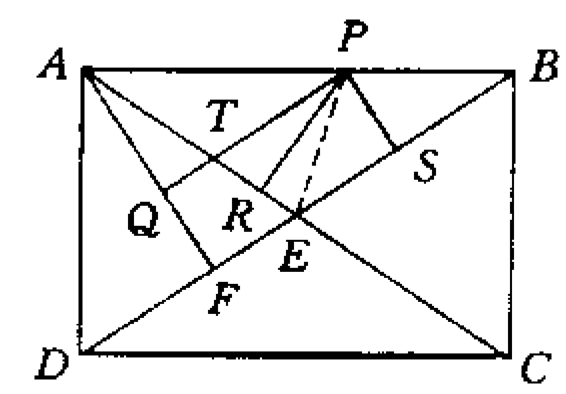
(A) PQ.　(B) AE.　(C) $PT + AT$.

(D) AF.　(E) EF.

(第 9 届美国高中数学考试，1958 年)

选择题卷

[解]　连结PE.由设 $ABCD$ 是矩形,则 $AE=BE=DE$,设其为 a.



又 $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot PR+\frac{1}{2}\cdot BE\cdot PS$

$=\frac{1}{2}a(PR+PS)$,

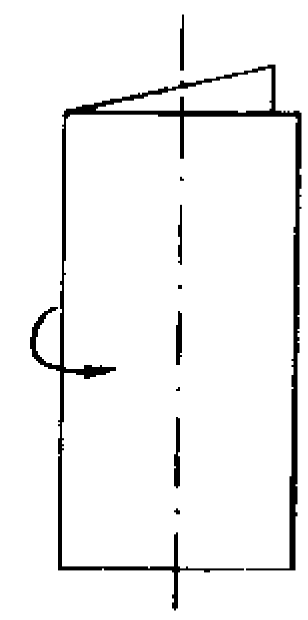
而　$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot AF=\frac{1}{2}aAF$,

$\because$　　$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AED}$,

$\therefore$　　$PR+PS=AF$.

故选(D).

18·56　将一张正方形的纸如图按竖直中线对折,再将对折纸从虚线处剪开,于是得到三个矩形纸片——一个大的两个小的.问每个小矩形周长与大矩形周长之比是



(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $\frac{3}{4}$.　(D) $\frac{4}{5}$.　(E) $\frac{5}{6}$.

(第5届美国初中数学考试,1989年)

[解]　大矩形长为1,宽为$\frac{1}{2}$(设原正方形边长为1);小矩形长为1,宽为$\frac{1}{4}$.则它们周长比为

$$2\cdot(1+\frac{1}{4}):2\cdot(1+\frac{1}{2})=\frac{5}{6}.$$

故选(E).

18·57　若矩形的底增加10%,而面积不变时,则其高减少

(A) 9%.　　(B) 10%.　　(C) 11%.

(D) $11\frac{1}{9}$%.　　(E) $9\frac{1}{11}$%.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解]　设矩形底为 b,高为 h,高减少 x%.由设有

$$bh=(1+10\%)b\cdot(1-x\%)h,$$

得　$x=9\frac{1}{11}$.

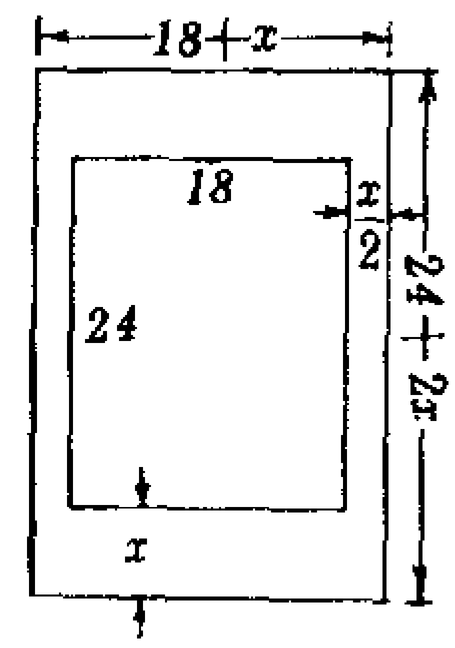
故选(E).

18·58　一个18英寸×24英寸的画镶在一个纵边较长的木制框架内,框顶与框底的木头宽度是框边木头宽度的二倍,如果框架面积等

于画的面积，则此画框的较短与较长边的尺寸之比为

(A) 1 : 3. (B) 1 : 2. (C) 2 : 3. (D) 3 : 4. (E) 1 : 1.

(第 19 届美国高中数学考试，1968 年)



[解] 设框顶，框底宽为 x，框边宽为 $\frac{x}{2}$，依题意有

$$(2x+24)(x+18)=2\cdot 18\cdot 24,$$

即
$$x^2+30x-216=0.$$

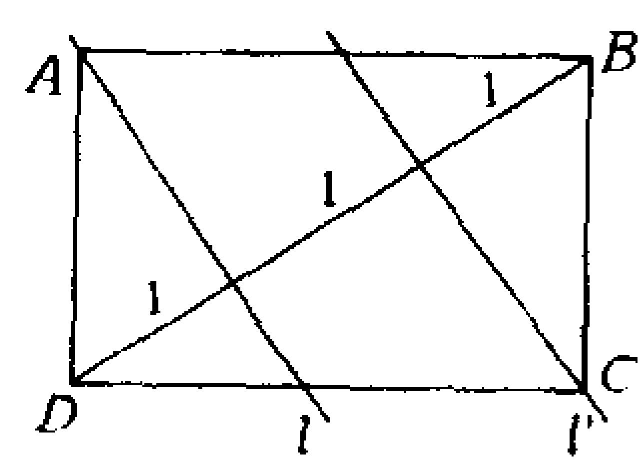
解得 $x=6$ 或 -36(舍去).

则画框边之比为：

$(x+18):(2x+24)=24:36=2:3.$

故选(C).

18·59 矩形 $ABCD$ 的对角线 DB 被两平行直线 l 与 l' 分成三段长度均为 1 的线段，这里 l 与 l' 分别通过点 A 与 C 且垂直于 BD. 则 $ABCD$ 的面积为(保留一位小数)

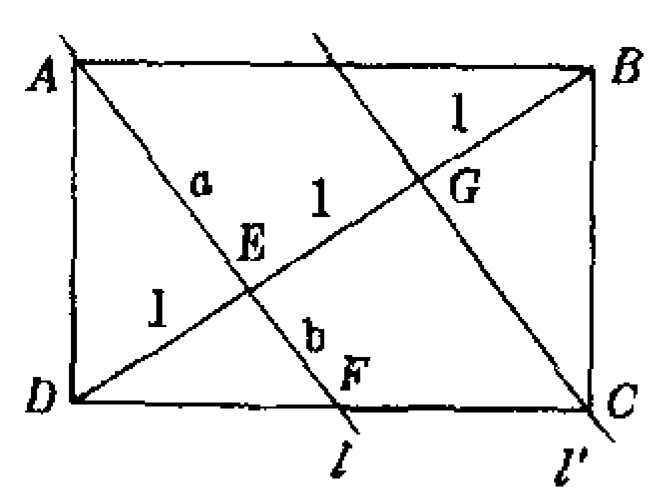


(A) 4.1. (B) 4.2. (C) 4.3.

(D) 4.4. (E) 4.5.

(第 36 届美国高中数学考试，1985 年)

[解] 如图，设 $AE=a$， $EF=b$.



在 Rt△ADB 中由射影定理有

$$a^2=DE\cdot EB=1\cdot 2=2,$$

$\therefore\quad a=\sqrt{2},$

又在 Rt△ADF 中同理有 $ab=1^2$,

$\therefore\quad b=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\therefore\quad S_{ABCD}=2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot 1\right]+(a+b)\cdot 1$$

$$=2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\approx 4.23\approx 4.2.$$

故选(B).

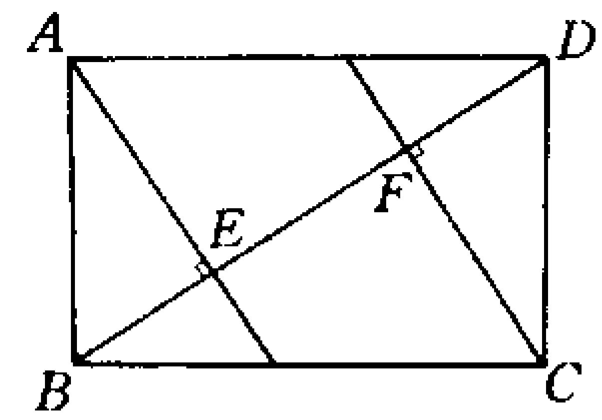
18·60 如图中，AE，CF 垂直于矩形 $ABCD$ 的对角线 BD，E，F 分别为垂足，若 $BE=1$， $EF=2$，则矩形 $ABCD$

的面积是

(A) $4\sqrt{3}$.　　(B) $3\sqrt{5}$.

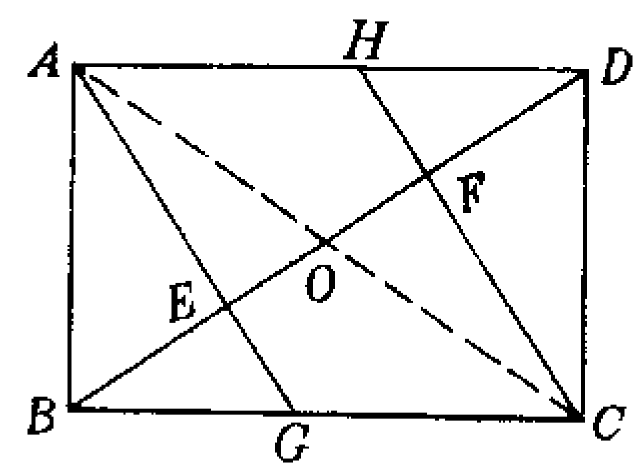
(C) 6.　　(D) 不能确定的.

（中国部分省、市初中数学通讯赛,1989年）



[解1] 连 AC,交 BD 于 O,且设 AE,BC 交于点 G.

由题设有 $BE=EO=1$,则 AE 为 BO 的垂直平分线.



又 $\angle BDC=\angle BGA$

$=\angle GCA+\angle GAC,$

且 $\angle GCA=\angle DBC,$

$\angle GAC=\angle GAB=\angle GCA.$

$\therefore\ \angle BDC=2\angle DBC,$

故 $\angle DBC=30^\circ.$

$$\therefore\ CD=\frac{BD}{2}=\frac{4}{2}=2,\quad BC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

则 $S_{\square ABCD}=BC\cdot CD=2\sqrt{3}\cdot 2=4\sqrt{3}.$

故选(A).

[解2] 由设 $BE=1,\ EF=2,$

知 $FD=1,\ ED=3,\ BD=4.$

由 $\triangle AEB\backsim\triangle DEA$,有 $AE^2=BE\cdot ED=1\cdot 3,$

从而 $AE=\sqrt{3}.$

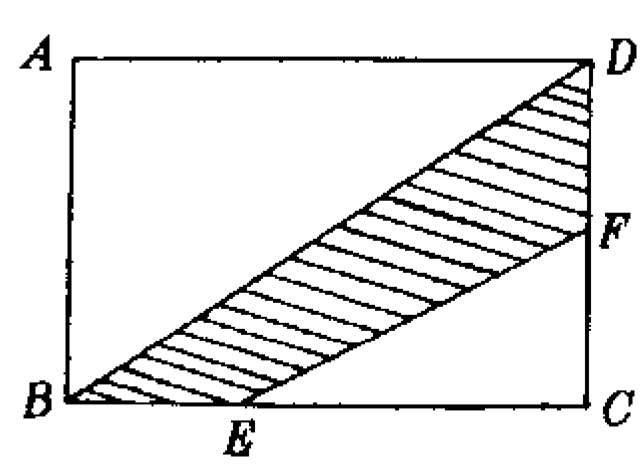
则 $S_{\square ABCD}=2S_{\triangle ABD}=BD\cdot AE=4\sqrt{3}.$

故选(A).

18·61　如图,长方形 $ABCD$ 中,F 为边 CD 的中点,边 BC 的长等于 BE 长的3倍.则此长方形面积等于阴影部分面积的倍数是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.

（第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年）



[解] 设 $CF=a,BE=b,$

则 $CD=2a,\ BC=3b,$ 且 $CE=2b.$

则 $S_{阴影}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle ECF}$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b$$
$$= 2ab.$$

又 $S_{ABCD} = 2a \cdot 3b = 6ab = 3S_{阴影}.$

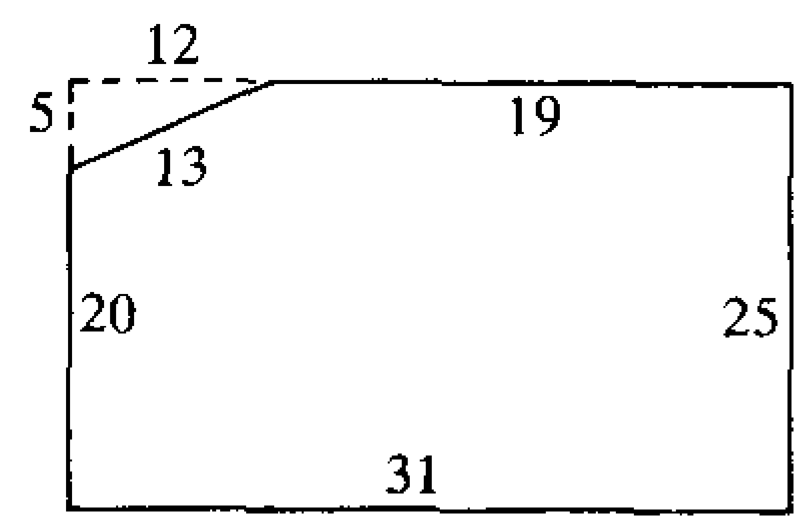
故选(B).

18·62　将一长方形切去一角后得一边长分别是 13,19,20,25 和 31 的五边形(顺序不一定按此).则五边形面积为

(A)459.　(B)600.　(C)680.　(D)720.　(E)745.

(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[解]　考虑到切去的直角三角形三边关系:

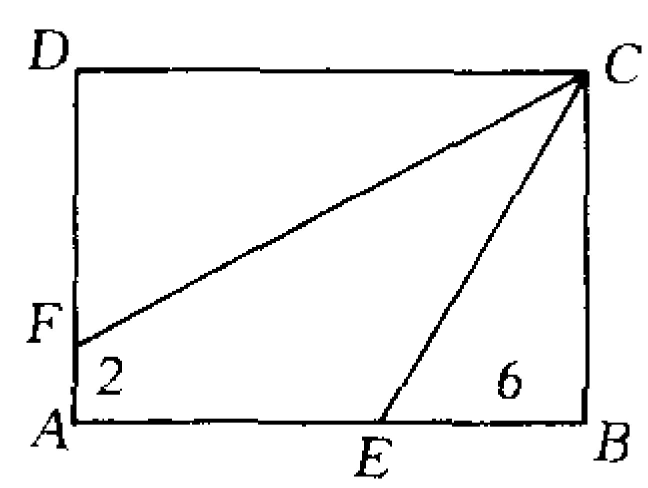


$(31-19)^2+(25-20)^2=13^2$,知原长方形边长分别为 25 和 31(如右图).

$$\therefore S_{五边形} = S_{长方形} - S_{三角形}$$
$$= 31 \times 25 - \frac{1}{2} \times 12 \times 5$$
$$= 745.$$

故选(E).

18·63　矩形 $ABCD$ 的 $\angle C$ 被 CE, CF 三等分,其中 E 在 AB 上,F 在 AD 上,又 $AF = 2, BE = 6$,则 S_{ABCD} 最接近



(A)110.　(B)120.　(C)130.

(D)140.　(E)150.

(第 47 届美国高中数学考试,1996 年)

[解]　由题设 $\angle ECB = \frac{1}{3}\angle DCB = 30°$,

则　$CB = \sqrt{3}BE = 6\sqrt{3}$, $\therefore DF = 6\sqrt{3} - 2$.

同理可求得　$CD = \sqrt{3}DF = 18 - 2\sqrt{3}$.

$\therefore$　$S_{ABCD} = CB \cdot CD = 108\sqrt{3} - 36 \approx 150$.

故选(E).

18·64　一矩形 R 的边长为a 和b, 其中 $a < b$,要得到边长为 x, $y(x < a, y < a)$ 的矩形,使其周长为 R 的周长的$\frac{1}{3}$,面积为 R 的面积

的$\frac{1}{3}$,这样的不同的矩形的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 4.　　(E) 无限多.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

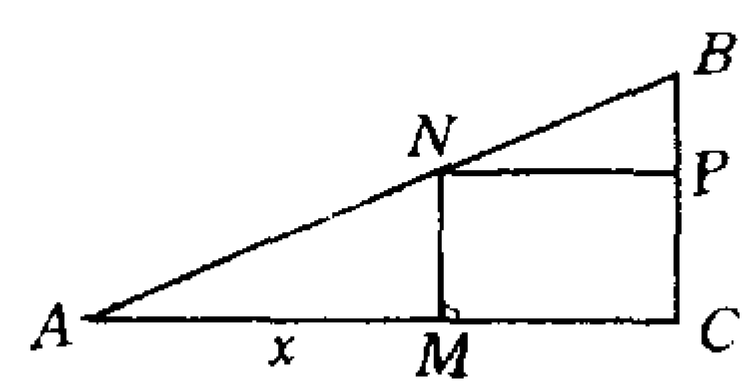
[解]　由题设可有 $3(x+y)=a+b$,　且 $3xy=ab$,两式两边相除有

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

因　$x<a<b$,　$y<a<b$,则上式不能成立.

故选(A).

18·65　在 Rt△ABC 中,$BC=5$,$AC=12$,$AM=x$,$MN\perp AC$,$NP\perp BC$.若 $y=MN+NP$ 为矩形 $MCPN$ 的半周长,则



(A) $y=\frac{1}{2}(5+12)$.

(B) $y=\frac{5x}{12}+\frac{12}{5}$.

(C) $y=\frac{144-7x}{12}$.　　(D) $y=12$.

(E) $y=\frac{5x}{12}+6$.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)

[解]　由相似三角形性质有$\frac{MN}{x}=\frac{5}{12}$,　即　$MN=\frac{5}{12}x$.

又　$NP=12-x$,

则　$y=NP+MN=\frac{144-7x}{12}$.

故选(C).

18·66　三角形的底为 b,高为 h,一矩形内接于三角形,其底在三角形的底边上,其高为 x,则矩形的面积为

(A) $\frac{bx}{h}(h-x)$.　　(B) $\frac{hx}{b}(b-x)$.　　(C) $\frac{bx}{h}(h-2x)$.

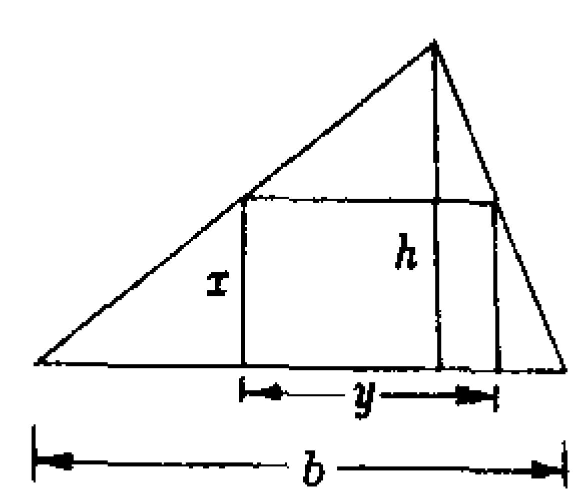
(D) $x(b-x)$.　　(E) $x(h-x)$.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解]　设矩形长为 y(如图),由相似形性质有

$$\frac{h-x}{y}=\frac{h}{b},\ 即\quad y=\frac{b}{h}(h-x).$$

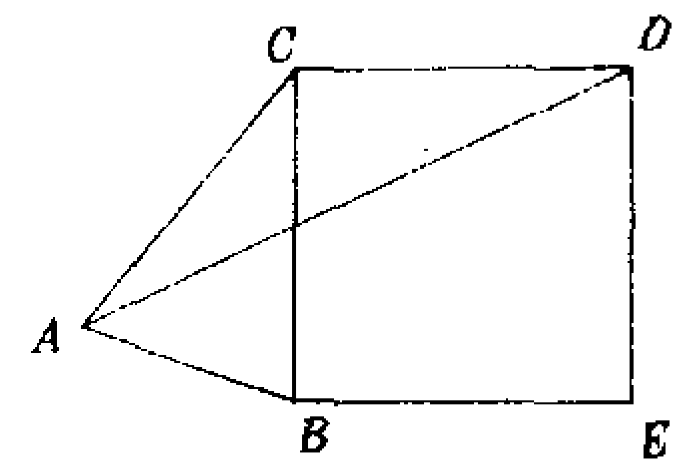
$$\therefore\quad S_{矩形}=xy=\frac{bx}{h}(h-x).$$



故选(A).

第4节 正方形

18·67 在$\triangle ABC$中,$CA = CB$,以$\triangle ABC$的边BC向外侧作正方形$BCDE$,若$\angle DAB$的度数为α,则



(A) α视$\triangle ABC$而定.

(B) α与三角形无关.

(C) $\alpha < \angle CAB$.

(D) $\alpha = \angle CAD$.

(E) $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(中国广东省深圳市初中数学竞赛,1988年)

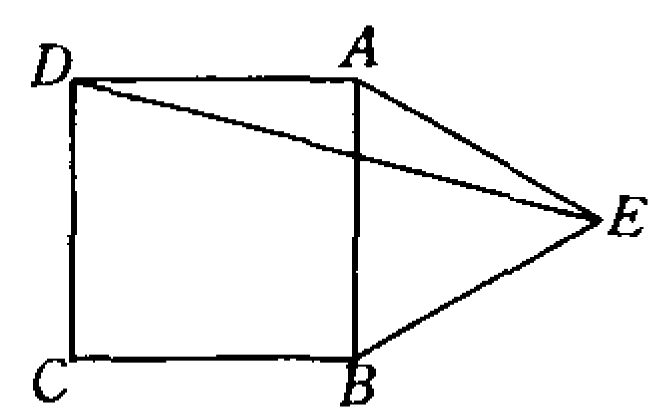
[解] 设$\angle CAD = \beta$,由三角形内角和性质有

$$[180^\circ - 2(\alpha + \beta)] + 90^\circ + 2\beta = 180^\circ,$$

得 $\alpha = 45^\circ$. 即α与等腰三角形形状无关.

故选(B).

18·68 如图,$ABCD$是正方形,又知$\triangle ABE$是等边三角形且E点在正方形$ABCD$之外.$\angle AED$的度数是



(A)10. (B)12.5. (C)15.

(D)20. (E)25.

(第30届美国高中数学考试,1979年)

[解] 在$\triangle ADE$中,因为$\angle DAE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$,且$DA = AB = AE$,

则
$$\angle AED = \left(\frac{180 - 150}{2}\right)^\circ = 15^\circ.$$

故选(C).

18·69 在$\triangle ABC$中,$CA = CB$,以$\triangle ABC$的边BC向外侧作正方形$BCDE$,若$\angle DAB$的度数为x,则

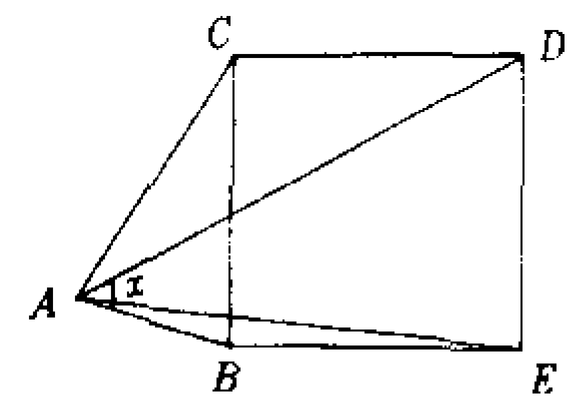
(A) x视$\triangle ABC$而定. (B) x与$\triangle ABC$无关.

(C) $x=\angle CAD$.　　　　(D) x 不可能等于 $\angle CAB$.

(E) $45^\circ < x < 90^\circ$.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)

[解]　由题设知



$\angle ACB = 180^\circ - 2\angle CAB$.

且由 $AC = CD$　知

$$\angle CAD = \frac{1}{2}[180^\circ - (\angle ACB + 90^\circ)],$$

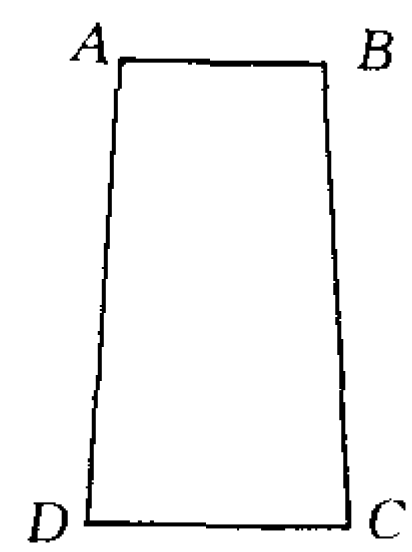
即　$\angle CAD = 45^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle CAB)$

$= \angle CAB - 45^\circ$,

又　$\angle CAD = \angle CAB - x$,　故　$x = 45^\circ$.

故选(B).

18·70　如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel DC$,$AB = 998$,$DC = 1001$,$AD = 1999$,点 P 在线段 AD 上,则满足条件 $\angle BPC = 90^\circ$ 的点 P 的个数为



(A)0.　　　(B)1.

(C)2.　　(D) 不小于 3 的整数.

(中国初中数学联赛,1999 年)

[解]　AD 的中点 M,对 BC 张成 90° 角;

又设 N 在 AD 上,且 $AN : ND = 998 : 1001$,

由 $\triangle ABN$ 和 $\triangle DCN$ 都为等腰三角形推知,N 对 BC 张成 90° 角.

注意到以 BC 为直径的圆与 AD 至多有两个交点,可知所求点的个数为 2.

故选(C).

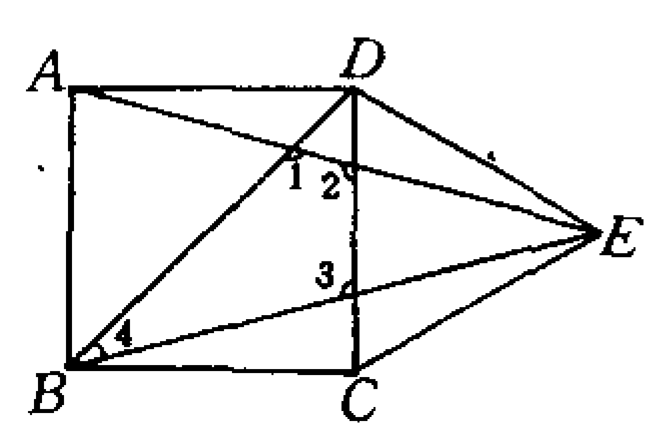
18·71　如图,若 $ABCD$ 为正方形,$DE = EC$,$\angle CDE = 60^\circ$,则下列关系式:

(1)$\angle 1 : \angle 4 = 4 : 1$;

(2)$\angle 1 : \angle 3 = 1 : 1$;

(3)$(\angle 1 + \angle 2) : (\angle 3 + \angle 4) = 5 : 3$.

其中正确的是



(A) (1),(2),(3).　　　　　　(B) 仅(1).

(C) 仅(1) 和(3).　　　　　　(D) 仅(2) 和(3).

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1989 年）

[解]　显然 $\triangle CDE$ 为等边三角形.

又　$\angle 3 = \angle 2$, $\angle DAE = \angle DEA = \angle EBC = 15^\circ$.

故

$$\angle 2 = \angle 3 = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ,$$

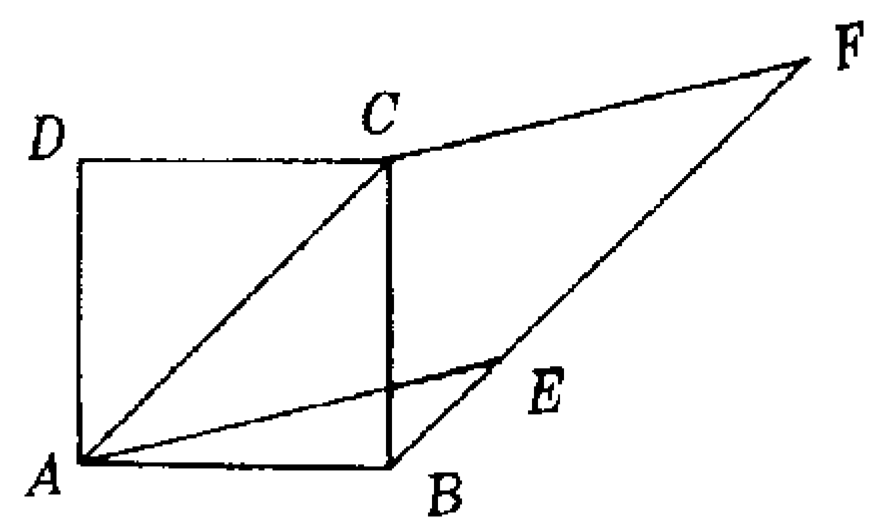
$$\angle 1 = 60^\circ + 45^\circ + 15^\circ = 120^\circ,\ \angle 4 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$(\angle 1 + \angle 2) : (\angle 3 + \angle 4) = 225 : 135 = 5 : 3.$$

综上(1),(3) 成立,(2) 不成立.

故选(C).

18·72　如图,$ABCD$ 是正方形,$BF \parallel AC$,$AEFC$ 是菱形,则 $\angle ACF$ 与 $\angle F$ 度数的比是



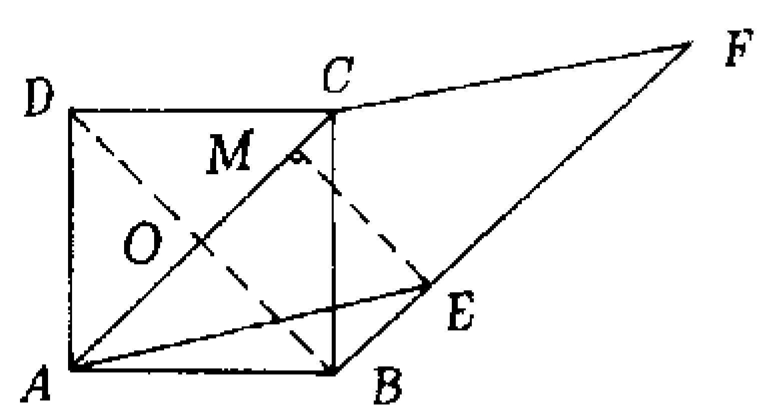
(A) 3.　　　　(B) 4.

(C) 5.　　　　(D) 不是整数.

（中国天津市初中数学竞赛,1983 年）

[解 1]　连 BD 交 AC 于 O,过 E 作 $EM \parallel BD$,则 $EM \perp AC$.

易证四边形 $BEMO$ 为矩形.



$$\therefore\quad EM = BO = \frac{1}{2}AC.$$

又　$AEFC$ 为菱形,有 $AE = AC$, 则

$$EM = \frac{1}{2}AE.$$

从而　在 $\mathrm{Rt}\triangle AEM$ 中,$\angle EAM = 30^\circ$,

因而 $\angle F = 30^\circ$.

这样

$$\angle ACF = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

则　$\angle ACF$ 的度数 : $\angle F$ 的度数 $= 150 : 30 = 5$.

故选(C).

[解 2]　设正方形边长为 1,则 $AC = \sqrt{2}$.在 $\triangle ABE$ 中,$\angle ABE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.则由正弦定理有

$$\frac{AE}{\sin\angle ABE} = \frac{AB}{\sin\angle AEB},$$

由　$AE = AC = \sqrt{2}, AB = 1,$

选择题卷

$\therefore \quad \sin\angle AEB = \dfrac{AB\sin\angle ABE}{AE} = \dfrac{1}{2}$,

又 $\angle AEB$ 为锐角, 则 $\angle AEB = 30°$.

由 $CF \parallel AE$, 知 $\angle F = 30°$, 从而 $\angle ACF = 150°$.

$\therefore \quad \angle ACF : \angle F = 150° : 30° = 5 : 1 = 5$.

故选(B).

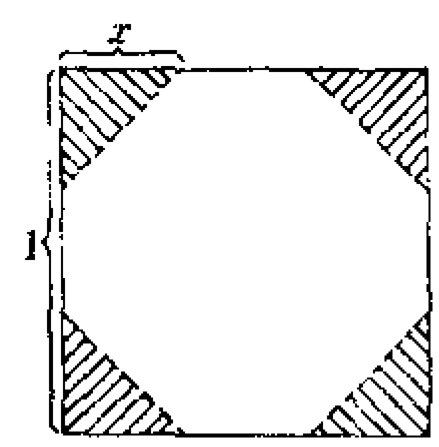
18·73 由一正方形的各角处截去相等的等腰直角三角形得到一个正八边形,若正方形的边长为1,则这些三角形的直角边长为

(A) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$. (E) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$.

(第8届美国高中数学考试,1957年)

[解] 设截去的等腰直角三角形一腰长为 x,则底边长为$\sqrt{2}x$.



则 $$x + \sqrt{2}x + x = 1.$$

得 $$x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

故选(B).

18·74 已知正方形 Ⅰ 的对角线长为 $a+b$,正方形 Ⅱ 的面积为正方形 Ⅰ 的面积的2倍.则正方形 Ⅱ 的周长为

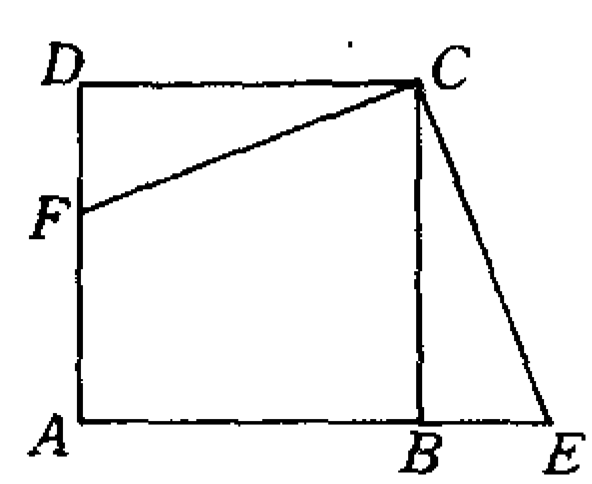
(A) $(a+b)^2$. (B) $\sqrt{2}(a+b)^2$. (C) $2(a+b)$.

(D) $\sqrt{8}(a+b)$. (E) $4(a+b)$.

(第11届美国高中数学考试,1960年)

[解] 正方形 Ⅰ 的面积为$\left(\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(a+b)^2$,则正方形 Ⅱ 的面积为$(a+b)^2$,其周长为$4(a+b)$.

故选(E).



18·75 F 为正方形$ABCD$的边AD上的任一点,$CE \perp CF$交AB延长线于E,若正方形$ABCD$的面积为256,$\triangle CEF$的面积为200,则BE的长为

(A) 12.　(B) 14.　(C) 15.　(D) 16.　(E) 20.

（第 14 届美国高中数学考试，1963 年）

[解]　由设有 $CD = CB, \angle DCF = \angle BCE$,

故　$Rt\triangle CDF \cong Rt\triangle CBE$，有 $CF = CE$.

则　$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CF = \frac{1}{2} CE^2 = 200$,

即　$CE^2 = 400$.　$S_{\text{正方形}ABCD} = CB^2 = 256$,

又由勾股定理　$BE^2 = CE^2 - CB^2 = 400 - 256 = 144$,

所以　$BE = 12$.

故选(A).

18·76　若一正方形的面积与其周长在数值上相等，而一正三角形的面积也与其周长在数值上相等，则前者的边心距与后者的边心距比较时，前者边心距的长

(A) 等于后者.　(B) $\frac{4}{3}$ 倍于后者.　(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍于后者.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 倍于后者.　(E) 与后者的关系不定.

（第 2 届美国高中数学考试，1951 年）

[解]　设正方形边长为 a_1，边心距为 p_1；正三角形边长为 a_2，边心距为 p_2，高为 h.

由设有　$a_1^2 = 4a_1$，又 $2p_1 = a_1$,

故　$(2p_1)^2 = 4(2p_1)$，得 $p_1 = 2$.

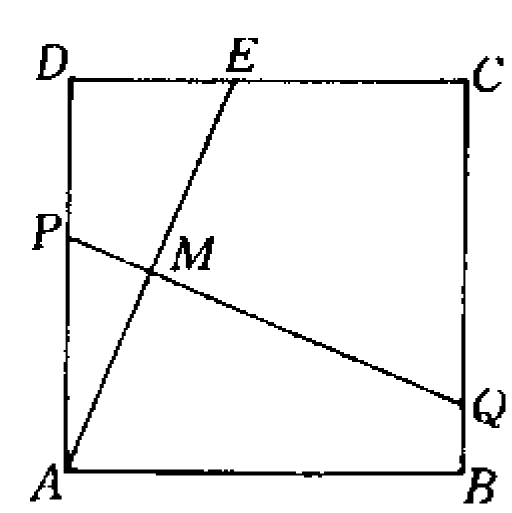
又由设　$\frac{\sqrt{3}}{4} a_2^2 = 3a_2$，及 $3p_2 = h$，而 $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a_2$,

故　$a_2 = 2\sqrt{3} p_2$,

从而　$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3} p_2)^2 = 3 \cdot 2\sqrt{3} p_2$,

得　$p_2 = 2 = p_1$.

故选(A).



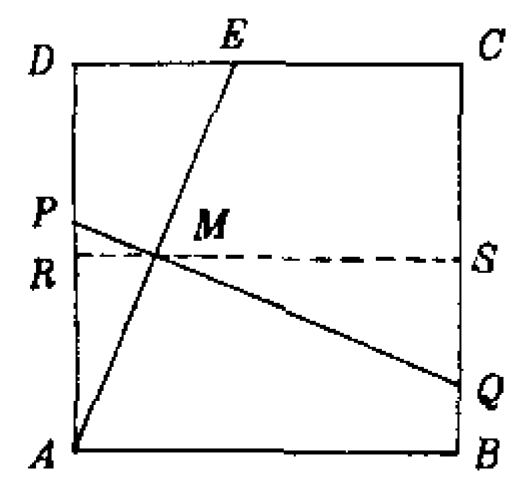
18·77　正方形 $ABCD$（如图）的边长为12英寸，于其中作线段 AE，E 在 DC 边上，DE 长 5 英寸. AE 的垂直平分线分别与 AE，AD 和 BC 相交于 M，P 和 Q，线段 PM 和 MQ 的比是

(A) 5 : 12. (B) 5 : 13. (C) 5 : 19. (D) 1 : 4. (E) 5 : 21.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解] 如图,过 M 作 AB 的平行线,与 AD 相交于 R, 与 BC 相交于 S, 那么

$$RM = \frac{1}{2}DE = 2\frac{1}{2}\text{ 英寸}.$$



因此 MS 的长是 $12 - 2\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$ 英寸.

$\because$ $Rt\triangle PMR \backsim Rt\triangle QMS$,

$\therefore$ $PM : MQ = RM : MS$

$$= 2\frac{1}{2} : 9\frac{1}{2}$$

$$= 5 : 19.$$

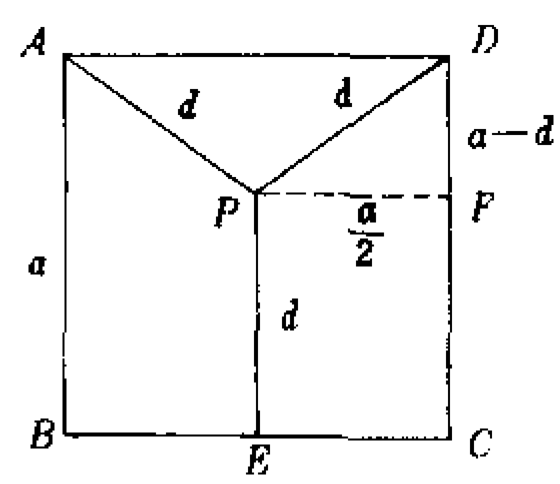
故选(C).

18·78 P 为边长为 a 的正方形内的一点,P 到正方形的一边的两个端点以及到这边的对边等距离,若 d 表示这个相同的距离,则 d 等于

(A) $\frac{3a}{5}$. (B) $\frac{5a}{8}$. (C) $\frac{3a}{8}$. (D) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. (E) $\frac{a}{2}$.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解] 作 $PF \perp CD$ 于 F,则在 $Rt\triangle PDF$ 中,由勾股定理有

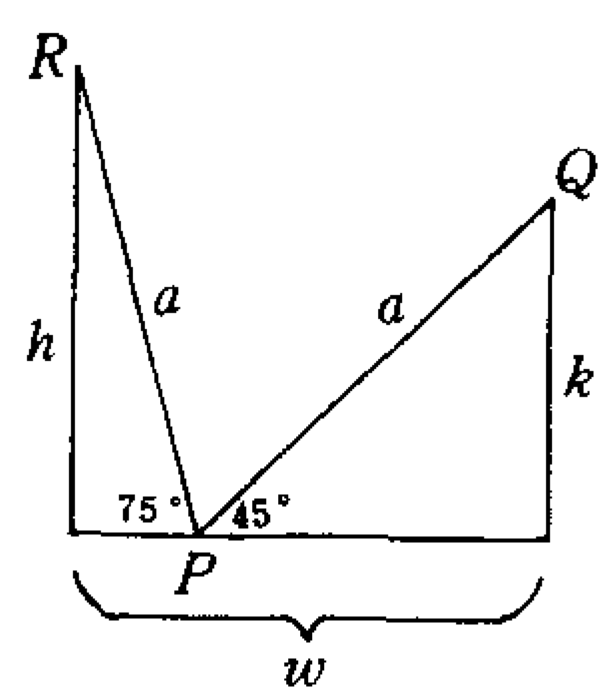


$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-d)^2 = d^2,$$

解得 $d = \frac{5a}{8}$.

故选(B).

18·79 如图,两面墙间的距离为 w,它们之间的 P 点处有一个梯子.梯子的长度为 a.梯子向一侧墙靠去,上端触墙于 Q 点.Q 到地面的距离为 k.此时梯子与地面成 45° 角,梯子向另一侧墙靠去,上端触墙于 R 点.R 到地面的距离为 h,此时梯子与地面成 75° 角.那么两墙间的距离 w 为

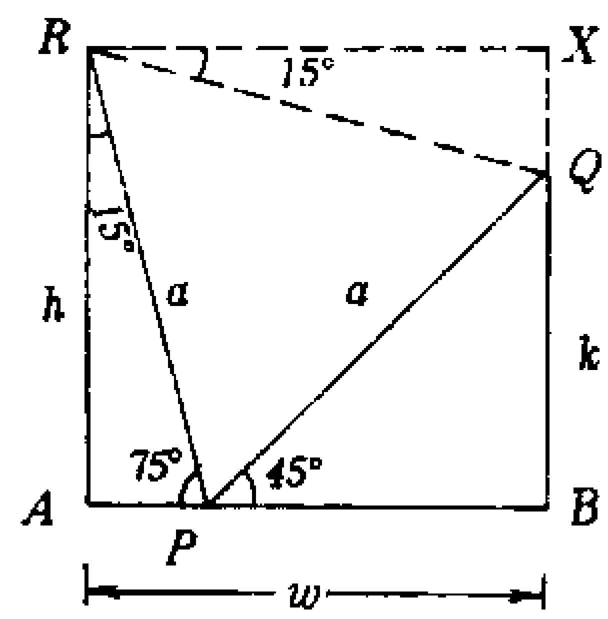


(A) a. (B) RQ. (C) k.

(D) $\frac{h+k}{2}$. (E) h.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解]　如图,作 $RX \perp BQ$,交 BQ 延长线于 X.



因为 $\angle QPR = 60°$,所以 $\triangle PRQ$ 是等边三角形,即 $RQ = a$.

同时　$\angle QRX = 90° - 15° - 60° = 15°$
$= \angle ARP$,

所以　$\triangle ARP \cong \triangle XRQ$,　因而　$w = h$.

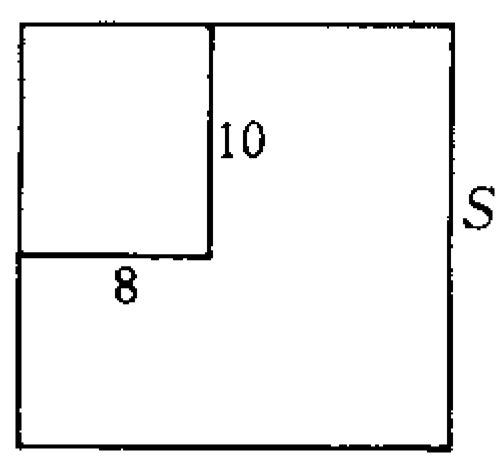
故选(E).

18·80　一个 8×10 的桌子如图①所示,放在正方形房间的一角,房屋的主人想搬动桌子,如图②放置.

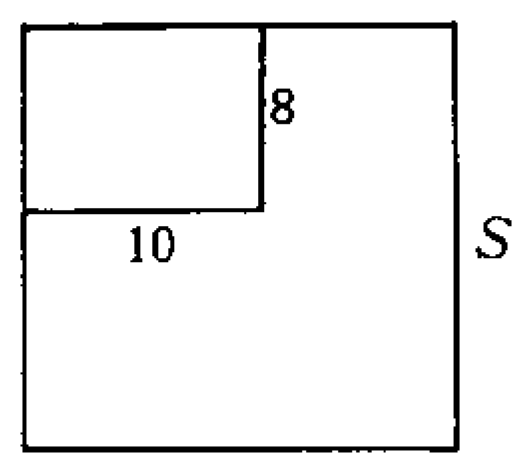
设房间的长为 S,那么要使移动能够实现.而且既不倾斜桌子,也不把桌子锯断,S 的最小整数值是

(A) 11.　　(B) 12.　　(C) 13.　　(D) 14.　　(E) 15.

(第39届美国高中数学考试,1988年)

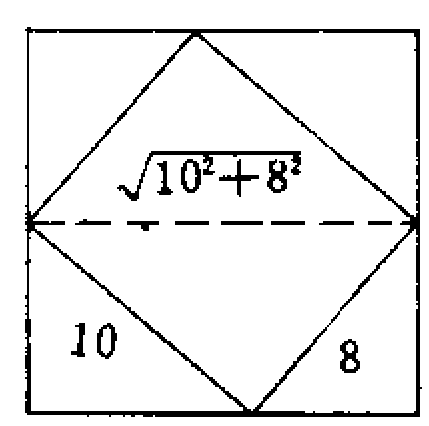


图①



图②

[解]　因为矩形桌面若由竖变横挪动,则房间最窄应容许桌面对角线挪动(变向).



$\because$　$\sqrt{10^2+8^2}$ 不是整数,

$\therefore$　$S_{min} = [\sqrt{10^2+8^2}] + 1 = [\sqrt{164}] + 1 = 13$.

故选(C).

18·81　一个周长为20的正方形内接于一个周长为28的正方形,在内的正方形的一个顶点与在外的正方形的一个顶点的最大距离是

(A) $\sqrt{58}$.　　(B) $\frac{7\sqrt{5}}{2}$.　　(C) 8.　　(D) $\sqrt{65}$.　　(E) $5\sqrt{3}$.

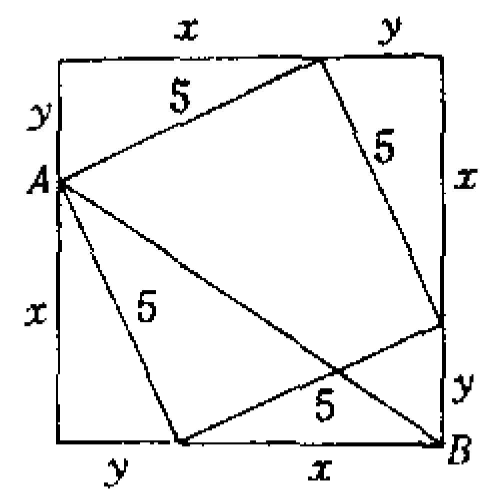
(第44届美国高中数学考试,1993年)

[解]　内接正方形与外面大正方形的每边都交于一点.设这些点

把边分成 x, y 两部分.

这样 $x+y=7$, $x^2+y^2=25$, $x \geqslant y$.

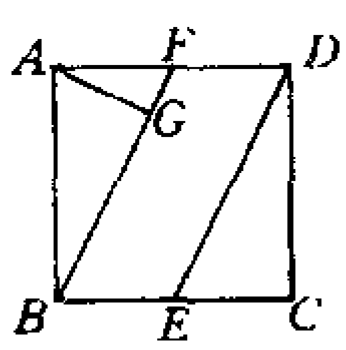
解得 $x=4, y=3$. 所以从里面正方形的顶点到外面正方形的顶点的最大距离为



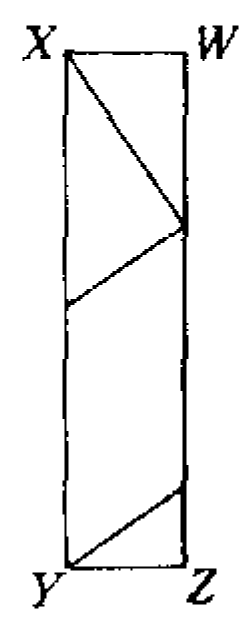
$$AB = \sqrt{x^2+(x+y)^2} = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}.$$

故选(D).

18·82 一个边长为 2 的 正方形被分为四部分,如图 ①,其中 E, F 是一组对边 BC, AD 的中点, AG 垂直于 BF. 这四个部分能重新组成一个矩形,如图 ②,那么, $\dfrac{XY}{YZ}$ 等于



图①



图②

(A) 4. (B) $1+2\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{5}$.

(D) $\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$. (E) 5.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解 1] 由图中可以看出:

$$XY = BF + ED = 2BF, \quad YZ = AG.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中, $BF = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$,

又 $\mathrm{Rt}\triangle AFG \backsim \mathrm{Rt}\triangle BFA$, 有 $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AF}{FB}$,

即
$$AG = \frac{AB \cdot AF}{FB} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

所以 $XY : YZ = 2BF : AG = 2\sqrt{5} : \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 5.$

故选(E).

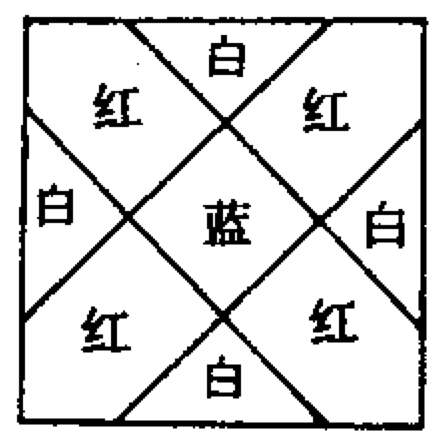
[**解 2**] 由 $XY = 2ED = 2\sqrt{1^2+2^2} = 2\sqrt{5}$，由图形等积性有

又 $XY \cdot YZ = AB^2$，故 $YZ = \dfrac{AB^2}{XY} = \dfrac{2^2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

即 $$\frac{XY}{YZ} = 5.$$

故选(E).

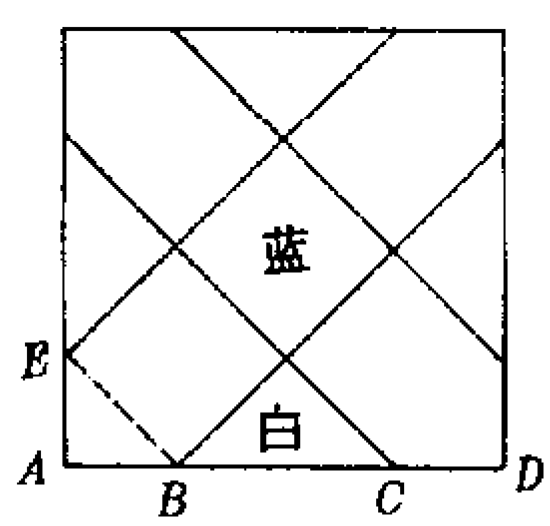
18·83 如图，一正方形的旗子上有一等宽的红十字(十字形关于对角形对称)，正中央是蓝色的小正方形，其余地方为白色．如果整个十字形(包括红，蓝)占旗面积的 36%，那么蓝色正方形面积占旗面积的百分数为



(A) 0.5.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 6.

(第 40 届美国高中数学考试，1989 年)

[**解**] 设正方形边长为 10，则其面积为 100．由题设有

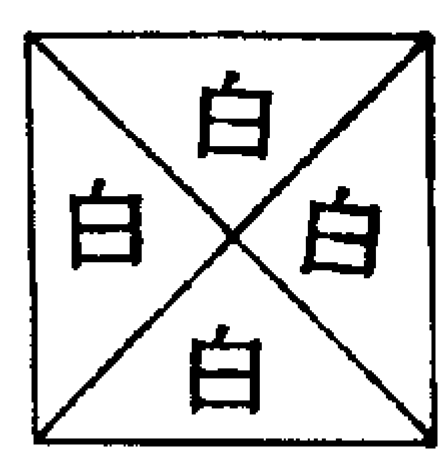


$$S_{白} = 100 \cdot (1 - 36\%) = 64,$$

且四个白色小三角可拼成一个方块，它的边长为 $\sqrt{64} = 8$.

这样，如图所示，有

$$AB = \frac{1}{2}(10-8) = 1,$$

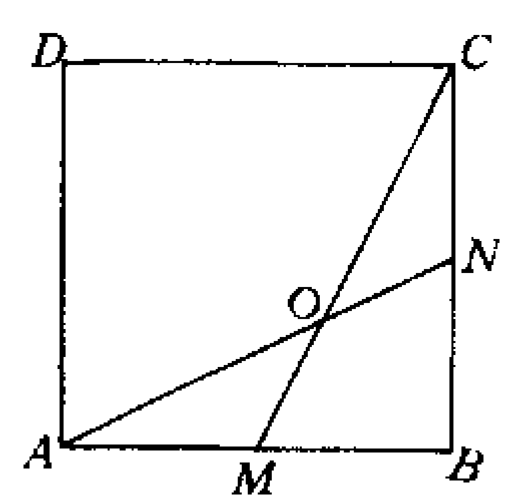


所以 $EB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

则 $$S_{蓝} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

故选(C).

18·84 如图，AB 和 BC 是正方形 $ABCD$ 的邻边；M 是 AB 的中点，N 是 BC 的中点，AN 和 CM 相交于 O．四边形 $AOCD$ 和 $ABCD$ 的面积比是



(A) $5:6$.　(B) $3:4$.

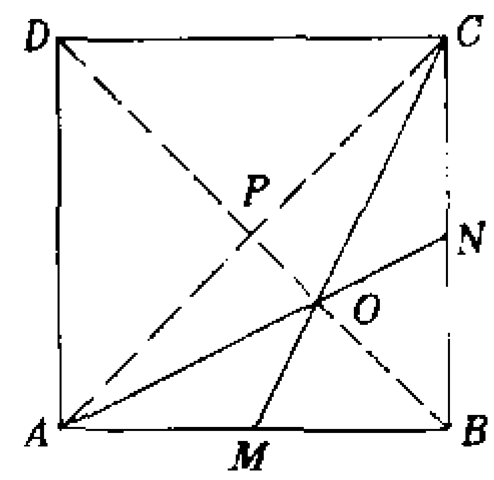
(C) $2:3$.　(D) $\sqrt{3}:2$.

(E) $(\sqrt{3}-1):2$.

(第 26 届美国高中数学考试，1975 年)

[**解**] 连 AC，DB．因为 $ABCD$ 是正方形，则 AC 和 DB 互相垂直平分于 P．若 a 表示正方形的边长，那么

$$AC = DB = a\sqrt{2}.$$



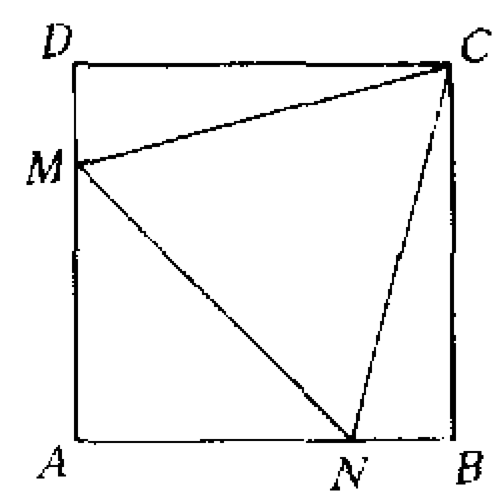
因 O 是 $\triangle ABC$ 的三中线的交点,所以

$$OP = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a.\ 这样\quad S_{\triangle AOC} = \frac{a^2}{6}.$$

这样 $S_{AOCD} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} = \frac{2}{3}a^2$.因而所求的比是 $2:3$.

故选(C).

18·85 如图,$ABCD$ 是一个正方形,CMN 是一个等边三角形.若 $ABCD$ 的面积是一平方英寸,那么 CMN 面积的平方英寸数是



(A) $2\sqrt{3}-3$. (B) $1-\sqrt{3}/3$.

(C) $\sqrt{3}/4$. (D) $\sqrt{2}/3$.

(E) $4-2\sqrt{3}$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 设 $DM = NB = x$;那么 $AM = AN = 1-x$.又若用 y 表示等边 $\triangle CMN$ 的边长,由勾股定理我们有

$$x^2 + 1^2 = y^2 \text{ 和 } (1-x)^2 + (1-x)^2 = y^2.$$

将第一个方程代入第二个方程中,我们得

$$2(1-x)^2 = x^2 + 1, \text{即 } x^2 - 4x + 1 = 0.$$

解得 $x = 2\pm\sqrt{3}$.但因为 $2+\sqrt{3} > 1$,则我们只能选择

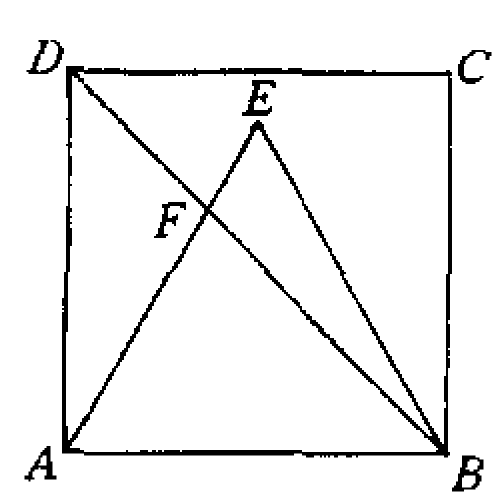
$$x = 2-\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle CMN} &= S_{\square ABCD} - S_{\triangle ANM} - S_{\triangle NBC} - S_{\triangle CDM} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2). \end{aligned}$$

代入 $x = 2-\sqrt{3}$,我们得到 $S_{\triangle CMN} = 2\sqrt{3}-3$.

故选(A).

18·86 等边 $\triangle ABE$ 的顶点 E 在正方形 $ABCD$ 内,F 是对角线 BD 和线段 AE 的交点.若 AB 长 $\sqrt{1+\sqrt{3}}$,那么 $\triangle ABF$ 的面积是

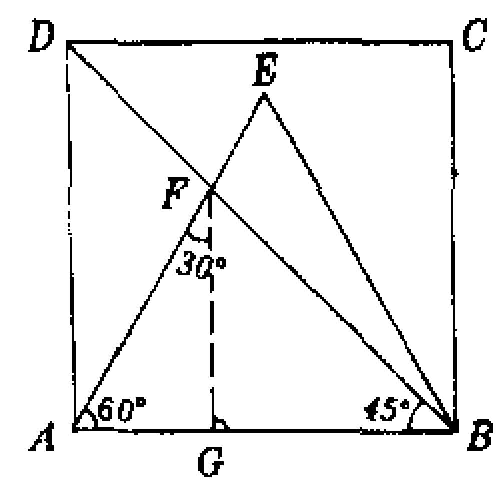


(A) 1. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $4-2\sqrt{3}$. (E) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）

[解] 作$\triangle AFB$的高FG，又设x表示AG的长．



从右图中可以看到 $FG=\sqrt{3}x$，

且 $\sqrt{1+\sqrt{3}}=AB=x(1+\sqrt{3})$，

即 $1+\sqrt{3}=x^2(1+\sqrt{3})^2$，

两边除以 $1+\sqrt{3}$ 有 $1=x^2(1+\sqrt{3})$，

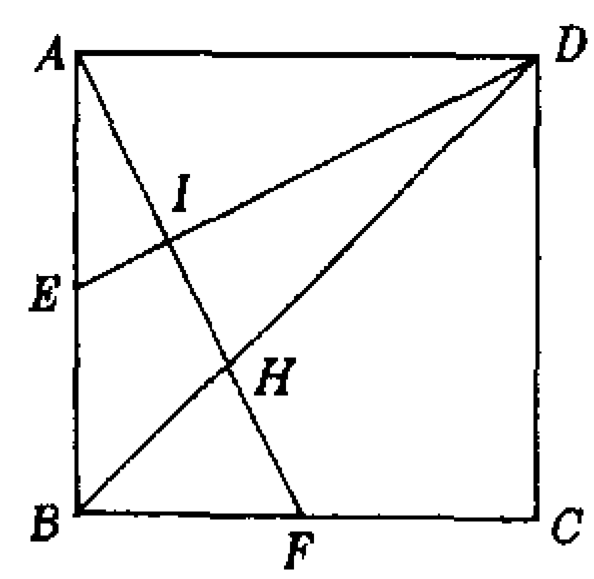
所以
$$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot FG$$
$$=\frac{1}{2}\cdot x^2(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

故选(C)．

18·87 如图 $ABCD$ 是 2×2 的正方形，E 为AB 的中点，F 是BC 的中点，AF 和DE 相交于 I，又 BD 和AF 相交于H，则四边形 $BEIH$ 的面积为

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $\frac{7}{15}$.

(D) $\frac{8}{15}$. (E) $\frac{3}{5}$.



（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

[解] 易证 $\triangle ABF\cong\triangle DAE$，则 $\angle ADE=\angle BAF$，且令其为 α．又可得 $\angle AIE=90°$．

则 $\sin\alpha=\frac{AE}{ED}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$， 故 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

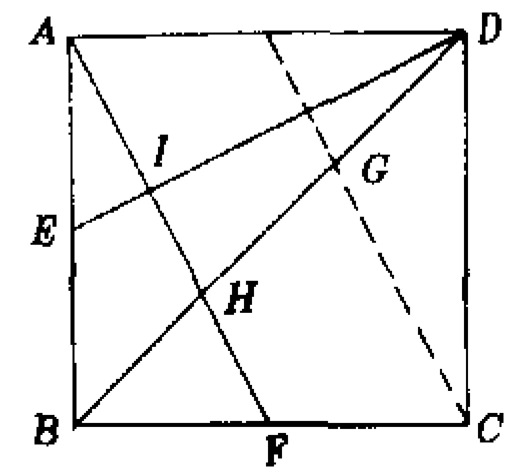
由题设可有 $S_{\triangle ABD}=2$， $S_{\triangle DBE}=1$.

由
$$ID=AD\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

又易证 $DH=\frac{2}{3}BD=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(从下页图可看出 H 为BG 中点，故 H,G 三等分BD)．

则 $S_{\triangle DIH}=\frac{1}{2}\cdot ID\cdot DH\sin\angle IDH$

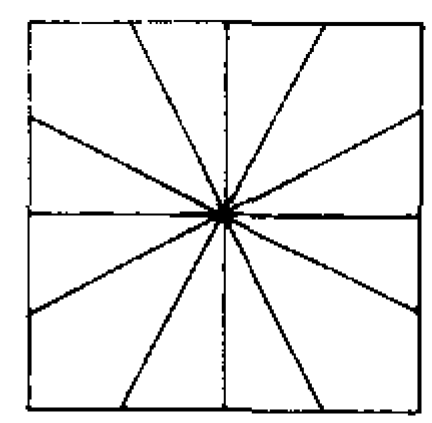


$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\sin(45^\circ-\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= \frac{8}{15}.$$

从而 $S_{BEIH} = 1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}.$

故选(C).

18·88 艾米将一块正方形的钟面画成一块投镖的靶板,利用"钟点位置"作为边界线(如图所示).如果 t 是8个三角形之一(例如,12点与1点间的区域)的面积,q 是4个角上的四边形之一(例如,1点与2点间的区域)的面积,那么$\frac{q}{t}$ 等于



(A) $2\sqrt{3}-2$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

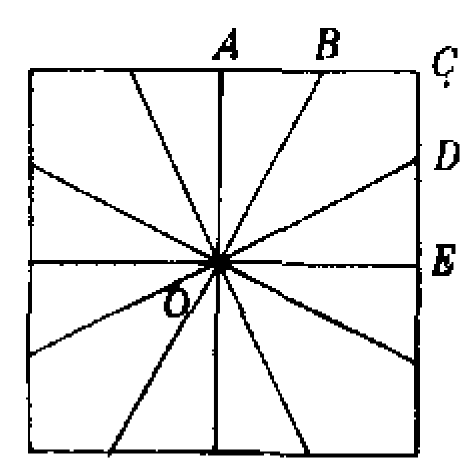
(D) $\sqrt{3}$. (E) 2.

(第44届美国高中数学考试,1993年)

[解] 设钟表的中心为 O,用 AOB 标记从12点到1点的三角形,用 $OBCD$ 标记从1点到2点的四边形,E 表示3点的位置(如图所示),那么 $\triangle AOB \cong \triangle EOD$.

令 $AB=1$, 因为 $\angle AOB = 30^\circ$,

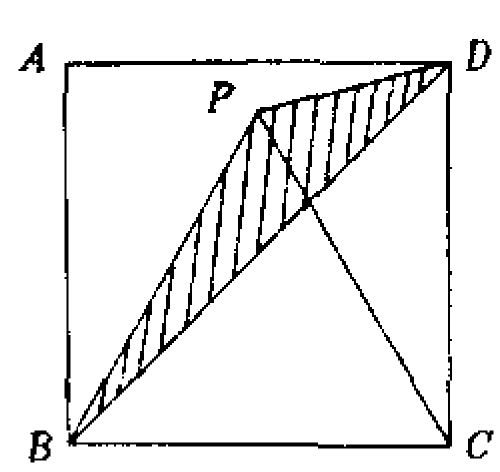
所以 $OA=\sqrt{3}$. $S_{OACE}=3$, $S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,



因此 $$\frac{q}{t}=\frac{S_{OBCD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{S_{OACE}-2S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOB}}$$
$$=\frac{S_{OACE}}{S_{\triangle AOB}}-2=2\sqrt{3}-2.$$

故选(A).

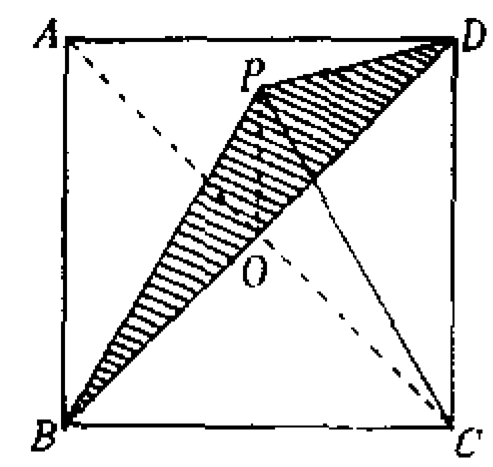
18·89 如图,$ABCD$ 是面积为1的正方形,$\triangle BPC$ 为正三角形,则 $\triangle BPD$ 的面积为



(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. (B) $\frac{2\sqrt{3}-1}{8}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.　(E) $\frac{1}{4}$.

（中国北京市初中数学竞赛，1984 年）



[解]　连 AC 交 BD 于 O，连 PO，则 $PO \parallel DC$.

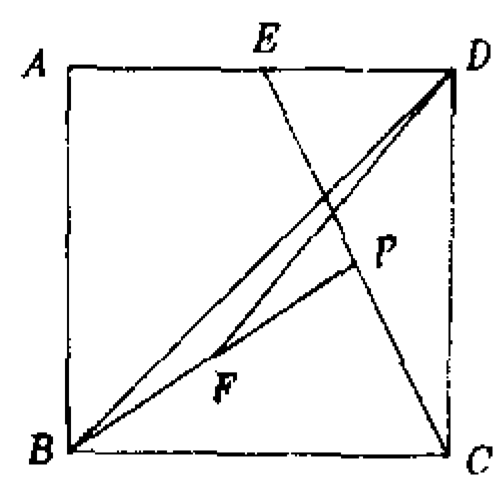
有　$S_{\triangle DPO} = S_{\triangle CPO}$.

$\therefore\quad S_{\triangle BPD} = S_{\triangle BPC} - S_{\triangle BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

故选(D).

18·90　如图，已知边长为 a 的方形 $ABCD$，E 为 AD 的中点，P 为 CE 的中点，F 为 BP 的中点．则 $\triangle BFD$ 的面积是

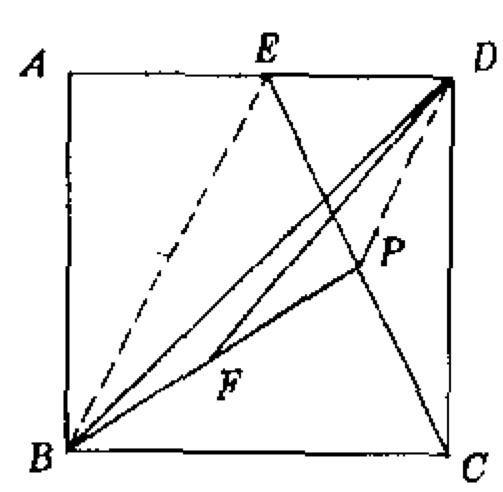


(A) $\frac{1}{64}a^2$.　　(B) $\frac{1}{32}a^2$.

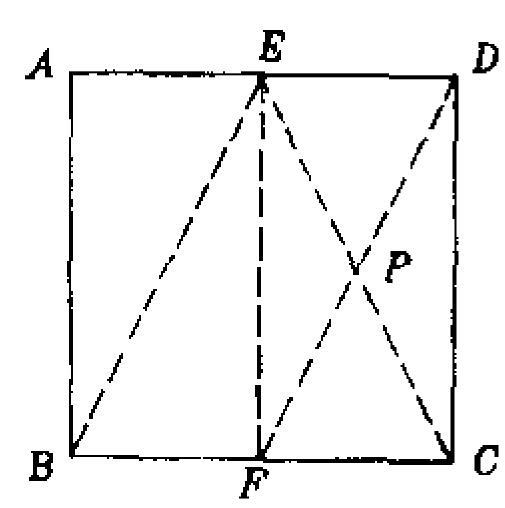
(C) $\frac{1}{16}a^2$.　　(D) $\frac{1}{8}a^2$.

（中国浙江省初中数学竞赛，1993 年）

[解]　连 PD，BE，由设 E，P 分别为 AD，EC 中点，利用矩形对角线性质(见图②)可证 $BE \parallel PD$.



图①



图②

$\therefore\quad S_{\triangle BFD} = \frac{1}{2}S_{\triangle BDP}$,

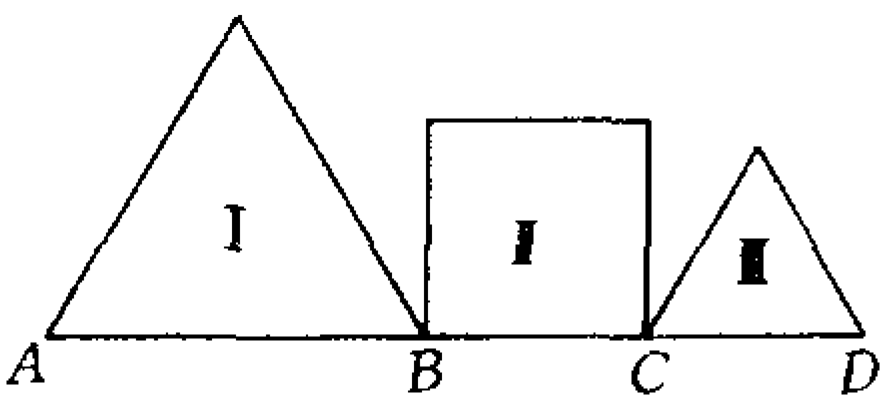
又　$S_{\triangle EPD} = S_{\triangle BDP}$，则　$S_{\triangle BFD} = \frac{1}{2}S_{\triangle EPD} = \frac{1}{4}S_{\triangle CDE}$.

而　$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$，　则　$S_{\triangle BFD} = \frac{1}{16}a^2$.

故选(C).

18·91　如图，图形 Ⅰ 与 Ⅲ 是等边三角形，它们的面积分别为

$32\sqrt{3}$与$8\sqrt{3}$平方英寸,图形Ⅱ是一个面积为32平方英寸的正方形,设线段AD的长减少了12.5%,但AB,CD的长仍保持不变,则此正方形面积减少的百分数是



(A) $12\frac{1}{2}$. (B) 25. (C) 50. (D) 75. (E) $87\frac{1}{2}$.

(第19届美国高中数学考试,1968年)

[解] 若正三角形边长为a,则其面积

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

由上公式于等边三角形Ⅰ,Ⅲ,可求出

$$AB=8\sqrt{2},\quad CD=4\sqrt{2}.$$

此外可求出正方形边长$BC=4\sqrt{2}$.

故 $$AD=AB+BC+CD=16\sqrt{2}.$$

而AD的12.5%即$2\sqrt{2}$,当BC减少$2\sqrt{2}$时还剩$2\sqrt{2}$,此时它的面积为8,即面积减少了75%.

故选(D).

18·92 边长为1的正方形$ABCD$,点E,F各在边AB与AD上,且$AE=AF$,若四边形$CDFE$有最大面积,最大面积是

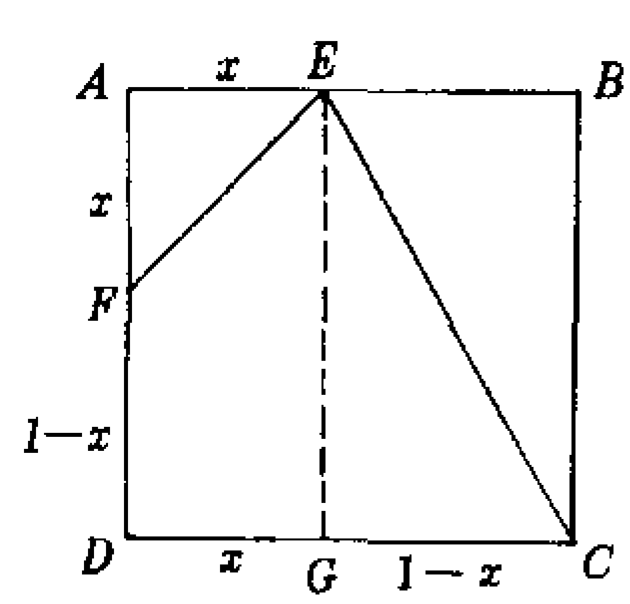
(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{9}{16}$. (C) $\frac{19}{32}$. (D) $\frac{5}{8}$. (E) $\frac{2}{3}$.

(第13届美国高中数学考试,1962年)

[解] 令$AE=AF=x$,作$EG\perp DC$,则

$$S_{\triangle EGC}=\frac{1}{2}EG\cdot GC=\frac{1-x}{2},$$

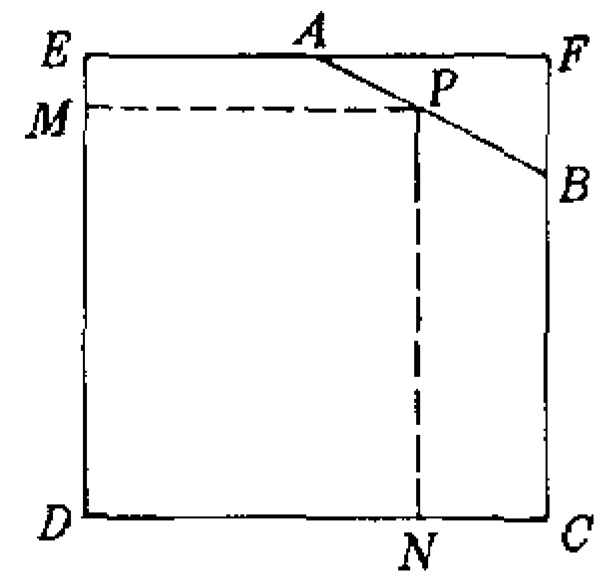
$$S_{梯形DFEG}=\frac{1}{2}x[1+(1-x)]=\frac{1}{2}x(2-x),$$



$$\therefore\quad S_{四边形CDFE}=S_{\triangle EGC}+S_{梯形DFEG}=\frac{1}{2}(1+x-x^2),$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,有极大值 $\frac{5}{8}$.

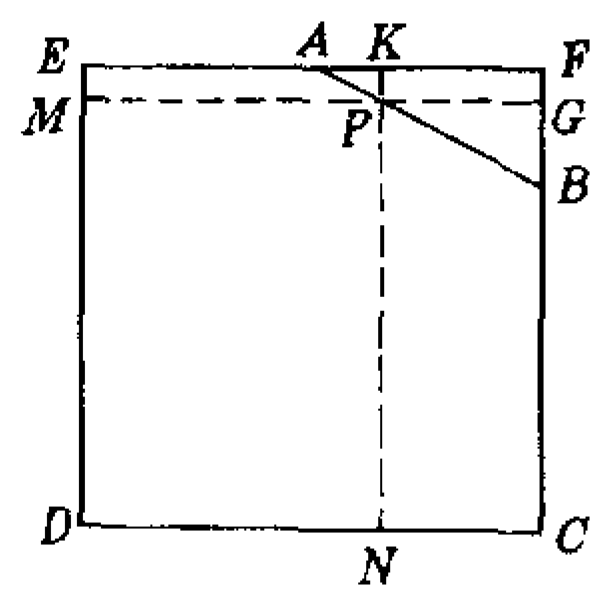
故选(D).



18·93 如图,边长为 4 的正方形截去一角成五边形 $ABCDE$,其中 $AF=2,FB=1$.在 AB 上求一点 P,使矩形 $PNDM$ 有最大的面积,则 P 点位置在

(A) A 点. (B) AB 的中点. (C) $\frac{AP}{PB}=2$ 的点. (D) B 点.

(中国江苏省徐州市初中数学竞赛,1988 年)



[解] 延长 MP,NP 分别交 FC,EF 于 G,K,设 $PK=x$,则

$$BG=1-x.$$

$\because\ \triangle BGP\backsim\triangle BFA$,$\therefore\ \frac{PG}{BG}=\frac{AF}{BF}=2$,

即 $$PG=2(1-x).$$

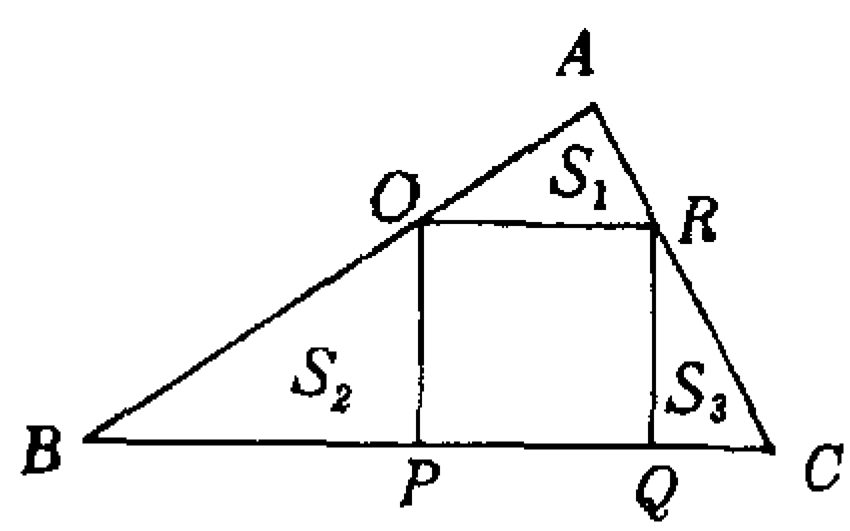
且 $$MP=4-2(1-x).$$

又 $$S_{PNDM}=MP\cdot PN=(4-x)[4-2(1-x)]$$
$$=-2x^2+6x+8,$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,S_{PNDM} 的最大值为 12.

即 P 与 B 重合时,S_{PNDM} 最大.

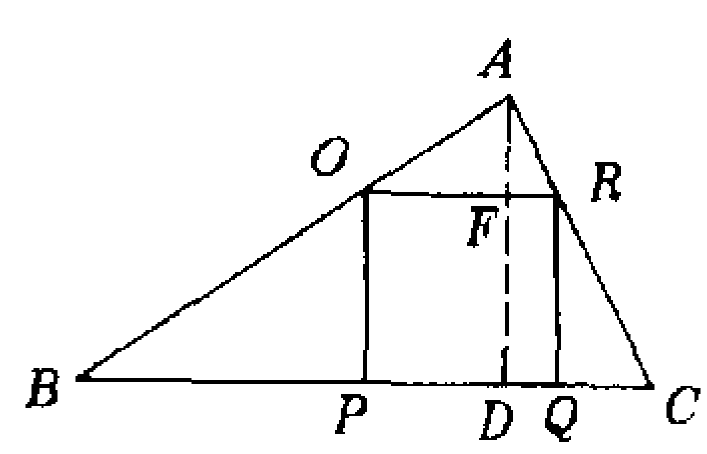
故选(D).



18·94 如图,正方形 $OPQR$ 内接于 $\triangle ABC$.已知 $\triangle AOR$、$\triangle BOP$ 和 $\triangle CRQ$ 的面积分别是 $S_1=1$, $S_2=3$ 和 $S_3=1$.那么,正方形 $OPQR$ 的边长是

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) 2. (D) 3.

(中国初中数学联赛,1991 年)



[解] 设正方形 $OPQR$ 的边长为 x,即 $OP=PQ=QR=OR=x$.

作 $\triangle ABC$ 的高 AD,并交 OR 于 F.

在 $\triangle AOR$ 中,已知 $S_1=1$, $OR=x$.

故得 $$AF=\frac{2S_1}{OR}=\frac{2}{x}.$$

同理可得 $BP=\frac{6}{x}$, $QC=\frac{2}{x}$.

故 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+x\right)\cdot\left(\frac{6}{x}+x+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2+10+\frac{16}{x^2}\right),$$

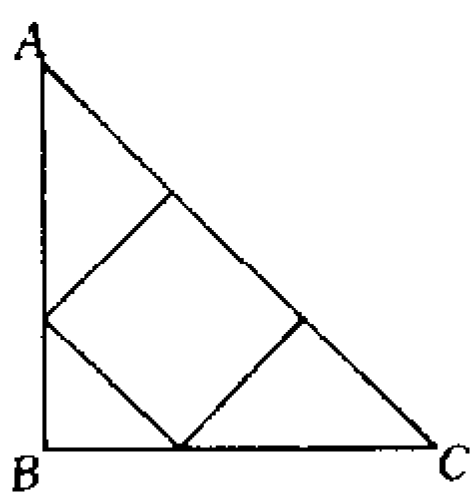
又 $S_{\triangle ABC}=S_1+S_2+S_3+S_{OPQR}=5+x^2$.

由 $\frac{1}{2}\left(x^2+10+\frac{16}{x^2}\right)=5+x^2$,

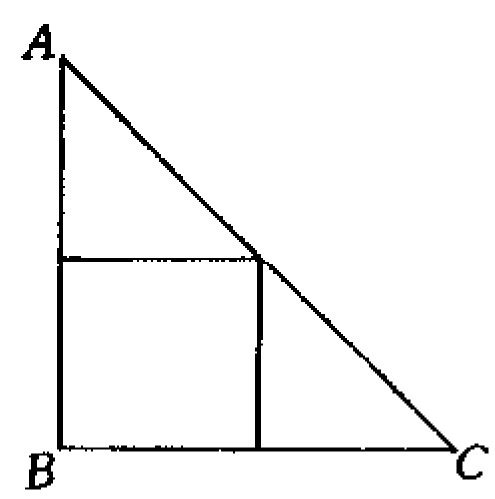
得 $x^4=16$, 则 $x=2$.

故选(C).

18·95 等腰直角$\triangle ABC$中有两种作内接正方形的方法,如图①



图①

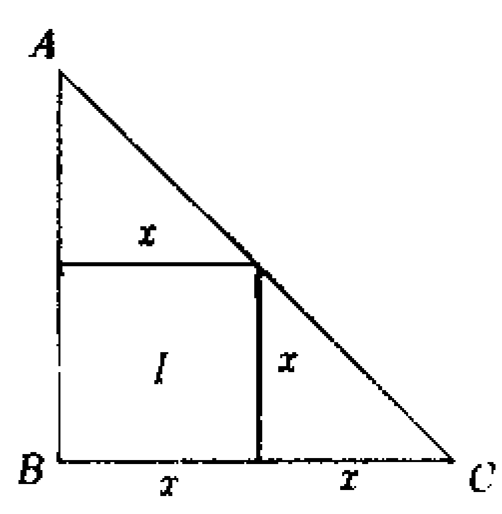


图②

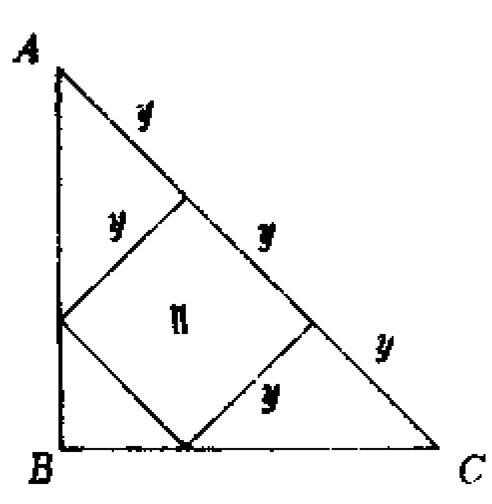
作的内接正方形面积是441cm²,则同一个$\triangle ABC$中按图②作的内接正方形面积是

(A) 378. (B) 392. (C) 400. (D) 441. (E) 484.

(第38届美国高中数学考试,1987年)



图③



图④

[解] 设 $AB=a$, 则 $AC=\sqrt{2}a$. 又设图③中正方形边长为x,图④中正方形边长为y,由题设

$x^2=441$ 得 $x=21$.

利用等腰直角三角形性质,不难从右图中看出:

$$a = AB = 2x = 42.$$

且 $$y = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3} \cdot 42\sqrt{2} = 14\sqrt{2}.$$

则 $$S_{\text{II}} = y^2 = 392.$$

故选(B).

18·96 一个等边三角形的周长比一个正方形的周长大1989cm,三角形的边长比正方形的边长大 $d$cm,且正方形的周长大于0,那么 d 不能取的正整数的个数为

(A) 0. (B) 9. (C) 221. (D) 663. (E) 无穷多个.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 若设正方形和正三角形边长分别为 b,a,依题意有

$$\begin{cases} 3a - 4b = 1989, & ① \\ a - b = d, & ② \\ b > 0. & ③ \end{cases}$$

将②代入①有 $3d - b = 1989$,即 $d = 663 + \frac{b}{3}$,

又 $b > 0$,则 $d > 663$,因而 d 不能取 $1 \sim 663$ 这 663 个正整数.

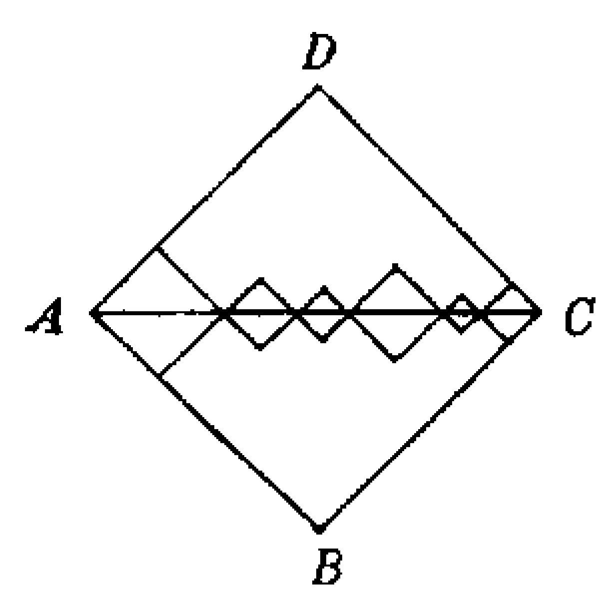
故选(D).

18·97 如图,把正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 分成 n 段,以每一段为对角线作正方形,设这 n 个小正方形的周长为 p,正方形 $ABCD$ 的周长为 l,则 p 与 l 的关系是

(A) $p > l$. (B) $p = l$.

(C) $p < l$. (D) p 与 l 无关.

(第 5 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1988 年)



[解] 设 n 个小正方形的对角线长分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$,则

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = AC.$$

又若每个小正方形周长分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$,

则 $2 \cdot \left(\frac{p_k}{4}\right)^2 = m_k^2$, 即 $m_k = \frac{\sqrt{2}}{4}p_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

$\therefore$ $$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}p = AC,$$

而 $AC = \frac{\sqrt{2}}{4}l = \frac{\sqrt{2}}{4}p$, 则 $l = p$.

故选(B).

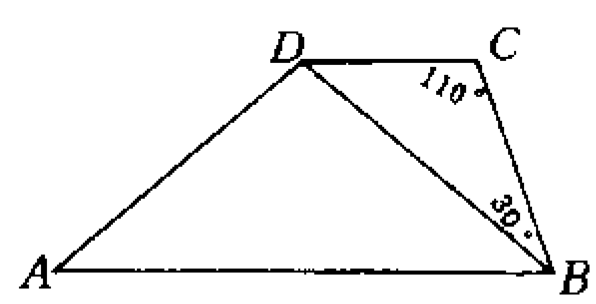
第5节 梯 形

18·98 如图,在梯形 $ABCD$ 中,AB 和 CD 为两底,且对角线 BD 和腰 AD 等长. 如果 $\angle DCB = 110°$,$\angle CBD = 30°$,那么 $\angle ADB$ 等于

(A) 80°. (B) 90°. (C) 100°.

(D) 110°. (E) 120°.

(第32届美国高中数学考试,1981年)



[解] 在 $\triangle BDC$ 中,$\angle BDC = 180° - 110° - 30° = 40°$.

又因为 $DC \parallel AB$,所以 $\angle BDC = \angle DBA = 40°$. $\triangle ABD$ 是等腰三角形,则 $\angle DAB = \angle DBA = 40°$.

所以 $\angle ADB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

故选(C).

18·99 顺次联结四边形各边的中点,所得四边形是一个菱形. 那么原四边形的形状是

(A) 等腰梯形. (B) 矩形. (C) 菱形. (D) 以上结论都不对.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1987年)

[解] 由题设知,原四边形的两条对角线相等,则它可能是等腰梯形,可能是矩形,也可能是正方形,还可能是其他四边形,即其形状不确定.

故选(D).

18·100 以线段 $a = 5$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 20$ 作梯形四边,这样的梯形(不全等的)

(A) 至少能作三个. (B) 恰好能作两个.

(C) 仅仅能作一个.　　　　　　(D) 一个也不能作.

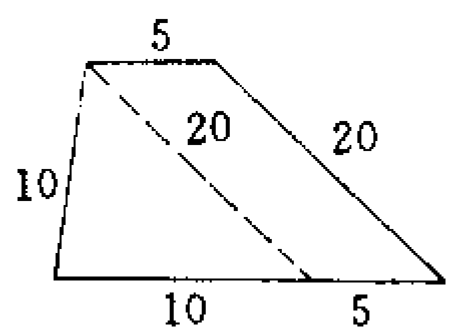
（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛,1989 年）

[解]　因梯形总有两条边互相平行,这样:

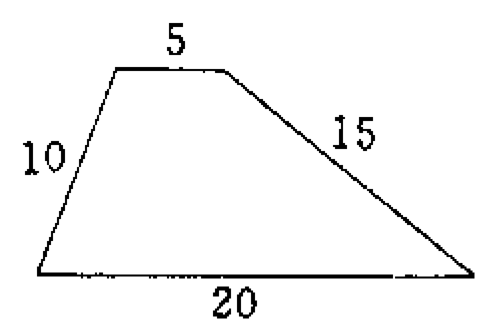
若 $a \parallel c$,如图①中所示,10,10,20不能构成三角形三边,故不妥;

若 $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$, $b \parallel d$,与上同理不妥;

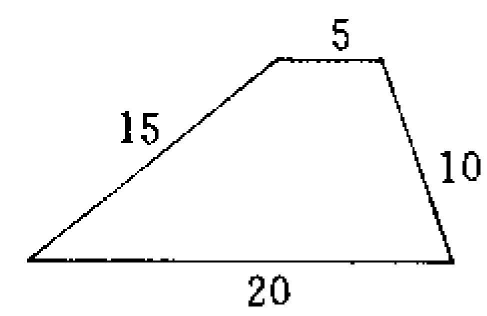
而 $a \parallel d$ 可作两个梯形,但它们是全等的,见图②～③.



图①



图②



图③

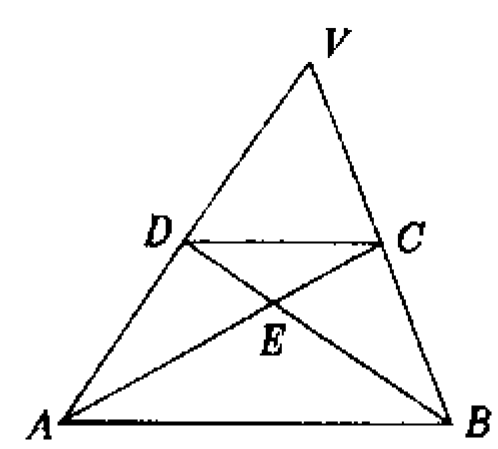
故选(C).

18·101　梯形 $ABCD$ 的一条底边 AB 是另一条底边 DC 的二倍,E 是两条对角线的交点.若对角线 AC 长 11,那么 EC 长等于

(A) $3\frac{2}{3}$.　(B) $3\frac{3}{4}$.　(C) 4.　(D) $3\frac{1}{2}$.　(E) 3.

（第 23 届美国高中数学考试,1972 年）

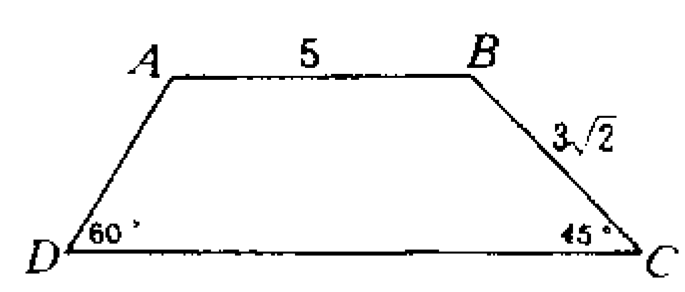
[解]　让四边形的边 AD,BC 相交于 V,那么对角线 AC,BD 是 $\triangle ABV$ 的两条中线,它们的交点 E 分 AC 成 $2:1$ 的比例.



所以 EC 的长是$\frac{11}{3}$ 或 $3\frac{2}{3}$ 个单位.

故选(A).

18·102　如图,四边形 $ABCD$ 是梯形,$AB \parallel DC$,$AB = 5$,$BC = 3\sqrt{2}$,$\angle BCD = 45°$ 且 $\angle CDA = 60°$,那么 DC 的长度为



(A) $7+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.　(B) 8.

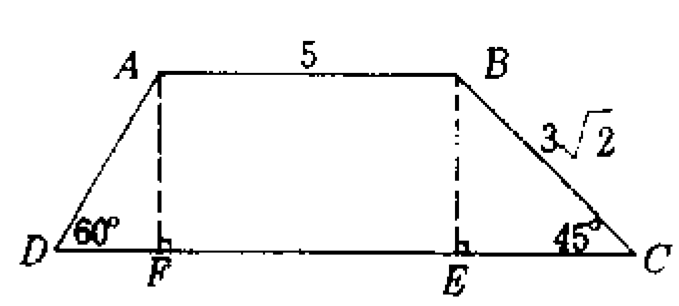
(C) $9\frac{1}{2}$.　(D) $8+\sqrt{3}$.

(E) $8+3\sqrt{3}$.

（第 35 届美国高中数学考试,1984 年）

[解]　如图,从 A,B 作 DC 的垂线分别交 DC 于 F,E,$\triangle BEC$ 是等腰直角三角形,所以

$$BE = EC = 3.$$



又因为 $ABEF$ 是长方形,所以 $FE = 5$,

$AF = 3$.

$\triangle AFD$ 是 $30° - 60° - 90°$ 的特殊直角三角形,所以

$$DF = \frac{1}{\sqrt{3}}AF = \sqrt{3}, \quad DC = 8 + \sqrt{3}.$$

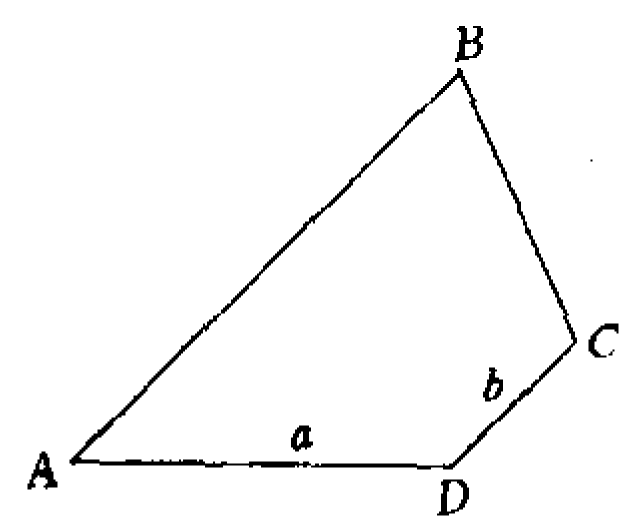
故选(D).

18·103　如图,若线段 AB 和 CD 互相平行,又 $\angle D = 2\angle B$, $AD = a$, $CD = b$,则 AB 的长度等于

(A) $\frac{1}{2}a + 2b$.　　(B) $\frac{3}{2}b + \frac{3}{4}a$.

(C) $2a - b$.　　(D) $4b - \frac{1}{2}a$.

(E) $a + b$.



(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解]　作 $\angle D$ 平分线 DE 交 AB 于 E.

由设　$AB \parallel CD$, 且　$\angle D = 2\angle B$,

故　$\angle CDE = \angle B$, 且　$ED \parallel BC$.

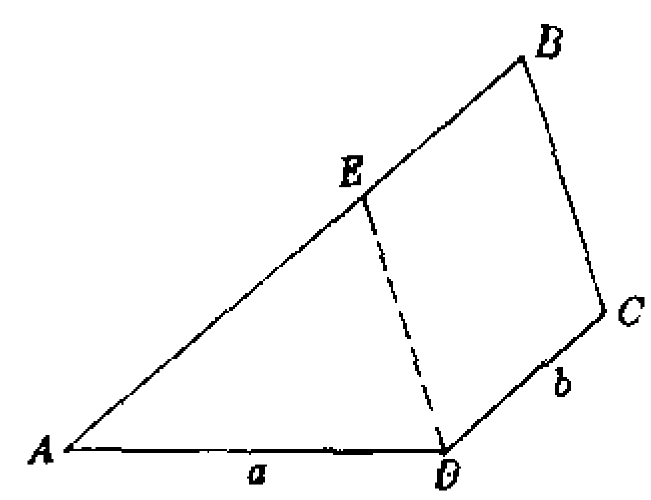
$\therefore$　$BE = DC = b$.

又　$\angle AED = \angle B = \angle CDE = \angle ADE$,

则　　$AE = AD = a$.

$\therefore$　　$AB = AE + BE = a + b$.

故选(E).

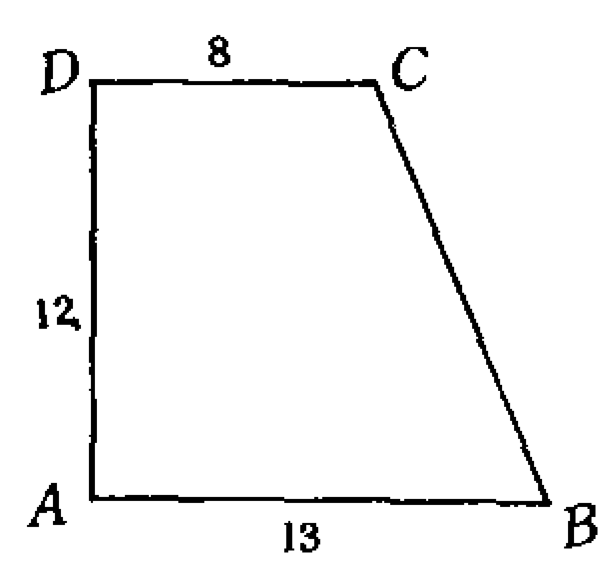


18·104　如图,在直角梯形中,底 $AB = 13$, $CD = 8$, $AD \perp AB$,并且 $AD = 12$,则 A 到 BC 的距离为

(A) 12.　　(B) 13.

(C) 10.　　(D) $\frac{12 \cdot 21}{13}$.

(E) $\frac{13 + 8}{2}$.



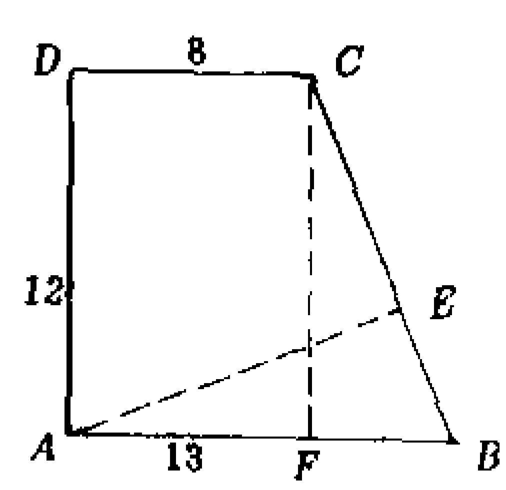
(中国部分省、市初中数学通讯赛,1985 年)

[解]　过 C 作 $CF \perp AB$ 于 F, 可以求出 $BC = AB$.

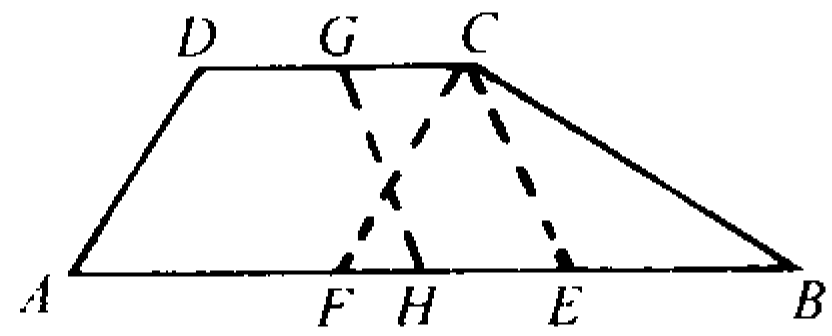
于是　　$\triangle ABE \cong \triangle CBF$.

所以　　$AE = CF = 12$.

故选(A).



18·105　梯形两底角之和为 90°，上底长为 5，下底长为 11，则连结两底中点的线段之长是



(A)3.　(B)4.　(C)5.　(D)6.

（安徽省初中数学竞赛，1996 年）

［解］　作 $CF \parallel AD$ 交 AB 于 F，依题设知 $\angle FCB = 90°$.

又 CE 为 Rt△FCB 斜边上中线，则

$$CE = \frac{1}{2}FB = \frac{1}{2}\cdot(11-5) = 3.$$

再设 G、H 分别为梯形上、下底 OC、AB 的中点，

则　$EH = BH - BE = CG = 2.5$，

知　$GHEC$ 为平行四边形.

从而　$GH = CE = 3$.

故选(A).

18·106　已知凸四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $AB + BC = CD + AD$. 则

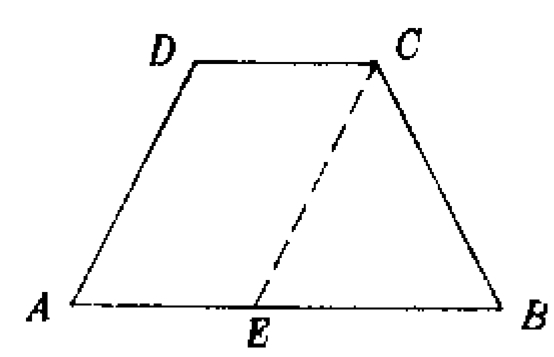
(A) $AD > BC$.　　(B) $AD < BC$.

(C) $AD = BC$.　　(D) AD 与 BC 大小关系不能确定.

（中国江苏省初中数学竞赛，1987 年）

［解］　假设 $AD \not\parallel BC$，过 C 作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于 E(如图)，又 $AB \parallel CD$，则

$$AE = CD,\quad CE = AD.$$



由题设知　$CD + AD = AB + BC$，有

$$AE + AD = AE + EB + BC,$$

即　$BE + BC = AD = EC$，不妥.

因而 $AD \parallel BC$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\therefore\ AD = BC$.

故选(C).

18·107　直线 HK 和 BC 在同一个平面上，M 是线段 BC 的中点，BH 和 CK 垂直于 HK. 则有

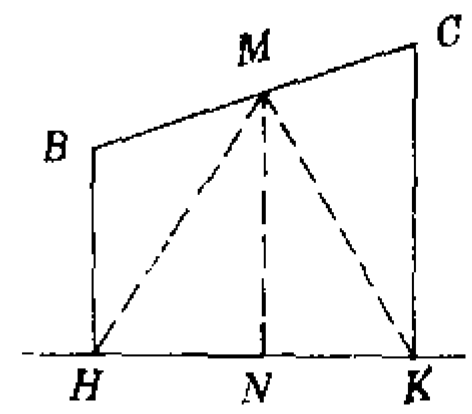
(A) $MH = MK$.　　(B) $MH > BK$.

(C) 有时有 $MH = MK$.　　(D) $MH > MB$.

(E) $BH < BC$.

（第 21 届美国高中数学考试，1970 年）

[解] 过 M 作 $MN \perp HK$ 于 N，



$\because$ M 是 BC 中点，且 $BH \perp HK$，$CK \perp HK$，

$\therefore$ $MN \parallel BH \parallel CK$.

且 N 平分 HK. 则 MN 系 HK 的垂直平分线.

$\therefore$ $MH = MK$.

故选(A).

18·108 梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $\angle A + \angle B = 90°$，若 $AB = a$，$CD = b$，又 E，F 分别是 AB，CD 的中点. 则 EF 等于

(A) $\frac{1}{2}(a+b)$. (B) $\frac{1}{2}(a-b)$.

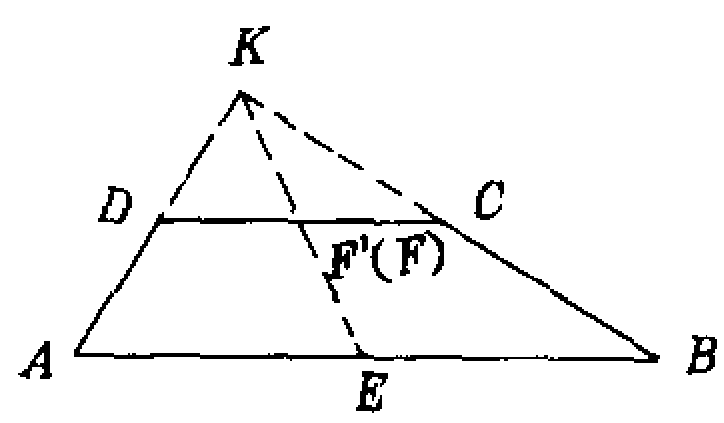
(C) $\sqrt{a^2+b^2}$. (D) $\sqrt{a^2-b^2}$.

（"祖冲之杯"初中数学邀请赛，1991 年）

[解] 如图，延长 AD，BC 交于 K，由设 $\angle A + \angle B = 90°$，则 $\angle AKB = 90°$.

若连 KE 交 CD 于 F'，则 F' 亦为 CD 中点即与 F 重合(由相似形性质).

由直角三角形斜边中线性质知



$$KE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a,$$

$$KF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b.$$

从而 $EF = KE - KF = \frac{1}{2}(a-b)$.

故选(B).

18·109 梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，若 $\angle B = 40°$，$\angle C = 50°$，又 E，M，F，N 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，且 $EF = a$，$MN = b$，则 BC 为

(A) $a+b$. (B) $a+2b$. (C) $2a+b$. (D) $2a-b$.

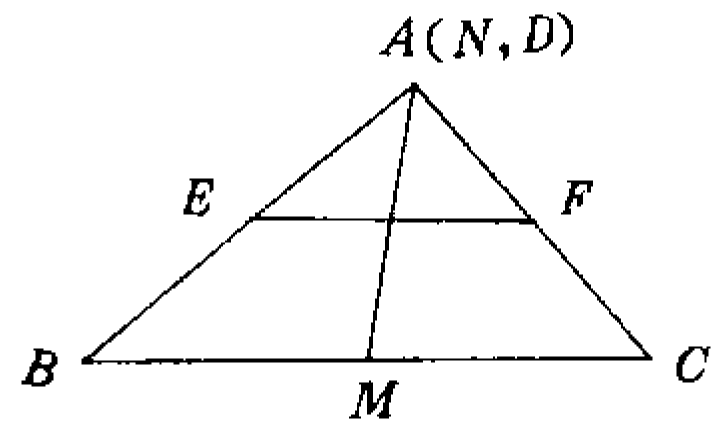
（第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛，1985 年）

[解] 考虑极端情形：$AD = 0$ 时，这时 A，D，N 三点重合.

$\because$ $\angle B = 40°$，$\angle C = 50°$，

$\therefore$ $\angle BAC = 90°$.

而 NM 为该三角形斜边上中线.又 EF 为三角形的中位线,则



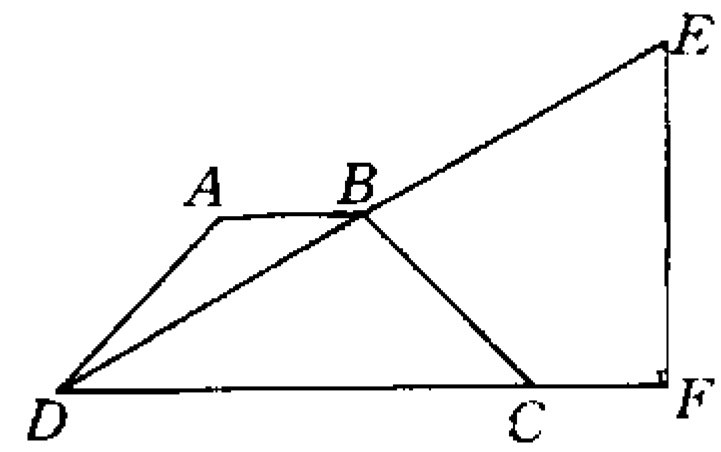
$$BC = 2MN = 2b,$$

且 $BC = 2EF = 2a$, 故 $a = b$.

此时(B),(C),(D) 分别为 $3a, 3a, a$;而代入(A) 时得 $2a$.因而(A) 正确.

故选(A).

18·110 如图,$ABCD$ 为等腰梯形,$AD = BC = 5$, $AB = 4$, $DC = 10$,点 C 在 DF 上,B 是 Rt$\triangle DEF$ 斜边的中点.则 CF 等于

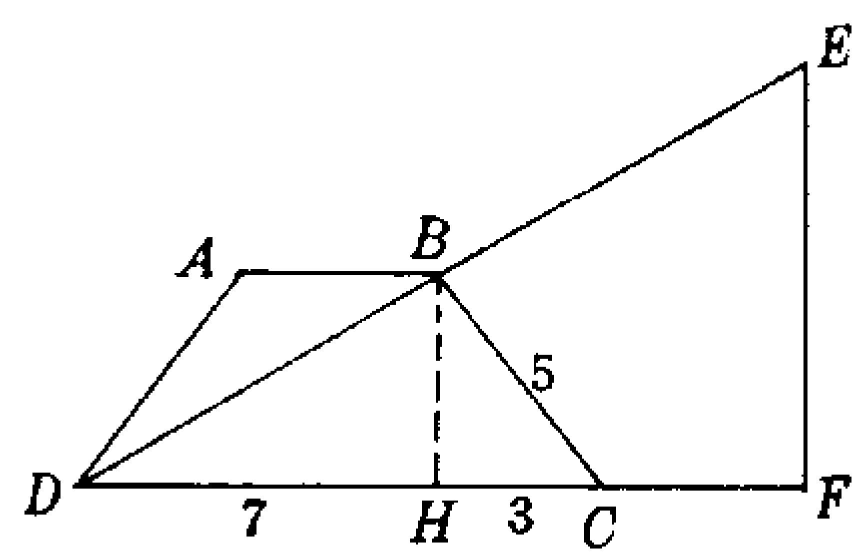


(A) 3.25. (B) 3.5. (C) 3.75.

(D) 4.0. (E) 4.25.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 作 $BH \perp DF$,则 $BH \parallel EF$.



$\because$ $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore \quad CH = \frac{1}{2}(DC - AB) = 3,$$

则 $$DH = DC - CH = 10 - 3 = 7.$$

$\because$ B 是 DE 中点,又 $\dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DH}{DF}$,

$\therefore$ $DF = 14$.

则 $CF = DF - CD = 4$.

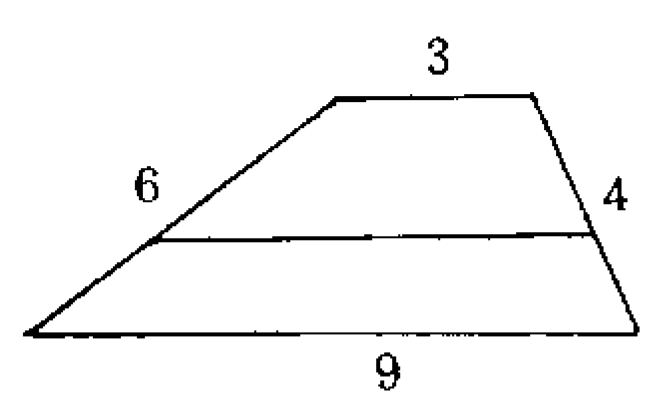
故选(D).

18·111 一梯形的两底为 3 和 9,两腰为 4 和 6,一平行于底的直线分梯形为周长相等的两个梯形,则此直线分腰之比为

(A) 4 : 3. (B) 3 : 2. (C) 4 : 1. (D) 3 : 1. (E) 6 : 1.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)

[解] 设梯形一腰被分成 $m : n$,且平行线截线长为 x,则 $m + n = 6$.



由设 $3 + m + x + 4 \cdot \dfrac{m}{m + n}$

$$= 9 + n + x + 4 \cdot \frac{n}{m+n},$$

即 $$(m-n) + 4 \cdot \frac{m-n}{m+n} = 6,$$

由 $m + n = 6$，则

$$(m-n)(1+\frac{4}{6}) = 6，有\ m - n = \frac{18}{5}.$$

再由 $m + n = 6$ 可解得 $m = \frac{24}{5}$，$n = \frac{6}{5}$.

从而 $m : n = 4 : 1$.

故选(C).

18·112 在梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$AB = 3CD$，E 是对角线 AC 的中点，直线 BE 交 AD 于 F. 则 $AF : FD$ 的值是

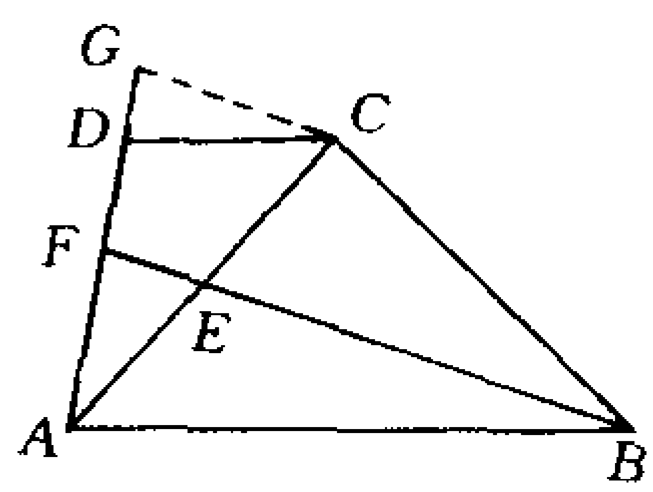
(A)2. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D)1.

（中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛，1996 年）

[解] 过 C 作 $CG // BF$ 交 AD 的延长线于 G（如图）.

由 $AB // CD$，$CG // BF$ 得 $\triangle ABF \backsim \triangle DCG$，

因此 $AF : DG = AB : DC = 3 : 1$.



又由 $CG // BF$，$AE = EC$，得 $AF = FG$，

于是 $$FD = 2DG,$$

因此 $$AF : FD = 3 : 2 = \frac{3}{2}.$$

故选(C).

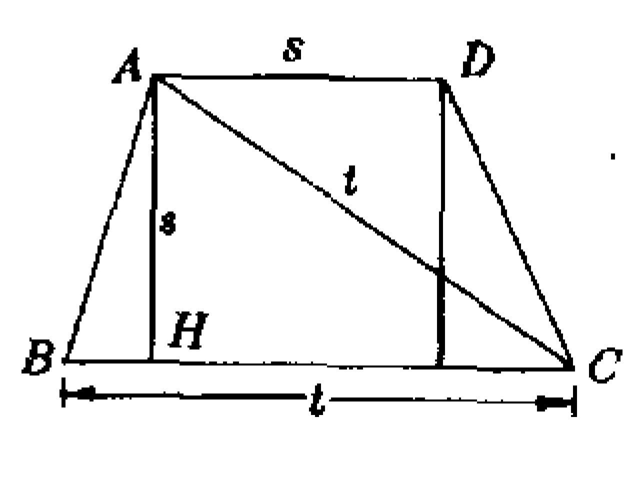
18·113 若等腰梯形的大底等于对角线，而小底等于高，则小底对大底的比为

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{3}{5}$. (E) $\frac{2}{5}$.

（第 4 届美国高中数学考试，1953 年）

[解] 如图，梯形 $ABCD$，设

$$AD = AH = s, AC = BC = t,$$



则 $BH = \frac{t-s}{2}$.

在 Rt$\triangle AHC$ 中，由勾股定理有

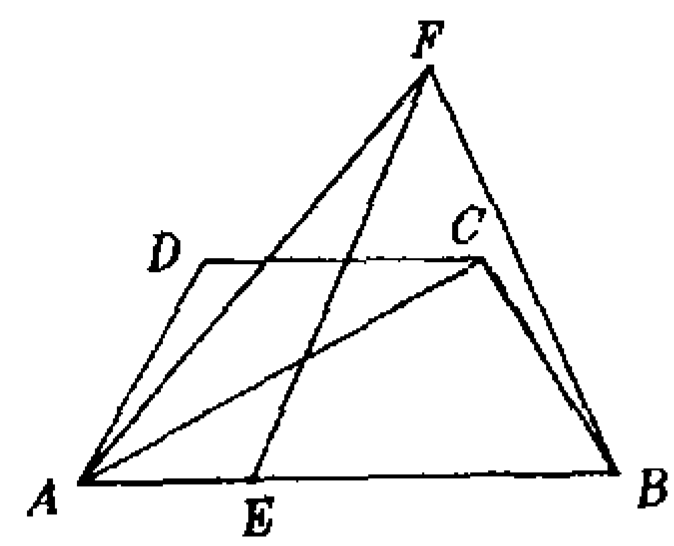
$$t^2 = s^2 + \left(t - \frac{t-s}{2}\right)^2,$$

即 $t^2 = s^2 + \left(\frac{t+s}{2}\right)^2$ 或 $t^2 - s^2 = \left(\frac{t+s}{4}\right)^2$,

故 $t - s = \frac{t+s}{4}$ 或 $\frac{t-s}{t+s} = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{t}{s} = \frac{5}{3}$.

故选(D).

18·114 如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$AB = 2CD$,$\angle A = 60°$,又 E 是底边 AB 上一点,且 $FE = FB = AC$,$FA = AB$.则 $AE : EB$ 等于



(A) 1 : 2.　　(B) 1 : 3.

(C) 2 : 5.　　(D) 3 : 10.

(中国初中数学联赛,1992 年)

[解] 设 $CD = 1$,则 $FA = AB = 2$,易证 $BC = \frac{AB}{2}$,$\angle ACB = 90°$.故 $FE = FB = AC = \sqrt{3}$.

又 $\triangle ABF \backsim \triangle FBE$,有 $\frac{AB}{BF} = \frac{BF}{BE}$, $BE = \frac{BF^2}{AB} = \frac{3}{2}$.

于是 $AE = AB - BE = \frac{1}{2}$.

从而 $AE : EB = 1 : 3$.

故选(B).

18·115 在梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$, AC 交 BD 于 O,$MON \parallel AB$,且 MON 分别交 AD,BC 于 M,N.则 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$ 等于

(A) $\frac{1}{MN}$.　　(B) $\frac{2}{MN}$.　　(C) $\frac{3}{MN}$.　　(D) $\frac{4}{MN}$.

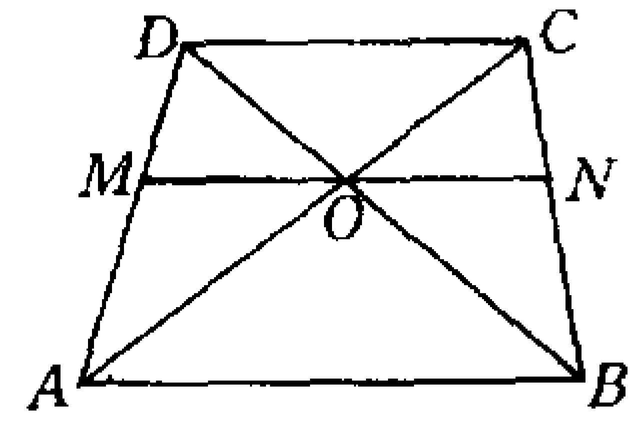
(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1987 年)

[解] 由 $\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD}$

$$= \frac{MO+ON}{AB} + \frac{MO+ON}{CD}$$

$$= \frac{MO}{AB} + \frac{ON}{AB} + \frac{MO}{CD} + \frac{ON}{CD}$$

$$= \frac{DO}{DB} + \frac{CO}{AC} + \frac{AO}{AC} + \frac{OB}{DB}$$



$$= \frac{DO + OB}{DB} + \frac{CO + AO}{AC}$$
$$= 2,$$
$$\therefore \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}.$$

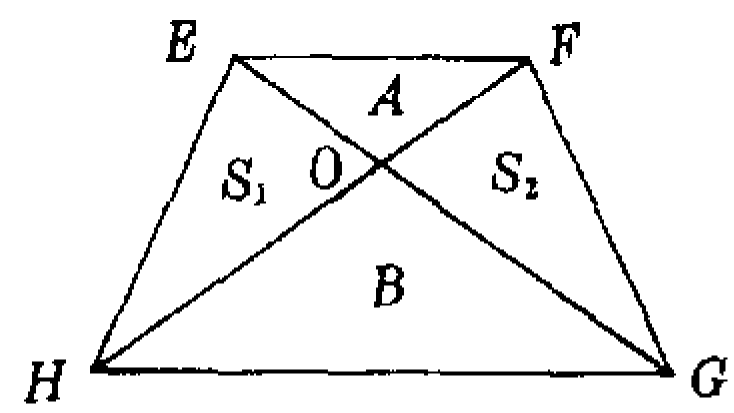
故选(B).

18·116　梯形被两对角线分为四个三角形,若A,B分别表示两底与对角线围成的三角形的面积,则梯形的面积是

(A) $2(A+B)$.　　(B) $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$.

(C) $A+B+\sqrt{AB}$.　　(D) $A+B+\frac{AB}{A+B}$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1984年)



[解]　如图,若记$S_1 = S_{\triangle EOH}$,　$S_2 = S_{\triangle FOG}$,

显然,$S_1 = S_2$,又$\triangle EOF$与$\triangle FOG$等高,

$$\text{则}\quad \frac{A}{S_2} = \frac{EO}{OG},$$

同理　$\frac{S_2}{B} = \frac{FO}{OH}$.

又　$EF \parallel HG$,有$\frac{EO}{OG} = \frac{FO}{OH}$,

$\therefore\quad \frac{A}{S_2} = \frac{S_2}{B}$,即$S_2^2 = A \cdot B$,

$$\therefore \quad S_1 = S_2 = \sqrt{A \cdot B},$$

则　$$S_{EFGH} = A + B + 2\sqrt{A \cdot B} = (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2.$$

故选(B).

18·117　如图,在梯形$ABCD$中,$CD \parallel AB$,　AC、BD交于P点.记$\triangle PCD$,$\triangle PDA$,$\triangle PAB$,$\triangle PBC$的面积分别为S_1,S_2,S_3,S_4.则成立的关系式是

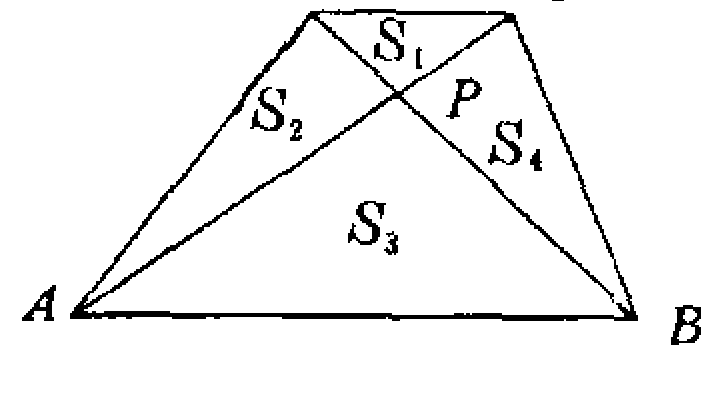
(A) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

(B) $S_1 + S_3 \geqslant S_2 + S_4$.

(C) $S_1 + S_3 > S_2 + S_4$.

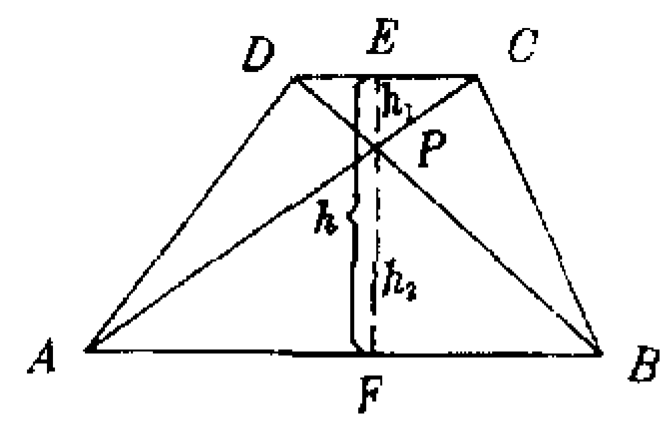
(D) $S_1 + S_3 \leqslant S_2 + S_4$.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991年)



[**解**]　无妨设 $DC \leqslant AB$,且设 $DC = a$，　$AB = b$.又过 P 作两平行线的公垂线 EF,且令 $EF = h$，　$EP = h_1$，　$PF = h_2$.

由　$\triangle PDC \backsim \triangle PBA$,及 $DC \leqslant AB$,知 $h_1 \leqslant h_2$.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = \frac{1}{2}(ah_1+bh_2)+\frac{1}{2}(ah_2+bh_1),$$

又　　$S_1 + S_3 = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2)$,

则　　$S_2 + S_4 = S_{ABCD} - (S_1 + S_3) = \frac{1}{2}(ah_2 + bh_1)$.

注意到　若 $x \geqslant y$，　$u \geqslant v$，　则　$x(u-v) - y(u-v) \geqslant 0$.

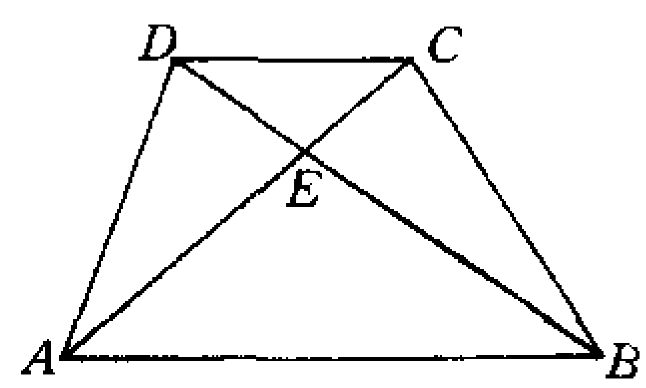
即　　$xu + yv \geqslant xv + yu$,

同理由　$a \leqslant b$，　$h_1 \leqslant h_2$，　则　$ah_1 + bh_2 \geqslant ah_2 + bh_1$.

∴　$S_1 + S_3 \geqslant S_2 + S_4$.

故选(B).

18·118　如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$, $\triangle DCE$ 与 $\triangle DCB$ 的面积的比为 $1:3$,则 $\triangle DEC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积比为



(A) $1:5$.　　(B) $1:6$.

(C) $1:7$.　　(D) $1:9$.

(广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1984 年)

[**解 1**]　由设 $S_{\triangle DCE} : S_{\triangle DCB} = 1:3$,由等(同)高三角形面积比的性质知:$DE : DB = 1:3$，　或　$DE : EB = 1:2$.

由　$\triangle DEC \backsim \triangle BEA$,知　$CE : AE = 1:2$.

从而　$S_{\triangle DEC} : S_{\triangle ABD} = 1:6$.

故选(B).

[**解 2**]　设 $S_{\triangle ABE} = n$，　$S_{\triangle CDE} = m$,

则　　$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BCE} = \sqrt{mn}$,

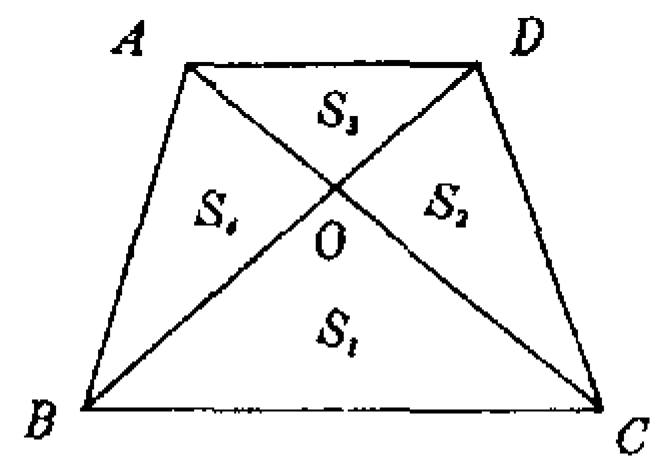
$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{m}{m+\sqrt{mn}} = \frac{1}{3},$$

有　$\sqrt{mn} = 2m$　或　$n = 4m$,

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{m}{n+\sqrt{mn}}=\frac{m}{4m+2m}=\frac{1}{6}.$$

故选(B).

18·119　如图,梯形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,$\triangle OBC$,$\triangle OCD$,$\triangle ODA$,$\triangle AOB$ 及梯形$ABCD$的面积,分别为 S_1,S_2,S_3,S_4,S,对于以下三个结论:



① 已知 $S_1:S$,就可求出 $AD:BC$;

② 已知$(S_1+S_2):S$,就可求出 $AD:BC$;

③ 已知 $S_2:S$,就可求出 $AD:BC$.

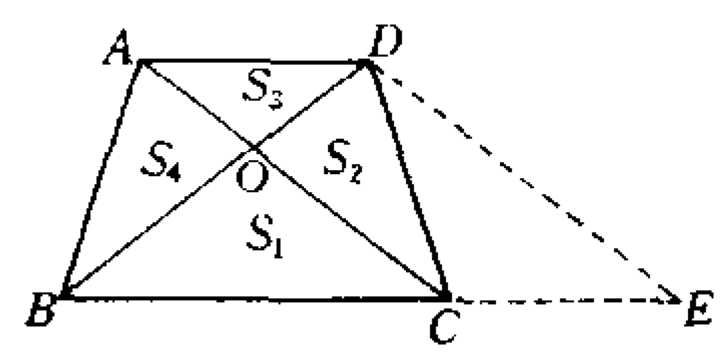
正确的认识是

(A) 只有 ① 是正确的.　　(B) 只有 ② 是正确的.

(C) 只有 ①,② 是正确的.　　(D) ①,②,③ 都是正确的.

(中国初中数学联赛,1986 年)

[解 1]　延长 BC 至E,使 $CE=AD$,则 $S_{\triangle BDE}=S$.



$$\because \quad AD:BC=\left(\frac{BE}{BC}\right)-1=\sqrt{\frac{S}{S_1}}-1,$$

且　$AD:BC=\dfrac{S_3+S_4}{S_1+S_2}=\dfrac{S}{S_1+S_2}-1$,

$\therefore$　①,② 都是正确的.

又 $\because$　$S_1S_3=S_2^2$,　有　$\dfrac{S_1}{S}\cdot\dfrac{S_3}{S}=\left(\dfrac{S_2}{S}\right)^2$,

故　$\dfrac{BC\cdot AD}{(BC+AD)^2}=\dfrac{S_2}{S}$, 即 $\dfrac{AD}{BC}\Big/\left(1+\dfrac{AD}{BC}\right)^2=\dfrac{S_2}{S}$.

解之得　$\dfrac{AD}{BC}=\left(1-\dfrac{2S_2}{S}-\sqrt{1-\dfrac{4S_2}{S}}\right)\Big/\dfrac{2S_2}{S}$.

$\therefore$　③ 也正确,

故选(D).

[解 2]　易证 $S_2=S_4=\sqrt{S_1S_3}$,

则　$S=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}$;

$$\therefore \quad \frac{S}{S_1}=1+\frac{S_3}{S_1}+2\sqrt{\frac{S_3}{S_1}},$$

则由　$S_1:S$ 已知,可求 $S_3:S_1$.

由 $\triangle ADO \backsim \triangle CBO$,可求出$\frac{AD}{BC}=\sqrt{\frac{S_3}{S_1}}$,则 ① 正确.

又 $$1=\frac{S_1+S_3+2S_2}{S}=\frac{S_1+S_2}{S}+\frac{S_2+S_3}{S},$$

$$\therefore \quad \frac{S_1+S_2}{S}=1-\frac{S_2+S_3}{S},$$

则若已知$\frac{S_1+S_2}{S}$,可求$\frac{S_2+S_3}{S}$,从而可求 $\frac{S_2+S_3}{S_1+S_2}$,

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AD}{BC}=\frac{S_2+S_3}{S_1+S_2}$$

可求,即 ② 正确.

再 $$\frac{S}{S_2}=\frac{S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}}{S_2}=\frac{S_1+S_3}{\sqrt{S_1S_3}}+2,$$

若知 $S_2:S$,可求$(S_1+S_3):\sqrt{S_1S_3}$,

设 $$\sqrt{\frac{S_1}{S_3}}+\sqrt{\frac{S_3}{S_1}}=\frac{S_1+S_3}{\sqrt{S_1S_3}}=k,$$

则 $$\frac{S_3}{S_1}-k\sqrt{\frac{S_3}{S_1}}+1=0,$$

从上可解得$\frac{S_3}{S_1}$,从而可求得$\frac{AD}{BC}$,即 ③ 正确.

故选(D).

18·120 一梯形的短底,高,长底依次组成等差数列,设 k 是此梯形的面积,则

(A) k 一定是整数.　　(B) k 一定是分数.

(C) k 一定是无理数.　　(D) k 一定是整数或分数.

(E) (A),(B),(C),(D) 均不正确.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解] 设梯形短底,高,长底分别为 $a-d$, a, $a+d$.

则 $$k=S_{梯形}=\frac{1}{2}[(a-d)+(a+d)]a=a^2.$$

由 a 的任意性,知(A),(B),(C),(D) 均不正确.

故选(E).

第十九章　多边形

第1节　五边形,六边形,……

19·1　如果凸 n 边形 $F(n \geqslant 4)$ 的所有对角线都相等,那么

(A) $F \in \{$四边形$\}$.

(B) $F \in \{$五边形$\}$.

(C) $F \in \{$四边形$\} \cup \{$五边形$\}$.

(D) $F \in \{$边相等的多边形$\} \cup \{$内角相等的多边形$\}$.

(中国高中数学联赛,1982 年)

[**解**]　用正五边形作反例可否定结论(A).

用正方形作反例否定结论(B).

用等腰梯形作反例否定结论(D).

所以正确的结论只能是(C).

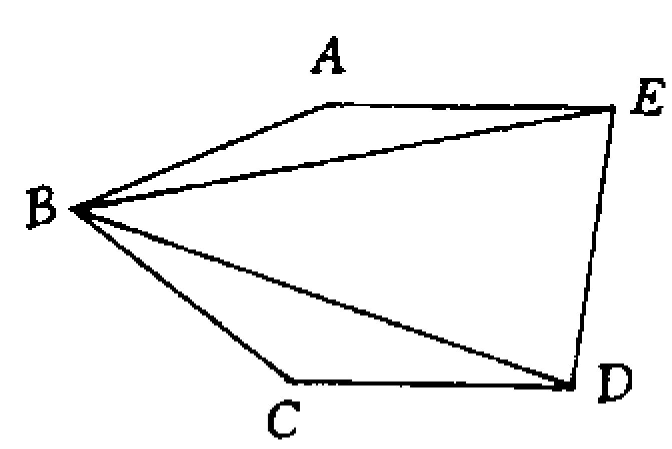
故选(C).

19·2　如图,各边都相等的五边形 $ABCDE$ 中,$\angle ABC = 2\angle DBE$.那么 $\angle ABC$ 为

(A) 60°.　　(B) 120°.

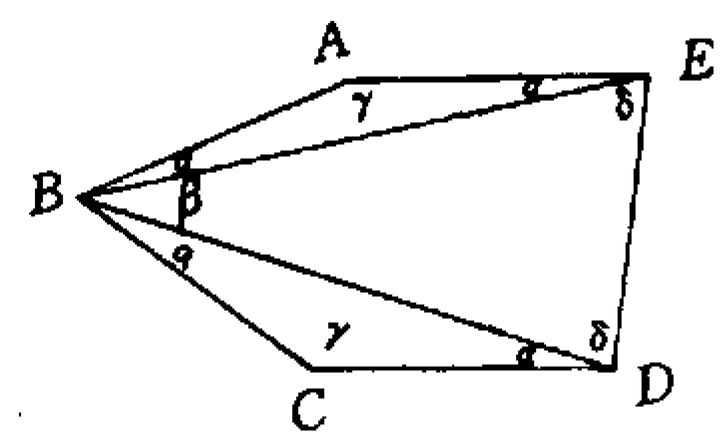
(C) 90°.　　(D) 45°.

(中国黑龙江省哈尔滨市初中数学竞赛,1992 年)



[**解**]　由题设五边形各边都相等,无妨考虑对称的情形,如图可有

$$\begin{cases}2\alpha+\gamma=180^\circ,\\2\alpha+\beta=2\beta,\\\beta+2\delta=180^\circ,\\4\alpha+\beta+2\gamma+2\delta=540^\circ.\end{cases}$$



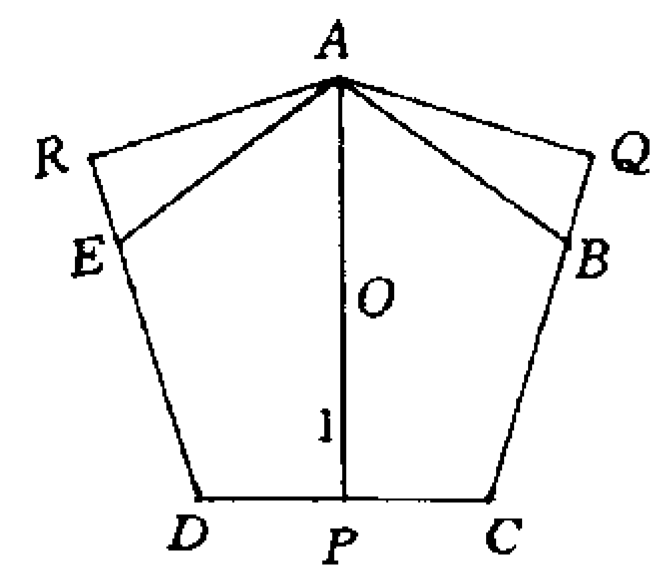
解得　$\alpha=15^\circ$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=150^\circ$,

$\delta=75^\circ$.

故　$\angle ABC=2\alpha+\beta=60^\circ$.

故选(A).

19·3　$ABCDE$ 是一个正五边形,AP,AQ 和 AR 是从 A 分别到 CD,CB 的延长线和 DE 的延长线所引的垂线段.设 O 是五边形的中心.若 $OP=1$,则 $AO+AQ+AR$ 等于

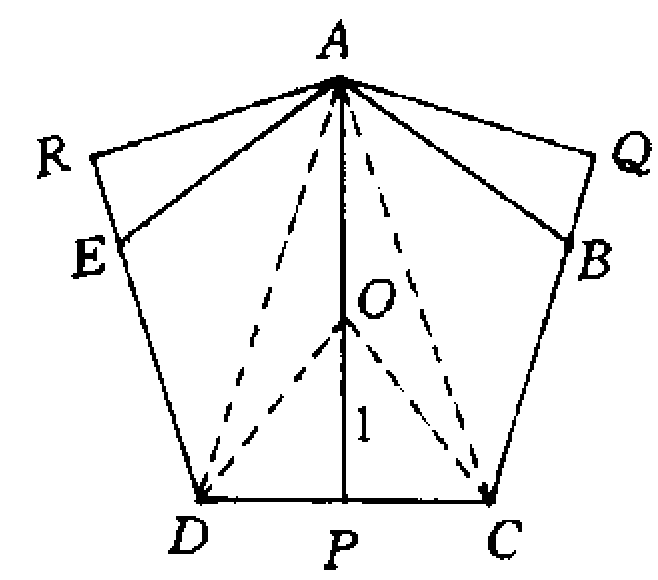


(A) 3.　(B) $1+\sqrt{5}$.　(C) 4.

(D) $2+\sqrt{5}$.　(E) 5.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解]　连 AD,AC,并连 OD,OC,且设正五边形边长为 a.



$\because$　$S_{ABCDE}=5S_{\triangle OCD}=5\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot a$

$=\frac{5}{2}a$,

且　$S_{ABCDE}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ACB}$

$=\frac{1}{2}a\cdot AR+\frac{1}{2}a\cdot AP+\frac{1}{2}a\cdot AQ$

$=\frac{1}{2}a(AR+AP+AQ)$,

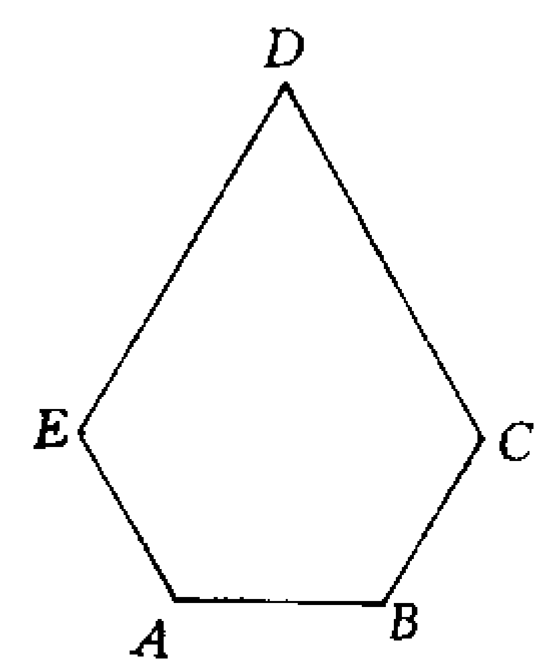
$\therefore$　$\frac{5}{2}a=\frac{1}{2}a(AR+AP+AQ)$.

即　$AR+AP+AQ=5$,

又　$OP=1$, $AO=AP-1$.

$\therefore$　$AR+AO+AQ=4$.

故选(C).



19·4　凸五边形 $ABCDE$ 中,$\angle A=\angle B=120^\circ$,$EA=AB=BC=2$,$CD=DE=4$. $ABCDE$ 的面积是

(A) 10.　　(B) $7\sqrt{3}$.　　(C) 15.　　(D) $9\sqrt{3}$.

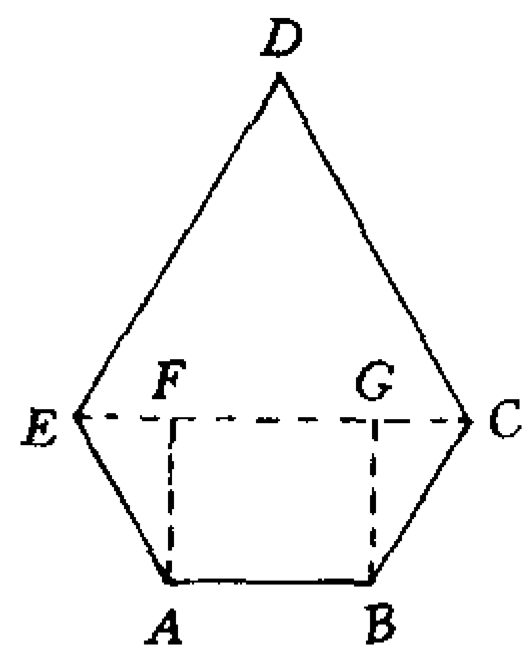
(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解]　连接 CE,易知 $ABCE$ 是等腰梯形.设 F,G 分别为 A,B 向 CE 所引的垂线的垂足,则 $EF = CG$.

因为　$\angle GBC = 30°$, 有 $CG = \frac{1}{2}BC = 1$, $BG = \sqrt{3}$.

而　$CE = CG + GF + FE = 1 + 2 + 1 = 4$,

所以 $\triangle CDE$ 是等边三角形. 则



$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}BG \cdot (AB + CE)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}(2 + 4) = 3\sqrt{3},$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}CE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 = 4\sqrt{3}.$$

所以　$S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{\triangle CDE} = 7\sqrt{3}$.

故选(B).

19·5　凸六边形的六个内角的度数是一个自然数组成的等差数列.设 $m°$ 为这个六边形内角中最大角的度数,则 $m°$ 的最大可能值是

(A) 165°.　(B) 167°.　(C) 170°.　(D) 175°.　(E) 179°.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解]　设该等差数列公差为 $d°$,依题意有

$$6m - \frac{6(6-1)}{2}d = (6-2) \cdot 180,$$

即　　$6m - 15d = 720$,　或　$m = 120 + \frac{5d}{2}$.

因而　$m = 120 + \frac{5d}{2} < 180°$,　即　$d < 24$.

又　m 为自然数,故 d 是偶数,　则　$d = 22$.

这样　$$m = 120 + \frac{5 \cdot 22}{2} = 175.$$

故选(D).

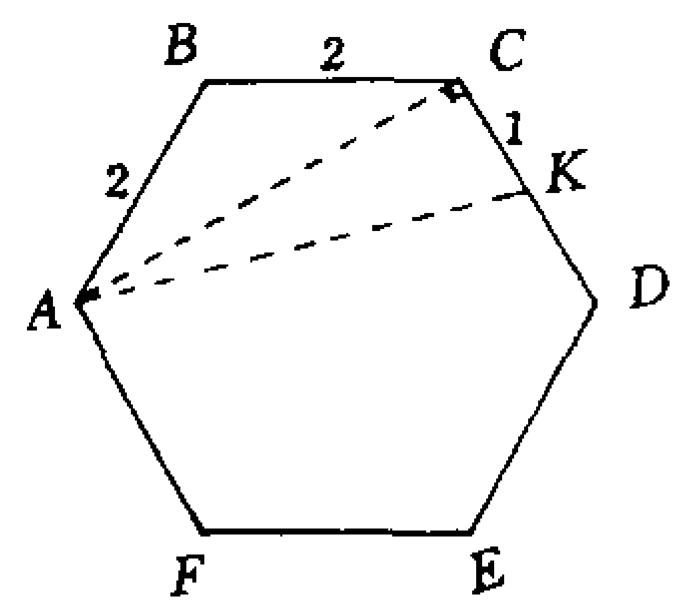
19·6　一个公园的形状是每边长 2 千米的正六边形.艾莉思($Alice$)从一个角点出发,沿公园的周界走了 5 千米,与她的出发点相距的千米数为

(A) $\sqrt{13}$.　　(B) $\sqrt{14}$.　　(C) $\sqrt{15}$.

(D) $\sqrt{16}$.　　　　(E) $\sqrt{17}$.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

[解 1]　由设知艾莉思从 A 走到 K（如图）．



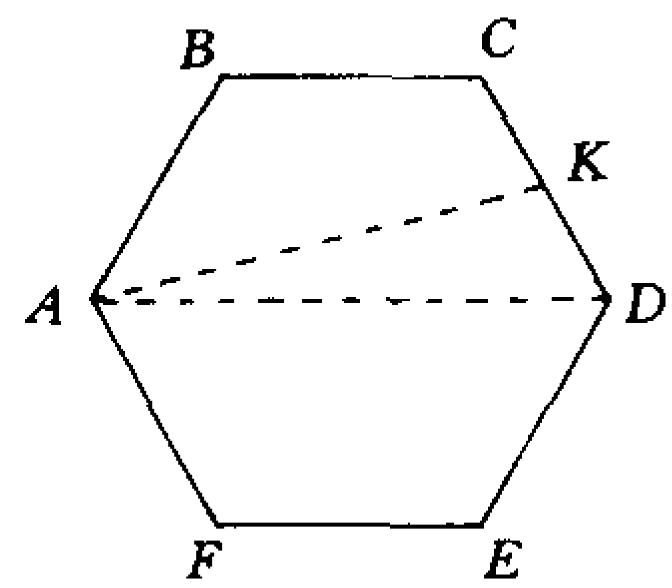
易算得　$AC = 2\sqrt{3}$，且 $\angle ACK = 90°$

（$\because$ $\angle BCD = 120°$，且 $\angle BCA = 30°$）．

$$\therefore \quad AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}.$$

故选（A）．

[解 2]　连 AD，易求得 $AD = 4$，且 $\angle ADK = 60°$，$DK = 1$．在 $\triangle ADK$ 中由余弦定理有



$$AK = \sqrt{AD^2 + DK^2 - 2AD \cdot DK\cos 60°} = \sqrt{4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13}.$$

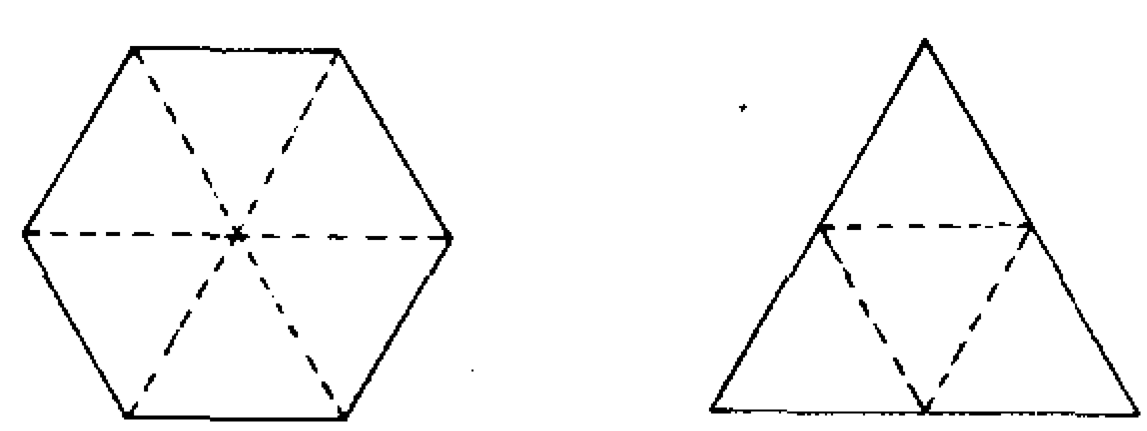
故选（A）．

19·7　一个正三角形和一个正六边形的周长相等，如果三角形的面积是 2 时，则六边形的面积是

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 6.　　(E) 12.

（第 21 届美国高中数学考试，1970 年）

[解]　从图易见



$$S_{\text{正六边形}} : S_{\triangle} = 6 : 4 = 3 : 2.$$

由　$S_{\triangle} = 2$，则 $S_{\text{正六边形}} = 3$．

故选（B）．

19·8　周长相同的正三角形，正方形，正六边形的面积分别是 S_3，S_4，S_6，则

(A) $S_3 > S_4 > S_6$.　(B) $S_6 > S_4 > S_3$.　(C) $S_6 > S_3 > S_4$.

(D) $S_3 > S_6 > S_4$.　(E) $S_4 > S_6 > S_3$.

（中国初中数学联赛，1984 年）

[解]　设相同的周长为 $12l(l > 0)$，则它们的面积分别是

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4l \cdot 4l \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}l^2,$$
$$S_4 = 3l \cdot 3l = 9l^2,$$
$$S_6 = 6\sqrt{3}l^2,$$

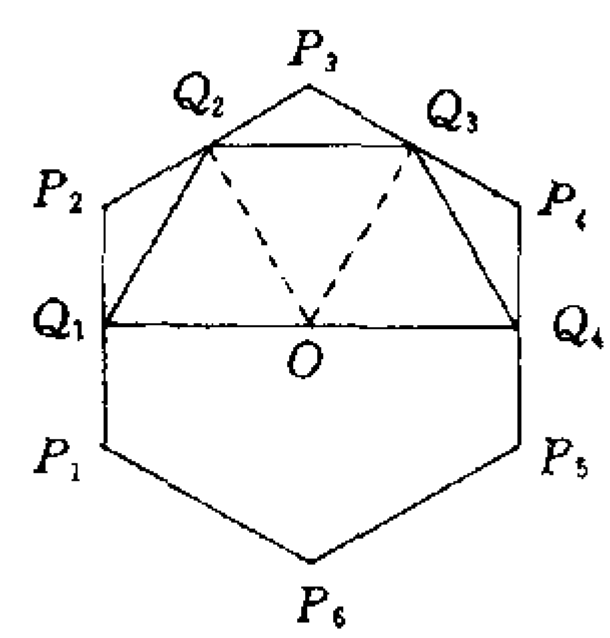
$\therefore\ S_6 > S_4 > S_3$.

故选(B).

19·9　若 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是一个正六边形. 它的边心距（从中心到一边中点的距离）是 2，且 Q_i 是边 P_iP_{i+1} 的中点，其中 $i = 1,2,3,4$，那么四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的面积是

(A) 6.　(B) $2\sqrt{6}$.　(C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.　(D) $3\sqrt{3}$.

（第 30 届美国高中数学考试，1979 年）



[解]　若 O 是六边形的中心，则 $OQ_i(i = 1,2,3,4)$ 即为正六边形边心距.

那么 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的面积是三个等边三角形 $\triangle Q_1Q_2O$，$\triangle Q_2Q_3O$，$\triangle Q_3Q_4O$ 的面积之和，它们的每边长是 2.

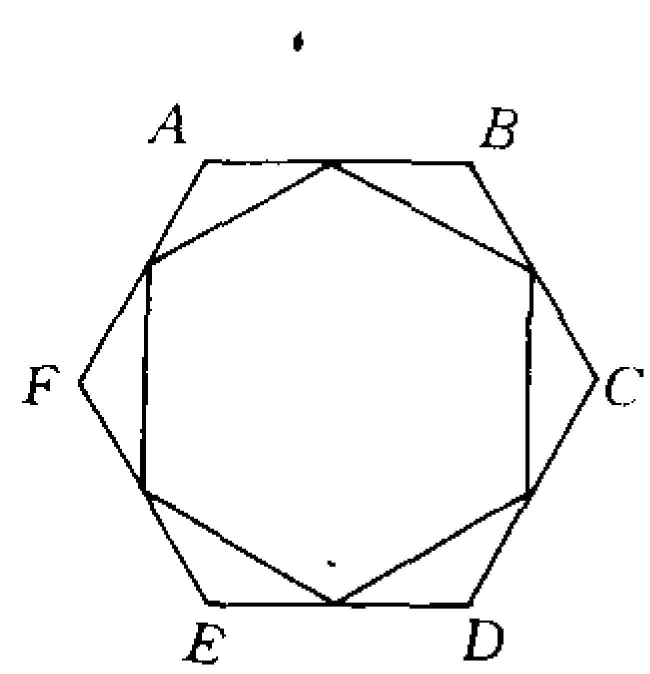
因此　$$S_{Q_1Q_2Q_3Q_4} = 3\left(\frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 3\sqrt{3}.$$

故选(D).

19·10　正六边形 $ABCDEF$ 条边中点连成一个小正六边形. 则小正六边形面积是大正六边形面积的

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(C) $\frac{2}{3}$.　(D) $\frac{3}{4}$.　(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

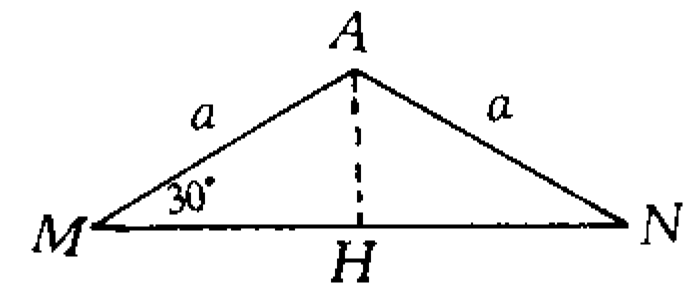
（第 47 届美国高中数学考试，1996 年）



[解]　相似图形面积比等于其相应边长的平方比.

今考察以 A 为顶点的大正六边形被小正六边形截得的一角（如

图).



显然 $\angle MAN = 120°$，设 $AM = a$.

作 $AH \perp MN$ 于H，知 $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

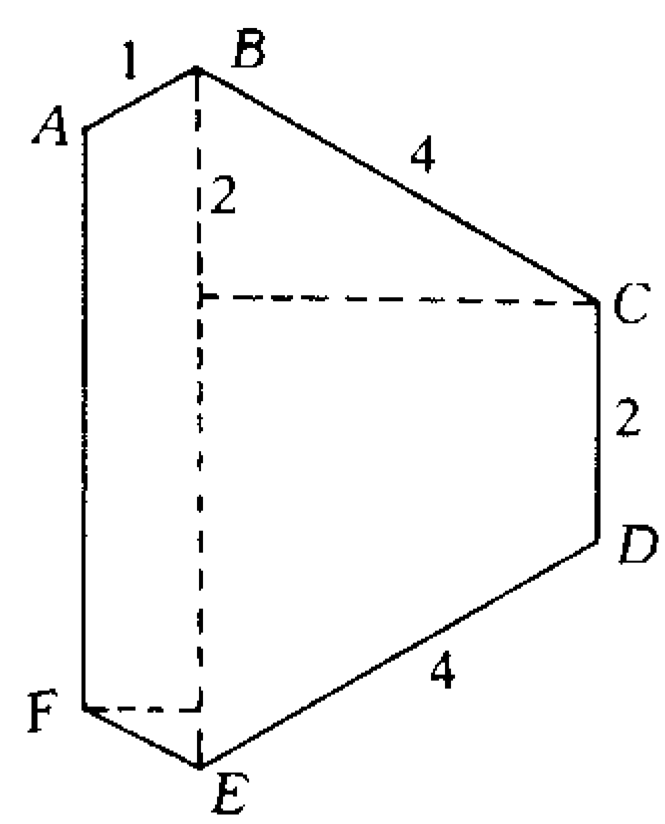
$$\therefore \quad \frac{S_{\text{大正六边形}}}{S_{\text{小正六边形}}} = \frac{(2AM)^2}{(2AH)^2} = \left(\frac{AM}{AH}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

故选(D).

19·11 凸等角六边形 $ABCDEF$ 中 $AB = 1, BC = 4, CD = 2$ 且 $DE = 4$.则该六边形面积是

(A) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$.　(B)$9\sqrt{3}$.　(C)16　(D) $\frac{39}{4}\sqrt{3}$.　(E) $\frac{43}{4}\sqrt{3}$.

(第 50 届美国高中数学考试,1999 年)



[解] 连结 BE，由设 $BC = DE = 4$，$\angle BCD = \angle CDE = 120°$,知四边形 $BCDE$ 系等腰梯形,且 $\angle CBE = \angle DEB = 60°$.

进而可推得 $AFEB$ 亦为等腰梯形,这样有 $EF = 1$,

又由 $\angle CBE = 60°$，可算得 $BE = 6$.

同理可算得 $AF = 5$.

这样 $\quad S_{BCDE} = \frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot\sqrt{4^2-2^2}$

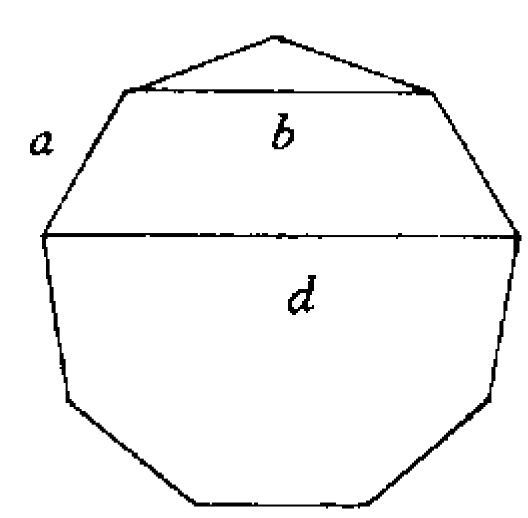
$\quad\quad = 8\sqrt{3}$,

且 $\quad S_{ABEF} = \frac{1}{2}\cdot(5+6)\cdot\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{11}{4}\sqrt{3}$.

$\therefore \quad S_{ABCDEF} = 8\sqrt{3} + \frac{11}{4}\sqrt{3} = \frac{43}{4}\sqrt{3}$.

故选(E).

19·12 如图,若 a, b 和d 分别是正九边形的边长,最短对角线和最长对角线,那么



(A) $d = a + b$.

(B) $d^2 = a^2 + b^2$.

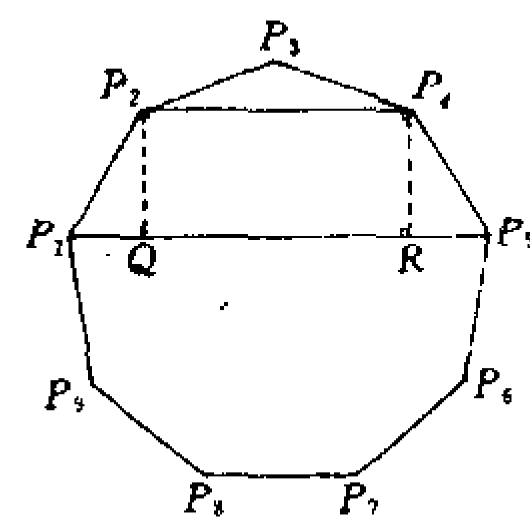
(C) $d^2 = a^2 + ab + b^2$.

(D) $b = \frac{a+d}{2}$.

(E) $b^2 = ad$.

（第 28 届美国高中数学考试，1977 年）

[解] 如图，$P_1P_2\cdots P_9$ 是正九边形；且
$P_1P_2 = a$， $P_2P_4 = b$， $P_1P_5 = d$.
又 Q 和 R 在 P_1P_5 上，且 $P_2Q \perp P_1P_5$，
$P_4R \perp P_1P_5$.
因为 $P_2P_3 = P_3P_4$ 且正九边形的每个内角是



$$\left[\frac{180(9-2)}{9}\right]^\circ = 140^\circ,$$

可得 $\angle P_3P_2P_4 = 20^\circ$.

因此 $\angle P_1P_2Q = 30^\circ$， $P_1Q = \frac{a}{2}$.

同样地 $P_5R = \frac{a}{2}$.

这样 $P_1P_5 = P_1Q + P_2P_4 + P_5R$，即 $d = a + b$.

故选(A).

19·13 (1) 由 $x^2 - y^2 = 0$，可得 $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$

(2) 如果一条直线有两点到另一条直线距离相等，那么这两条直线平行.

(3) 若两个三角形两边对应相等，且面积也相等，则它们全等.

(4) 七边形的内角中，至少有四个钝角.

上述命题中正确命题的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（第 3 届"缙云杯"初中数学邀请赛，1986 年）

[解] (1) 由 $x^2 - y^2 = 0$ 得 $x + y = 0$ 或 $x - y = 0$，原命题不真.

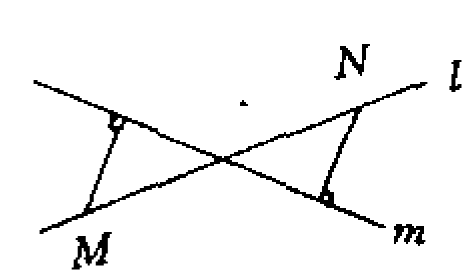


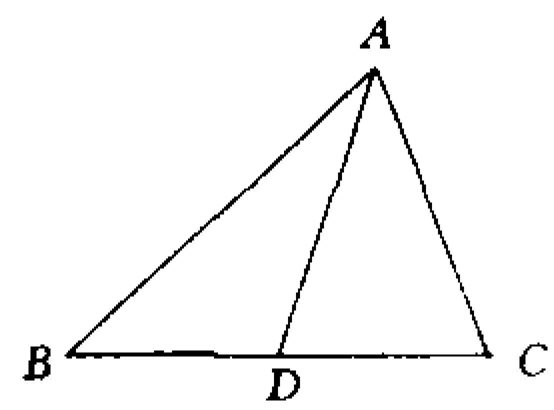
图 ①

(2) 如右图 ① 可知原命题不真.

(3) 如图 ②，AD 是 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的中线，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 满足题设，然它们不全等. 知原命题不真.

(4) 若凸七边形至多有三个钝角，则其至少有四个锐角，知其外角至少有四个钝角，它们和大于 360°，矛盾. 因而原命题正确.

故选(A).



图②

19·14　对于命题

(Ⅰ)内角相等的圆内接五边形是正五边形.

(Ⅱ)内角相等的圆内接四边形是正四边形.

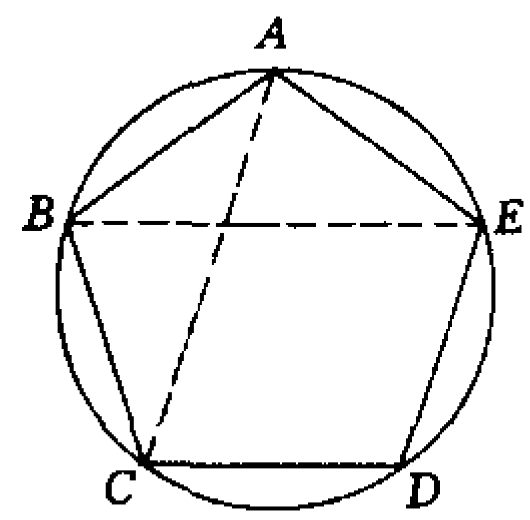
以下四个结论中正确的是

(A) Ⅰ,Ⅱ 都对.　　(B) Ⅰ 对,Ⅱ 错.

(C) Ⅰ 错,Ⅱ 对.　　(D) Ⅰ,Ⅱ 都错.

(中国初中数学联赛,1993年)

[解]　命题Ⅰ是成立的.若已知圆内接五边形内角相等,如下页图连 AC, BE,可证 $\triangle ABC \cong \triangle BAE$,有 $AE = BC$.



类似地可证:　$AB = CD$,　$BC = DE$,

$CD = AE$,　$DE = AB$.

即　$AB = BC = CD = DE = EA$,

即五边形为正五边形.

命题Ⅱ不真,只须注意圆内接矩形四个内角皆相等即可.

故选(B).

第2节　n 边形

19·15　若凸多边形的边数由3到 n 增加,则其多边形的外角的和

(A) 增加.　　(B) 减少.　　(C) 保持不变.

(D) 不能预算.　　(E) 变成($n-3$)个平角.

(第1届美国高中数学考试,1950年)

[解]　凸 n 边形外角和为:

$$n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

即为定值.

故选(C).

19·16　设多边形 P 的内角和为 S,已知每一内角为其同顶点的外角的 $7\frac{1}{2}$ 倍,则

(A) $S = 2660°$,且 P 可能是正多边形.

(B) $S = 2660°$,且 P 不是正多边形.

(C) $S = 2700°$,且 P 是正多边形.

(D) $S = 2700°$,且 P 不是正多边形.

(E) $S = 2700°$,且 P 可能是正多边形也可能不是正多边形.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 由设及多边形内、外角公式有

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 7\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n},\ 得\ n = 17.$$

则 $S = (17-2)\cdot 180° = 2700°$. 但 P 不一定为正多边形.

故选(E).

19·17 如果多边形的内角和是外角和的3倍,则此多边形的边数是

(A) 6.　　(B) 7.　　(C) 8.　　(D) 9.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解] n 边形内角和为$(n-2)\cdot 180°$,且其外角和为

$$n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 360°.$$

依题设有 $(n-2)\cdot 180° = 3\cdot 360°$, 得 $n = 8$.

故选(C).

19·18 两正多边形内角度数之比为3 : 2, 有这种情况的正多边形的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 无穷多.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 令 N,n 分别代表两种正多边形边数,故其角度量间的关系可表示成

$$\frac{(N-2)180°}{N} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(n-2)180°}{n},$$

则 $N = \dfrac{4n}{6-n}$.

由于 n,N 均为不小于3的正整数,故只须考虑 $n = 3,4,5$ 的情形,相应地有 $N = 4,\ 8,\ 20$.

(注意到 $n = 6$ 时,$6-n = 0$; $n > 6$ 时,$6-n < 0$)

故选(C).

19·19　凸 n 边形的内角记为 $A,B,C,\cdots$,且

$$\lg\sin A+\lg\sin B+\lg\sin C+\cdots=0.$$

则该多边形是

(A) 等腰梯形.　(B) 矩形.　(C) 直角三角形.　(D) 正六边形.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991 年)

[解]　由设有　$\lg(\sin A\sin B\sin C\cdots)=0$,

$\therefore$　　$\sin A\sin B\sin C\cdots=1$,

$\because$　$0<A,B,C,\cdots<\pi$, 则 $0<\sin A,\sin B,\sin C,\cdots\leqslant 1$,

因而　$\sin A=\sin B=\sin C=\cdots=1$,

即　　$A=B=C=\cdots=90^\circ$.

$\because$　凸 n 边形外角和为 360°,

$\therefore$　$n=360^\circ\div 90^\circ=4$.　则多边形为矩形.

故选(B).

19·20　一凸 n 边形的 n 个内角成等差数列,如果公差是 5°,最大角为 160°,则 n 等于

(A) 9.　(B) 10.　(C) 12.　(D) 16.　(E) 32.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解]　由设凸 n 边形 n 个内角分别为

$$160^\circ,\ 160^\circ-5^\circ,\ 160^\circ-2\cdot5^\circ,\ \cdots,\ 160^\circ-(n-1)5^\circ,$$

它们的和为

$$n\cdot160^\circ-[1+2+\cdots+(n-1)]\cdot5^\circ=\frac{5^\circ\cdot n(65-n)}{2},$$

又凸 n 边形内角和为 $180^\circ\cdot(n-2)$.

令它们相等,化简后有 $n^2+7n-144=0$.

解得　$n=9$ 或 -16(舍去).

故选(A).

19·21　n 使得一个正 n 边形的内角的度数是整数的个数有

(A) 16.　(B) 18.　(C) 20.　(D) 22.　(E) 24.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解]　因为正 n 边形的一个内角的度数是

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}=180^\circ-\frac{360^\circ}{n},$$

所以 n 必须是 360 的约数.

而 $360=2^3\cdot3^2\cdot5^1$,它的约数有形式 $n=2^a3^b5^c$, 这里

$$a=0,1,2,3,\quad b=0,1,2,\quad c=0,1.$$

因此,360 共有 $4\cdot3\cdot2=24$ 个约数.

因为 $n\geqslant3$,排除 1 和 2,所有的 n 有 22 个可能的值.

故选(D).

19·22 两个等角凸多边形 P_1 与 P_2,它们的边数不同,P_1 的每一角度数为 x,P_2 的每一角度数为 kx,其中 k 是大于 1 的整数,则数对 (x,k) 的可能的数目有

(A) 无穷多个.　　(B) 有限个,但多于 2.　　(C) 2.

(D) 1.　　(E) 0.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解] 多边形的边数最少为 3,则 x 的最小可能值为 60°.

又凸多边形每个内角均小于 180°,故 $kx<180^\circ$.

由题设 k 为大于 1 的整数,

故　当 $x=60^\circ$, $k=2$ 为一解,因此时 $kx=120^\circ<180^\circ$.

即 P_1 为三角形,P_2 为六边形;

当 $x>60^\circ$ 或 $k>2$ 时,$kx\geqslant180^\circ$,无解.

故选(D).

19·23 一个凸多边形的内角度数成等差数列. 若最小的角是 100°,最大的角是 140°,那么多边形的边数是

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 10.　　(D) 11.　　(E) 12.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 若设 n 是多边形的边数, 则凸 n 多边形的内角和是 $(n-2)180^\circ$. 由等差数列前 n 项和公式有

$$(n-2)180=\frac{n}{2}(100+140),$$

解得　$n=6$.

故选(A).

19·24 若一个凸多边形除去一个角以外所有角的和是 2190°,那

么多边形的边数应为

(A) 13.　(B) 15.　(C) 17.　(D) 19.　(E) 21.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

[解]　设 n 为已知凸多边形的边（角）数，x 为除去角的度数.

那么　$180(n-2)=2190+x$,

所以　$n-2=\dfrac{2190+x}{180}=12+\dfrac{30}{180}+\dfrac{x}{180}=12+1$,

注意到　$0^\circ<x<180^\circ$.

从而　$x=150^\circ$,　$\therefore\ n=15$.

故选(B).

19·25　一个凸多边形的内角和减去一个内角的度数所得的值为2570°.此内角的度数应为

(A) 90°.　(B) 105°.　(C) 120°.　(D) 130°.　(E) 144°.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

[解]　一个 n 边的凸多边形的内角和为 $(n-2)\cdot180^\circ$.假设 x 是要求的那个内角，则有

$(n-2)\cdot180^\circ=2570^\circ+x$,　其中 $0^\circ<x<180^\circ$.

当 $n=17$ 时，$(n-2)\cdot180^\circ=15\cdot(180^\circ)=2700^\circ$,

于是　$x=130^\circ$.

若 $n<17$，则 x 将得到负值，这不可能；

若 $n>17$，则 x 将超过 180°，与凸多边形的条件不符.

故选(D).

19·26　一个凸 n 边形，除一个内角外，其余 $n-1$ 个内角的和为2400°，则 n 的值是

(A) 15.　(B) 16.　(C) 17.　(D) 不能确定的.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1987 年）

[解 1]　由于凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180^\circ$,

设 x 为其中一内角度数，由题意得

$$2400^\circ+x=(n-2)\cdot180^\circ,$$

由于等式之右边为 180 的倍数，则　$x=120^\circ$，于是

$$2520^\circ=(n-2)\cdot180^\circ,$$

即 $n-2=14$，或 $n=16$.

故选(B).

[解2] $\because$ 凸 n 边形每个内角均在 0° 到 180° 之间，

$\therefore$ n 个内角的和在 2400° 到 2580° 之间.

$\therefore$ $2400^\circ<(n-2)\cdot180^\circ<2580^\circ \quad (n\in N)$,

则 $15\frac{1}{3}<n<16\frac{1}{3}$，即 $n=16$.

故选(B).

19·27 凸 n 边形的 n 个内角与某一个外角的总和为 1350°，则 n 等于

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9. (E) 10.

（中国北京市初中数学竞赛，1984 年）

[解] 凸 n 边形内角和为 $(n-2)\cdot180^\circ$，设那某一个外角为 α，则

$$(n-2)\cdot180^\circ+\alpha=1350^\circ,\ 且\ 0^\circ<\alpha<180^\circ.$$

由整数整除的性质知 $90\mid\alpha$，故 $\alpha=90^\circ$，求得 $n=9$.

故选(D).

19·28 凸多边形中，小于 120° 的内角不能多于

(A) 2 个. (B) 3 个. (C) 4 个. (D) 5 个.

（中国浙江省宁波市初中数学竞赛，1987 年）

[解] 凸多边形外角和为 360°. 若设其小于 120° 的内角数为 k，这些角相应的外角则大于 60°.

但 $k\cdot60^\circ<360^\circ$， 得 $k<6$.

即 k 最大为 5.

故选(D).

19·29 凸八边形的内角中，钝角个数为 m，锐角个数为 n，则

(A) $m<n$. (B) $m>n$.

(C) $m=n$. (D) $m<n$，$m>n$，$m=n$ 都有可能.

（“江汉杯”初中数学竞赛，1991 年）

[解] 因为凸 n 边形外角和为 360°，则凸八边形的外角中非锐角个数不大于 3.

因而，凸八边形内角中非钝角个数不大于 3.

从而 $n\leqslant3$，$m\geqslant5$，由此可有 $m>n$.

故选(B).

19·30　如果限定凸多边形恰有三个内角是钝角，这种多边形的边数最多是

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 6.　　(D) 7.　　(E) 8.

（第36届美国高中数学考试，1985年）

[解1]　因为凸多边形外角和为360°，故其外角中非锐角个数不超过3(且题设其有三个钝角，则外角中已有三个锐角)，即其内角中非钝角个数不多于3个.

又该多边形有三个钝角内角，则其边数最多是6.

故选(C).

[解2]　由题设知n边形有3个钝角，则有$n-3$个锐角或直角，这样

$$(n-2)\cdot 180^\circ < (n-3)\cdot 90^\circ + 3\cdot 180^\circ,$$

解得　$n<7$.　因而 $n_{\max}=6$.

故选(C).

19·31　凸1992边形的内角中非锐角的个数至少有

(A) 1988个.　(B) 1989个.　(C) 1990个.　(D) 1991个.

（中国北京市初中数学竞赛，1992年）

[解]　凸n边形内角和为$(n-2)\cdot 180^\circ$，故其外角和为$2\cdot 180^\circ$.则其外角中钝角至多有3个，故其内角中非锐角至少有

$$1992-3=1989\text{个}.$$

故选(B).

19·32　设n为自然数，且$n\geqslant 4$.又设凸n边形中出现锐角的最大数为M，出现锐角的最小个数为m；则$M+m$的值是

(A) 3.　　(B) 4.

(C) 大于4的自然数.　　(D) 不能确定.

（中国上海市初中数学竞赛，1985年）

[解]　由凸n边形所有外角和为360°，当$n\geqslant 4$时，至多有3个外角是钝角，即凸n边形最多有3个内角是锐角，即$M=3$.

而矩形的四个内角皆为90°，而非锐角，则$m=0$.所以

$$M+m=3.$$

故选(A).

19·33　一个凸 n 边形共有27条对角线,则这个凸 n 边形的边数为

(A) 11.　　(B) 10.　　(C) 9.　　(D) 8.　　(E) 7.

(中国湖北省武汉市初中数学竞赛,1985年)

[解]　凸 n 边形对角线条数为$\frac{1}{2}n(n-3)$.由题设有

$$\frac{1}{2}n(n-3)=27,$$

即

$$n^2-3n-54=0.$$

解得　$n=9$ 或 -3(舍去).

故选(C).

19·34　凸七边形的所有对角线把该七边形分割成许多不重叠的小凸多边形.其中边数最多的小多边形的可能边数是

(A) 5.　　(B) 6.　　(C) 7.　　(D) 大于7的自然数.

(中国上海市初中数学竞赛,1987年)

[解1]　由题设知:任意小凸多边形的边都是大凸七边形的对角线.

显然,同一顶点出发的三条对角线不可能作为同一凸多边形的边.

所以,小凸边形的边最多是由一个顶点出发的两条对角线组成.但一条对角线连着两个顶点,这样小凸多边形边数最多是7.

故选(C).

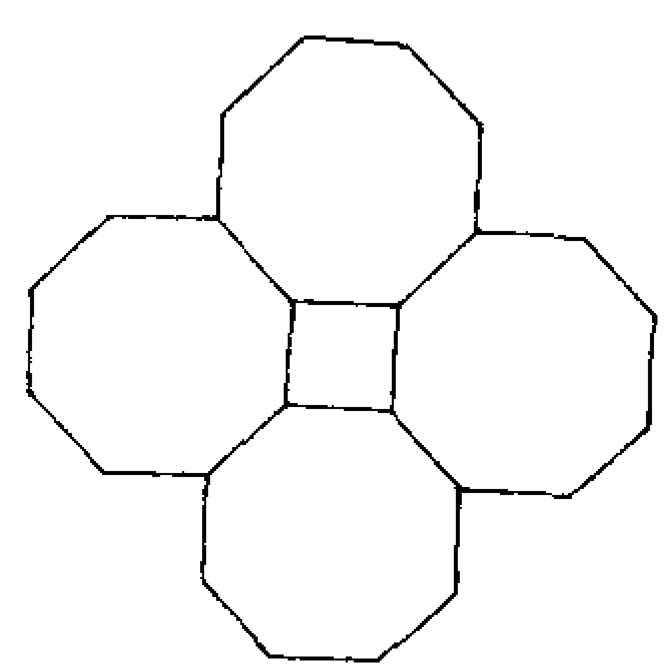
[解2]　设边数最多的小凸多边形边数为 m,其每边连结凸七边形两个顶点,共连结 $2m$ 个顶点.

又凸七边形每个顶点最多引出两条线成为上述多边形两条边.

故每个顶点最多被计算两次,这样 $2m\leqslant 14$,所以 $m\leqslant 7$.

又当凸七边形为正七边形时,其对角线可分割出一个新的正七边形,即 $m=7$ 可以达到.

故选(C).

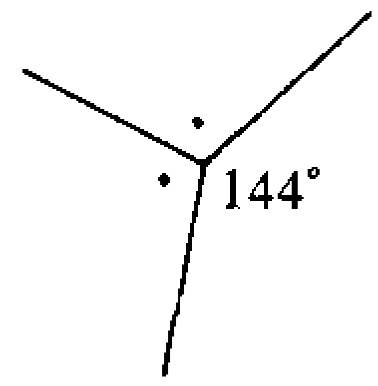


19·35　一个正 m 边形恰好被 m 个正 n 边形包围(无空隙,无重叠),如图 $m=4,n=8$ 时的情况,若 $m=10$,则 $n=$

(A)5.　　(B)6.　　(C)14.　　(D)20.　　(E)26.

（第 45 届美国高中数学考试,1994 年）

［解］　由正 n 边形内角公式可知:正 10 边形每个内角度数为



$$\frac{180°\cdot(10-2)}{10}=144°.$$

依题意　$144°+2\cdot\frac{180°\cdot(n-2)}{n}=360°.$

解得　$n=5.$

故选(A).

19·36　三个不重叠的正多边形,其中至少有两个全等,且它们边长全为1,又它们相交于 A 点,此时三个多边形的汇于 A 点的三个内角和为 360°. 这样以 A 为内点形成一个新的多边形,这个多边形最大周长可能为

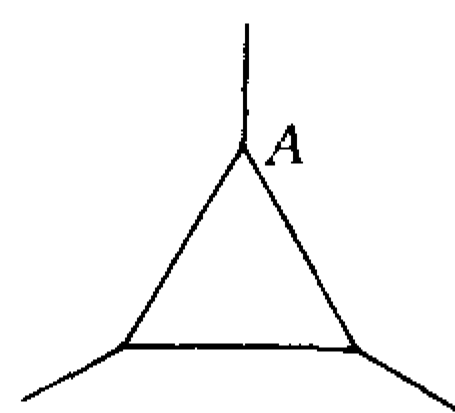
(A)12.　　(B)14.　　(C)18.　　(D)21.　　(E)24.

（第 50 届美国高中数学考试,1999 年）

［解］　注意到正 n 边形内角度数为$(n-2)180°/n$. 这样可有下表:

正 n 边形边数n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
每个内角角度	60°	90°	108°	120°	128.6°	135°	140°	144°	147.2°	150°	…

再由题设稍作分析后可知:两全等的正多边形边数为12,另一多边形为正三角形. 此时汇于 A 点的三个正多边形内角和为



$$150°\times2+60°=360°.$$

这样以 A 为内点的新多边形周长是

$$12\times2+3-3=24\quad(注意到有三对边重合).$$

故选(E).

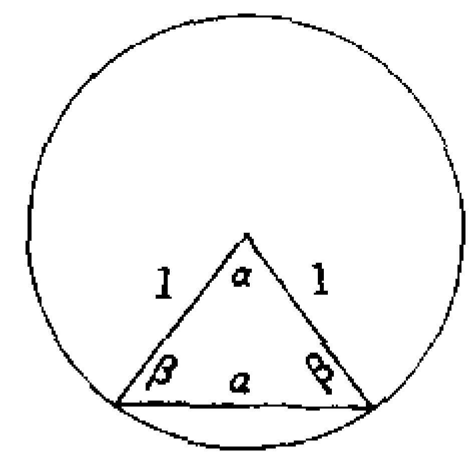
19·37　在半径为 1 的圆 中有一内接多边形. 若它的边长皆大于 1 且小于$\sqrt{2}$,则这个多边形的边数必为

(A) 7.　　(B) 6.　　(C) 5.　　(D) 4.

(中国初中数学联赛,1992 年)

[解]　若满足条件的多边形的边数大于或等于 6,则至少有一边所对的圆心角不大于 60°.

如右图,设该边长为 a,所对圆心角为 α,则由 $\beta \geqslant \alpha$,知 $a \leqslant 1$.



若多边形边数等于 4,则至少有一边所对圆心角不小于 90°.

由余弦定理可证该边长不小于$\sqrt{2}$.

故选(C).

19·38　一正 n 边形内接于半径为R 的圆,这个 n 边形的面积为 $3R^2$,则 n 等于

(A) 8.　　(B) 10.　　(C) 12.　　(D) 15.　　(E) 18.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解]　由 $S=\frac{1}{2}pr$,p 为正多边形周长,r 为边心距,且设其边长为 a_n.

又 $p = na_n = n \cdot 2R\sin\frac{180°}{n}$, $r = R\cos\frac{180°}{n}$.

由设　$3R^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2R\sin\frac{180°}{n} \cdot R\cos\frac{180°}{n}$,

即
$$\frac{6}{n} = \sin\frac{360°}{n}.$$

由 $n \geqslant 3$ 整数,使该式成立者仅有 $n=12$.

故选(C).

19·39　在同一平面上画两个边数各为 n_1,n_2 的凸多边形 P_1,P_2,这里 $n_1 \leqslant n_2$.如果 P_1,P_2 没有任何线段重合,则 P_1,P_2 的交点数的最大值是

(A) $2n_1$.　　(B) $2n_2$.　　(C) n_1n_2.

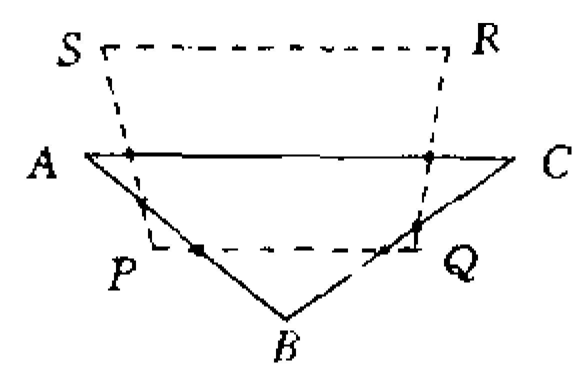
(D) n_1+n_2.　　(E) 以上都不是.

(第 19 届美国高中数学考试,1968 年)

[解]　由凸多边形定义知其每一内角皆小于 180°.

对于凸多边形 P_2 来讲,P_1 的每条边最多与 P_2 的边交于两点,故交点最多为 $2n_1$ 个.

下面我们适当地构造 P_2，以证明交点可以达到 $2n_1$ 个.



先在 P_1 的每条边上任选两点且标记好. 然后连接 P_1 中与每一顶点相邻的两个标记点，即成为一条"截线"通过，延长它们：

若它们相交，则交点作为 P_2 的顶点(如 P,Q)；

若它们不相交，则在它们延长线上各取一点作为 P_2 的顶点(如 S，R)，连接这两点，即为 P_2 的一条边. 此外点的选取时，应使它们的连线与 P_1 的相应边平行(如图 $SR \parallel AC$).

这样，每一"截线"皆为 P_2 的一条边，且以 P_1 的两个点为边上的内点.

因而 P_1 的每个顶点对应着一条"截线"，故共有 n_1 条，这样 P_1 与 P_2 恰好有 $2n_1$ 个交点.

又 P_2 的每个角均为一个三角形的内角或外角，故总小于 $180°$，因而 P_2 是凸多边形.

故选(A).

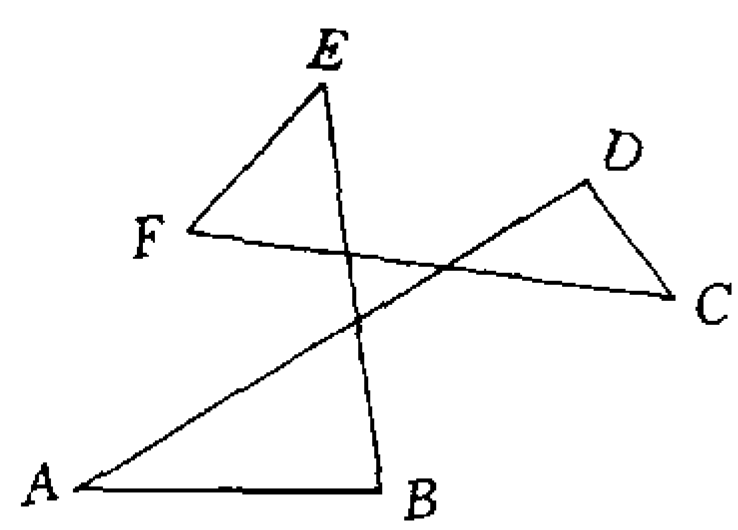
第3节　折多边形及其他

19·40　平面上有六个点 A,B,C,D,E,F 构成如图所示的图形(折多边形)，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 等于

(A) $180°$.　　(B) $360°$.

(C) $540°$.　　(D) 非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛，1983年)



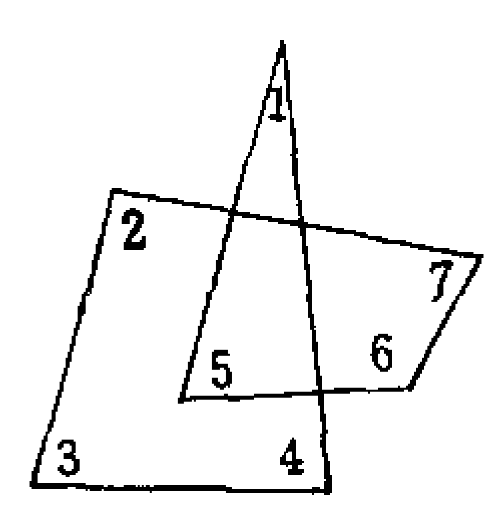
［解］　这些角和相当于三个三角形内角和再减去一个三角形的三个内角.

即所求的角和为　$3\cdot180°-180°=360°$.

故选(B).

19·41　如图，$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$ 的度数为

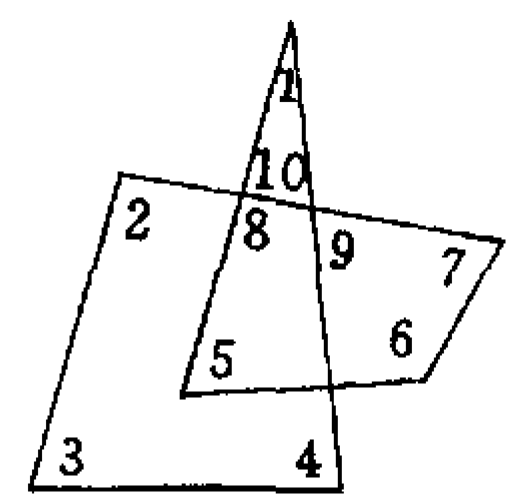
(A) $450°$.　　(B) $540°$.



(C) 630°.　　　　(D) 720°.

（中国天津市初中数学竞赛，1983 年；
中国安徽省初中数学竞赛，1997 年）

[解 1]　如图有(设 $\angle 8,\angle 9,\angle 10$)



$$\begin{cases}\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360^\circ, & ①\\ \angle 2+\angle 3+\angle 4+(180^\circ-\angle 9)=360^\circ, & ②\\ \angle 9=\angle 10, & ③\\ \angle 8=\angle 10+\angle 1. & ④\end{cases}$$

由 ③，④ 代入 ① 有

$$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 9+\angle 1=360^\circ, \quad ⑤$$

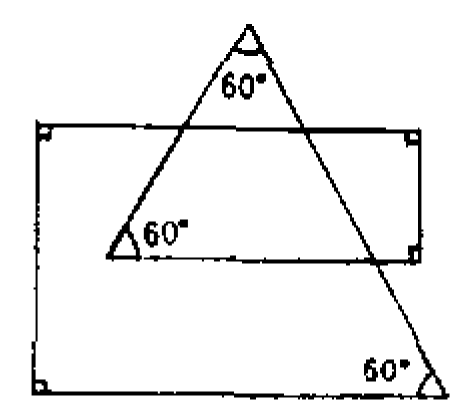
② + ⑤ 得

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+180^\circ=720^\circ,$$

即　$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=540^\circ.$

故选(B).

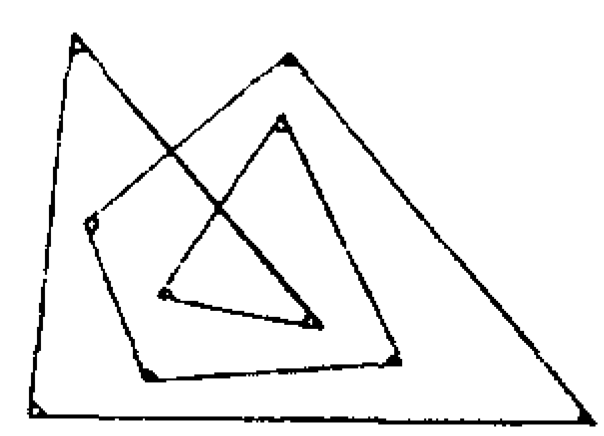
[解 2]　考虑极端的情形(便于计算或所成角为特殊角的情形，注意到题设线段长短不限)如右图，则所求的角和为



$$3\cdot 60^\circ+4\cdot 90^\circ=540^\circ.$$

故选(B).

19·42　右图标有记号的十个角之和是

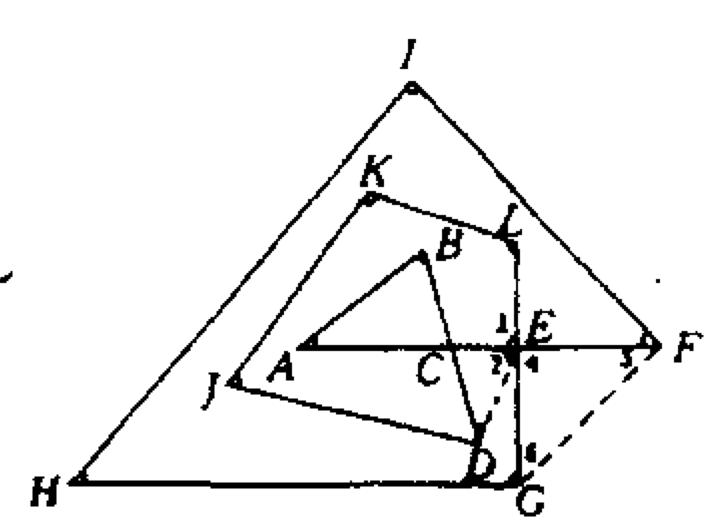


(A) 1080°;　　　(B) 720°;

(C) 540°;　　　(D) 不能确定的.

（中国部分省、市初中数学通讯赛，1989 年）

[解 1]　如图，连 ED,FG.



显然 $\angle A+\angle B=\angle 1+\angle 2$,

则　　$\angle A+\angle B+\angle D+\angle J+\angle K+\angle L$

$=$ 五边形 $DELKJ$ 内角和 $-\angle 3$;

且　　$\angle F+\angle I+\angle H+\angle G$

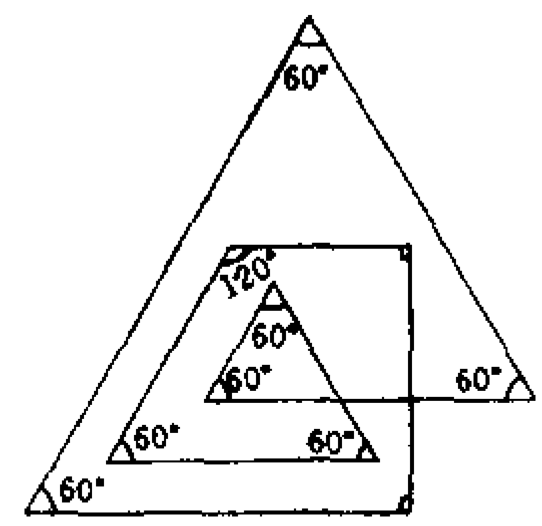
$=$ 四边形 $FIHG$ 内角和 $-(\angle 5+\angle 6)$;

又 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 4+\angle 5+\angle 6=180^\circ$,

从而所求的全部角之和为:

$180°\cdot(5-2)+180°\cdot(4-2)-180°=720°.$

故选(B).

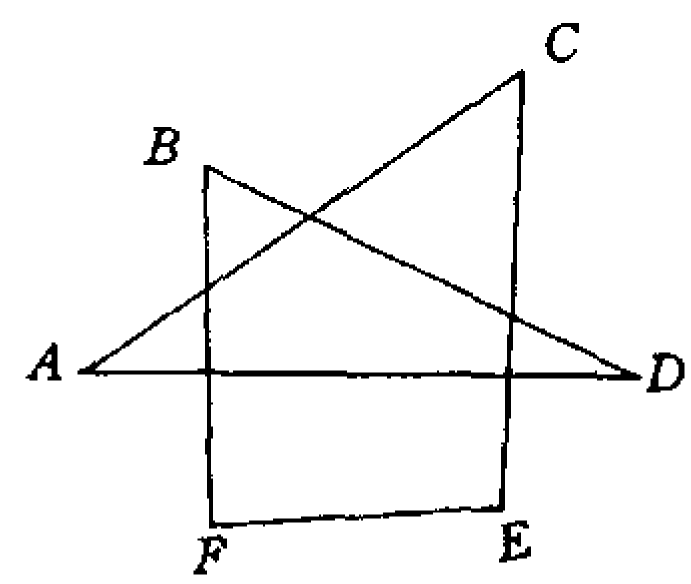


[解2] 因题设图形中线段长短不限,今考虑特殊的情形(如图).

因而所求的角和为:七个60°角,两个90°角,一个120°角之和.

即 $60°\cdot 7+90°\cdot 2+120°=720°.$

故选(B).



19·43 若右图中角A、B、C、D、E和F的度数之和是$90n°$,那么n等于

(A) 2. (B) 3. (C) 4.

(D) 5. (E) 6.

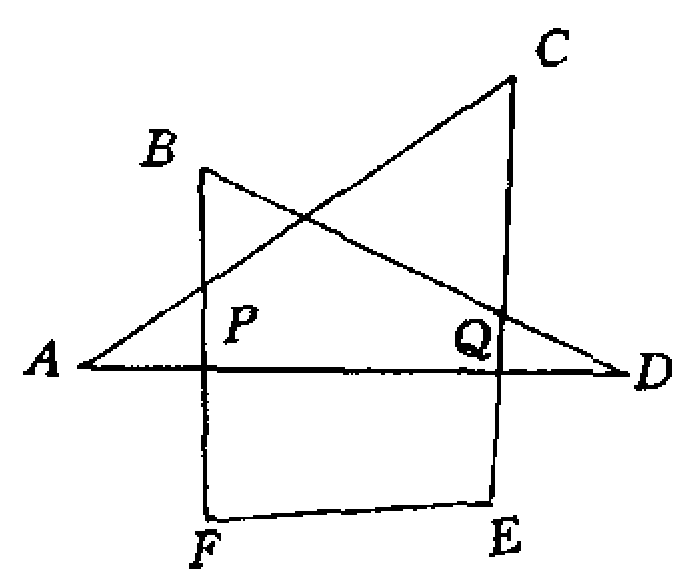
(第23届美国高中数学考试,1972年)

[解1] 设P,Q分别为AD和BF,CE的交点,则有

$\angle F+\angle FPD+\angle EQA+\angle E=360°,$

$\angle B+(180°-\angle FPD)+\angle D=180°,$

$\angle A+(180°-\angle EQA)+\angle C=180°.$



把这些方程相加,得到

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+360°=720°.$

所求的和是 $360°=90n°,$

从而 $n=4.$

故选(C).

[解2] 仿19·38题[解法2].

19·44 延伸正n边形的边使之形成一星形,则在星形顶点处的角度值为

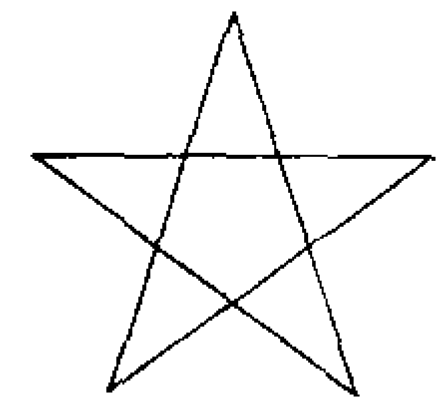
(A) $\frac{360°}{n}$. (B) $\frac{(n-4)180°}{n}$. (C) $\frac{(n-2)180°}{n}$.

(D) $180°-\frac{90°}{n}$. (E) $\frac{180°}{n}$.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解] 正n边形每个顶角度数值为$\frac{(n-2)180°}{n}$,即成星形时,每

个星形顶点与原正多边形顶点组成等腰三角形.

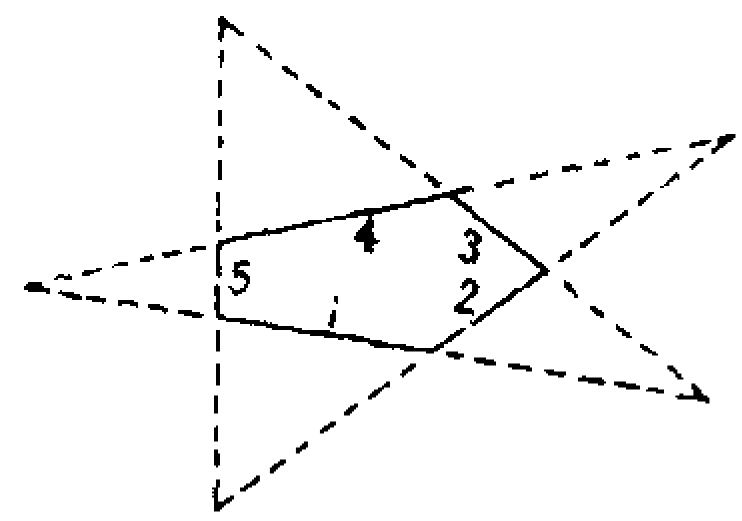


由三角形外角性质可求得星形顶点处的角度为

$$180^\circ - 2\left[180^\circ - \frac{(n-2)180^\circ}{n}\right] = \frac{n-4}{n}\cdot 180^\circ.$$

故选(B).

19·45 一"n 角星"可如右画出:取一凸多边形,依次记其边为 $1,2,\cdots,n(n\geqslant 5)$,并假设对 1 到 n 间的任何整数k,边 k 与边$k+2$ 互不平行(边 $n+1$ 及边 $n+2$ 分别看成边1及边 2),现对所有这样的 k,把边 k 及边$k+2$ 延长到两者相交(如图是 $n=5$ 的例子).设 S 为 n 个角的内角度数和,则 S 等于

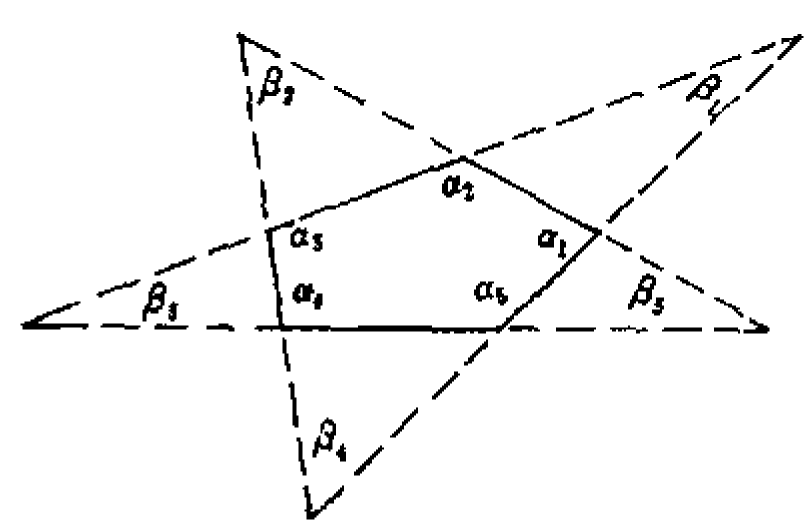


(A) 180°. (B) 360°. (C) $180^\circ(n+2)$.

(D) $180^\circ(n-2)$. (E) $180^\circ(n-4)$.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解 1] 设 n 角星的n 个角分别为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n$,且凸多边形 n 个角分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$,则有



$$\beta_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha_1) - (180^\circ - \alpha_2)$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ,$$
$$\beta_2 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha_2) - (180^\circ - \alpha_3)$$
$$= \alpha_2 + \alpha_3 - 180^\circ,$$

………………

$$\beta_n = 180^\circ - (180^\circ - \alpha_n) - (180^\circ - \alpha_1) = \alpha_n + \alpha_1 - 180^\circ.$$

上面诸式两边相加有

$$S = 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k - 180^\circ\cdot n,$$

又凸 n 边形内角和为$(n-2)\cdot 180^\circ$,则 $S=(n-4)\cdot 180^\circ$.

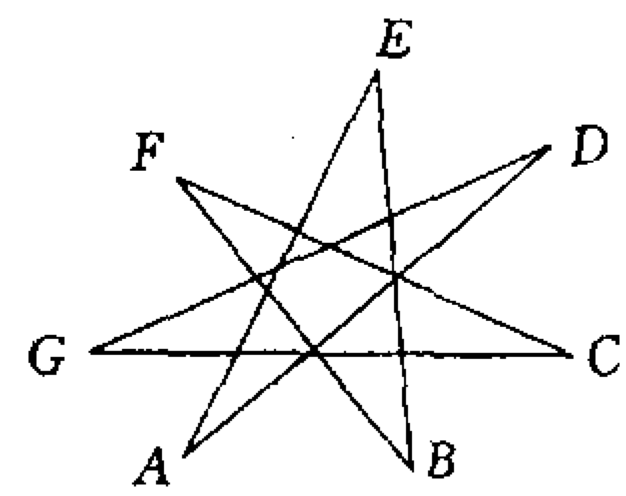
故选(E).

[解 2] 由 19 · 40 题可得

$$S = n\cdot\frac{(n-4)180^\circ}{n} = (n-4)\cdot 180^\circ.$$

故选(E).

19·46　如图,$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 等于

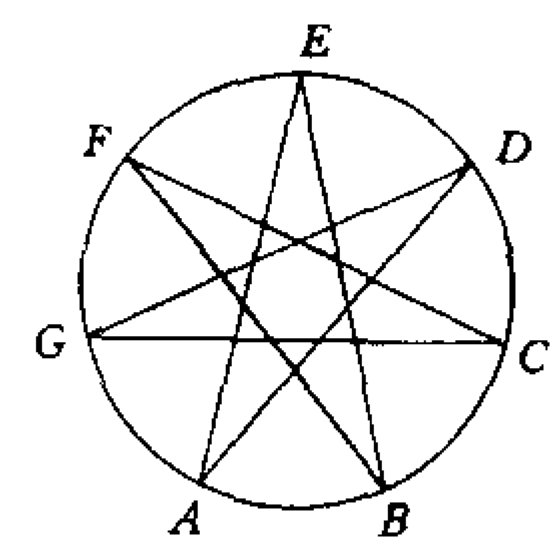


(A) 100°.　　(B) 120°.

(C) 150°.　　(D) 180°.

(中国江苏省南京市初中数学竞赛,1991年)

[解]　考虑极端的情形,即 A,B,C,D,E,F,G 共圆的情形.



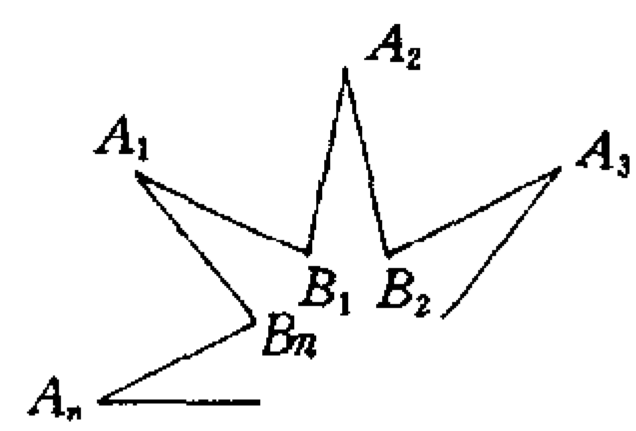
由圆周角性质,易知

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ=180^\circ.$$

故选(D).

19·47　一个正 n 角星,它是一个边长都为 $2n$ 的简单闭合正多边形(下图是它的一部分).角 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相等,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 相等,如果

$$\angle A_1=\angle B_1-10^\circ,$$



则 n 等于

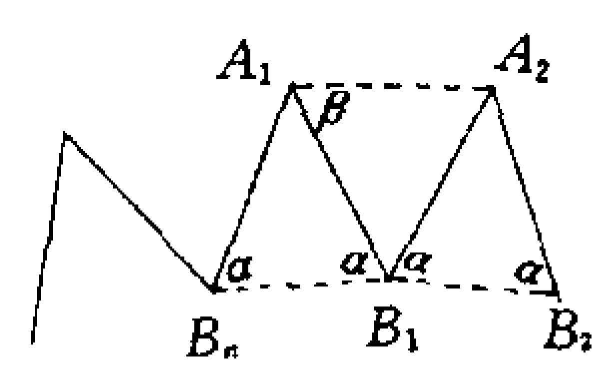
(A) 12.　(B) 18.　(C) 24.　(D) 36.　(E) 60.

(第43届美国高中数学考试,1992年)

[解]　连 A_1A_2,B_nB_1 和 B_1B_2.

由凸 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 内角和为$(n-2)180^\circ$,则

$$\angle B_nB_1B_2=\frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$



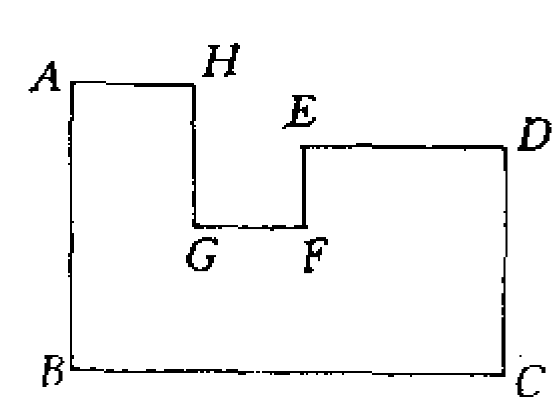
设　$\angle A_1B_nB_1=\alpha$,

有　$\alpha+\angle B_1+\alpha+\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}=360^\circ$,

即　$\alpha+(\angle A_1+10^\circ)+\alpha+\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}=360^\circ$,

由　$\alpha+\alpha+\angle A_1=180^\circ$,则

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}=360^\circ-190^\circ=170^\circ,$$



即　$(n-2)\cdot 180^\circ=n\cdot 170^\circ$,

第十九章　多边形

或　$18n-36=17n$，　得　$n=36$.

故选(D).

19·48　多边形 $ABCDEFGH$ 相邻两边互相垂直，若要求出其周长，那么所需最少边数是

(A) 3.　　(B) 4.　　(C) 5.　　(D) 6.

（第2届"缙云杯"初中数学邀请赛，1985年）

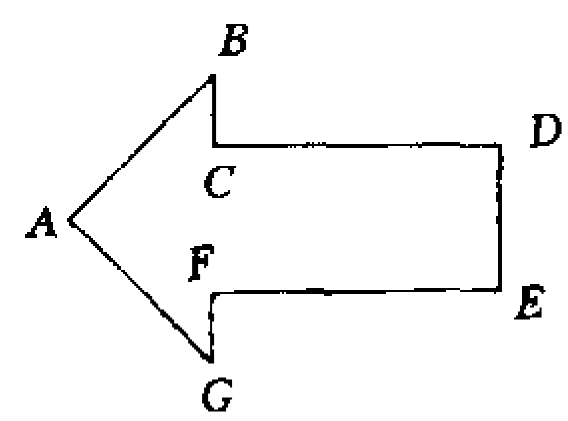
[解]　首先可看到 $AH+GF+ED=BC$，故横向边只须知 BC 长即可.

再看纵向边：$HG+DC=AB+EF$，这样只须知道 AB，EF 长即可求 $AB+HG+EF+DC$ 的长.

综上，最少只须知道3条边长即可.

故选(A).

19·49　如图，在箭头状多边形中，顶点 A，C，D，E 和 F 处的角均为直角，$BC=FG=5$，$CD=FE=20$，$DE=10$，$AB=AG$. 这个多边形的面积最接近于



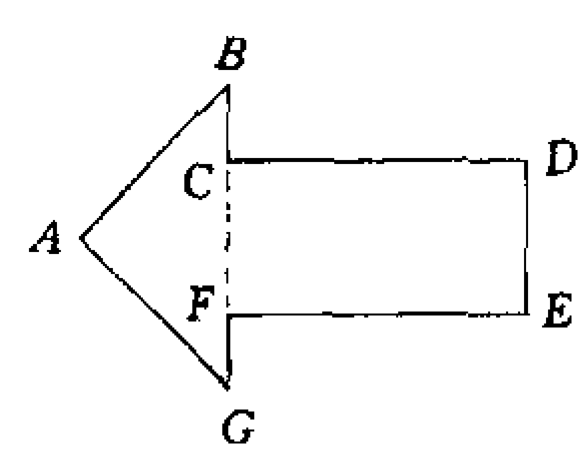
(A) 288.　　(B) 291.　　(C) 294.

(D) 297.　　(E) 300.

（第42届美国高中数学考试，1991年）

[解]　如右图，连 CF，则 $BG=10+5+5=20$.

又 $\triangle ABG$ 为等腰直角三角形，则



$$S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}\cdot BG\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10$$

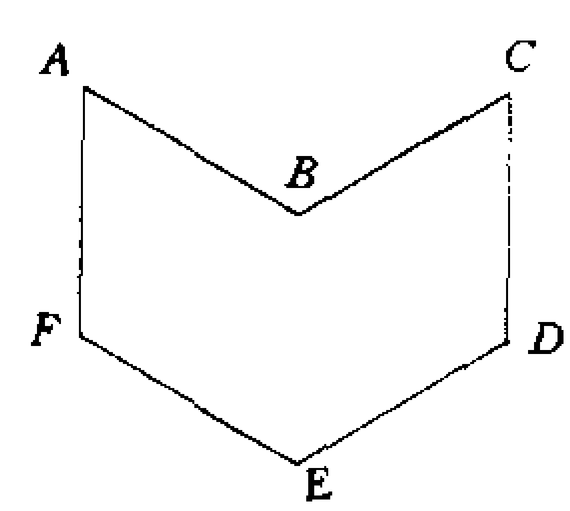
$$=100,$$

又　　$S_{\square CDEF}=20\cdot 10=200$.

有　　$S_{\text{⬠}}=100+200=300$.

故选(E).

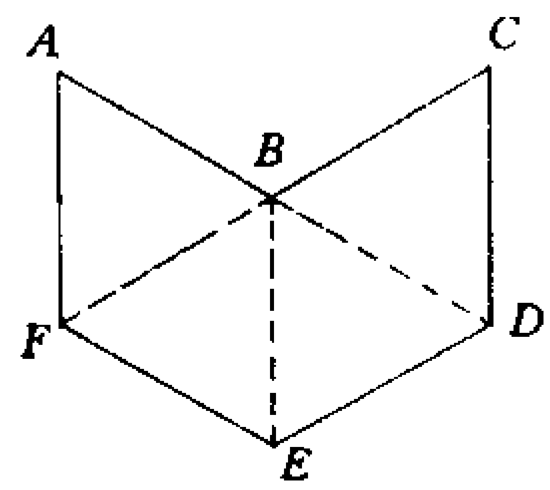
19·50　如图，$AF\parallel CD$，$AB\parallel EF$，$BC\parallel ED$. 它们的长度均为1，且 $\angle FAB=\angle BCD=60^\circ$. 那么图形的面积是



(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(B) 1.　　(C) $\frac{3}{2}$.

(D) $\sqrt{3}$.　　(E) 2.

（第 34 届美国高中数学考试,1983 年）



[解]　如图,连接 BF、BE 和 BD,将图形 $ABCDEF$ 化整为零,分成四个三角形.

容易验证,这四个三角形均为边长是 1 的等边三角形(例如,在$\triangle FAB$中,因为$AF = AB = 1$,所以

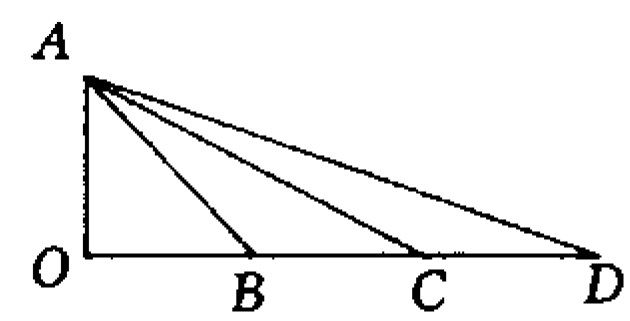
$$\angle AFB = \angle ABF = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ).$$

则其总面积是

$$4 \cdot \frac{1}{2} AF \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

故选(D).

19·51　如图,$\angle AOD = 90^\circ$,且 $OA = OB = BC = CD$.则下面结论正确的是



(A) $\triangle AOB \backsim \triangle COA$.

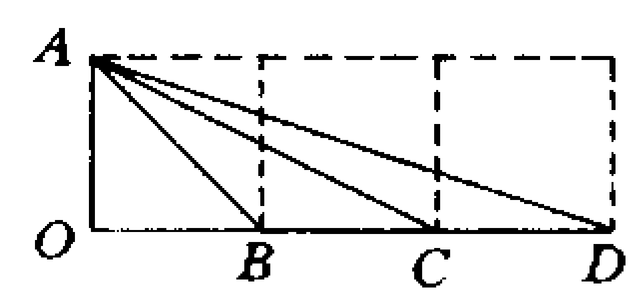
(B) $\triangle OCA \backsim \triangle ODA$.

(C) $\triangle BCA \backsim \triangle BAD$.

(D) 以上结论都不对.

（中国安徽省安庆等县初中数学竞赛,1991 年）

[解]　考虑右图,且设 $OA = 1$,则 $AB = \sqrt{2}$,$BD = 2$.



由　$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

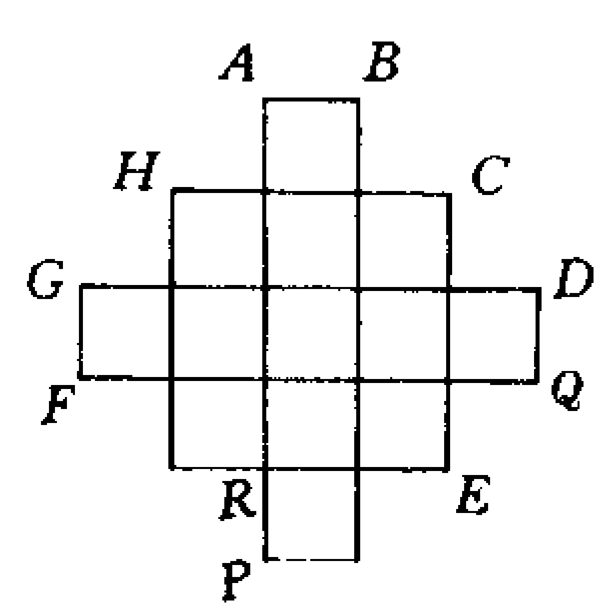
知　$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$,　即$\triangle BCA \backsim \triangle BAD$.

故选(C).

19·52　如图,由 13 个相同的正方形构成.若在标明字母的点之间连上线段,则

$$(\angle FPB + \angle FPD + \angle APC + \angle APE) + (\angle AQG + \angle QCF + \angle RQF + \angle CQD)$$

的值为

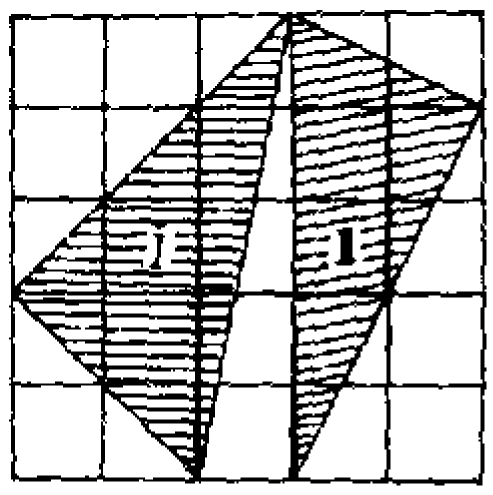


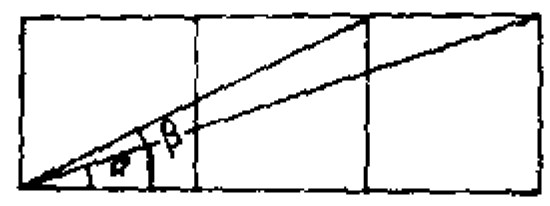
(A) 540°. (B) 450°. (C) 405°. (D) 360°.

（第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛,1991 年）

[解] 注意到：$\angle FPB$，$\angle FPD$，$\angle AQG$ 和 $\angle APE$，$\angle APC$，$\angle QCF$ 分别为右图中 △Ⅰ 和 △Ⅱ 的三个内角.

又 $\angle RQF + \angle CQD = 45°$（见右下图），



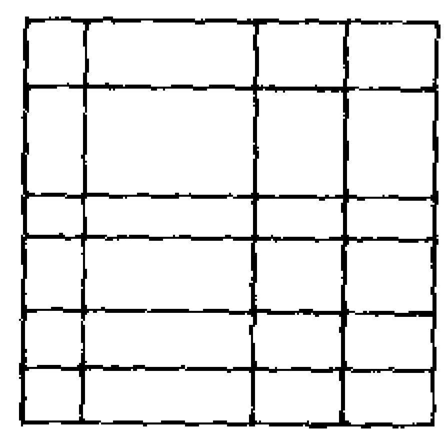


$\alpha + \beta = 45°$

因而所求角和为 $180° \cdot 2 + 45° = 405°$.

故选(C).

19·53 如图，一个正方形被 5 条平行于一组对边的直线和 3 条平行于另一组对边的直线分成 24 个（形状不一定相同的）长方形. 如果这 24 个长方形的周长的和为 24. 则原正方形的面积为



(A) 1. (B) $\frac{9}{4}$. (C) 4. (D) $\frac{36}{25}$.

（第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛，1990 年）

[解] 因为在计算这 24 个长方形周长的和时，包含在原正方形内部的长方形的边都被算了两次. 这样若设原正方形边长为 x，则

$$4x + 2(5+3)x = 24, \quad 即 \quad 20x - 24 = 0.$$

解得 $x = \frac{6}{5}$， 则 $x^2 = \frac{36}{25}$.

故选(D).

第二十章　圆

第1节　圆与直线

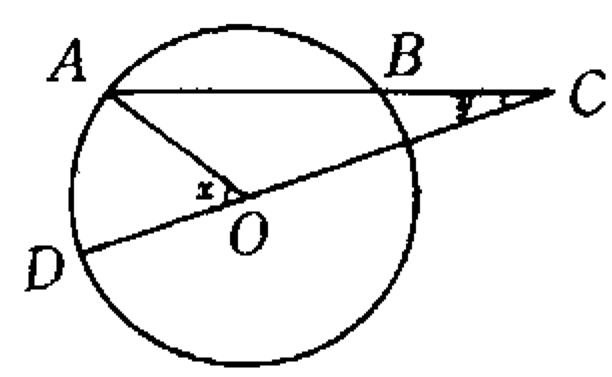
20·1　如右图,在圆 O 内,引弦 AB,使 BC 等于圆半径,引 CO 且延伸至 D,连 AO,则 x 与 y 的关系为

(A) $x=3y$.　(B) $x=2y$.

(C) $x=60^\circ$.　(D) x 与 y 之间无特别关系.

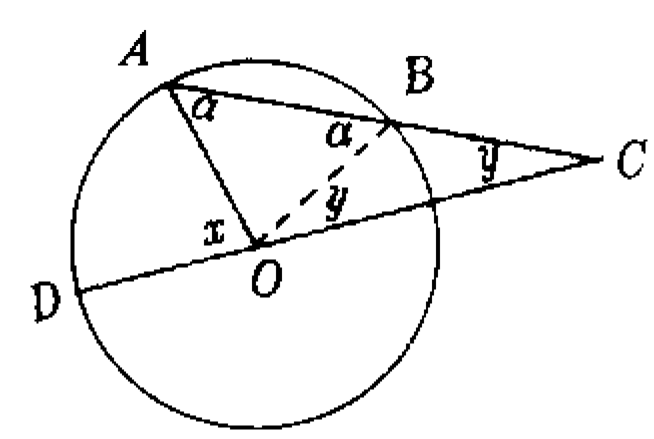
(E) $x=2y$ 或 $x=3y$ 则视 AB 的长而定.

(第 6 届美国高中数学考试,1955 年)



[解]　连 BO. 由三角形外角性质有(见图)

$$x=\alpha+y.$$



而　$\alpha=2y$, 从而　$x=3y$.

故选(A).

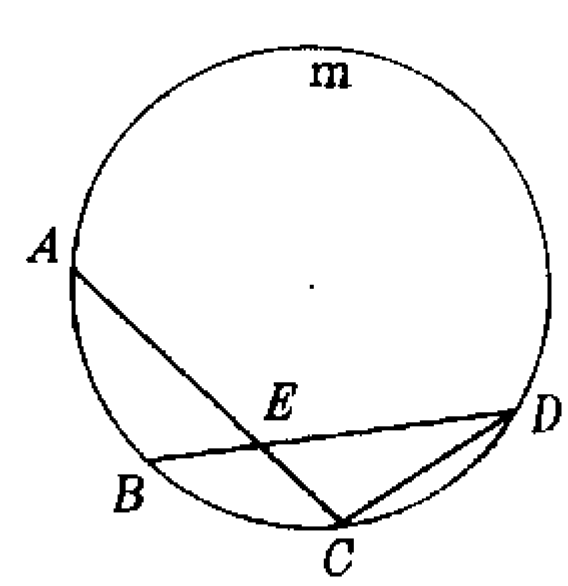
20·2　如图,弦 AC、BD 相交于 E,又 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$,$\angle BEC=130^\circ$,则 $\angle$ACD 的度数等于

(A) 15°.　　(B) 30°.

(C) 84°.　　(D) 105°.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛;

中国国部分省、市初中数学通讯赛,1984 年)



[解 1]　设 $\overset{\frown}{AmD}\overset{m}{=}x^\circ$,劣弧 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$

$\stackrel{m}{=} y^\circ$,

由设 $\begin{cases} x + 3y = 360, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 130, \end{cases}$ 解得 $x = 210$,

因而 $\angle ACD \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} \overset{\frown}{AmD} \stackrel{m}{=} 105^\circ$.

故选(D).

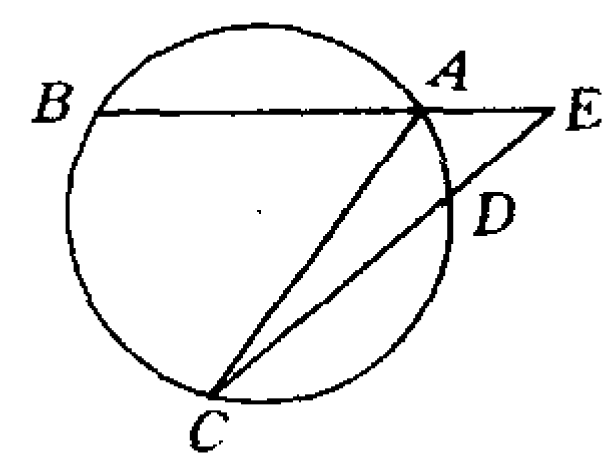
[解 2] 设劣弧$\overset{\frown}{AB} \stackrel{m}{=} x^\circ$, 则 $\overset{\frown}{AmD} \stackrel{m}{=} 360^\circ - 3x^\circ$.

又 $\angle BEC = 130^\circ$, 则 $130^\circ = \frac{1}{2}(360^\circ - 3x^\circ + x^\circ)$.

故 $x = 50$, 从而 $\angle ACD = \frac{1}{2}(360^\circ - 3 \cdot 50^\circ) = 105^\circ$.

故选(D).

20·3 如图,$\angle E = 40^\circ$,弧$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$和$\overset{\frown}{CD}$的长都相等.$\angle ACD$的度数是



(A) 10°. (B) 15°. (C) 20°.

(D) $\left(\frac{45}{2}\right)^\circ$. (E) 30°.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 设$\overset{\frown}{AB} \stackrel{m}{=} x^\circ$,$\overset{\frown}{AD} \stackrel{m}{=} y^\circ$,那么由题设可有

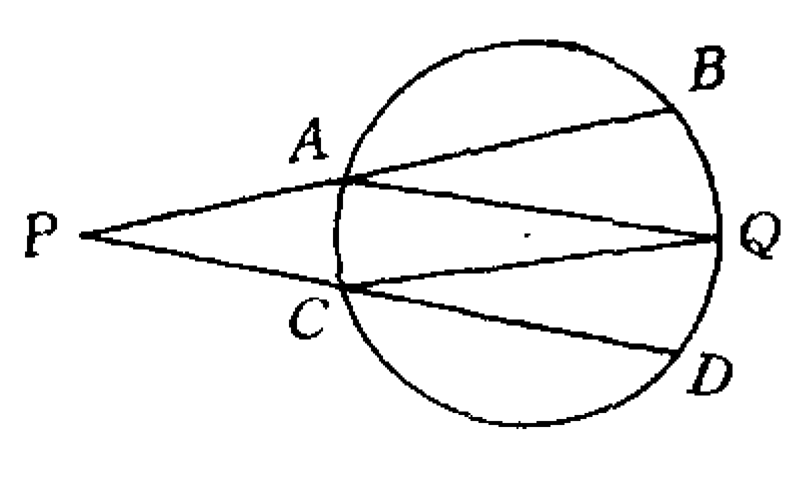
$$3x + y = 360, \quad \frac{1}{2}(x - y) = 40.$$

解得 $x = 110, \quad y = 30$.

$\therefore \quad \angle C = 15^\circ$.

故选(B).

20·4 如图所示,A, B, Q, D, C在圆上,量得弧$\overset{\frown}{BQ}$和$\overset{\frown}{QD}$分别是42°和38°.$\angle P$和$\angle Q$的和是



(A) 80°. (B) 62°. (C) 40°.

(D) 46°. (E) 这些都不对.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解 1] $\angle P + \angle Q$

$$= 360° - (\angle PAQ + \angle PCQ)$$
$$= 360° - (180° - 21°) - (180° - 19°)$$
$$= 40°.$$

故选(C).

[解 2] 由设知 $\angle P \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}), \angle Q \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

故 $\angle P + \angle Q \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} \overset{m}{=} \frac{1}{2}(42° + 38°) = 40°$.

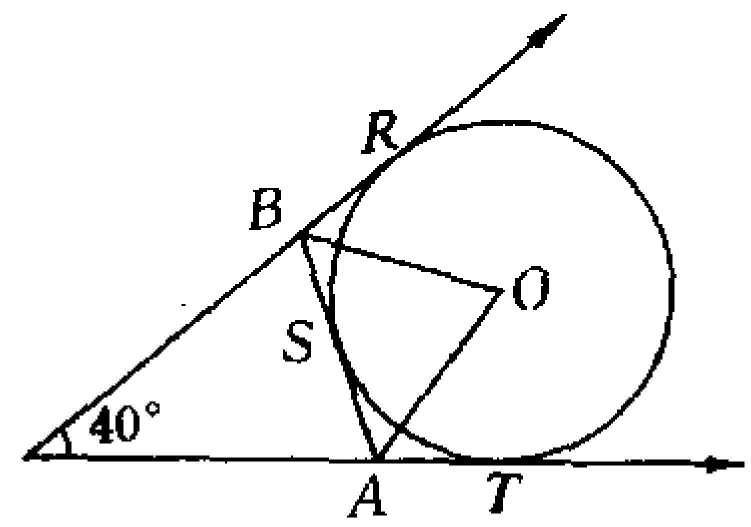
故选(C).

20·5 $\triangle PAB$ 由切于圆 O 的三条切线形成,且 $\angle APB = 40°$,则 $\angle AOB$ 为

(A) 45°. (B) 50°. (C) 55°.

(D) 60°. (E) 70°.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)



[解] 易知 $\angle PAB + \angle PBA = 180° - \angle BPA = 140°$,

又 $\angle TAS = 180° - \angle PAB, \angle RSS = 180° - \angle PBA$,

故 $\angle TAS + \angle RSS = 360° - 140° = 220°$.

而 OA, OB 分别平分 $\angle TAS$ 和 $\angle RSS$,则有

$$\angle OAS + \angle OSS = \frac{1}{2} \cdot 220° = 110°.$$

$\therefore$ $\angle AOB = 180° - 110° = 70°$.

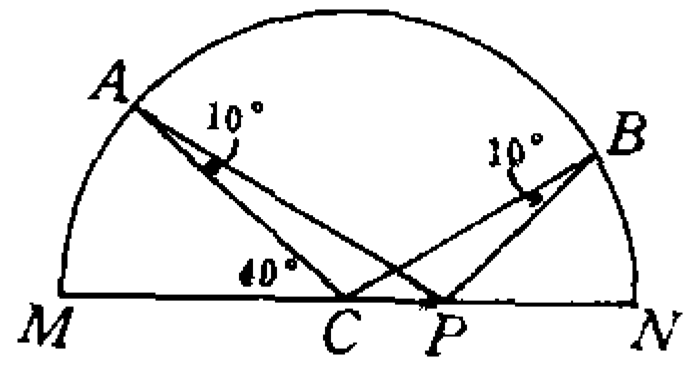
故选(E).

20·6 如图,点 A, B 在直径为 MN,圆心为 C 的半圆上,点 P 在 CN 上且 $\angle CAP = \angle CBP = 10°$. 如果 $\overset{\frown}{MA} \overset{m}{=} 40°$,那么 $\overset{\frown}{BN}$ 等于

(A) 10°. (B) 15°. (C) 20°.

(D) 25°. (E) 30°.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)



[解 1] 由题设有 $\angle CPA$ 与 $\angle CPB$ 互补. 在 $\triangle ACP$ 中

$$\angle CPA = \angle MCA - \angle CAP = 40° - 10° = 30°,$$

所以
$$\angle CPB = 150°.$$

于是 $\overset{\frown}{BN} \overset{m}{=} \angle PCB = 180° - 10° - 150° = 20°$.

故选(C).

[解2] 求出 $\angle CPA = 30°$ 后,在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCP$ 中运用正弦定理,有

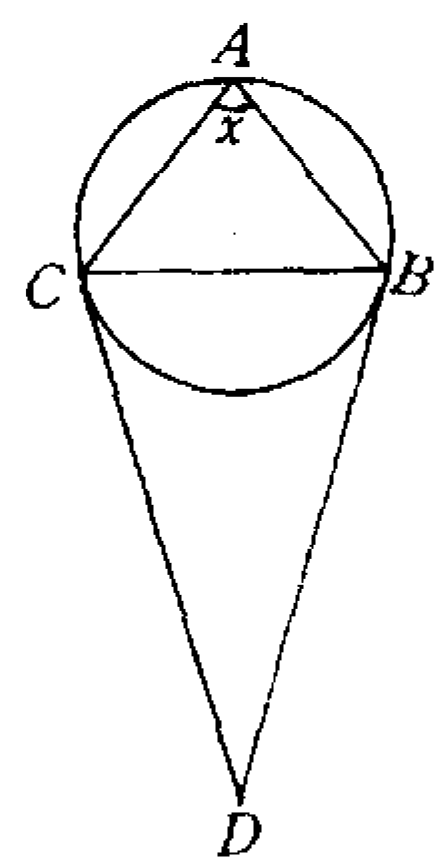
$$\frac{\sin 10°}{CP} = \frac{\sin 30°}{AC}, \quad 及 \quad \frac{\sin 10°}{CP} = \frac{\sin\angle CPB}{BC}.$$

因 $AC = BC$, 由上面两式有 $\sin\angle CPB = \frac{1}{2}$.

由于 $\angle CPB \neq \angle CPA$,所以必有 $\angle CPB = 150°$,于是 $\overset{\frown}{BN} = 20°$.

故选(C).

20·7 如图,锐角等腰 $\triangle ABC$ 内接于圆,过 B,C 做该圆的切线交于 D,如果 $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle D$, x 是 $\angle A$ 的弧度数,则 x 的值为



(A) $\frac{3}{7}\pi$. (B) $\frac{4}{9}\pi$. (C) $\frac{5}{11}\pi$.

(D) $\frac{6}{13}\pi$. (E) $\frac{7}{15}\pi$.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

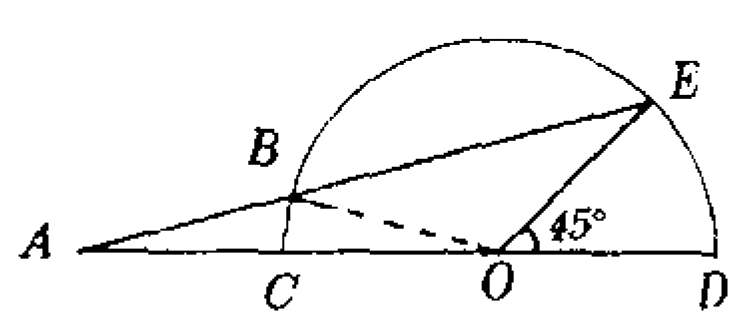
[解] 设 $\overset{\frown}{AC} = y$, $\overset{\frown}{BC} = z$, 依题设有

$$\begin{cases} y + y + z = 2\pi, & ① \\ \frac{1}{2}y = 2y - z, & ② \end{cases}$$

解得 $z = \frac{6}{7}\pi$, 则 $\angle A = x = \frac{1}{2}z = \frac{3}{7}\pi$.

故选(A).

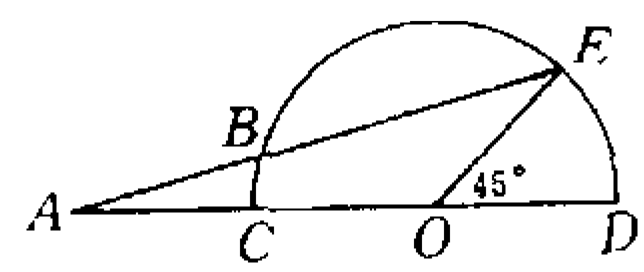
20·8 在右图中,CD 是以 O 为圆心的半圆的直径. A 点在 DC 的延长线上;E 点在半圆周上,B 点是线段 AE 与半圆周的交点(与 E 不重合). 若 AB 的长等于 OD 的长, $\angle EOD$ 是 $45°$,那么 $\angle BAO$ 是



(A) $10°$. (B) $15°$. (C) $20°$. (D) $25°$. (E) $30°$.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 连接 BO,用 x 和 y 分别表示 $\angle EOD$ 和 $\angle BAO$ 的度数.



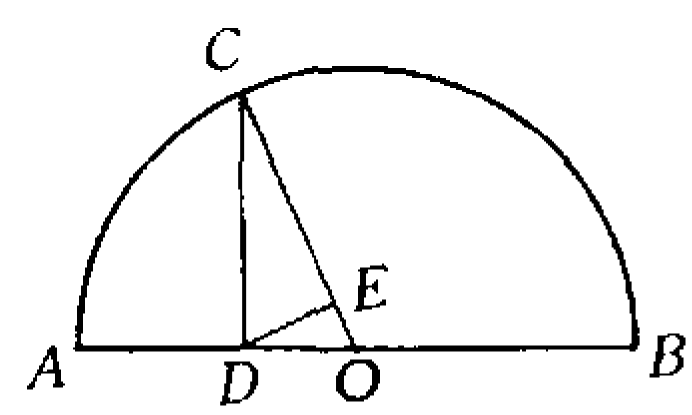
注意到 $AB = OD = OE = OB$,在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle AEO$ 中由三角形外角定理得

$$\angle EBO = \angle BEO = 2y, \quad 且\ x = 3y.$$

这样 $45^\circ = 3y$, 即 $y = 15^\circ$.

故选(B).

20·9 如图,AB 是半圆的直径,O 是圆心,$CD \perp AB$. $DE \perp OC$. 如果 AD, BD 和 CD 的长都是有理数,那么下面三个命题:



甲:OE 的长是有理数;

乙:DE 的长是有理数;

丙:图中所有用字母表出的线段的长都是有理数.

之中

(A) 只有甲正确. (B) 只有乙正确.

(C) 只有甲,乙正确. (D) 甲,乙,丙都正确.

(中国初中数学联赛,1987 年)

[解] 因为 AD, BD 和 CD 的长都是有理数,

所以 $OA = OB = OC = \dfrac{AD + BD}{2}$ 是有理数.

于是 $OD = OA - AD$ 是有理数.

由此 $OE = \dfrac{OD^2}{OC}$, $DE = \dfrac{DC \cdot DO}{OC}$ 都是有理数.

又 $CE = OC - OE$, $AB = AD + DB$ 也是有理数.

所以甲,乙,丙都是正确的.

故选(D).

20·10 AB 为圆 O 的固定直径,自圆上任意点 C 引一弦 CD 垂直于 AB. 当 C 在半圆上移动时,$\angle OCD$ 的平分线交圆周于点 P,此点常

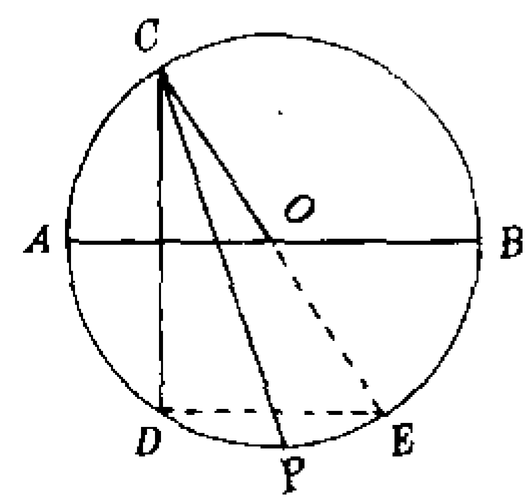
(A) 平分 $\overparen{AB}$. (B) 三等分 $\overparen{AB}$. (C) 变.

(D) 距 D 与距 AB 等远. (E) 距 B 与 C 等距.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 延长 CO 交圆于 E,连 DE,则

$\angle CDE = 90^\circ$.



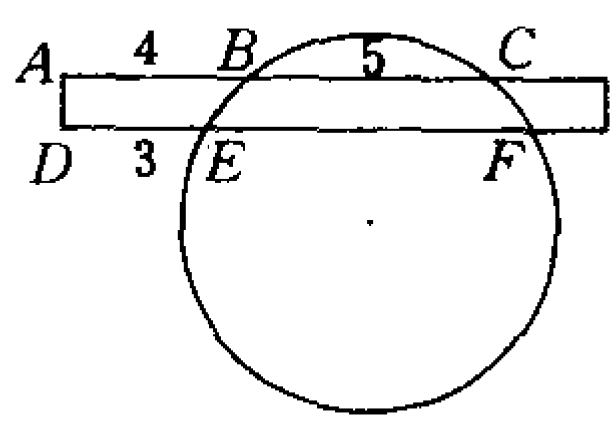
又 $CD \perp AB$,则 $AB \parallel DE$.

因 CP 为 $\angle OCD$ 之平分线,故点 P 是$\overset{\frown}{DE}$中点.

由 $DE \parallel AB$,故 P 亦为$\overset{\frown}{AB}$ 中点.

故选(A).

20·11 如图,一个长方形相交于一个圆,其中 $AB = 4$,$BC = 5$,$DE = 3$,那么 EF 等于



(A) 6. (B) 7. (C) $\frac{20}{3}$.

(D) 8. (E) 9.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解 1] 如图 ①,作 EF 弦的垂直平分线交圆于 S,交 BC 于 P,其一定过圆心 O.因此 $PO \perp BC$,且平分 BC.

因为 $PQ \parallel AD$,有 $DQ = AP = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$.

所以 $EF = 2EQ = 2(DQ - DE) = 7$.

故选(B).

[解 2] 如图 ②,过 B,C 作 AC 的垂线 BR 和 CS,于是四边形 $BCSR$ 和 $ABRD$ 为矩形.

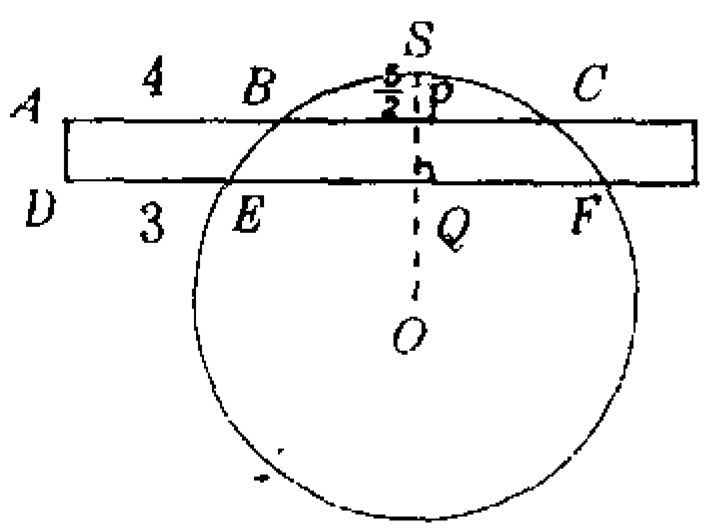


图 ①

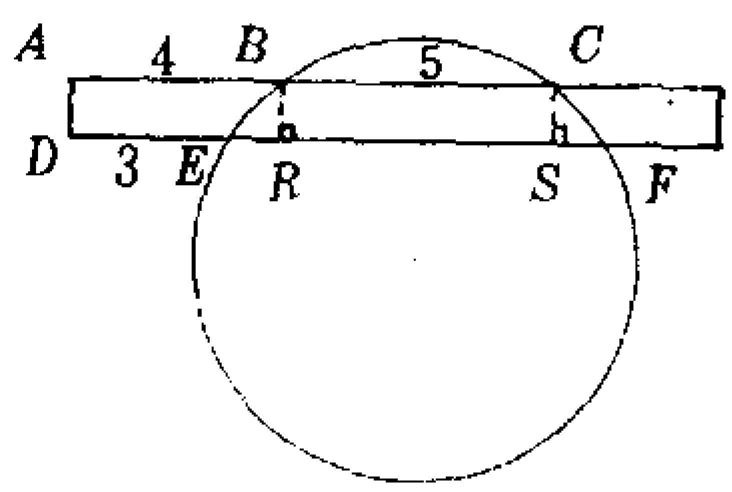


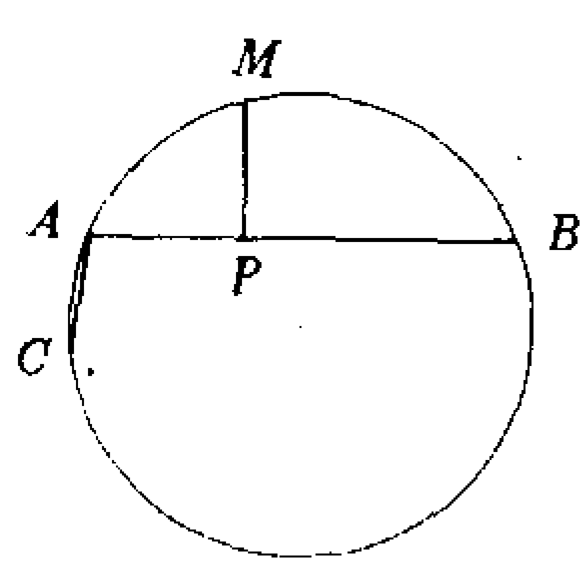
图 ②

由 $ER = 1$,又由对称性 $SF = 1$.同时 $RS = BC = 5$.

所以 $EF = 1 + 5 + 1 = 7$.

故选(B).

20·12 在右图的圆中,M 是弧 CAB 的中点,MP 垂直弦 AB 于 P.若弦 AC 的长度是 x,线段 AP 的长度是$(x + 1)$,那么线段 PB 的长度等于



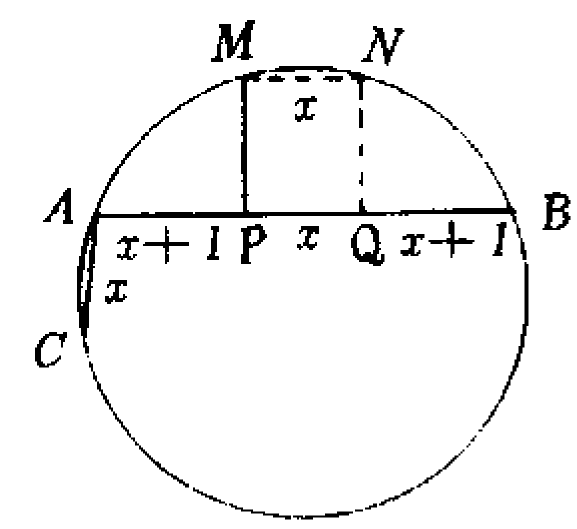
(A) $3x + 2$. (B) $3x + 1$.

(C) $2x+3$.　　(D) $2x+2$.　　(E) $2x+1$.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

［解］ 在$\overset{\frown}{MB}$上取点N，使$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{AC}$，作$NQ$垂直$AB$于$Q$，其中弦$MN=AC$长为$x$.

因为 $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{MB}$，又 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{MN}$，故 $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{AM}$，



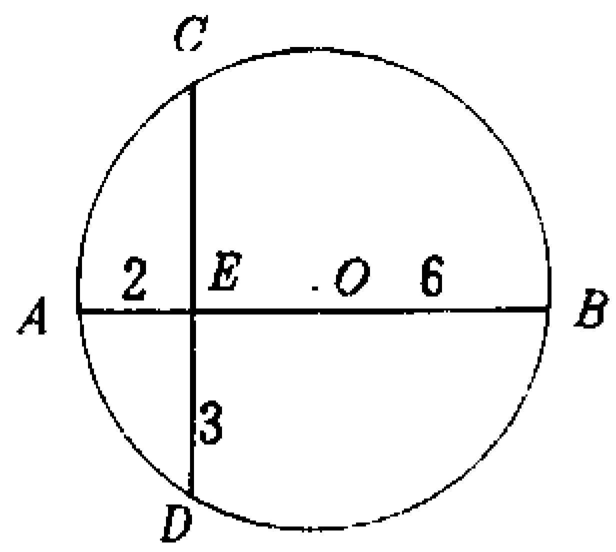
那么$PQNM$是矩形，且PQ的长为x.

又 $AP=QB$，因此$PB=PQ+QB$的长是

$$x+(x+1)=2x+1.$$

故选(E).

20·13 在右图的圆中，弦AB、CD相交于E且互相垂直.若线段AE、EB和ED的长分别是 2,6 和 3，那么圆的直径长度是

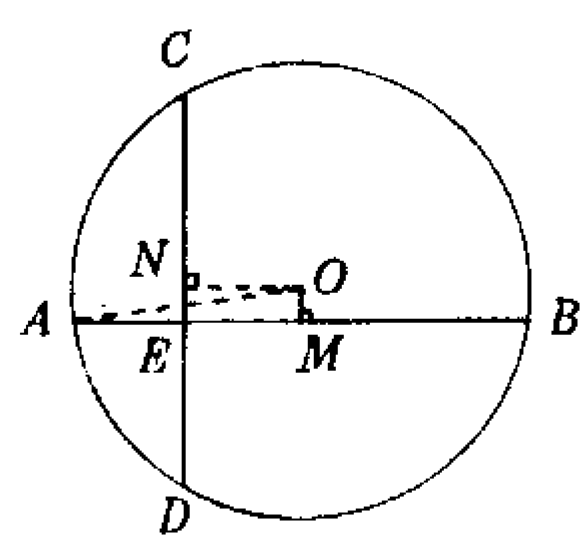


(A) $4\sqrt{5}$.　　(B) $\sqrt{65}$.　　(C) $2\sqrt{17}$.

(D) $3\sqrt{7}$.　　(E) $6\sqrt{2}$.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

［解］ 如图，由题设$AE=2$，$EB=6$，$ED=3$及相交弦定理可求线段CE的长是4.又圆心O是弦AB，CD垂直平分线的交点，O点在A点向右 4 个单位，向上$\frac{1}{2}$ 个单位处，因此



$$OA^2=AM^2+OM^2=4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{65}\right)^2,$$

$\therefore$ 直径长 $2OA=\sqrt{65}$.

故选(B).

20·14 圆内两垂直弦，一弦分成长为 3 和 4 的两条线段，另一弦分成长为 6 和 2 的两条线段，则此圆的直径为

(A) $\sqrt{89}$.　(B) $\sqrt{56}$.　(C) $\sqrt{61}$.　(D) $\sqrt{75}$.　(E) $\sqrt{65}$.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

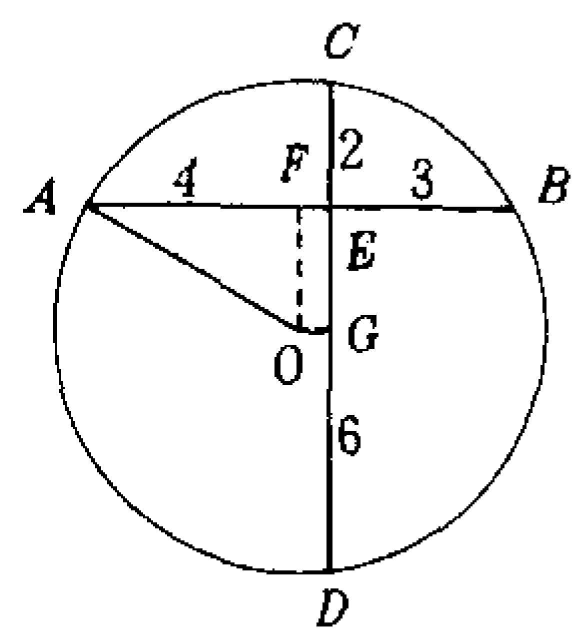
［解］ 作 $OF \perp AB, OG \perp CD$（如图）.

在 Rt$\triangle AOF$ 中由勾股定理有

$$r = \sqrt{\left(\frac{3+4}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{65}}{2},$$

故 $2r = \sqrt{65}$.

故选(E).



20·15 在半径为 5 单位的圆中，CD 与 AB 为互相垂直的直径，一弦 CH 交 AB 于 K，且长为 8 单位，而直径 AB 被分成二线段，其大小各为

(A) 1.25;8.75.　　(B) 2.75;7.25.　　(C) 2;8.

(D) 4;6.　　(E) 非上述答案.

（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

［解］ 如图设 $AK = x$，则 $KB = 10 - x, OK = 5 - x$，且

$CK = \sqrt{CO^2 + OK^2} = \sqrt{5^2 + (5-x)^2}$,

$HK = 8 - CK = 8 - \sqrt{5^2 + (5-x)^2}$.

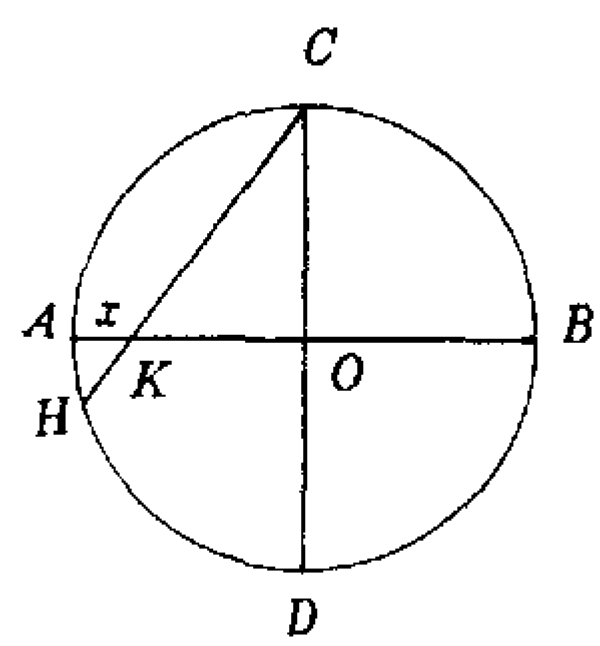
由相交弦定理知 $CK \cdot HK = AK \cdot BK$，

上诸式代入化简后有

$$16x^2 - 160x + 175 = 0,$$

解得 $x = \frac{5}{4}$ 或 $\frac{35}{4}$ （因 $0 < x < 5$，舍之）.

故选(A).

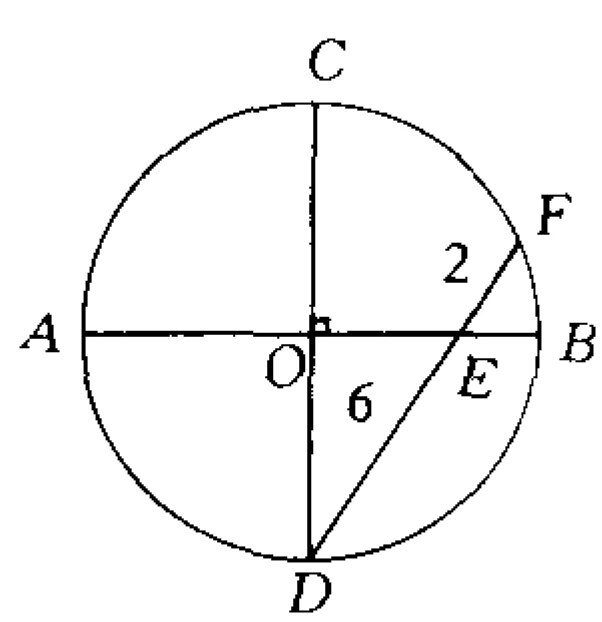


20·16 如图，AB, CD 为 $\odot O$ 直径，且 $AB \perp CD$，弦 DF 交 AB 于 E. 若 $DE = 6, EF = 2$，则圆的面积为

(A) 23π.　　(B) $\frac{47}{2}\pi$.　　(C) 24π.

(D) $\frac{49}{2}\pi$.　　(E) 25π.

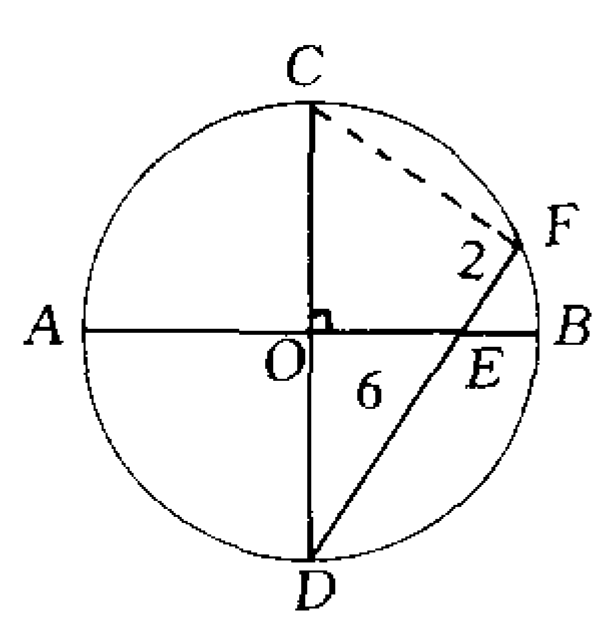
（第 46 届美国高中数学考试，1995 年）



［解］ 连结 F，且设 $\odot O$ 半径为 R.

由 $\triangle DOE \backsim \triangle DFC$，有

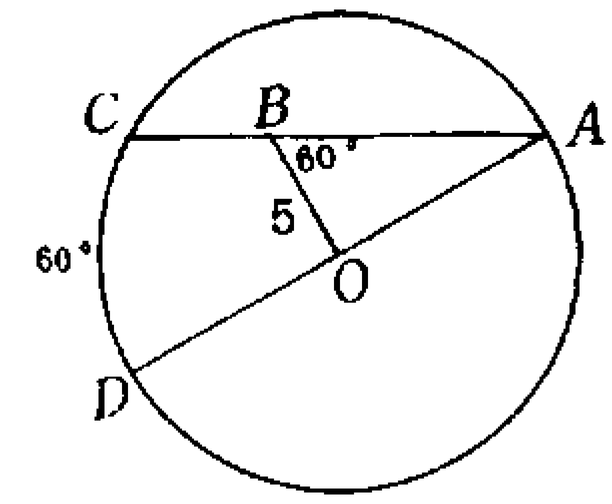
$\frac{OD}{DE} = \frac{FD}{DC}$ 即 $\frac{R}{6}\ \frac{(2+6)}{2R}$，得 $R^2 = 24$,



知 $S_{\odot O}=\pi R^2=24\pi$.

故选(C).

20·17　在以 O 为圆心的一个圆中,AD 是一直径,ABC 是一条弦,$BO=5$,且 $\angle ABO \overset{m}{=} \overset{\frown}{CD} \overset{m}{=} 60°$.则 BC 的长度是



(A) 3.　　(B) $3+\sqrt{3}$.

(C) $5-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) 5.

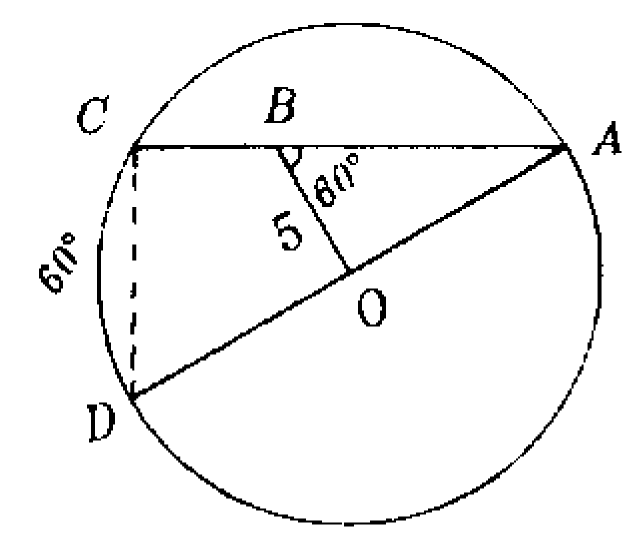
(E) 以上结论都不对.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　由题设 $\overset{\frown}{CD} \overset{m}{=} 60°$,知 $\angle BAO=30°$,从而 $\triangle ABO$ 为 $30°$-$60°$-$90°$ 的三角形.

又　$BO=5$,　则　$AO=5\sqrt{3}$,　$AB=10$.

连 CD,由设 AD 是直径,则 $\triangle ADC$ 亦为 $30°$-$60°$-$90°$ 的直角三角形.



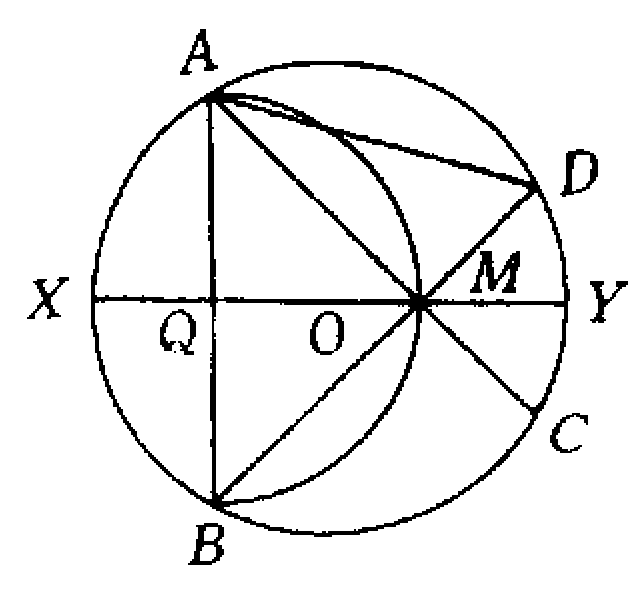
$\because$　$AD=2AO=10\sqrt{3}$,

$\therefore$　$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\sqrt{3}=15$,

则　　$BC=AC-AB=15-10=5$.

故选(D).

20·18　在圆 O 内,Q 是半径 OX 的中点,过 Q 作 $AB\perp XY$,以 AB 为直径作半圆交 XY 于 M,AM 和 BM 交圆 O 于 C 和 D,连 AD,若圆 O 的半径为 r,AD 为



(A) $\sqrt{2r}$.　　(B) r.

(C) 非内接正多边形之一边.　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

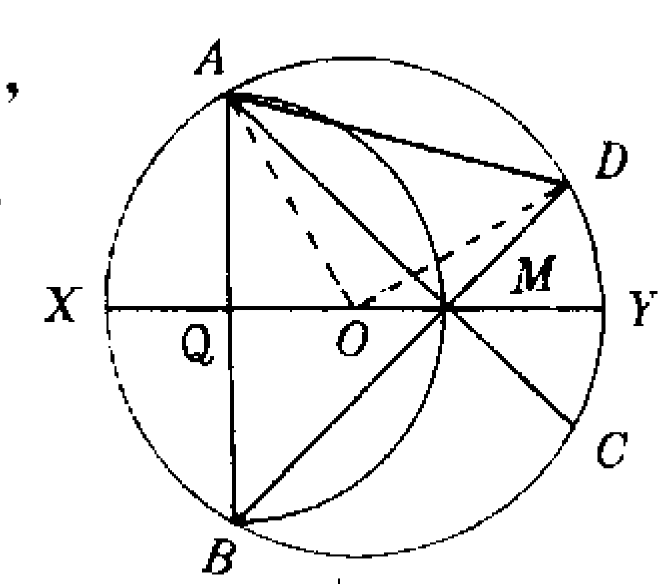
(E) $\sqrt{3}r$.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)

[解]　由设知 $MA=MB$,又 $\overset{\frown}{AMB}$ 为半圆,

$\therefore$　$\angle AMB=90°$,　或　$\angle MBA=45°$.

连 AO,OD,则



$\angle AOD = 2\angle MBA = 90°$.

$\therefore \qquad AD = \sqrt{2}r$.

故选(A).

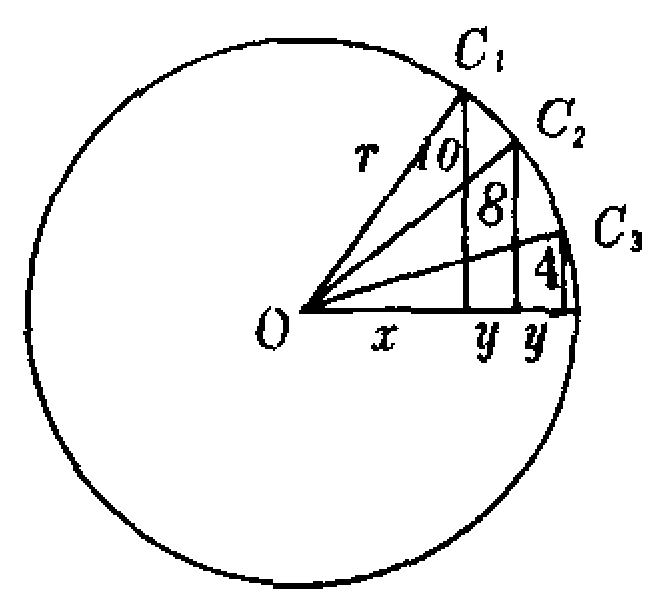
20·19　设 C_1, C_2 和 C_3 是某个圆中处于圆心同一侧的三条平行弦. C_1 和 C_2 间的距离等于 C_2 和 C_3 间的距离. 三条弦的长度是 20, 16, 8. 圆的半径是

(A) 12.　　(B) $4\sqrt{7}$.　　(C) $\frac{5\sqrt{65}}{3}$.

(D) $\frac{5\sqrt{22}}{2}$.　　(E) 按已知条件无惟一的解.

(第 31 届美国高中数学考试, 1980 年)

[解]　依题设作出右图. 设 r 是半径, x 是从圆心 O 到最近弦的距离, y 是弦之间公共距离. 由勾股定理可有



$$\begin{cases} r^2 = x^2 + 10^2, & ① \\ r^2 = (x+y)^2 + 8^2, & ② \\ r^2 = (x+2y)^2 + 4^2. & ③ \end{cases}$$

由 ② - ① 得　$0 = 2xy + y^2 - 36$,　④

由 ③ - ② 得　$0 = 2xy + 3y^2 - 48$.　⑤

由 ⑤ - ④ 得　$2y^2 = 12$, 有　$y = \sqrt{6}$.

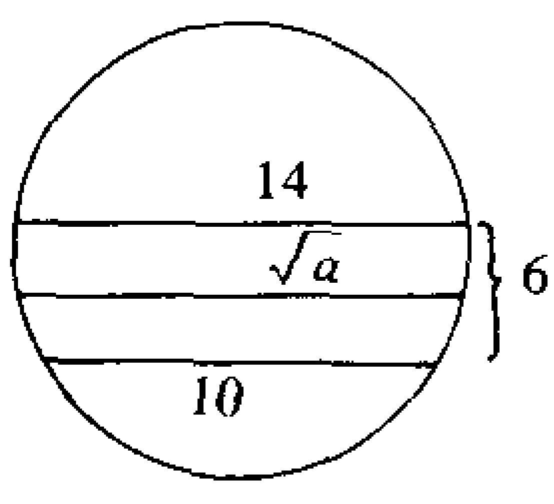
把 $y = \sqrt{6}$ 代入上面方程中, 得　$r = \frac{5\sqrt{22}}{2}$.

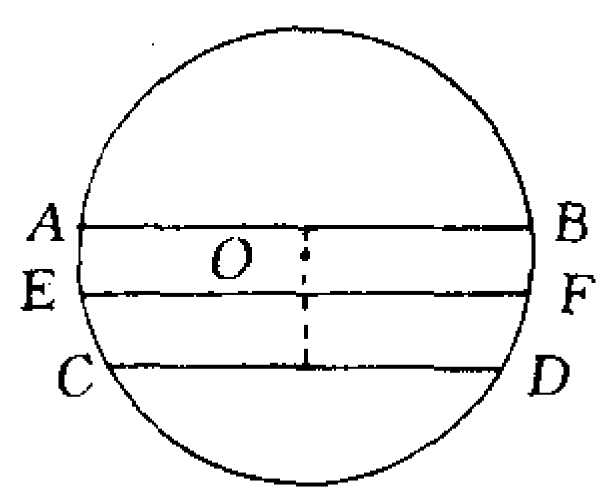
故选(D).

20·20　圆的两条平行弦长分别为 10 和 14, 且它们相距 6, 与两弦平行且等距的弦长为 $\sqrt{a}$, 则 a 等于

(A) 144.　(B) 156.　(C) 168.　(D) 176.　(E) 184.

(第 46 届美国高中数学考试, 1995 年)





[解]　设该圆半径为 R, 圆心 O 至 AB 弦距离为 x, 至 CD 弦距离

为 $6-x$.

这样有 $7^2+x^2=R^2=5+(6-x)^2$,

解得 $x=1$.

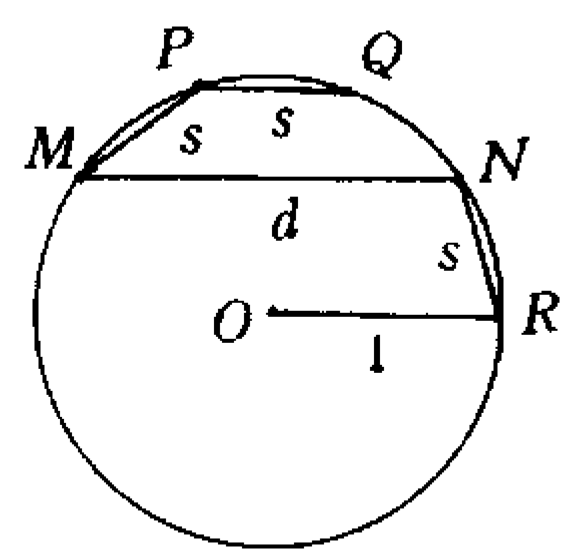
因为 EF 与 AB、CD 等距,知 O 到 EF 距离为 2.

故 $$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2+2^2=R^2=7^2+1^2=50,$$

解得 $$a=184.$$

故选(E).

20·21 如图在单位圆中,弦 PQ 和 MN 平行于过圆心 O 的单位半径 OR. 弦 MP, PQ 和 NR 都是 s 单位长,弦 MN 是 d 单位长. 下列三个方程



Ⅰ. $d-s=1$; Ⅱ. $ds=1$;

Ⅲ. $d^2-s^2=\sqrt{5}$.

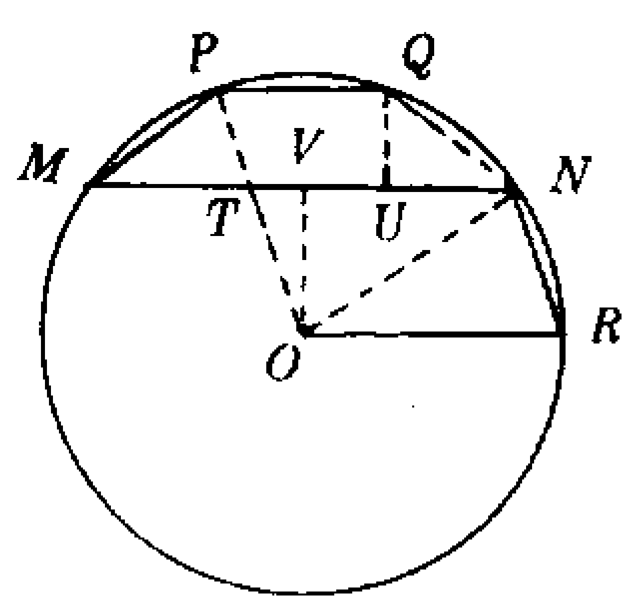
必为正确的

(A) 只有 Ⅰ. (B) 只有 Ⅱ. (C) 只有 Ⅲ.

(D) 只有 Ⅰ 和 Ⅱ. (E) Ⅰ,Ⅱ 和 Ⅲ.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解 1] 如图,弦 MN 长度为 d,并且每条长为 s 的弦所对的弧是 $\frac{180^\circ}{5}=36^\circ$. 连接半径 OP,与 MN 相交于 T. 再分别从 O、Q 作 MN 的垂线 OV 和 QU.



由 $\triangle OVN \backsim \triangle QUN$, 有

$\frac{UN}{QN}=\frac{VN}{1}$, 或 $\frac{d}{2}-\frac{s}{2}=s\cdot\frac{d}{2}$.

即 $d-s=ds$.

因为 $\angle MPT=\angle MTP=72^\circ$, 故 $MT=s$.

同样 $\angle OTN=\angle ORN$,所以 $ORNT$ 是一个对边 $TN=OR=1$ 的平行四边形. 则

$$MN-MT=d-s=1.$$

由 $(d-s)^2+4ds=1+4=5$ 或 $d^2+2ds+s^2=5$.

得 $$d+s=\sqrt{5}.$$

因此 $d^2-s^2=(d+s)(d-s)=\sqrt{5}\cdot 1=\sqrt{5}$.

综上表明所有 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ 三个方程都应是正确的.

故选(E).

[解2] 由 $MT=s, MN=d$,再因 $OTNR$ 为平行四边形,它的边 $TN=MN-MT=d-s=1$.

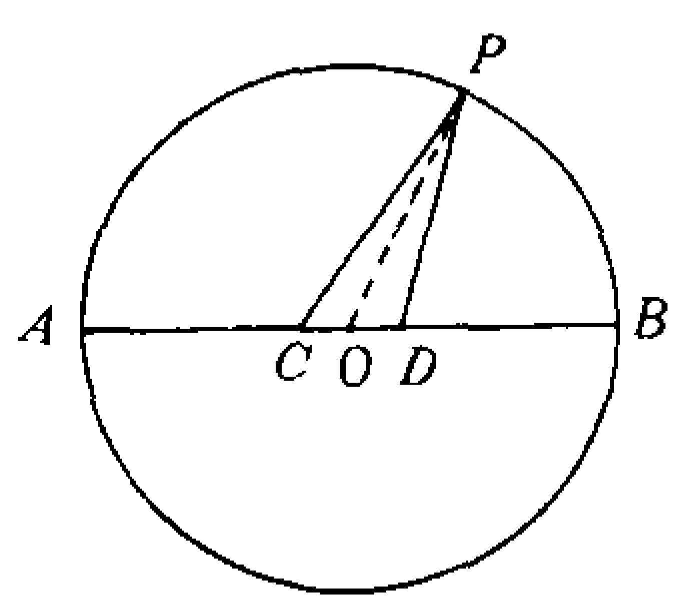
令 P'(图中未示出)为过 P 的直径的另一端点,则弦 PP' 与 MN 相交于 T,由相交弦定理有

$$PT\cdot TP'=MT\cdot TN,\quad 即\quad (1-s)(1+s)=s\cdot 1.$$

此二次方程具有正根 $s=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. 由此可以证明 Ⅱ 和 Ⅲ 的关系式成立. 因此所有 Ⅰ,Ⅱ 和 Ⅲ 三个方程都应是正确的.

故选(E).

20·22 在圆 O 中,直径 AB 为 10 个单位,C 点在 AB 上距 A 点 4 个单位,D 点在 AB 上距 B 点 4 个单位,P 为圆周上任一点,则自 C 经 P 到 D 的折线路径



(A) 对于 P 点的所有位置,均有相同的长.

(B) 对于 P 点的所有位置,均超过 10 个单位.

(C) 不能超过 10 个单位.

(D) 当 CPD 为直角三角形时最短.

(E) 当 $PC=PD$ 时,最长.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解] 连 PO,由中线定理

$$PC^2+PD^2=2(5^2+1^2)=52,$$

又
$$PC\cdot PD\leqslant\frac{1}{2}(PC^2+PD^2),$$

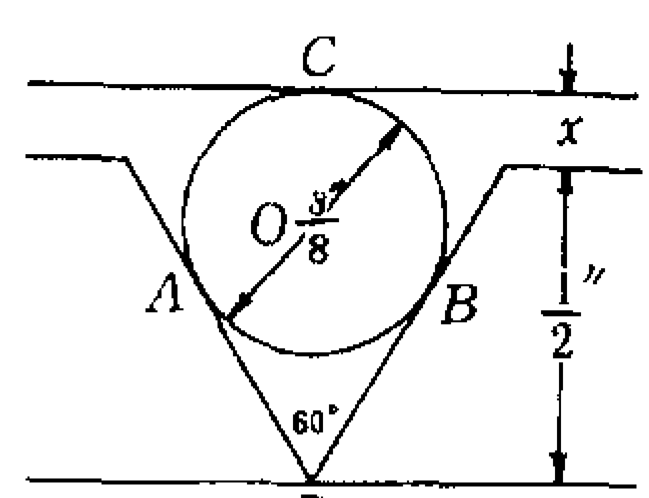
故 $PC\cdot PD$ 最大值为 26,且当 $PC=PD=\sqrt{26}$ 时成立.

又 $(PC+PD)^2=52+2PC\cdot PD\leqslant 52+52=104$,

所以 $PC+PD\leqslant 2\sqrt{26}$,

故当 $PC=PD=\sqrt{26}$ 时 $PC+PD$ 最长.

故选(E).



20·23 在图中若 A,B,C 为切点,则 x 等于

(A) $\frac{3}{16}''$.　(B) $\frac{1}{8}''$.　(C) $\frac{1}{32}''$.　(D) $\frac{3}{32}''$.　(E) $\frac{1}{16}''$.

（第 5 届美国高中数学考试，1954 年）

[解]　连 AB，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形.

且由　$\angle D = 60°$，　有　$DO = 2r$.

所以　$DC = DO + CO = DO + r = 2r + r = 3r$

因而　$x = 3r - \frac{1}{2}'' = 3 \cdot \frac{3}{16}'' - \frac{1}{2}'' = \frac{1}{16}''$.

故选(E).

20·24　PA 切 $\odot O$ 于点 A，AB 是 $\odot O$ 的弦. 若 $\odot O$ 的半径为 1，$PA = 1$，$AB = \sqrt{2}$，则 PB 的长为

(A) 1.　(B) $\sqrt{5}$.　(C) 1 或 $\sqrt{5}$.　(D) 不能确定.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1992 年）

[解]　由题设 B 的位置有两种可能.

(1) 如图 ①，易求得 $PB = 1$；

(2) 如图 ②，在 $\triangle ABP$ 中，$AP = 1$，$AB = \sqrt{2}$，$\angle BAP = 90° + 45° = 135°$，由余弦定理可求 $PB = \sqrt{5}$.

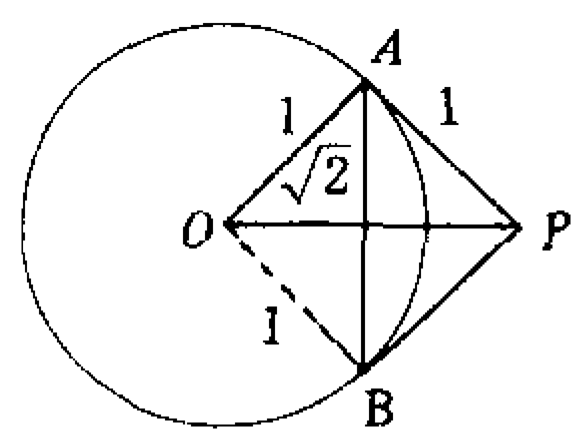


图 ①

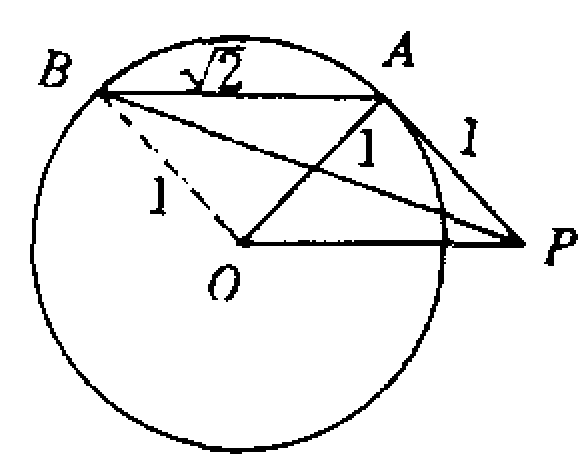
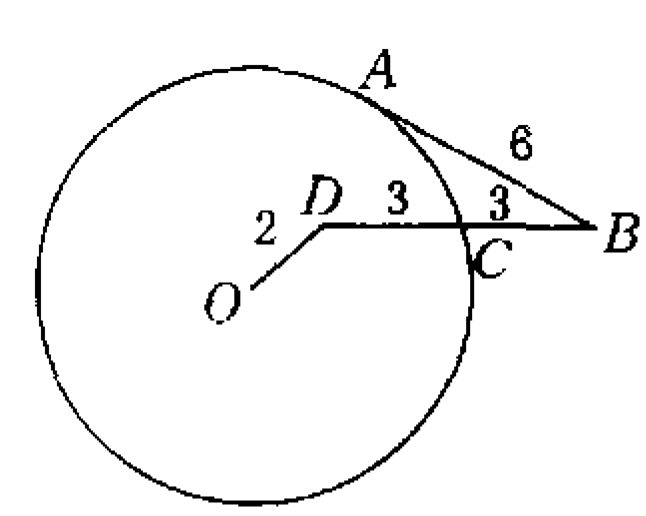


图 ②

故选(C).

20·25　如图，AB 与 $\odot O$ 相切于 A，又 D 点在圆内，DB 与圆相交于 C. 若 $BC = DC = 3$，$OD = 2$，$AB = 6$，那么圆的半径是



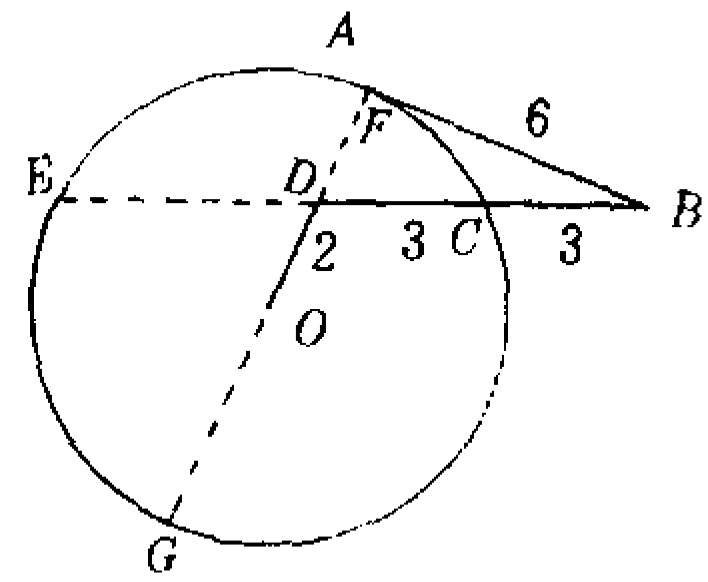
(A) $3 + \sqrt{3}$.　(B) $15/\pi$.

(C) $9/2$.　(D) $2\sqrt{6}$.

(E) $\sqrt{22}$.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

［解］ 设 E 是圆和 BD 的延长线的交点，FG 是过 D 的直径，且 r 是圆的半径．那么



$BC \cdot BE = AB^2$，即 $3 \cdot (DE+6) = 36$，

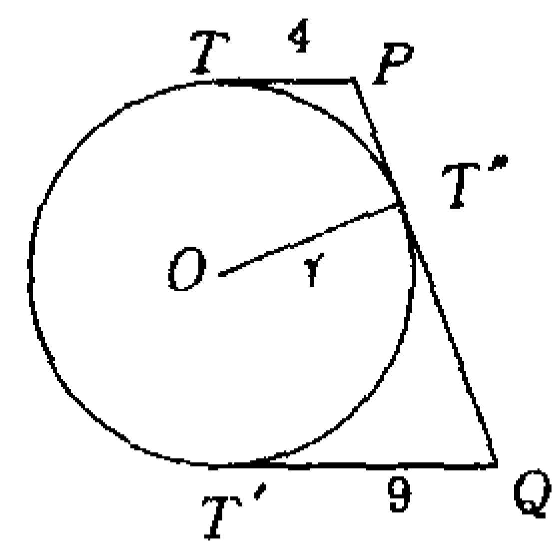
得 $DE = 6$．

同样由 $DE \cdot DC = DF \cdot DG$，

有 $18 = r^2 - 4$，得 $r = \sqrt{22}$．

故选(E)．

20·26 在附图中，TP 和 $T'Q$ 是这个半径为 r 的圆的两条平行切线，T 和 T' 是切点．$PT''Q$ 是切点为 T'' 的第三条切线．若 $TP=4$，$T'Q=9$，那么 r 是



(A) $\frac{25}{6}$．　(B) 6．　(C) $\frac{25}{4}$．

(D) 除 $\frac{25}{6}$，6，$\frac{25}{4}$ 以外的一个数．

(E) 从已知条件无确定的解．

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

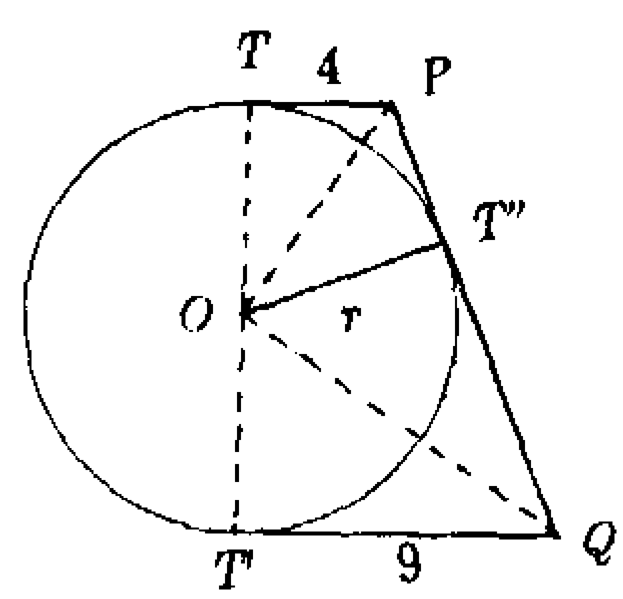
［解］ 连 OP，OQ，OT，OT'，则由 $TP = T''P$，$OT = OT'' = r$，且 $\angle PT''O = \angle PTO = 90°$，因而 $\triangle OTP \cong \triangle OT''P$．

同理可证 $\triangle OT'Q \cong \triangle OT''Q$．

设 $x = \angle TOP = \angle POT''$，

$y = \angle T''OQ = \angle QOT'$，

则 $2x + 2y = 180°$．



因而 $\angle POQ = x + y = 90°$．

故 $\triangle POQ$ 是直角三角形．且 OT'' 为斜边 PQ 上的高．

因而有 $T''O^2 = PT'' \cdot T''Q$，

即 $r^2 = 4 \cdot 9$，得 $r = 6$．

故选(B)．

20·27 从圆外一点 P 引圆的切线，其长为 t，又从 P 引一割线分此圆成不等之二弧，其长为 m 和 n，已知 t 是 m 和 n 的比例中项，且圆周长为 10，m 和 t 均为整数，则 t 可有

(A) 零解．　(B) 一解．　(C) 二解．

(D) 三解.　　　　　　(E) 无穷多解.

（第 11 届美国高中数学考试,1960 年）

[解]　由设有 $t^2 = mn$.

又　$m + n = 10$,　故　$n = 10 - m$.

从而　$t^2 = m(10 - m)$ 或 $t = \sqrt{m(10 - m)}$.

$m = 1$ 时,　$t = 3$;

$m = 2$ 时,　$t = 4$;

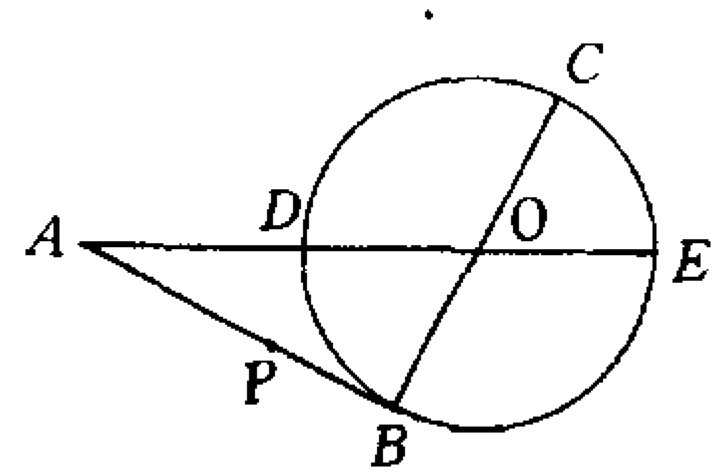
$m = 3,4,6,7$ 时,　t 非整数;

$m = 5$ 时,　则 $m = n$ 与题设不符;

$m = 8,9$ 时,　由 $m(10 - m)$ 的对称性知与 $m = 1,2$ 时相同.

故选(C).

20·28　如图,在圆 O 中,BC 为圆的直径,且 $AB \perp BC$,又 $ADOE$ 是一直线,$AP = AD$,且 AB 的长是半径 R 的二倍.则



(A) $AP^2 = PB \cdot AB$.

(B) $AP \cdot DO = PB \cdot AD$.

(C) $AB^2 = AD \cdot DE$.

(D) $AB \cdot AD = OB \cdot AO$.

(E) 非上述答案.

（第 11 届美国高中数学考试,1960 年）

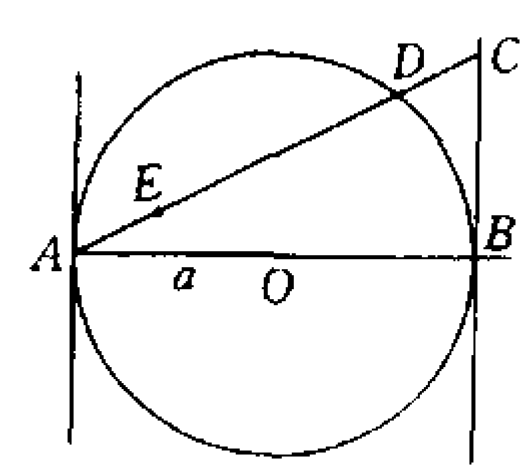
[解]　由设 AB 是 $\odot O$ 的切线,由切割线定理有

$$AB^2 = AD \cdot AE = AD \cdot (AD + DE) = AD(AD + 2R)$$
$$= AD(AD + AB) = AD^2 + AD \cdot AB,$$

故
$$AD^2 = AB^2 - AD \cdot AB = AB(AB - AD)$$
$$= AB(AB - AP) = AB \cdot PB.$$

故选(A).

20·29　在以 O 为圆心,以 a 为半径的圆中,AB 是直径,延长弦 AD 与过 B 的切线交于 C,E 为 AC 上的一点,且 $AE = DC$,设 x 和 y 分别表示 E 到过 A 的切线和到 AB 的距离,可以推出关系式



(A) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.　　　(B) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a + x}$.

(C) $y^4 = \frac{x^2}{2a - x}$.　　　(D) $x^2 = \frac{y^2}{2a - x}$.

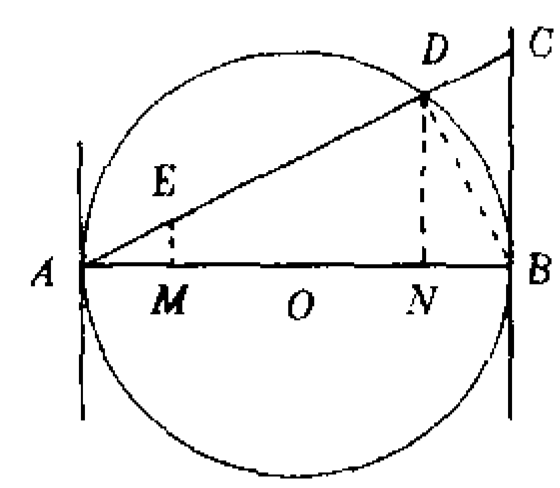
(E) $x^2 = \frac{y^2}{2a + x}$.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解]　过 E, D 分别作 $EM \perp AB$, $DN \perp AB$. 且设 $AM = x$, $EM = y$.

由　$EM \parallel DN$, 且 $AE = DC$, 则

$$NB = AM = x.$$



连 BD,在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$ND^2 = AN \cdot NB = x(2a - x).$$

又　$\text{Rt}\triangle AME \backsim \text{Rt}\triangle AND$,有 $\frac{ND}{AN} = \frac{EM}{AM}$,

即　$ND = \frac{AN \cdot EM}{AM} = \frac{y(2a - x)}{x}$. 再由前式有

$$x(2a - x) = \frac{y^2(2a - x)^2}{x^2},\quad 即\quad y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

故选(A).

20·30　若一圆 的半径增加 100% ,则面积增加

(A) 100% .　　　(B) 200% .　　　(C) 300% .

(C) 400% .　　　(E) 以上答案都不正确.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解]　设圆半径为 r,其增加 100% 后为 $2r$.

新圆面积增加　　$4\pi r^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$,

面积增加的百分比为　$\frac{3\pi r^2}{\pi r^2} \cdot 100\% = 300\%$.

故选(C).

20·31　当圆的半径 r 增加 n 时,其面积变为 2 倍,则 r 等于

(A) $n(\sqrt{2} + 1)$.　　　(B) $n(\sqrt{2} - 1)$.　　　(C) n.

(D) $n(2 - \sqrt{2})$.　　　(E) $\frac{n\pi}{\sqrt{2} + 1}$.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解]　依题意　$\frac{\pi(r + n)^2}{\pi r^2} = 2$,　化简后为

$$r^2 - 2nr - n^2 = 0,\quad 得\quad r = (1 + \sqrt{2})n.$$

故选(A).

20·32　若圆周长的倒数的4倍等于该圆的直径,那么圆的面积是

(A) $\frac{1}{\pi^2}$.　(B) $\frac{1}{\pi}$.　(C) 1.　(D) π.　(E) π^2.

(第29届美国高中数学考试,1978年)

[解]　若 r 和 A 分别是圆的半径和面积,那么

$$\frac{4}{2\pi r}=2r,\quad 即\quad 4=4\pi r^2,\quad 故\quad 1=\pi r^2=A.$$

故选(C).

20·33　半径为8英寸的圆内有相距8英寸的两相等平行弦,则此两平行弦间的圆面积等于

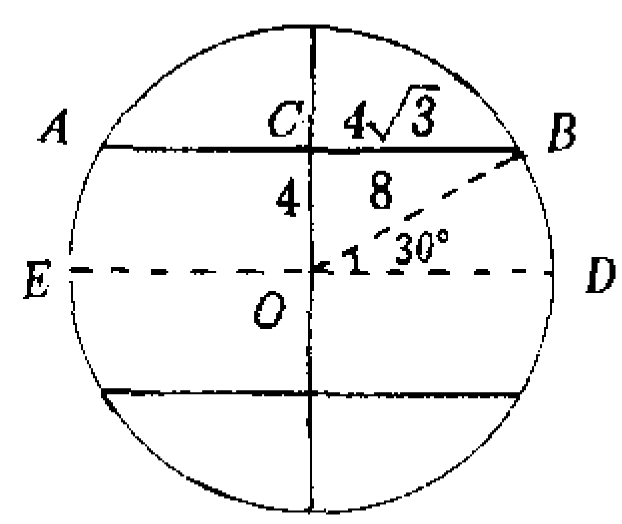
(A) $21\frac{1}{3}\pi-32\sqrt{3}$.　(B) $32\sqrt{3}+21\frac{1}{3}\pi$.

(C) $32\sqrt{3}+42\frac{2}{3}\pi$.　(D) $16\sqrt{3}+42\frac{2}{3}\pi$.

(E) $42\frac{2}{3}\pi$.

(第3届美国高中数学考试,1952年)

[解]　如图,连 OB,作 $\odot O$ 直径 $ED\parallel AB$.



则　$S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$,

且　$S_{扇形BOD}=\frac{30^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 8^2=\frac{16}{3}\pi$.

从而,两平行弦间的圆面积为

$$4(8\sqrt{3}+\frac{16}{3}\pi)=32\sqrt{3}+21\frac{1}{3}\pi.$$

故选(B).

20·34　一个直径是12英尺的圆形草坪被一条宽3英尺的笔直的砂砾小路所截,小路的一边穿过草坪的中心.剩余草坪面积的平方英尺数是

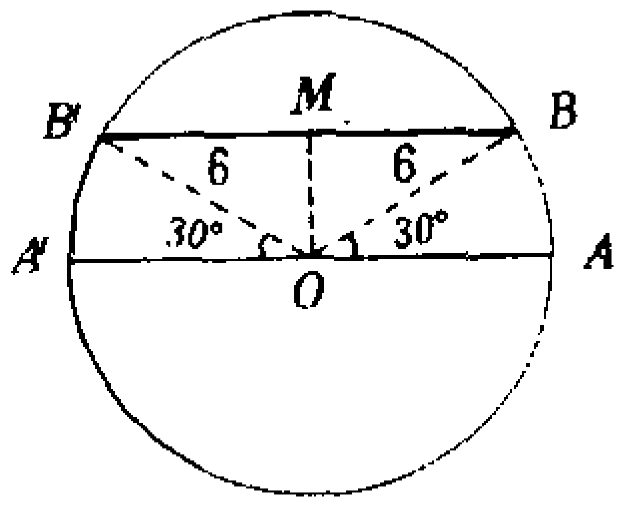
(A) $36\pi-34$.　(B) $30\pi-15$.　(C) $36\pi-33$.

(D) $35\pi-9\sqrt{3}$.　(E) $30\pi-9\sqrt{3}$.

(第24届美国高中数学考试,1973年)

[解]　如图,设 O 表示草坪的圆心,M 是路的另一边的中点.若 $\overset{\frown}{AB}$ 表示道路所割的弧,那么路的一半 $OMBA$ 的面积包含一个30°的

扇形 OAB 和一个 $30^\circ - 60^\circ$ 的直角 $\triangle OMB$.



则 $S = \pi \cdot 6^2 - 2S_{扇形} - 2S_{\triangle OMB}$

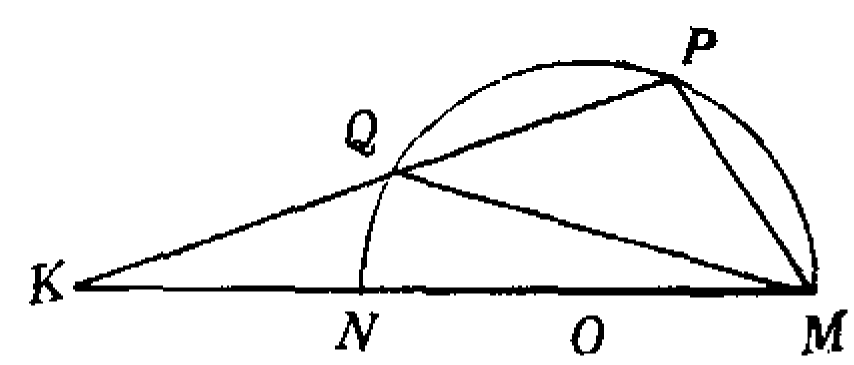
$= 36\pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}$

$= 30\pi - 9\sqrt{3}$.

故选(E).

第2节　圆与三角形

20·35　如图,MN 是半圆 O 的直径,若 $\angle K = 20^\circ$,$\angle PMQ = 40^\circ$,则 $\angle MQP$ 等于



(A) 30°.　　(B) 35°.

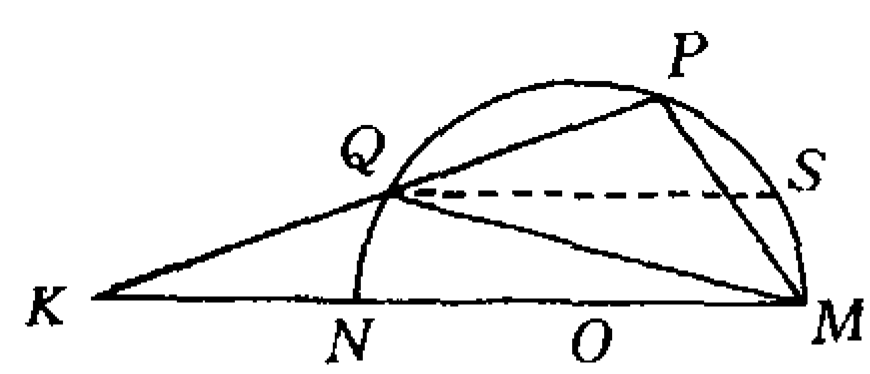
(C) 40°.　　(D) 50°.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1986 年)

[解]　过 Q 作 $QS \parallel NM$,交半圆于 S,则 $\overset{\frown}{QN} = \overset{\frown}{SM}$.

但　$\overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{QN} \overset{m}{=} 40^\circ$($\angle K$ 度数之 2 倍).

故　$\overset{\frown}{PS} \overset{m}{=} 40^\circ$.



又　$\overset{\frown}{PQ} \overset{m}{=} 80^\circ$.($\angle PMQ$ 度数之 2 倍)

$\therefore$　$\overset{\frown}{SM} \overset{m}{=} \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ - 80^\circ) = 30^\circ$,

且 $$\angle PQS = 20^\circ,\quad \angle SQM = 15^\circ,$$

$\therefore$ $$\angle PQM = \angle PQS + \angle SQM = 35^\circ.$$

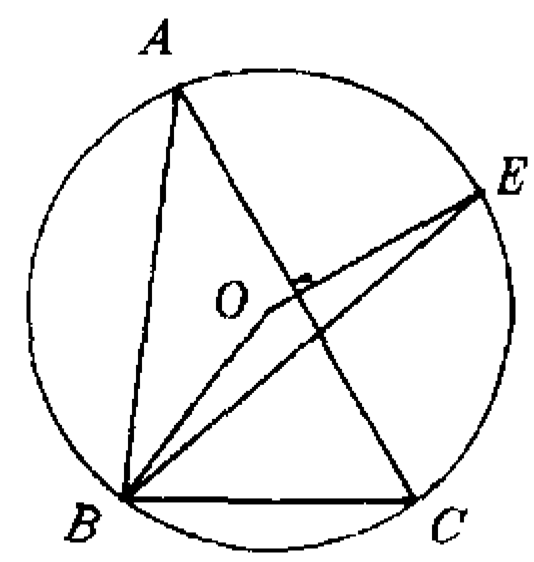
故选(B).

20·36　锐角三角形 ABC 内接于圆 O,$\overset{\frown}{AB} \overset{m}{=} 120^\circ$,　$\overset{\frown}{BC} \overset{m}{=} 72^\circ$,从劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上取一点 E 使 $OE \perp AC$,则 $\angle OBE$ 与 $\angle BAC$ 的比为

(A) $\frac{5}{18}$.　(B) $\frac{2}{9}$.　(C) $\frac{1}{4}$.　(D) $\frac{1}{3}$.　(E) $\frac{4}{9}$.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解] 由设劣弧 $\overset{\frown}{AC} \overset{m}{=} 360° - (120° + 72°) = 168°$，且由 $OE \perp AC$ 知 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC}$.



则 $\angle BOE = 72° + \dfrac{168°}{2} = 156°$.

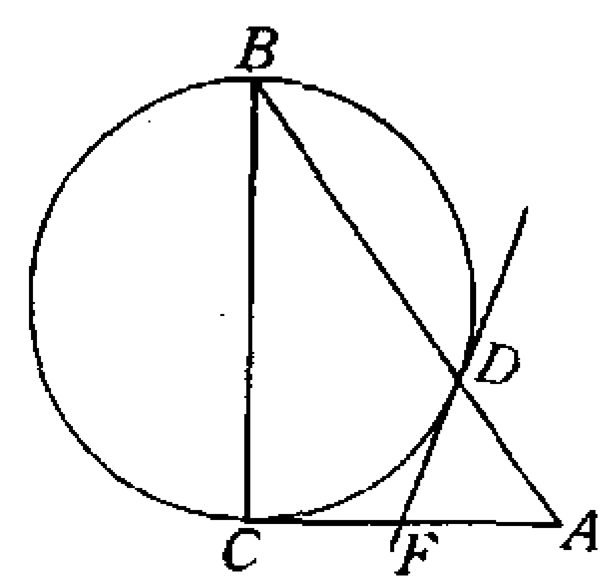
故 在等腰 $\triangle OBE$ 中,

$$\angle OBE = \frac{1}{2}(180° - 156°) = 12°.$$

又 $\angle BAC = \dfrac{1}{2} \cdot 72° = 36°$. 故所求的比为 $1:3$.

故选(D).

20·37 以直角 $\triangle ABC$ 的一直角边 BC 为直径作圆交斜边 AB 于 D，过 D 作切线交 CA 于 F，这些条件不足以证明



(A) DF 平分 CA.

(B) DF 平分 $\angle CDA$.

(C) $DF = FA$.

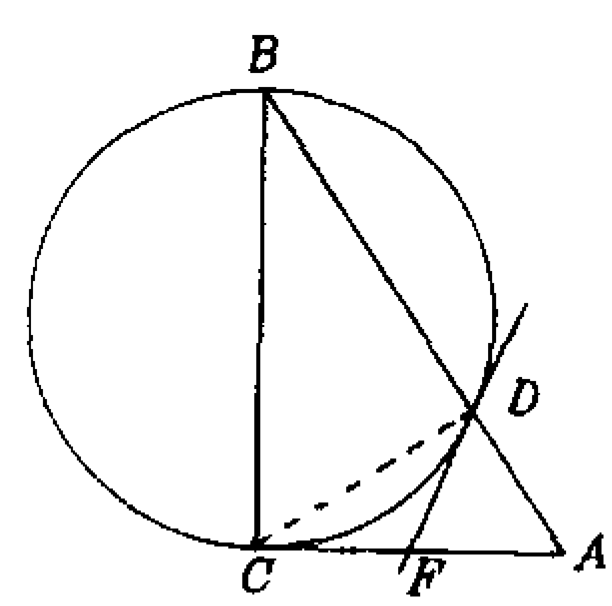
(D) $\angle A = \angle BCD$.

(E) $\angle CFD = 2\angle A$.

（第 16 届美国高中数学考试，1965 年）

[解] 连 CD，由 $\angle A = \angle BCD$（同为 $\angle ACD$ 的余角），又 $FC = FD$（切线长相等）.

所以 $\angle DCF = \angle CDF$,



故 $\angle BCD = \angle FDA$（等角的余角）.

即 $\angle A = \angle BCD = \angle FDA$,

则 $DF = FA = CF$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，DF 为 AC 中线.

又 $\angle CFD = \angle FDA + \angle A = 2\angle A$.

故已证(A),(C),(D),(E) 正确.

故选(B).

20·38 如图，圆的半径等于正三角形 ABC 的高，此圆沿着三角形的底边滚动并保持相切，其动切点设为 T，圆交 AC,BC 于 M,N，设 n 为 $\overset{\frown}{MTN}$ 的度数，则对所有可能的圆的位置，n

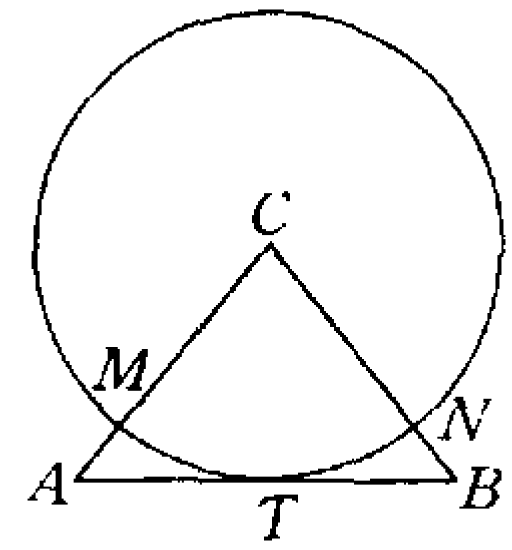
(A) 自 30° 至 90° 变动.

(B) 自 30° 至 60° 变动.

(C) 自 60° 至 90° 变动.

(D) 保持 30° 不变.

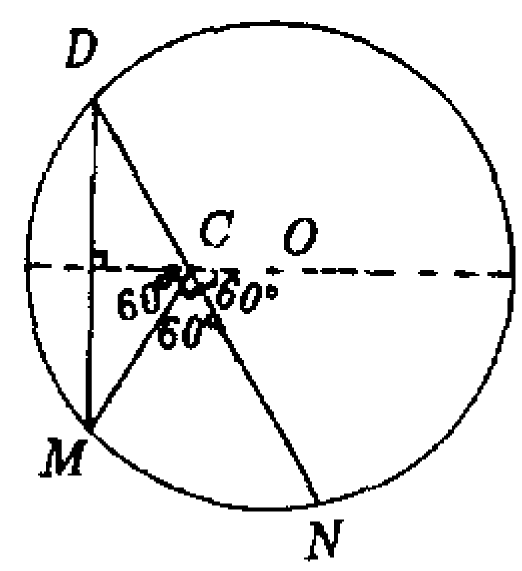
(E) 保持 60° 不变.



(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解] 题图表示圆的一种位置:圆心在正 $\triangle ABC$ 顶点 C,此时 $\overset{\frown}{MTN}$ 度数为 60°.

右图表示圆的另一可能位置:圆心在正 $\triangle ABC$ 底边 AB 平行线上.



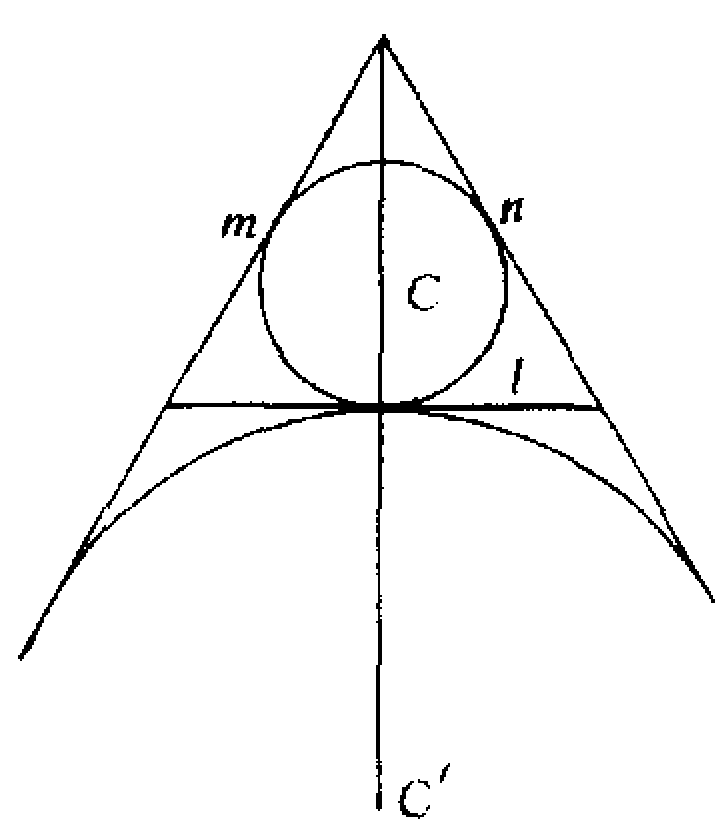
延长 NC 交 $\odot O$ 于 D,连 CM,DM.则过 C 的直径平分等腰 $\triangle CDM$ 顶角 $\angle C$.

$$\text{又}\quad \angle C = 180° - \angle MCN = 180° - 60° = 120°,$$

知 $\angle CDM = 30°$. 则 $\overset{\frown}{MN}$ 度数为 60°.

故选(E).

20·39 圆 C 与三条不同的直线 l, m, n 都相切,则在下述三种情况中



(1) l 与 m, m 与 n, n 与 l 交角都是 60°;

(2) $l \parallel m \parallel n$;

(3) 有另一圆 C' 也与 l, m, n 都相切.

可以成立的是

(A) 只有(1).　　(B) 只有(1) 和(3).

(C) 只有(1) 和(2). (D)(1)、(2) 和(3).

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年)

[解] 若考虑 m, n, l 三条直线组成一个等边三角形,则可作三角形的内切圆 C,还可作旁切圆 C',如图.

又(2) 是不可能成立的.则只有(1),(3) 成立.

故选(B).

20·40 若某三角形的一边长 12 英寸,对角为 30°,则外接圆的直径为

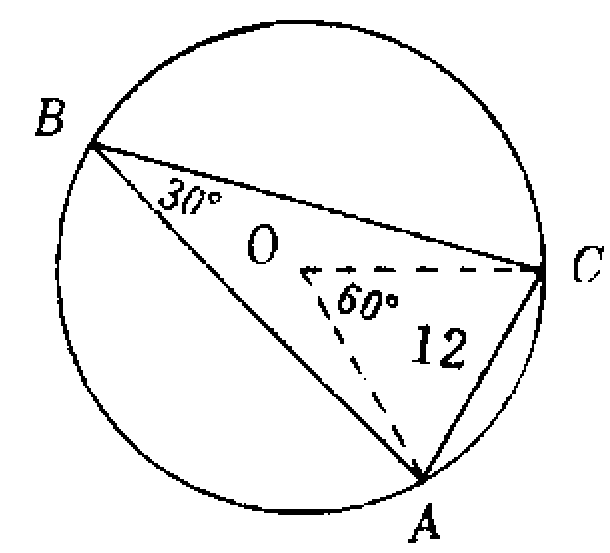
(A) 18 英寸.　　　(B) 30 英寸.

(C) 24 英寸.　　　(D) 20 英寸.

(E) 非上述答案.

（第 4 届美国高中数学考试,1953 年）

［解］ 如图,连 OA,OC,则 $\triangle AOC$ 为等边三角形.



从而 $OA = AC = 12$.

故选(C).

20·41 连接一三角形内切圆的三切点,则所形成的三角形的角

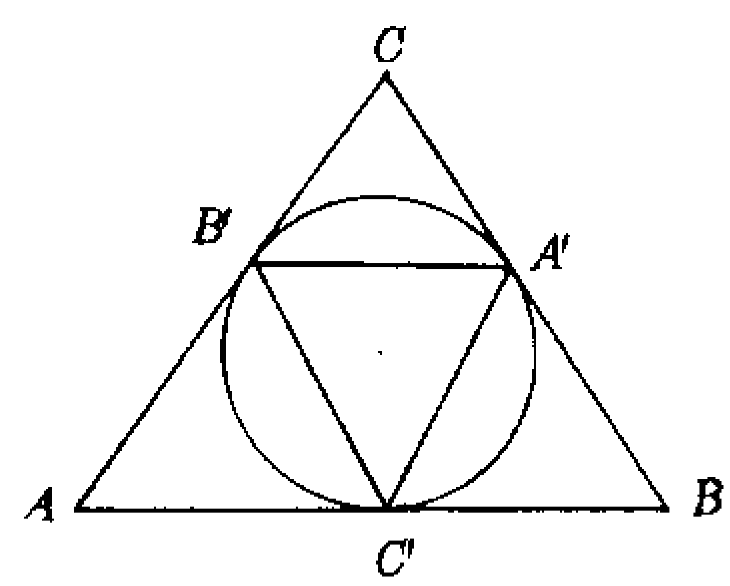
(A) 都等于 60°.　　　(B) 一钝角与不等的两锐角.

(C) 一钝角及相等两锐角.　　(D) 都为锐角.

(E) 相互间不相等.

（第 5 届美国高中数学考试,1954 年）

［解］ 利用切线角的性质不难得到：



$$\angle A = 180° - 2\angle B' = 180° - 2\angle A',$$

故 $2\angle A' = 180° - \angle A$,

有 $\angle A' = 90° - \frac{1}{2}\angle A < 90°$.

同理可证 $\angle B' < 90°$,$\angle C' < 90°$.

知 $\triangle A'B'C'$ 为锐角三角形.

故选(D).

20·42 一圆通过边长为 $7\frac{1}{2}$,10,$12\frac{1}{2}$ 的三角形的三顶点,则此圆的半径是

(A) $\frac{15}{4}$.　(B)5.　(C) $\frac{25}{4}$.　(D) $\frac{35}{4}$.　(E) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

（第 19 届美国高中数学考试,1968 年）

［解］ 由设且注意到

$$\left(12\frac{1}{2}\right)^2 = 10^2 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2,$$

则知此三角形为直角三角形，故斜边之半即为该三角形外接圆半径.

故选(C).

20·43　若 $0° < \alpha < 90°$，那么以 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha$ 为三边的 $\triangle ABC$ 的内切圆、外接圆的半径之和是

(A) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$.　　(B) $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}{2}$.

(C)$2\sin\alpha\cos\alpha$.　　(D) $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

（中国安徽省初中数学竞赛，1997 年）

[解]　由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha=1$，知 $\triangle ABC$ 为直角三角形且斜边长为 1，故 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\frac{1}{2}$.

又 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{2}$,

$$\therefore \quad R+r=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$$

故选(A).

20·44　已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，$\triangle BHC$ 外接圆半径为 r. 则 R 与 r 的大小关系是

(A)$R=r$.　　(B)$R>r$.　　(C)$R<r$.

(D)$\triangle ABC$ 是锐角三角形时，$R>r$；$\triangle ABC$ 为钝角三角形时，$R<r$.

（"祖冲之杯"初中数学邀请赛，1995 年）

[解]　如图，$\angle 1+\angle 2+\angle BHC=180°$,

而　$\angle FCB+\angle 1=90°$，$\angle EBC+\angle 2=90°$,

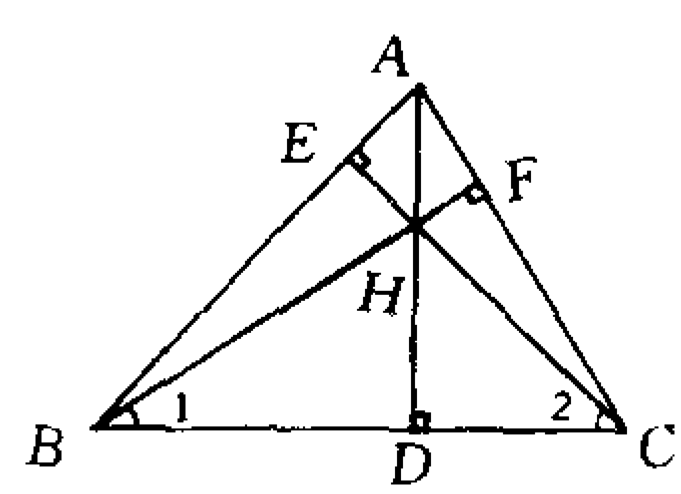
又　$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

知　$\angle BHC=180°-\angle BAC$,

在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2R\sin A$.

在 $\triangle BHC$ 中，$BC=2r\sin(180°-\angle BAC)$

$=2r\sin A$,



从而　$R=r$.

故选(A).

20·45　三角形的三边 为 25，39 和 40，它的外接圆直径为

(A) $\frac{133}{3}$.　　(B) $\frac{125}{3}$.　　(C) 42.　　(D) 41.　　(E) 40.

（第 10 届美国高中数学考试,1959 年）

［解］　由 $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$,其中 $S_\triangle$ 为三角形面积.

由海伦公式　$S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

（p 为三角形半周长）

$$\therefore\qquad R=\frac{25\cdot 39\cdot 40}{4\sqrt{52\cdot 27\cdot 13\cdot 12}}=\frac{125}{6},$$

$$\therefore\qquad 2R=\frac{125}{3}.$$

故选(B).

20·46　在 $\triangle ABC$ 中,$AC=24$,　$BC=10$,　$AB=26$,那么 $\triangle ABC$ 内切圆的半径 r 为

(A) 26.　　(B) 4.　　(C) 13.

(D) 0.　　(E) 以上答案都不正确.

（第 1 届美国高中数学考试,1950 年）

［解 1］　由设及 $26^2=24^2+10^2$,知 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

由　$AB+2r=AC+BC$,　得　$r=4$.

故选(B).

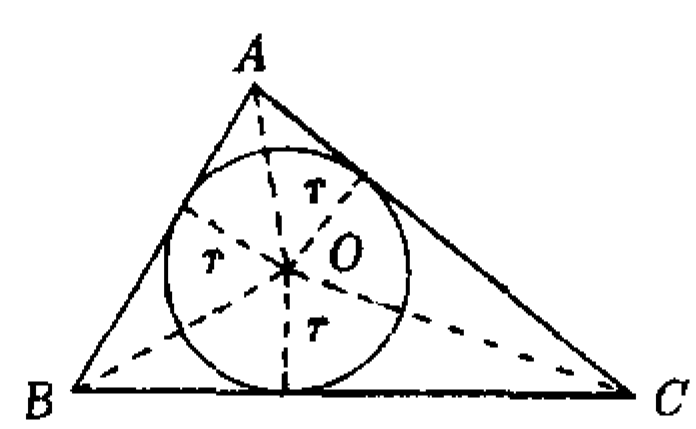
［解 2］　由解 1 知 $\triangle ABC$ 为直角三角形.则

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r=\frac{1}{2}AC\cdot BC,$$

$$\therefore\qquad r=\frac{AC\cdot BC}{AB+BC+CA}=\frac{24\cdot 10}{26+10+24}=4.$$

故选(B).

20·47　在一个三角形中,面积和它的周长在数值上相等,其内切圆半径是



(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

(E) 6.

（第 21 届美国高中数学考试,1970 年）

［解］　设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r(如图),则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot r+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot r$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r,$$

若设 $p = AB + BC + AC$, 由题设及上式有

$$p = \frac{1}{2}pr,$$

∴ $r = 2$.

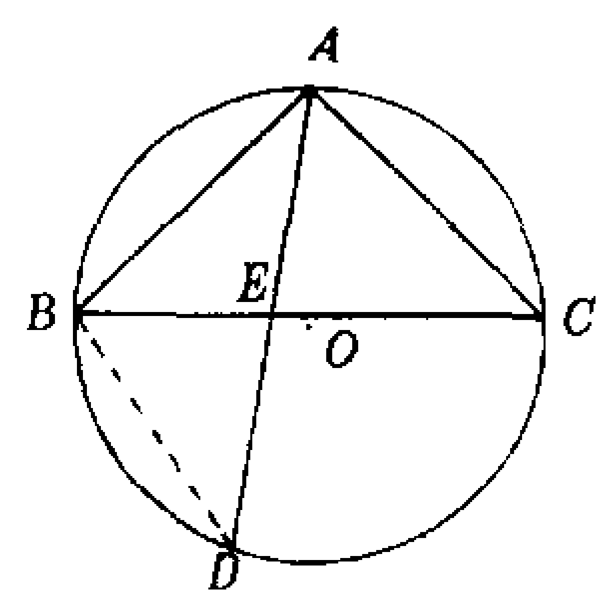
故选(A).

20·48 在圆 O 中,弦 $AB = AC$,弦 AD 交 BC 于 E,若 $AC = 12$, $AE = 8$,则 AD 等于

(A) 27. (B) 24. (C) 21. (D) 20. (E) 18.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解] 连结 BD,由圆周角性质易证



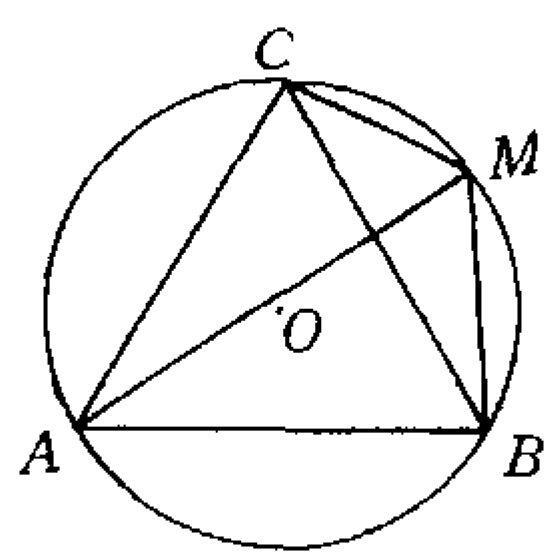
$$\triangle ABE \backsim \triangle ADB,$$

∴ $AB^2 = AE \cdot AD,$

则 $AD = \frac{12^2}{8} = 18.$

故选(E).

20·49 正三角形 ABC 内接于圆 O,M 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上,连线段 AM,BM 和 CM,则 AM



(A) 等于 $BM + CM$.

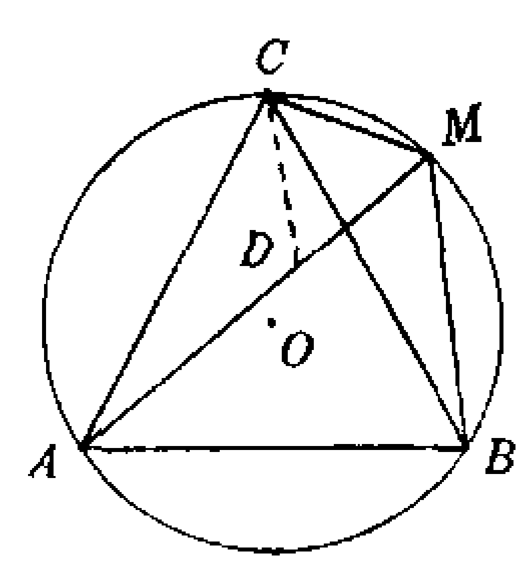
(B) 小于 $BM + CM$.

(C) 大于 $BM + CM$.

(D) 等于,大于,小于 $BM + CM$ 视 M 的位置而定.

(E) 非上述答案.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)



[解] 在 AM 上截 $MD = MC$,连 CD. 则 $\triangle MCD$ 为正三角形.

∴ $CD = MC$, 又 $AC = BC$,

且 $\angle CAM = \angle CBM,$

则 $\triangle ADC \cong \triangle BMC$. 有 $AD = MB$,

∴ $AM = MB + MC$.

故选(A).

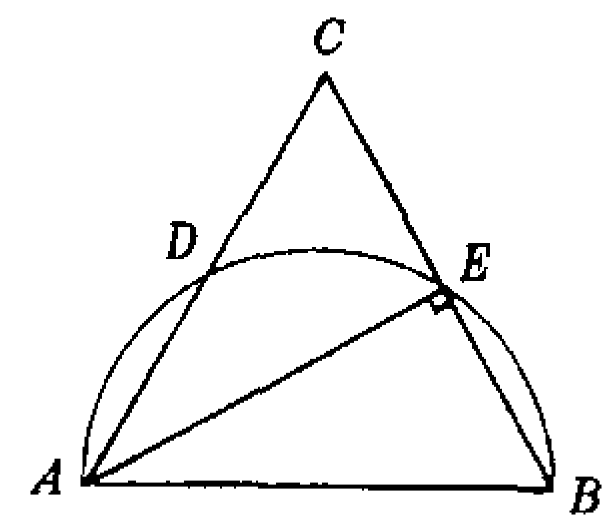
20·50　线段 AB 既是半径为1的圆的直径,又是等边 $\triangle ABC$ 的一边.这个圆交 AC,BC 于 D 点和 E 点.那么 AE 的长为

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{5}{3}$.　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\sqrt{3}$.　　(E) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

(第34届美国高中数学考试,1983年)

[解]　如图,因为 AB 是直径,所以 $\angle AEB = 90°$,于是 AE 就是等边 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高.



又 $\angle EAB = \frac{1}{2}\angle CAB = 30°$,即 $\triangle ABE$ 是 $30°$-$60°$-$90°$ 的直角三角形.

所以　$AE = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

故选(D).

20·51　从圆外一点 A 引圆的两条切线 AB,AC,切点为 B,C,第三条切线交 AB 于 P,交 AC 于 R,切圆于 Q,若 $AB = 20$,则 APR 的周长为

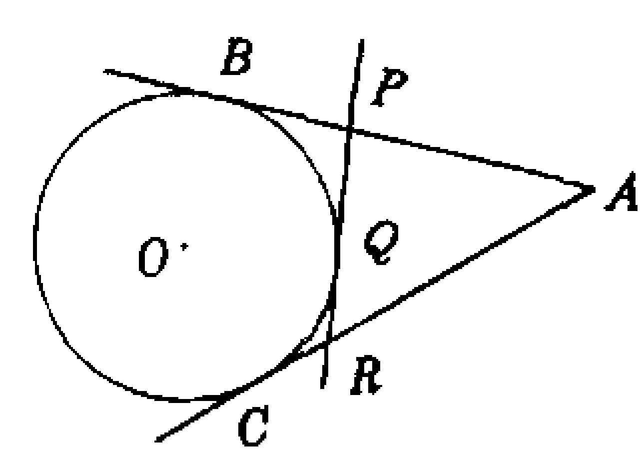
(A) 42.　　(B) 40.5.　　(C) 40.

(D) $39\frac{7}{8}$.　　(E) 无法确定.

(第12届美国高中数学考试,1961年)

[解]　设 p 为 $\triangle APR$ 的周长,则

$$p = AP + PQ + QR + RA,$$



由设及切线性质有 $PB = PQ$,且 $RQ = RC$,同时 $AB = AC$.

故　$p = AP + PB + CR + RA$
$= AB + AC = 2AB$
$= 40$.

故选(C).

20·52　三角形的一边被其内切圆的切点分为两线段各长6单位及8单位,若此圆半径为4单位,则此三角形的最短边长为

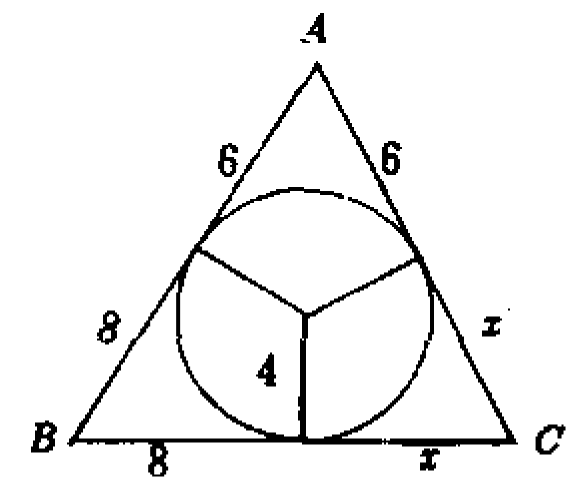
(A) 12单位.　　(B) 13单位.　　(C) 14单位.

(D) 15单位.　　(E) 16单位.

(第4届美国高中数学考试,1953年)

[**解**] 设三角形三边分别为 a,b,c,半周长为 p,内切圆半径为 r,则由

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

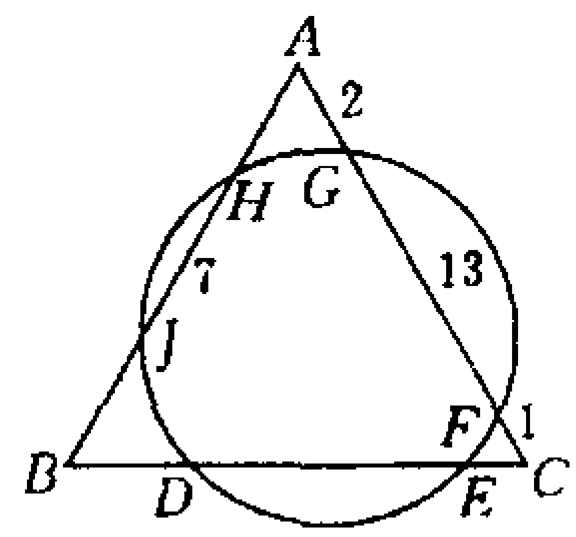


有 $4=\sqrt{\dfrac{6\cdot 8\cdot x}{6+8+x}}$, 解得 $x=7$.

因而三角形最小边为 13.

故选(*B*).

20·53 如图,一个圆交一个等边三角形于六个点.如果 $AG=2$ $GF=13$, $FC=1$, $HJ=7$,那么 DE 等于



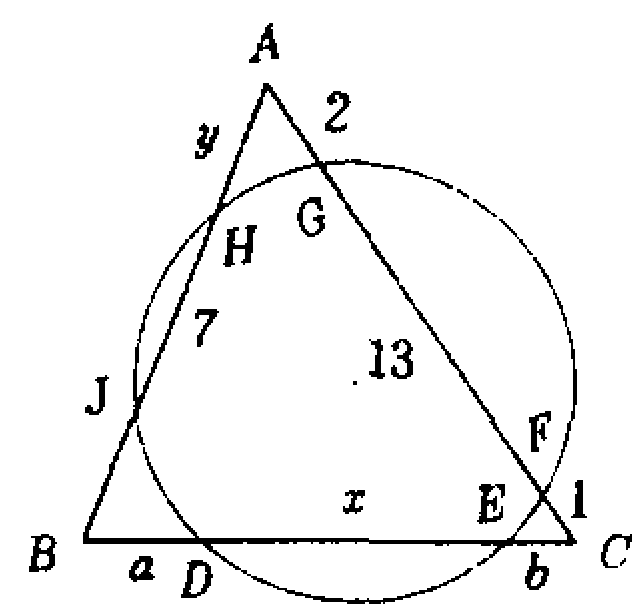
(A) $2\sqrt{22}$. (B) $7\sqrt{3}$.

(C) 9. (D) 10.

(E) 13.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[**解**] 如图,设 $AH=y$, $BD=a$, $DE=x$, 以及 $EC=b$.



由已知 $AG=2$, $GF=13$, $HJ=7$ 和 $FC=1$,那么这个等边三角形的边长就是

$$2+13+1=16.$$

把 AB 和 AC 看做是从 A 点向这圆引的割线,交圆于 H,J 和 G,F,

因此有 $y(y+7)=2(2+13)$,

或者 $0=y^2+7y-30=(y-3)(y+10)$,

这样 $y=3$, 且 $BJ=16-7-3=6$.

同理 $b(b+x)=1\cdot(1+13)=14$,

$a(a+x)=6\cdot(6+7)=78$.

又 $a+b+x=16$,

从上三方程中解得 $x=2\sqrt{22}$.

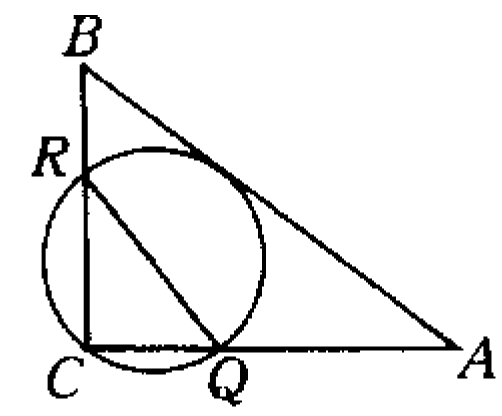
故选(*A*).

20·54 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=10,AC=8,BC=6$.圆 P 是过 C 且与 AB 相切的最小圆.设 Q,R 分别是圆 P 与 AC,BC 边的交点(与 C 点不重合).线段 QR 的长是

(A) 4.75.　　(B) 4.8.　　(C) 5.

(D) $4\sqrt{2}$.　　(E) $3\sqrt{3}$.

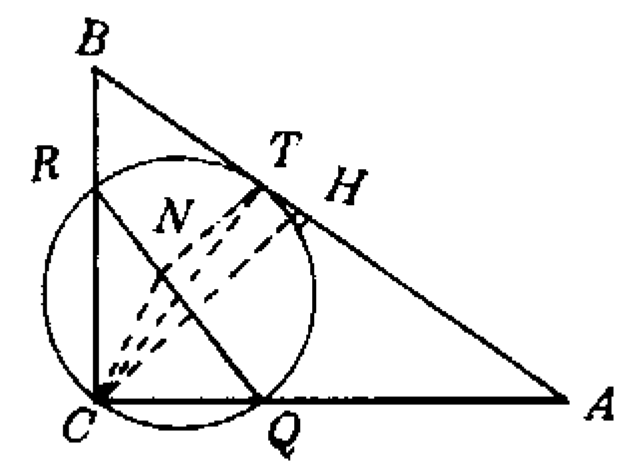
（第 29 届美国高中数学考试，1978 年）



［解 1］　设 N 是圆 P 的圆心. 若 T 是切线 AB 的切点，CH 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高，那么

$$CN + NT \geqslant CT \geqslant CH.$$

由设圆 P 是过 C 且与 AB 相切的最小圆，则半径 CN 应为极小，即 T 与 H 重合并且 N 是 CH 的中点；这就是说 CH 是圆 P 的直径.



因为 $\angle QCR = 90°$，又 QR 是直径，则

$$\triangle CBH \backsim \triangle ABC,$$

且 $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AC}{AB}$，　即 $\dfrac{CH}{6} = \dfrac{8}{10}$.

可得　$CH = 4.8$，因而 $QR = 4.8$.

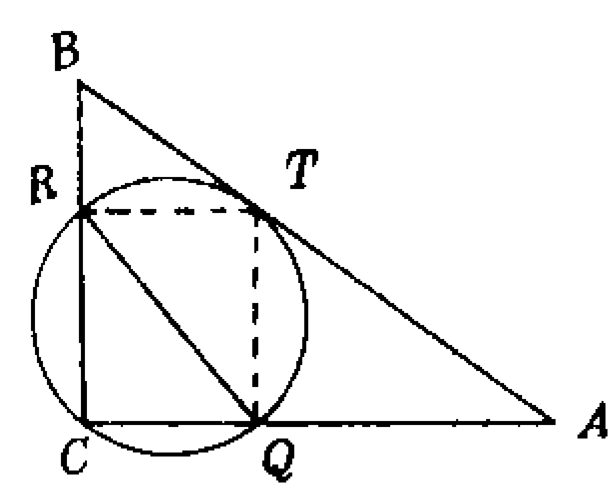
故选(B).

［解 2］　由设知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle BCA = 90°$，故 RQ 是圆的直径，因而当 $RCQT$ 是矩形时圆最小.

此时 CT 是 AB 上的高，且 $RQ = CT$.

$\therefore$　$CT = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4.8$.

故选(B).



20·55　一等边三角形的高等于一圆的半径，另一等边三角形内接于此圆，则此两三角形周长的比依次为

(A) 1 : 2.　　(B) 1 : 3.　　(C) $1 : \sqrt{3}$.

(D) $\sqrt{3} : 2$.　　(E) 2 : 3.

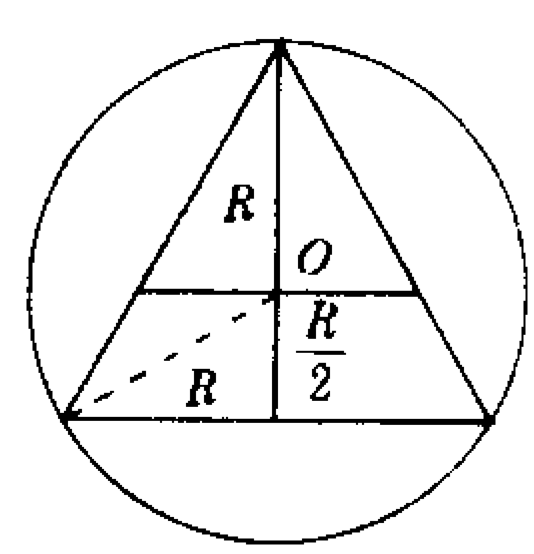
（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

［解］　由设知高等于半径的等边三角形过圆心 O. 而内接此圆的正三角形高为 $\dfrac{3}{2}R$.

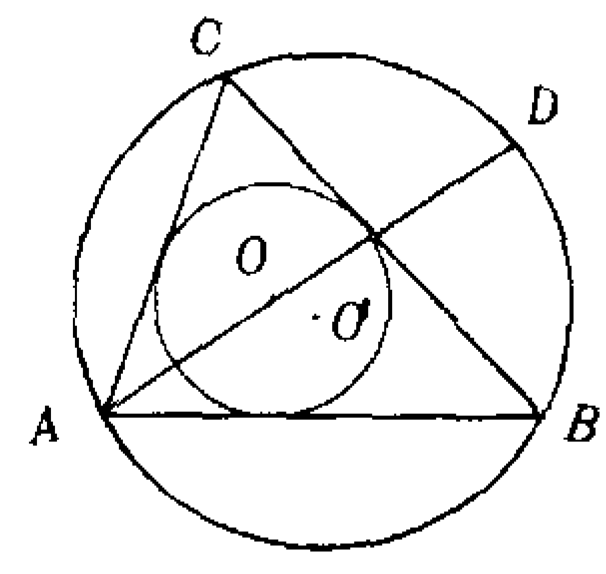
相似三角形周长比等于其相似比，即

$$R : \frac{3}{2}R = 2 : 3.$$

故选(E).



20·56 $\triangle ABC$内接于圆O',圆O内切于$\triangle ABC$,连结并延长AO使之与大圆交于D,则必有



(A) $CD = BD = O'D$.

(B) $AO = CO = OD$.

(C) $CD = CO = BD$.

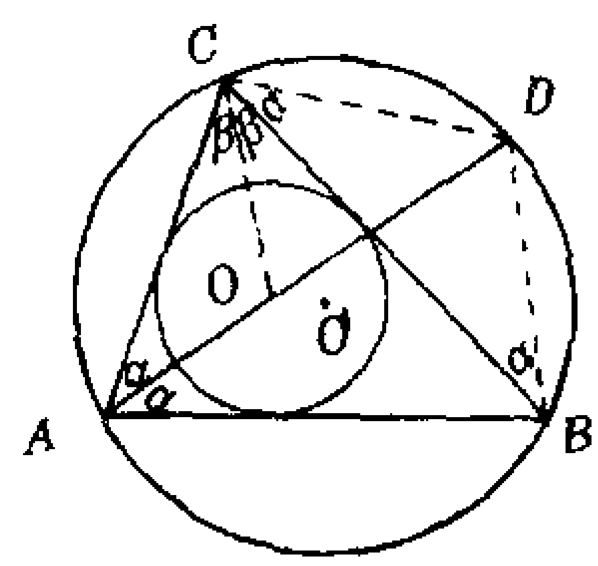
(D) $CD = OD = BD$.

(E) $O'B = O'C = OD$.

(第17届美国高中数学考试,1966年)

[解] 连CD,DB,OC.

由设AC,AB为$\odot O$切线,则AO平分$\angle CAB$.令$\angle CAD = \angle BAD = \alpha$.



同理 $\angle ACO = \angle BCO = \beta$.

因而 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$,

从而 $\angle DCB = \angle DBC = \alpha$.

且 $BD = CD$.

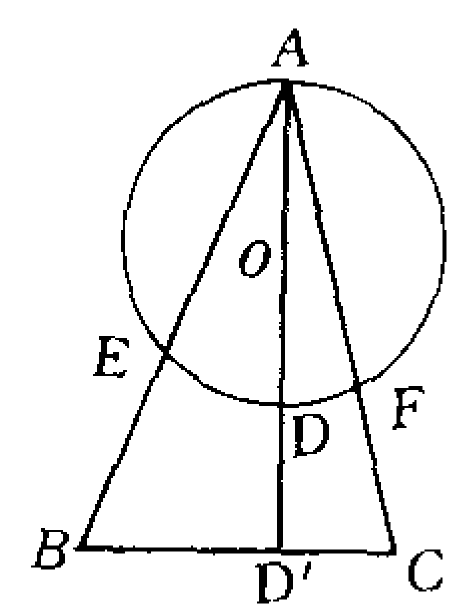
故 $\angle OCD = \alpha + \beta$,

又 $\angle COD$为$\triangle OAC$的外角,则$\angle COD = \alpha + \beta$.

$\therefore \triangle CDO$为等腰三角形.从而 $CD = OD$.

故选(D).

20·57 如图,已知AD是$\odot O$直径,且$AD' \perp BC$,又AB、AC分别与圆交于E、F.则下列式子一定成立的是



(A)$AE \cdot BE = AF \cdot CF$.

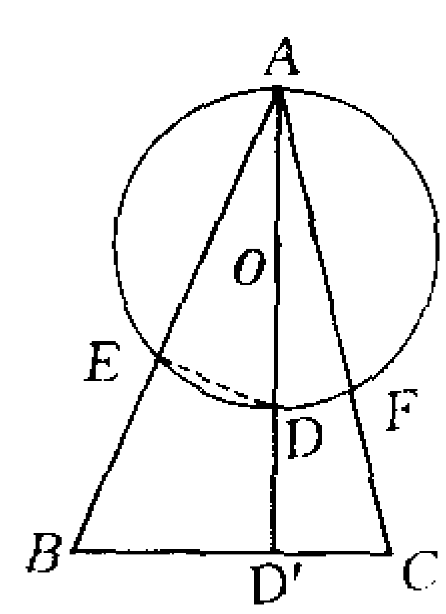
(B)$AE \cdot AB = AO \cdot AD'$.

(C)$AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

(D)$AE \cdot AF = AO \cdot AD$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1998年)

[解] 连结ED,易证$Rt\triangle AED \backsim Rt\triangle AD'B$,则有



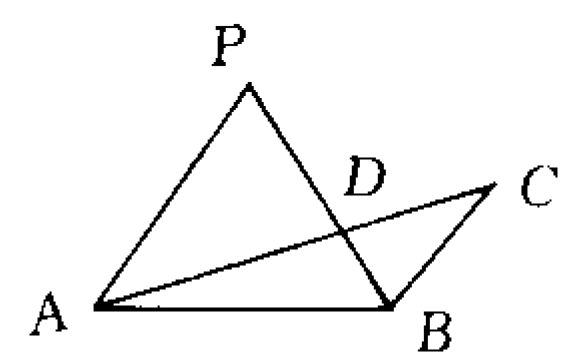
$\frac{AE}{AD'} = \frac{AD'}{AB}$, 即 $AE \cdot AB = AD \cdot AD'$.

连结 FD,仿上可证 $AF \cdot AC = AD \cdot AD'$.

$$\therefore \quad AE \cdot AB = AF \cdot AC.$$

故选(C).

20·58 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,且 $PA = PB$,又 $\angle APB = 2\angle ACB$,而 AC 交 BP 于 D 点,若 $PB = 3, PD = 2$. 则 $AD \cdot AC$ 等于

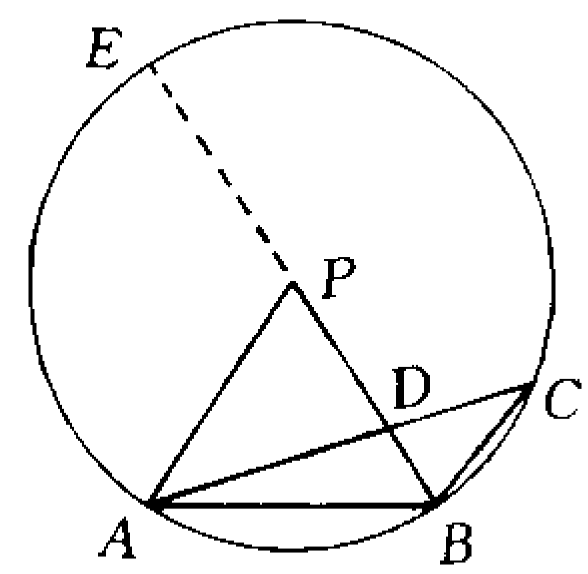


(A)5. (B)6. (C)7.

(D)8. (E)9.

(第 48 届美国高中数学考试,1997 年)

[解] 作 $\triangle ABC$ 外接圆,则 P 恰为该圆圆心,同时 PA 为其半径.

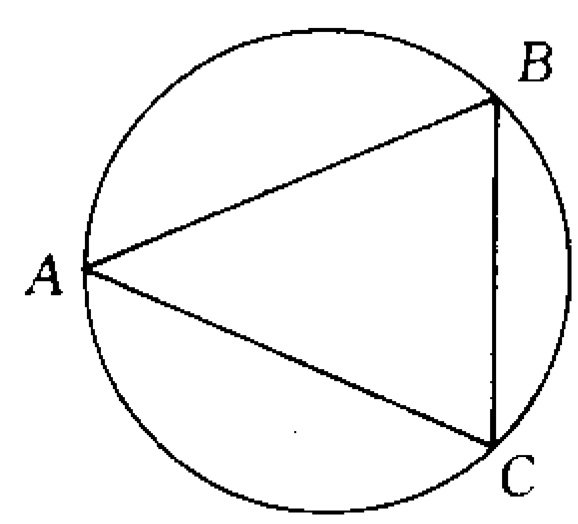


延长 BP 交 $\odot P$ 于 E 点,由相交弦定理有

$$AD \cdot DC = BD \cdot ED = BD \cdot (PD + PE) = (3-2)(3+2) = 5.$$

故选(A).

20·59 点 A, B, C 在半径为 r 的圆上,又 $AB = AC$ 且 $AB > r$,而 BC 劣弧长为 r. 若角度用弧度表示,则 $\dfrac{AB}{BC} =$



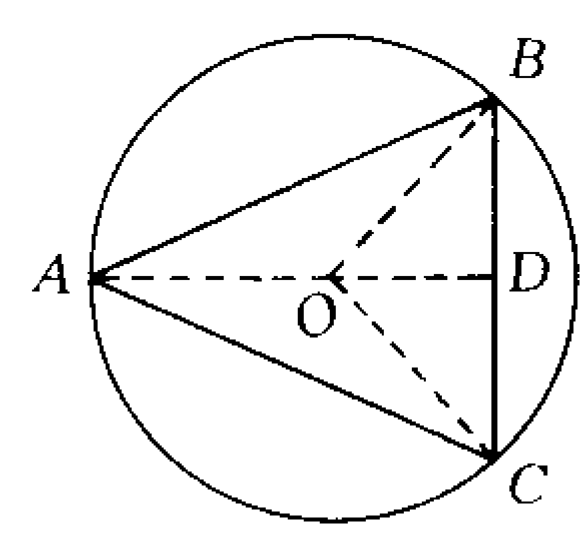
(A) $\dfrac{1}{2}\csc\dfrac{1}{4}$. (B) $2\cos\dfrac{1}{2}$.

(C) $4\sin\dfrac{1}{2}$. (D) $\csc\dfrac{1}{2}$.

(E) $2\sec\dfrac{1}{2}$.

(第 45 届美国高中数学考试,1994 年)

[解] $\because \quad \overset{\frown}{BC} = r, \ \therefore \quad \angle BAC = \dfrac{1}{2}$.



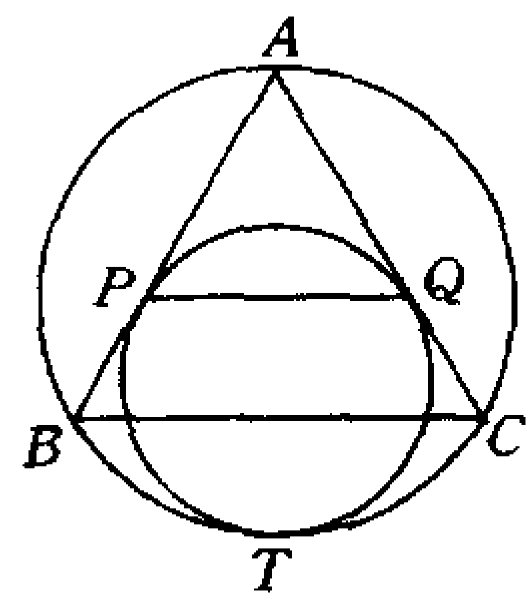
连结 AO 延长其交 BC 于 D,连结 OB, OC,

则 $BD = \dfrac{1}{2}BC$, 且 $\angle BAD = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{4}$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2BD} = \frac{1}{2}\csc\angle BAD = \frac{1}{2}\csc\frac{1}{4}.$$

故选(A).

20·60　如图，等边三角形 ABC 内接于一个圆，另一个小圆内切大圆于 T，并且切 AB 边和 AC 边于 P 点和 Q 点. 如果 BC 边的长度为 12，则 PQ 线段的长为



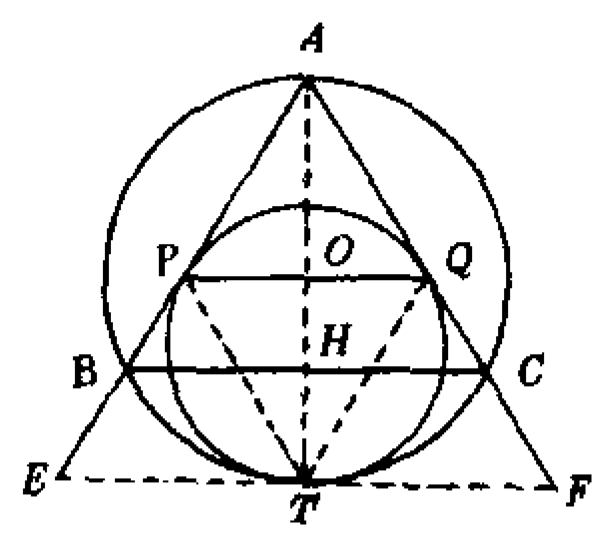
(A) 6.　　　(B) $6\sqrt{3}$.

(C) 8.　　　(D) $8\sqrt{3}$.

(E) 9.

（第 32 届美国高中数学考试，1981 年）

[解]　作圆直径 AT 交 PQ 和 BC 于 O，H 点. 延长 AB 和 AC 交过 T 的圆切线于 E，F，则等边 $\triangle AEF$ 外切小圆于 P，T，Q 点.



因此 $\triangle PQT$ 也是一个等边三角形. 且 $\triangle APQ$ 也是等边三角形.

又它们的公共边为 PQ，所以 $\triangle APQ \cong \triangle PQT$，因而 $AO = OT$，因此 O 是大圆的圆心.

AH 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高，所以

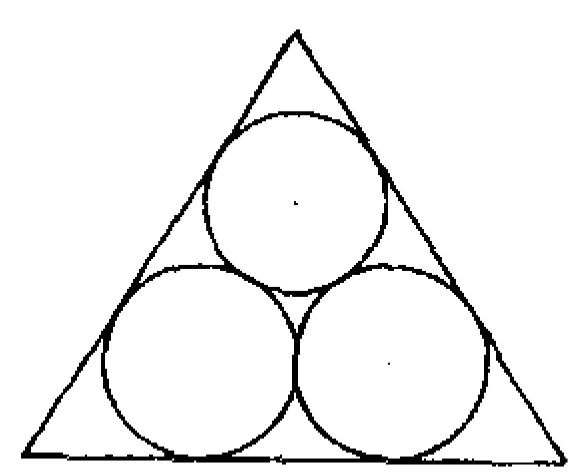
$$AO = \frac{2}{3}AH.$$

又由　$\triangle APQ \backsim \triangle ABC$，所以 $\dfrac{AO}{AH} = \dfrac{PQ}{BC}$，

即　$PQ = \dfrac{2}{3}BC = 8$.

故选(C).

20·61　如图，三个圆中的每一个都外切于其他两个，并且三角形的每一边与圆中的两个相切. 若每个圆的半径是 3，那么三角形的周长是



(A) $36 + 9\sqrt{2}$.　　　(B) $36 + 6\sqrt{3}$.

(C) $36 + 9\sqrt{3}$.　　　(D) $18 + 18\sqrt{3}$.

(E) 45.

（第 28 届美国高中数学考试，1977 年）

[解]　如下图，设 PB 和 QC 是圆心 P 和圆心 Q 到公切线 AD 的切点的半径.

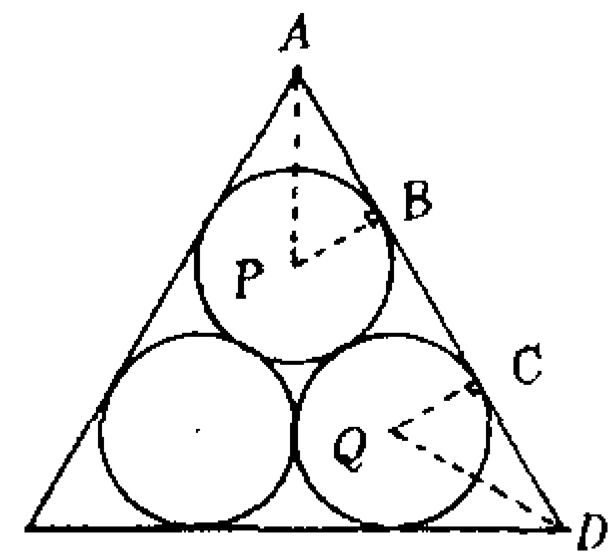
$$\because \qquad \angle PAB = \angle QDC = 30°,$$

有　$$AB = CD = 3\sqrt{3},$$

且　　$AD = AB + PQ + CD = 6 + 6\sqrt{3}$.

∴　三角形周长是 $18 + 18\sqrt{3}$.

故选(D).



20·62　一个边长为8,13和17的三角形有一个内切圆,设长为8的边被切点分成 r 与 s 两段,且 $r < s$,则 $r : s$ 等于

(A) $1:3$.　　(B) $2:5$.　　(C) $1:2$.

(D) $2:3$.　　(E) $3:4$.

(第15届美国高中数学考试,1964年)

[解]　由圆切线的性质及题设有结论如图所标,注意到

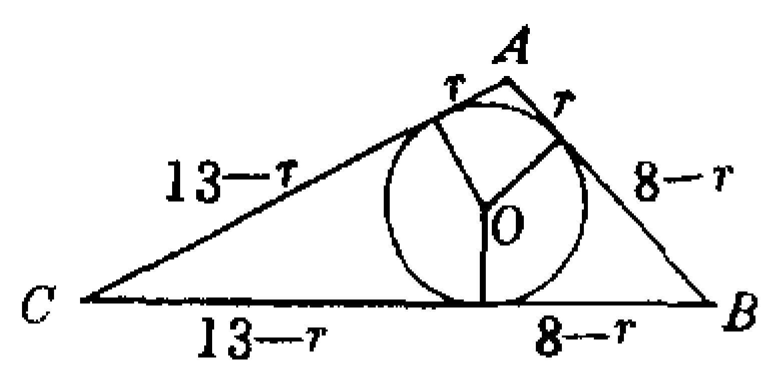
$$AB = 8,\ AC = 13,\ BC = 17.$$

因而　$(8 - r) + (13 - r) = 17$,解得

$$r = 2.$$

∴　　$s = 8 - r = 6$.

故选(A).



20·63　某三角形有一半径为 r 英寸的内切圆,若三角形的周长为 p 英寸,面积为 k 平方英寸时,$\frac{p}{k}$ 为

(A) 与 r 的值无关.　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{r}$.　　(C) $\frac{2}{\sqrt{r}}$.

(D) $\frac{2}{r}$.　　(E) $\frac{r}{2}$.

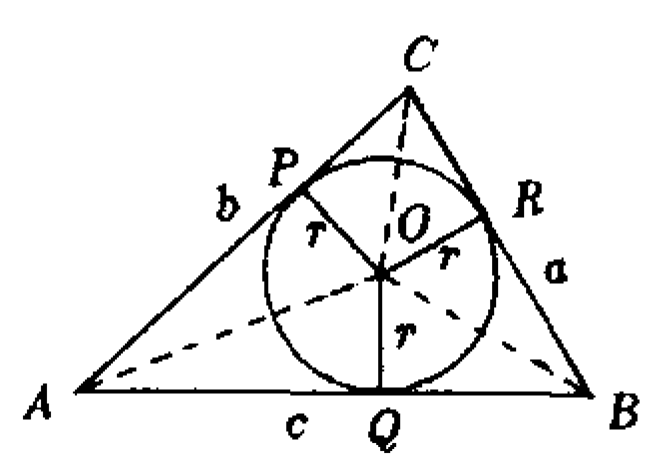
(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解]　由图易看出

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r = \frac{1}{2}pr,$$

由　$k = \frac{1}{2}pr$,　则　$\frac{p}{k} = \frac{2}{r}$.

故选(D).



20·64　一个半径为 r 的圆内切于一个直角等腰三角形,一个半径为 R 的圆外接于这个三角形,那么 $\frac{R}{r}$ 等于

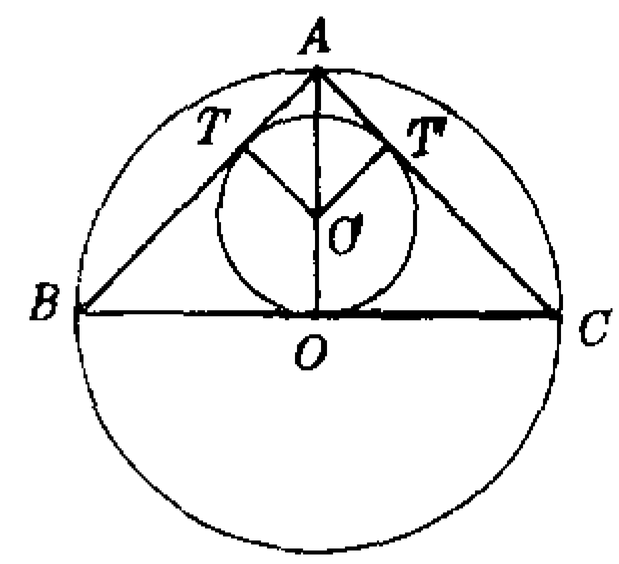
第二十章　圆

(A) $1+\sqrt{2}$.　　(B) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.　　(C) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

(D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.　　(E) $2(2-\sqrt{2})$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 如图,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,其中 $\angle BAC=90°$,$AB=AC$.又其内接在一个圆心为 O,半径是 R 的圆中.



线段 AO 长 R,并平分线段 BC 和 $\angle BAC$.又圆心是 O'(位于 AO 上),半径是 r 的圆内切于 $\triangle ABC$,且 AB 和 AC 与内切圆的切点分别是 T 和 T'.

∵ $\triangle ATO'$ 角度是 $45°$-$45°$-$90°$,

又 $O'T=r$, $AT=r$, 有 $O'A=r\sqrt{2}$.

∴ $R=r+r\sqrt{2}$, 即 $\frac{R}{r}=1+\sqrt{2}$.

故选(A).

20·65 若 p 为等边三角形的周长,则其外接圆之面积为

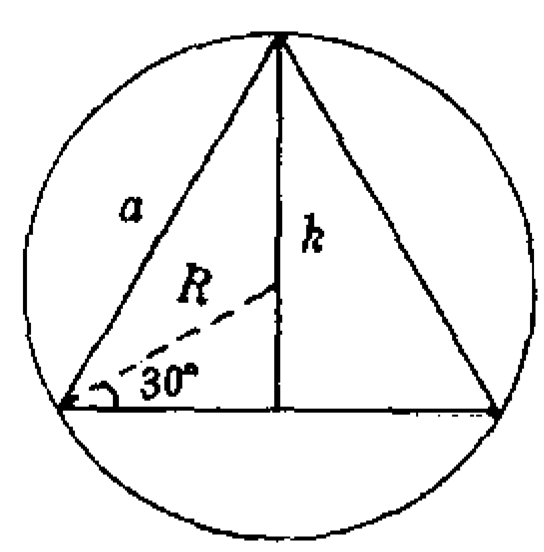
(A) $\frac{\pi p^2}{3}$.　　(B) $\frac{\pi p^2}{9}$.　　(C) $\frac{\pi p^2}{27}$.

(D) $\frac{\pi p^2}{81}$.　　(E) $\frac{\sqrt{3}\pi p^2}{27}$.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解] 设正三角形边长为 a,高为 h,外接圆半径为 R,则由设有

$$a=\frac{p}{3},\quad h=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}p.$$



又 $h=\frac{3}{2}R$, 故 $R=\frac{\sqrt{3}}{9}p$.

所以 $S_{\odot}=\pi R^2=\frac{\pi p^2}{27}$.

故选(C).

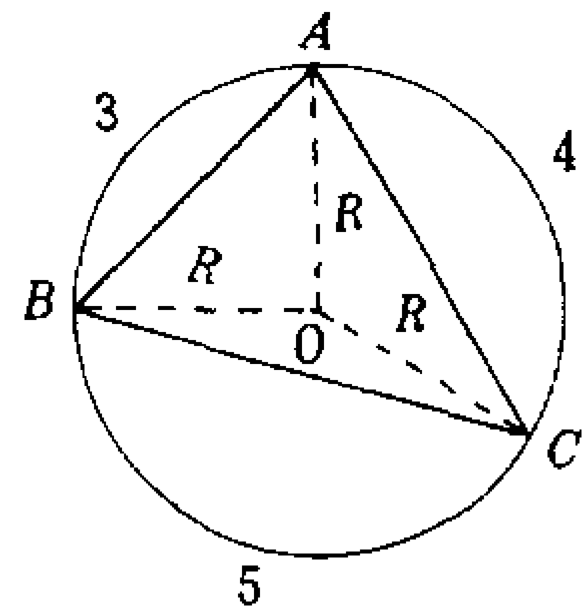
20·66 一个圆的内接三角形的三个顶点把圆周分为长是 3,4,5 的三段圆弧,这个三角形的面积为

(A) 6.　　(B) $\frac{18}{\pi^2}$.

(C) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$.　　　　(D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$.

(E) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)



[解]　由设知圆周长为 $3+4+5=12$,

设圆的半径为 R,则 $2\pi R=12$,则 $R=\frac{6}{\pi}$.

若圆心为 O, 则 $\angle AOB=90°$,

$\angle BOC=150°$, $\angle COA=120°$.

故

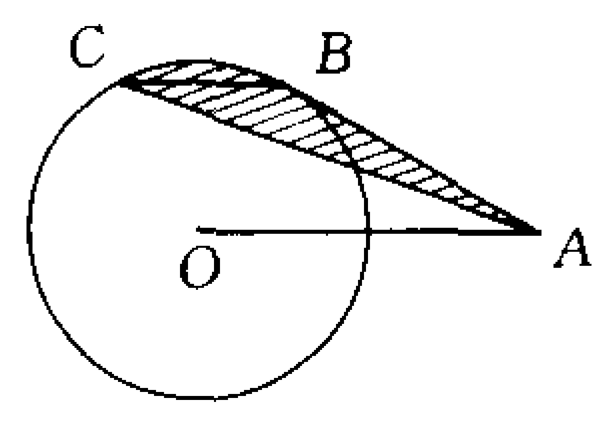
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}\\&=\frac{1}{2}R^2(\sin\angle AOB+\sin\angle BOC+\sin\angle COA)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{\pi^2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{9}{\pi^2}(3+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

故选(E).

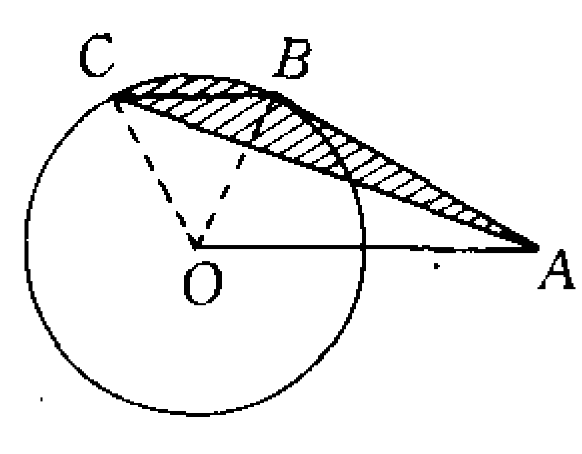
20·67　如图,A 是半径为 1 的 $\odot O$ 外一点,$OA=2$,AB 是 $\odot O$ 的切线,B 是切点,弦 $BC\parallel OA$,连结 AC.则阴影部分的面积等于

(A) $\frac{2\pi}{9}$.　　　　(B) $\frac{\pi}{6}$.

(C) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$.　　　　(D) $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.



(中国初中数学联赛,1996 年)



[解]　连结 OB,OC.

$\because$　$BC\parallel OA$,　$\therefore$　$S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}$,

从而　$S_{阴影}=S_{扇形OBC}$.

$\because$　AB 是圆的切线,　$\therefore$　$OB\perp AB$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中, $AO=2$, $OB=1$,

$\therefore$　$\angle AOB=60°$, 因而有 $\angle BOC=60°$.

$\therefore$　$S_{阴影}=S_{扇形OBC}=\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{6}$.

故选(B).

20·68　圆内接三角形三边长分别为20,21和29,此圆被三角形分成四部分,令A,B,C代表非三角形的三部分,且C面积最大,下列关系式中成立的是

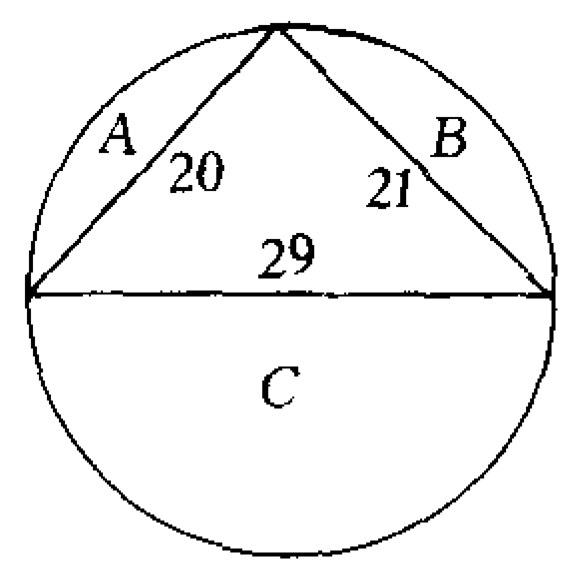
(A)$A+B=C$.　　(B)$A+B+210=C$.

(C)$A^2+B^2=C^2$.　　(D)$20A+21B=29C$.

(E)$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}=\frac{1}{C^2}$.

（第50届美国高中数学考试,1999年）

[解]　注意到　$29^2=20^2+21^2$,



这样三角形系直角三角形,且其斜边为外接圆直径.

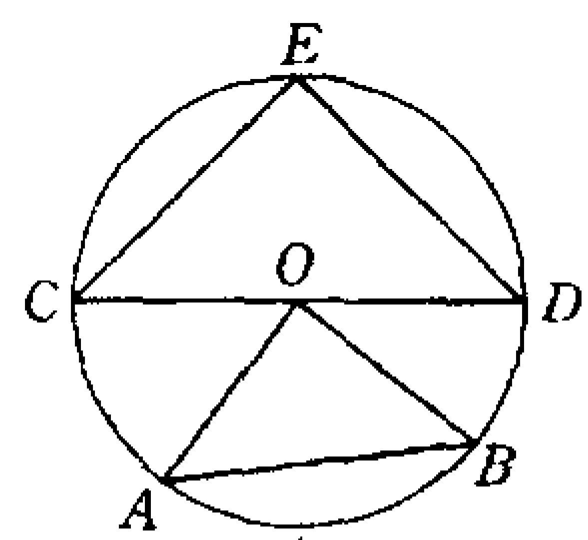
显然　$A+B+S_{\triangle}=C$,

即　$A+B+\frac{1}{2}\times20\times21=C$.

化简得　$A+B+210=C$.

故选(B).

20·69　如图,CE与DE是圆O的二等弦,$\overset{\frown}{AB}$是$\frac{1}{4}$圆周,则$\triangle CED$与$\triangle AOB$面积之比为



(A)$\sqrt{2}:1$.　　(B)$\sqrt{3}:1$.　　(C)$4:1$.

(D)$3:1$.　　(E)$2:1$.

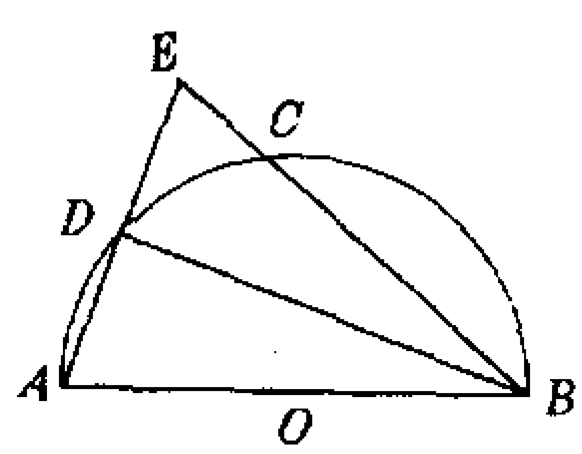
（第9届美国高中数学考试,1958年）

[解]　由设知$\angle CED=\angle AOB=90°$,则有

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{CE\cdot DE}{AO\cdot OB}=\frac{CE^2}{AO^2}=\frac{\frac{1}{2}CD^2}{\frac{1}{4}CD^2}=2.$$

故选(E).

20·70　如图,AB是$\odot O$的直径,$AB=4$,弦$BC=3$,$\angle ABC$的平分线交圆于D,又AD,BC的延长线交于E.则四边形$ABCD$的面积是$\triangle DCE$

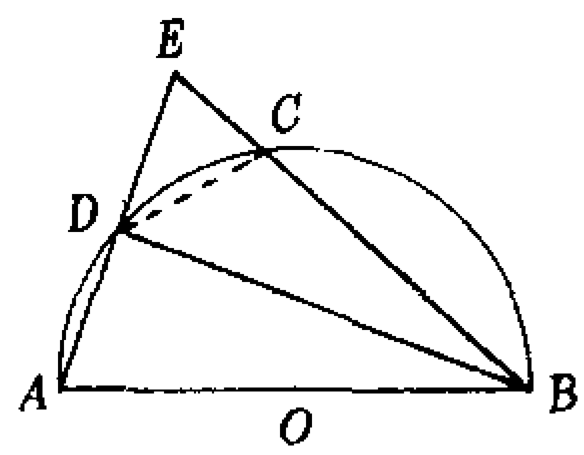


面积的

(A) 7 倍.　(B) 8 倍.　(C) 3 倍.　(D) 4 倍.

（中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1990 年）

[解 1]　连 DC. 易证 $\triangle EDC \backsim \triangle EBA$,其相似比为$\frac{ED}{EB}$.



又　$\cos B = \frac{3}{4}$,　$\therefore$　$1 - 2\sin^2\frac{B}{2} = \frac{3}{4}$,

故　$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{1}{8}$.　又　$\sin\frac{B}{2} = \frac{ED}{EB}$,

$\therefore$　$S_{\triangle EDC} : S_{\triangle EBA} = 1 : 8$.

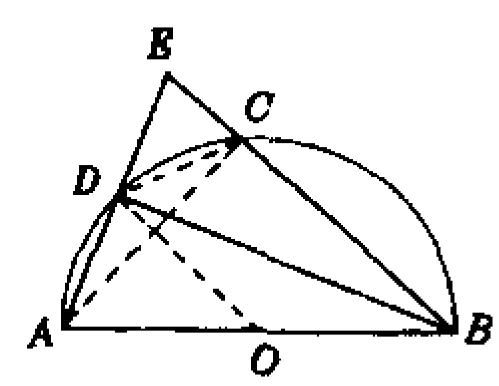
故四边形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle DCE$ 的 7 倍.

故选(A).

[解 2]　连 AC, OD, DC.

$\because$　BD 平分 $\angle ABC$,则$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$,

$\therefore$　$AD = DC$.



又　$OD = OB$,

则　$\angle AOD = \angle ODB + \angle OBD$

$= 2\angle OBD = \angle ABC$,

$\therefore$　$\cos\angle AOD = \cos\angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$,

在 $\triangle ADO$ 中由余弦定理可求得 $AD^2 = 2$,即 $CD^2 = 2$.

$\because$　$\triangle EDC \backsim \triangle EBA$,

则 $S_{\triangle DCE} : S_{\triangle EAB} = CD^2 : AB^2 = 1 : 8$,

$\therefore$　$S_{\triangle DCE} = \frac{1}{7}S_{ABCD}$.

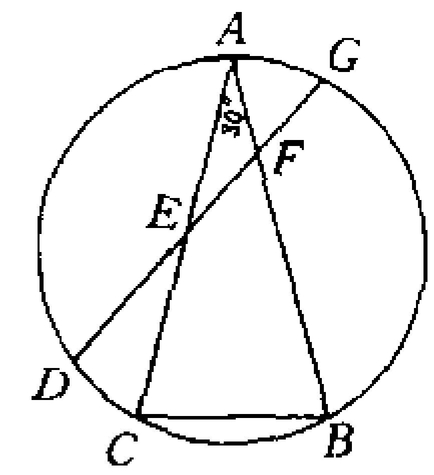
故选(A).

20·71　如图,$\triangle ABC$ 内接于一个圆. 点 D 位于$\overset{\frown}{AC}$ 上,且 $\overset{\frown}{DC}$ $\overset{m}{=} 30°$. 点 G 位于$\overset{\frown}{BA}$ 上,且$\overset{\frown}{BG} > \overset{\frown}{GA}$. AB 边和 AC 边的长都等于 DG 弦的长,且 $\angle CAB = 30°$. 弦 DG 分别交 AC 边和 AB 边于 E 和 F. 那么 $\triangle AFE$ 的面积和 $\triangle ABC$ 的面积的比为

(A) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.　(B) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

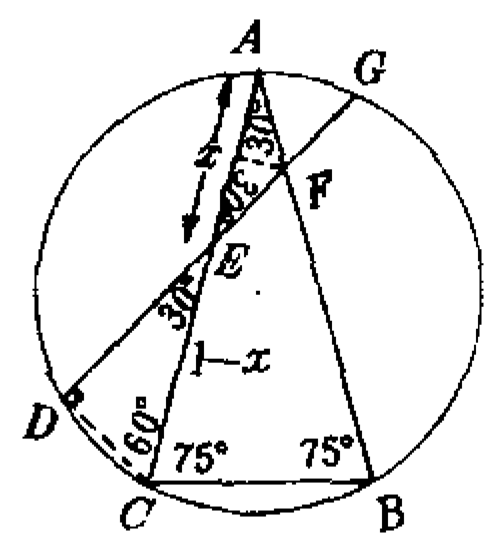
(C) $7\sqrt{3} - 12$.　(D) $3\sqrt{3} - 5$.

(E) $\frac{9-5\sqrt{3}}{3}$.



（第 32 届美国高中数学考试,1981 年）

［解］ 如图,连接 DC,因 $\overset{\frown}{AC} \overset{m}{=} 2\angle ABC$,则由 $\angle ABC = (180° - 30°)/2 = 75°$,所以 $\overset{\frown}{AC} \overset{m}{=} 150°$.



从而 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DC} \overset{m}{=} 150° - 30° = 120°$,

所以 $\angle ACD = 60°$.

又因为 $AC = DG$,所以 $\overset{\frown}{GA} = \overset{\frown}{GD} - \overset{\frown}{AD} \overset{m}{=} \overset{\frown}{AC} - 120° = 30°$,

同时 $\overset{\frown}{CG} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{GA} \overset{m}{=} 150° + 30° = 180°$, 且 $\angle CDG = 90°$.

于是 $\triangle DEC$ 是 $30°$-$60°$-$90°$ 的直角三角形.

不失一般性,假设 $AC = AB = DG = 1, AE = x = DE$(很容易证明 $\triangle EDC \cong \triangle EAG$,所以 $AE = DE$).

$$\therefore \qquad CE = 1 - x = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot 2.$$

则 $$AE = x = 2\sqrt{3} - 3.$$

FH 是 $\triangle AFE$ 中 AE 上的高,所以

$$EH = \frac{AE}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}, \text{且}$$

$$FH = \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \qquad S_{\triangle AFE} = EH \cdot FH = \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}-12}{4}.$$

而 $$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC\sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore \qquad \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = 7\sqrt{3} - 12.$$

故选(C).

20·72 在半径为 r 的圆 O 中,作一弦 AB,其长度为 r,过 O 作 AB

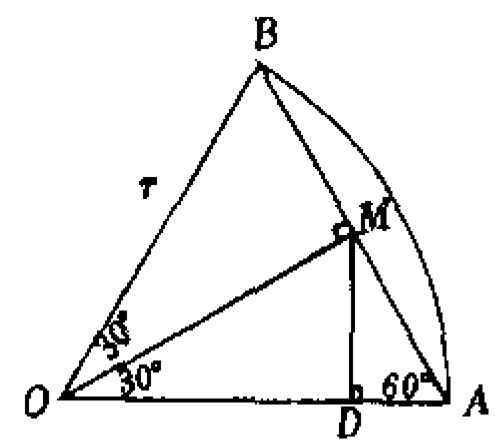
的垂线,垂足为 M,过 M 作 OA 的垂线,垂足为 D,则 $\triangle MDA$ 的面积为

(A) $\frac{3r^2}{16}$.　　(B) $\frac{\pi r^2}{16}$.　　(C) $\frac{\pi r^2\sqrt{2}}{8}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}r^2}{32}$.　　(E) $\frac{\sqrt{6}r^2}{48}$.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解] 由设知 $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{r}{2}$.



又在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中,

$\angle AMD = 90° - \angle MAD$

$= 90° - 60° = 30°$,

则　$AD = \frac{1}{2}AM = \frac{r}{4}$.

同理　在 $\text{Rt}\triangle OMD$ 中,$MD = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{4}r$.

$\therefore\ S_{\triangle MDA} = \frac{1}{2}AD\cdot MD = \frac{\sqrt{3}}{32}r^2$.

故选(D).

20·73　一直角三角形的斜边长为 h,内切圆的半径是 r.内切圆面积与三角形面积之比是

(A) $\frac{\pi r}{h+2r}$.　　(B) $\frac{\pi r}{h+r}$.　　(C) $\frac{\pi r}{2h+r}$.

(D) $\frac{\pi r^2}{h^2+r^2}$.　　(E) 这些都不对.

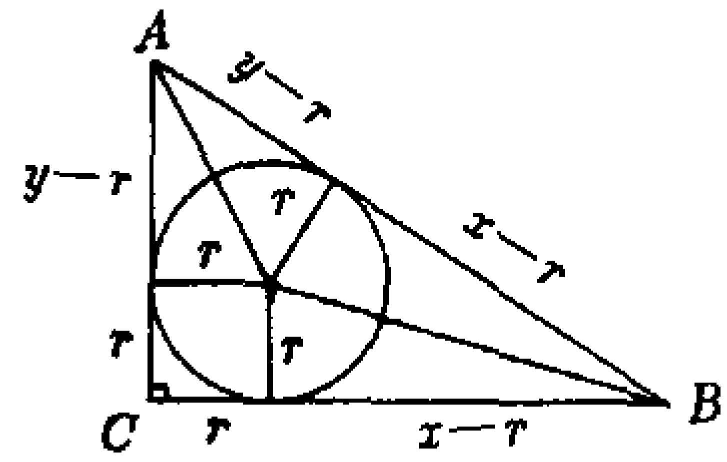
(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 如图,设 x 和 y 是三角形直角边的长,所以

$$h = (y-r)+(x-r) = x+y-2r,$$

即
$$x+y = h+2r;$$

又　$x^2+y^2 = h^2$,　则



$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy$

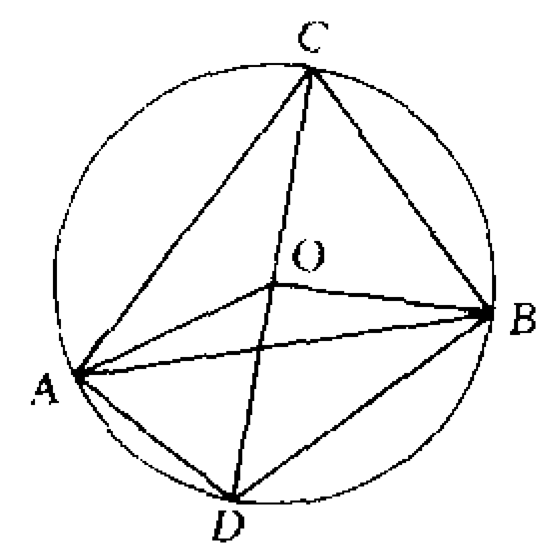
$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}\right]$

$= \frac{1}{4}[(h+2r)^2-h^2]$

$= hr + r^2$.

这样,所求的比是 $\dfrac{\pi r^2}{hr + r^2} = \dfrac{\pi r}{h + r}$.

故选(B).

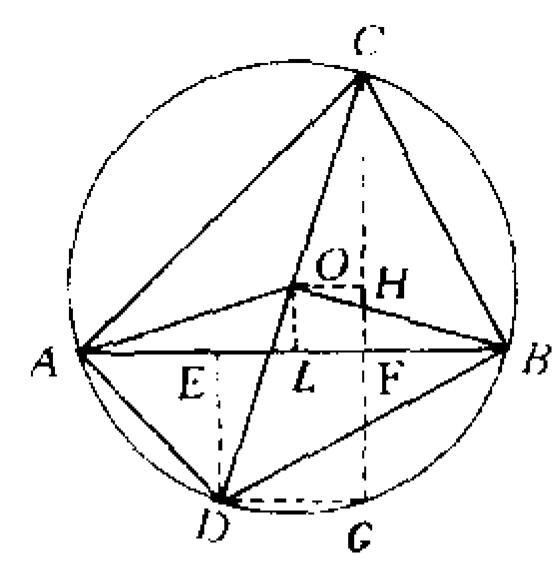


20·74 设AB是$\odot O$的一条弦,又CD是$\odot O$的直径,且与弦AB相交.设$M = |S_{\triangle CAB} - S_{\triangle DAB}|$,$N = 2S_{\triangle OAB}$,则

(A)$M > N$.　(B)$M = N$.

(C)$M < N$.　(D)M,N的大小关系不确定.

(中国初中数学联赛,1995年)



[解] 如图,作$DE \perp AB$,$CF \perp AB$(垂足分别为E,F),并设CF的延长线交$\odot O$于G.连结DG.

由于$\angle DGC = 90°$(CD为直径,故$EFCD$为矩形,从而$DE = GF$.

不妨设$CF > FG$.作$OH \perp CG$于H,且作$OL \perp AB$于L.则H为CG的中点,且

$$\begin{aligned} CF - FG &= CH + HF - FG \\ &= 2HF = 2OL. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= | S_{\triangle CAB} - S_{\triangle DAB} | \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot CF - \frac{1}{2} AB \cdot DE \\ &= \frac{1}{2} AB(CF - FG) = AB \cdot OL = 2S_{\triangle OAB}. \end{aligned}$$

故选(B).

20·75 任意$\triangle ABC$,设它的周长,外接圆半径长与内切圆半径长分别为l,R与r,那么

(A) $l > R + r$.　　(B) $l \leqslant R + r$.

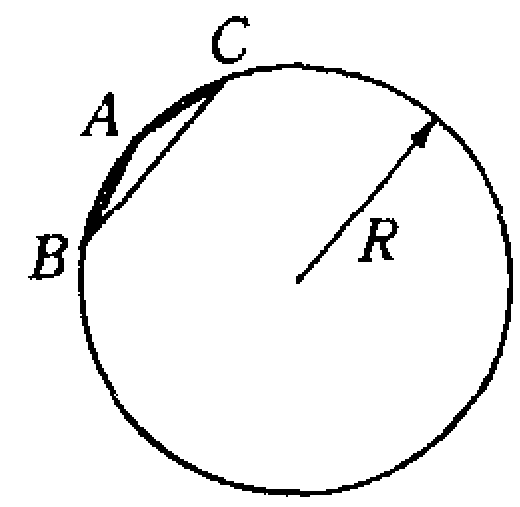
(C) $\dfrac{l}{6} < R + r < 6l$.

(D) 以上(A),(B),(C)三种关系都不对.

(中国高中数学联赛,1983年)

[解] 先作一个半径为R的圆(如右图).对任意正整数N,在这个圆周上总可以取充分接近的三点A,B,C,使$Nl < R$,这说明(A),

(C) 不一定成立.



如果在上述圆内,先作弦 AB,BC,使 $AB > R$, $BC > R$,然后连 AC,则 $l > 2R > R + r$.这说明 (B) 不一定成立.

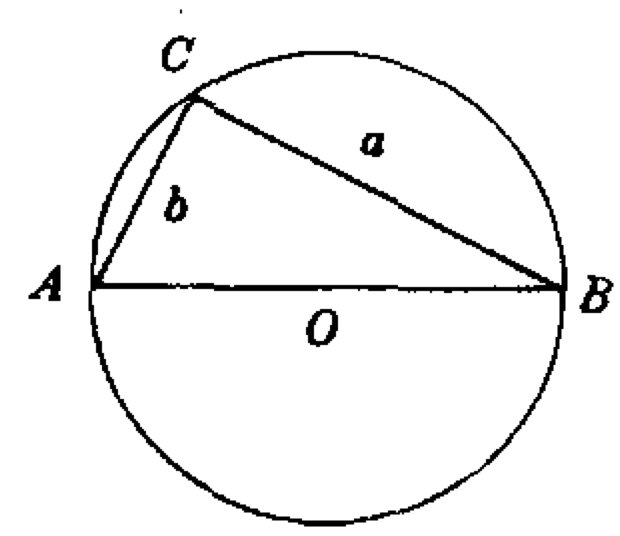
故选 (D).

20·76 $\triangle ABC$ 内接于半径为 r 的半圆内,底 AB 在直径 AB 上,点 C 不与 A,B 重合.设 $s = AC + BC$,对所有 C 的可能位置,有

(A) $s^2 \leqslant 8r^2$. (B) $s^2 = 8r^2$. (C) $s^2 \geqslant 8r^2$.

(D) $s^2 \leqslant 4r^2$. (E) $s^2 = 4r^2$.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)



[解] 设 $BC = a$, $AC = b$,由设 AB 为 $\odot O$ 直径,则 $\angle ACB = 90^\circ$.由勾股定理

$$a^2 + b^2 = 4r^2.$$

又 $s = a + b$, 则

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4r^2 + 2ab,$$

而 $2ab \leqslant a^2 + b^2 = 4r^2$,且等号当且仅当 $a = b = \sqrt{2}r$ 时成立.

因而 $$s^2 \leqslant 8r^2.$$

故选 (A).

20·77 边长为 a,b,c 的三角形,其面积等于 $\frac{1}{4}$,而外接圆半径为 1.若 $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$,则 s 与 t 的大小关系是

(A) $s > t$. (B) $s = t$. (C) $s < t$. (D) 不确定.

(中国高中数学联赛,1986 年)

[解] 由题设及三角形面积公式有

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4} = \frac{1}{4},$$

故 $$abc = 1.$$

又由平均不等式有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{ab}} = 2\sqrt{c}$;

同理 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{a}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{b}$.

以上三个不等式相加，得 $t \geqslant s$，等号当且只当 $a = b = c$ 时成立.

这时由 $abc = 1$，知

$$a = b = c = 1,\quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} \neq \frac{1}{4},$$

所以只能有 $t > s$.

故选(C).

第3节　圆与四边形、多边形

20·78　设 $ABCD$ 为圆内接四边形，现在给出四个关系式

(1) $\sin A = \sin C$;　　(2) $\sin A + \sin C = 0$;

(3) $\cos B + \cos D = 0$;　　(4) $\cos B = \cos D$.

其中总能成立的关系式的个数是

(A) 一个.　(B) 两个.　(C) 三个.　(D) 四个.

（中国初中数学联赛，1985年）

[解]　因 $ABCD$ 为圆内接四边形，故 $\angle C = 180° - \angle A$，且 $\angle A$，$\angle C$ 都不能为0及180°，所以(1)式恒成立；(2)式恒不成立.

同样由 $\angle D = 180° - \angle B$，(3)式恒成立；(4)式只有 $\angle B = \angle D = 90°$ 时成立.

综上关系式只有两个恒成立.

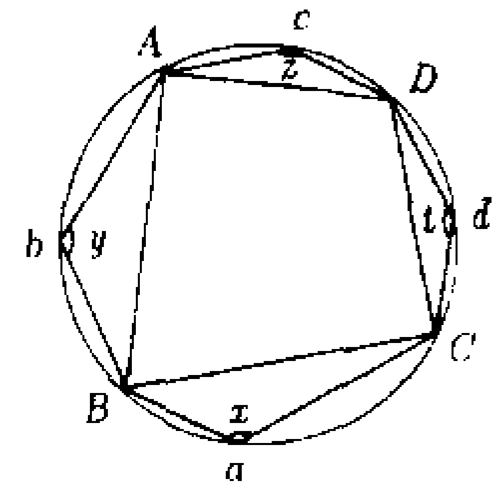
故选(B).

20·79　四边形外接一圆，外接圆为四边形的顶点截成四段弧，其对应的以四边形的边为底的弓形角之和为

(A) 180°.　(B) 540°.　(C) 360°.　(D) 450°.　(E) 1080°.

（此等弓形角指其边不再与四边形的边相交者）

（第5届美国高中数学考试，1954年）



[解]　如图，设圆被四边形所分成的四段弧所含度数分别为 a, b, c, d，且设四个弓形角度数分别为 x, y, z, t，弓形角和为 s

由 $\angle x \overset{m}{=} \frac{1}{2}(b + c + d)$，类似地可有四角和

$$s \overset{\text{m}}{=} \frac{1}{2}[(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a) + (d+a+b)]$$

$$= \frac{3}{2}(a+b+c+d),$$

故 $s = 360° \cdot \frac{3}{2} = 540°$.

故选(B).

20·80　在圆 O 中,G 是直径 AB 上的动点,作 $AA' \perp AB$ 且 $AA' = AG$,作 $BB' \perp AB$ 且 $BB' = BG$,AA' 和 BB' 在 AB 的同侧,O' 是 $A'B'$ 的中点,当 G 从 A 移到 B 时,则 O'

(A) 在平分于 AB 的直线上移动.

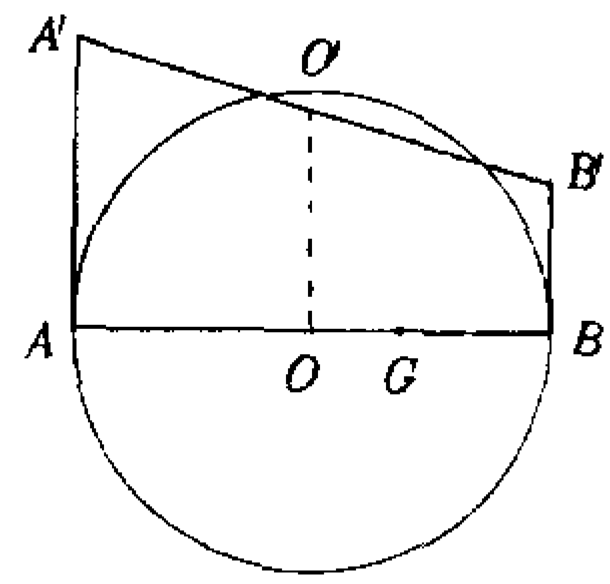
(B) 保持固定.

(C) 在垂直于 AB 的直线上移动.

(D) 在与已知圆相交的小圆上移动.

(E) 沿一路径走,既非圆也非直线.

(第 8 届美国高中数学考试,1957 年)



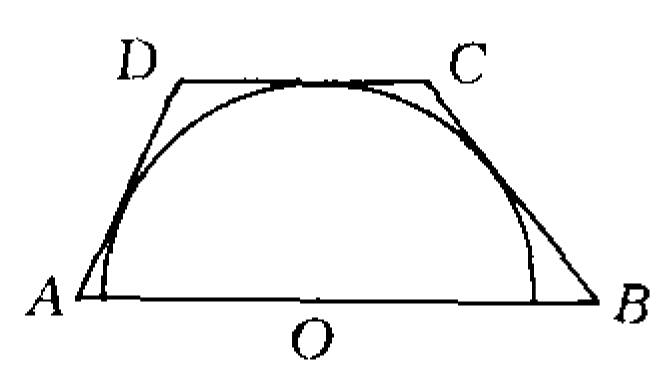
[解]　连 OO',由梯形中位线性质有

$$OO' = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{1}{2}(AG + GB) = \frac{1}{2}AB,$$

且 $OO' \mathbin{/\!/} AA'$.

∴ $OO' \perp AB$,故 O' 不随 G 点变动.

故选(B).

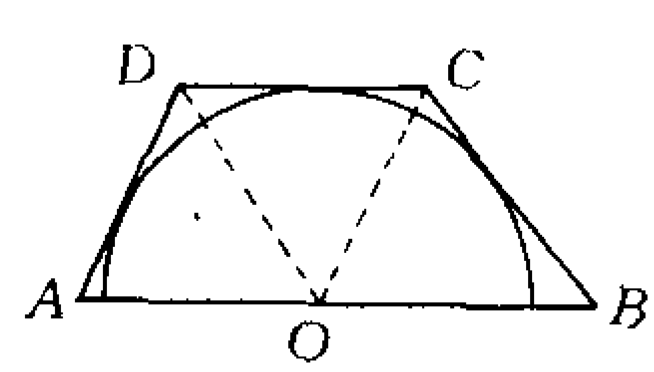


20·81　如图,半圆 O 的直径在梯形 $ABCD$ 的底边 AB 上,且与其余三边 BC,CD,DA 相切,若 $BC = 2$,$DA = 3$,则 AB 的长

(A) 等于 4.　　　(B) 等于 5.

(C) 等于 6.　　　(D) 不能确定.

(中国初中数学联赛,1994 年)



[解]　连结 OC,OD.设半圆 O 的半径为 r,则在 $\triangle AOD$ 中,边 AO 与边 DA 上的高都为 r,

故　$AO = DA$.

同理　$BO = BC$.

故　$AB = BC + DA = 5$.

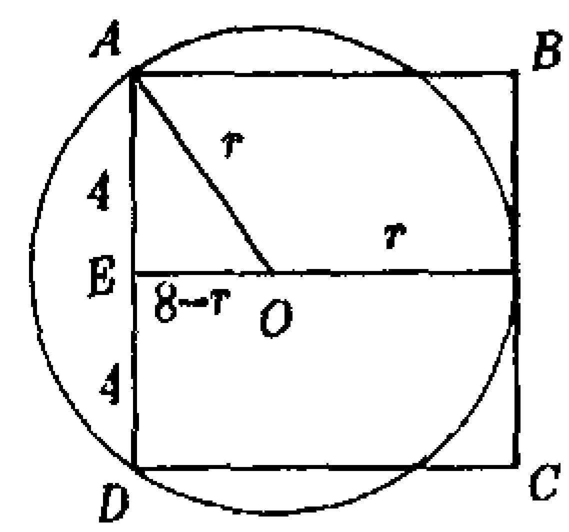
故选(B).

20·82　在边长为8的正方形$ABCD$中,过A,D作一圆切于BC,则此圆的半径为

(A) 4.　(B) $4\sqrt{2}$.　(C) 5.　(D) $5\sqrt{2}$.　(E) 6.

(第13届美国高中数学考试,1962年)

[解]　所设见图.



由勾股定理,在$\mathrm{Rt}\triangle AEO$中有

$$r^2 = 4^2 + (8 - r)^2,$$

得　$$r = 5.$$

故选(C).

20·83　圆内接四边形的边长依次为25,39,52和60.这个圆的直径长度为

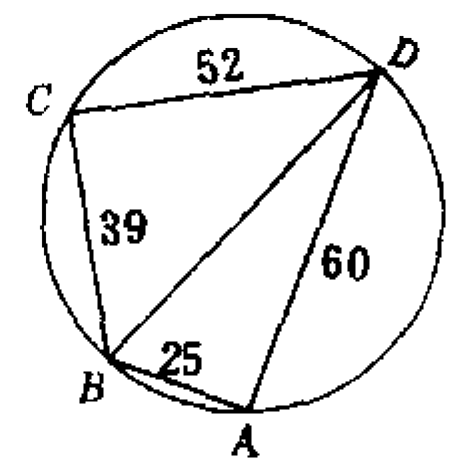
(A) 62.　(B) 63.　(C) 65.　(D) 66.　(E) 69.

(第23届美国高中数学考试,1972年)

[解1]　设圆内接四边形为$ABCD$,在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中用余弦定理,这样

$$\overline{BD}^2 = 39^2 + 52^2 - 2 \cdot 39 \cdot 52\cos C$$

$$\overline{BD}^2 = 25^2 + 60^2 - 2 \cdot 25 \cdot 60\cos A$$



因为$\angle C$与$\angle A$互补,则$-\cos A = \cos C$,代入上式再将两式相减,得

$$0 = 0 + (2 \cdot 39 \cdot 52 + 2 \cdot 25 \cdot 60)\cos A,$$

故　$\cos A = 0$.即　$\angle A$和它的补角$\angle C$都是直角.

则　$$BD = \sqrt{39^2 + 52^2} = 65.$$

故选(C).

[解2]　注意到　$AB = 25 = 5 \cdot 5$,　$AD = 60 = 12 \cdot 5$;

又　$BC = 39 = 3 \cdot 13$,　$CD = 52 = 4 \cdot 13$.

则　$AB^2 + AD^2 = 5^2(5^2 + 12^2) = 5^2 \cdot 13^2$,

且　$BC^2 + CD^2 = 13^2(3^2 + 4^2) = 5^2 \cdot 13^2$.

于是　$$AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2,$$

即　$\triangle ABD, \triangle BCD$ 皆为直角三角形，且以 BD 为公共斜边.

又　　$2R = BD = \sqrt{5^2 \cdot 13^2} = 65.$

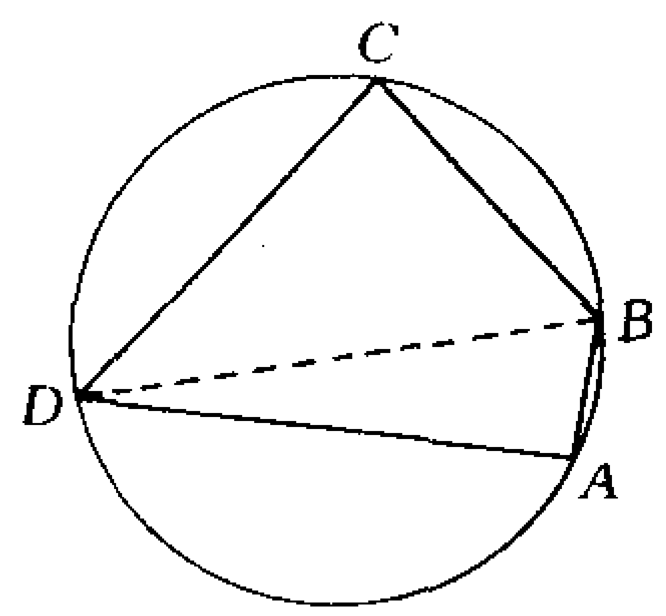
故选(C).

20·84　如果边长顺次为25,39,52与60的四边形内接于一圆，那么此圆的周长为

(A)62π.　　(B)63π.　　(C)64π.　　(D)65π.

（中国初中数学联赛，1995年）

[解]　设 $ABCD$ 为圆内接四边形，且 $AB = 25, BC = 39, CD = 52, DA = 60$. 由圆内接四边形性质. $\angle A = 180° - \angle C$.



连结 BD. 由余弦定理

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle A$$
$$= CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD\cos\angle C,$$

即　$$25^2 + 60^2 - 2 \cdot 25 \cdot 60 \cdot \cos\angle A$$
$$= 39^2 + 52^2 + 2 \cdot 39 \cdot 52 \cdot \cos\angle A.$$

解得　$$\cos\angle A = \frac{25^2 + 60^2 - 39^2 - 52^2}{2(25 \cdot 60 + 39 \cdot 52} = 0.$$

故　$\angle A = 90°$，　BD 是圆的直径.

$\therefore$　$BD = \sqrt{25^2 + 60^2} = \sqrt{4225} = 65$. 知圆的周长为 65π.

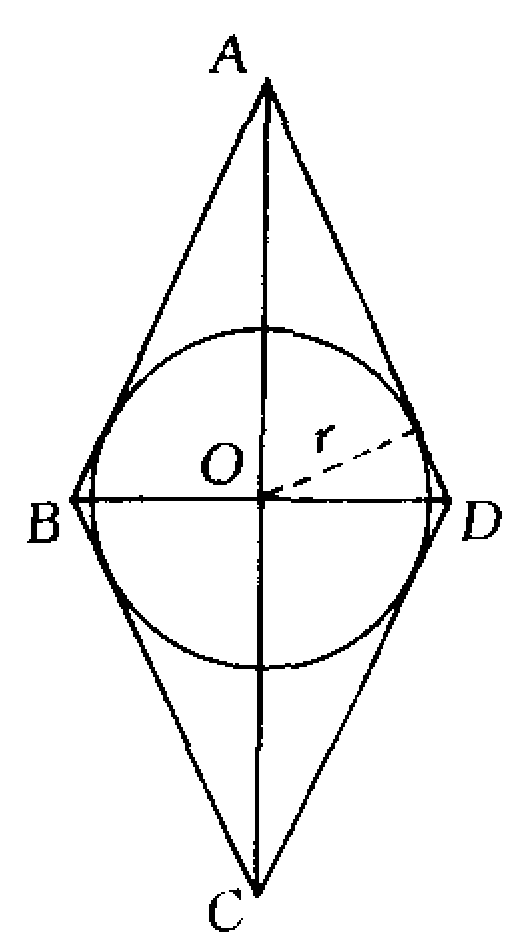
故选(D).

20·85　内切于对角线分别为10和24的菱形的圆半径为

(A)4.　　(B)$\frac{58}{13}$.　　(C)$\frac{60}{13}$.　　(D)5.　　(E)6.

（第50届美国高中数学考试，1999年）

[解]　如图，设菱形 $ABCD$ 对角线 $AC = 24$，且 $BD = 10$. 其内切圆 O 的半径为 r.



由　$AC \perp BD$　有

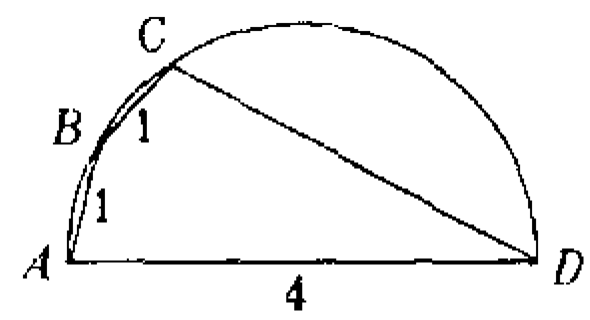
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 24 \times 10 = 120,$$

又 $$S_{ABCD} = 4S_{\triangle AOD} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{AO^2 + OD^2} \cdot r$$
$$= 2\sqrt{12^2 + 5^2}r = 26r.$$

即 $26r = 120$，解得 $r = \frac{60}{13}$.

故选(C).

20·86 四边形 $ABCD$ 内接于一个以长度为 4 的 AD 边作为直径的圆中. 若 AB 和 BC 的长度各为 1,那么 CD 边长为



(A) $\frac{7}{2}$.　　(B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.　　(C) $\sqrt{11}$.

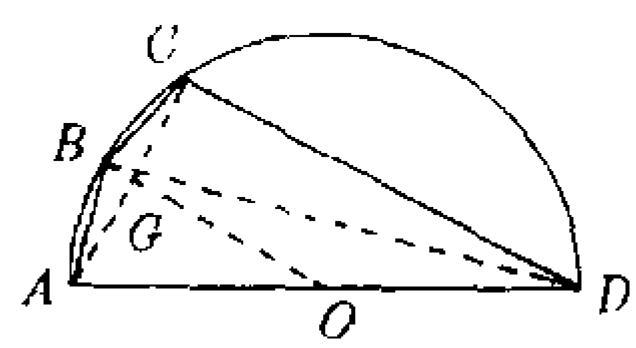
(D) $\sqrt{13}$.　　(E) $2\sqrt{3}$.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解] 作半径 OB, OB 垂直平分弦 AC 于 G, 连 BD. 边 CD 平行于 GO 并为线段 GO 的两倍.

又由 $\text{Rt}\triangle BGA \backsim \text{Rt}\triangle ABD$， 则有 $\frac{BG}{AB} = \frac{AB}{AD}$.

即 $\frac{BG}{1} = \frac{1}{AD} = \frac{1}{4}$.

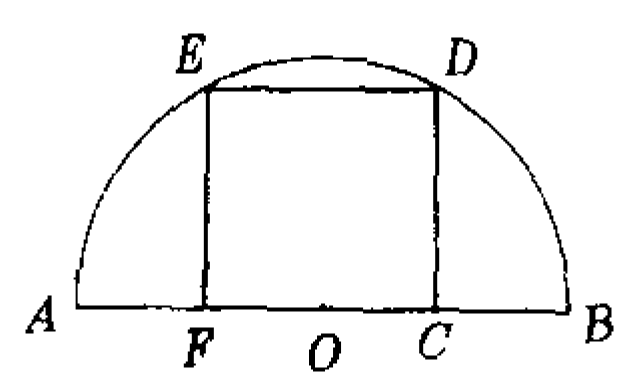


$\therefore \quad GO = BO - BG = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$,

且 $CD = 2GO = \frac{7}{2}$.

故选(A).

20·87 如图, 在以 AB 为直径的半圆中,有一内接正方形 $CDEF$,其边长为 1,若 $AC = a$, $BC = b$. 则下列关系中不正确的是



(A) $a - b = 1$.　　(B) $ab = 1$.

(C) $a + b = \sqrt{5}$.　　(D) $a^2 + b^2 = 5$.

(中国黑龙江省齐齐哈尔市初中数学竞赛,1992 年)

[解] 由对称性有 $AF = CB$,则 $a - b = 1$ 成立,即(A)真.

又由相交弦定理知 $ab = CD^2 = 1^2 = 1$,即(B)真.

将 $b = \frac{1}{a}$ 代入(A)式有

$$a - \frac{1}{a} = 1,$$

即

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

解得 $$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\quad(舍其负值).$$

则 $$a+b=a+(a-1)=2a-1=\sqrt{5},$$

知(C)真.

综上知(A),(B),(C)真.

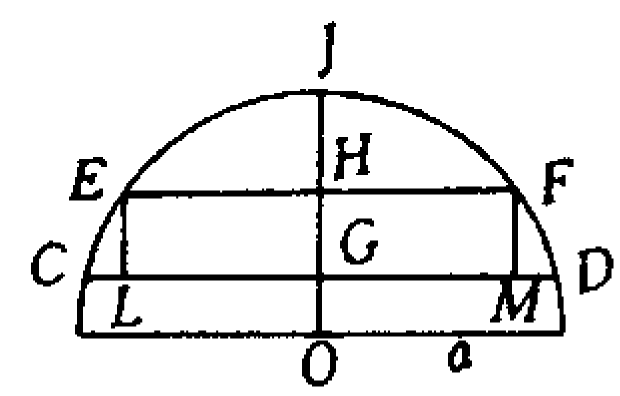
故选(D).

20·88 如图,圆心为O,半径为a英寸.弦EF平行于弦CD,O,G,H,J在一直线上,G是CD的中点,设梯形$CDFE$的面积为K平方英寸,矩形$ELMF$的面积是R平方英寸,现在向上移动EF,CD,移动时保持$JH=HG$,则当OG趋近于a时,比值$K:R$可任意接近

(A) 0. (B) 1.

(C) $\sqrt{2}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$.

(E) $\frac{1}{\sqrt{2}}+1$.



(第19届美国高中数学考试,1968年)

[**解**] 由梯形和矩形面积公式有

$$\frac{K}{R}=\frac{\frac{1}{2}HG(EF+CD)}{HG\cdot EF}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{CD}{EF}\right).$$

又在$\mathrm{Rt}\triangle OGD$,$\mathrm{Rt}\triangle OHF$中,由勾股定理有

$$\frac{CD}{EF}=\frac{2GD}{2HF}=\frac{GD}{HF}=\frac{\sqrt{OD^2-OG^2}}{\sqrt{OF^2-OH^2}}=\frac{\sqrt{a^2-OG^2}}{\sqrt{a^2-OH^2}}.$$

设$JH=z$, 则$JG=2z$, 且$OH=a-z$, $OG=a-2z$.

则

$$\frac{CD}{EF}=\frac{\sqrt{a^2-(a-2z)^2}}{\sqrt{a^2-(a-z)^2}}=\frac{\sqrt{4az-4z^2}}{\sqrt{2az-z^2}}=\frac{\sqrt{4a-4z}}{\sqrt{2a-z}}.$$

当 $OG\to a$时, $z\to 0$, 故 $\frac{CD}{EF}\to\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{2a}}=\sqrt{2}$.

因此,当$OG\to a$时, $\frac{K}{R}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{CD}{EF}\right)\to\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$.

故选(D).

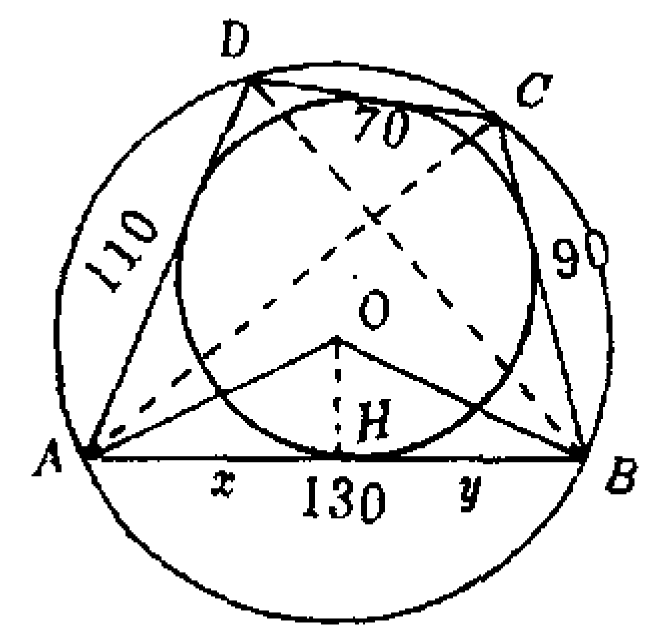
20·89 四边形的四条边长依次为70,90,130,110.它内接于一

个圆并有一个内切圆,内切圆的切点分长为 130 的边长为 x 和 y 两部分,则 $|x-y|$ 的值为

(A) 12.　(B) 13.　(C) 14.　(D) 15.　(E) 16.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解 1] 由题设 $ABCD$ 内接于圆,故



$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=\pi.$

这样,由余弦定理有

$$110^2+130^2-2\cdot110\cdot130\cdot\cos A$$
$$=BD^2=70^2+90^2+2\cdot70\cdot90\cdot\cos A,$$

及
$$90^2+130^2-2\cdot90\cdot130\cdot\cos B$$
$$=AC^2=70^2+110^2+2\cdot70\cdot110\cdot\cos B,$$

得
$$\cos A=\frac{40}{103},\quad \cos B=\frac{20}{97}.$$

又 $ABCD$ 有内切圆,其圆心 O 为 $\angle A,\angle B$ 平分线交点,若圆 O 切 AB 于 H,则 $OH\perp AB$.

于是,若设 $AH=x,\quad HB=y$, 则

$$x:y=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}:\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{1+\cos A}{\sin A}:\frac{1+\cos B}{\sin B},$$

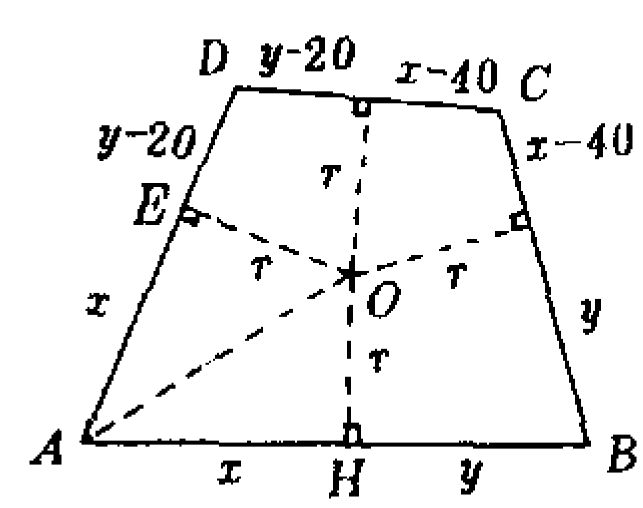
而
$$\frac{1+\cos A}{\sin A}:\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{1+\cos A}{\sqrt{1-\cos^2A}}:\frac{1+\cos B}{\sqrt{1-\cos^2B}}$$
$$=143:117,$$

有
$$x:y=143:117,$$

从而
$$|x-y|=130\cdot\frac{143-117}{143+117}=13.$$

故选(B).

[解 2] 设四边形内切圆心为 O,半径为 r.在四边形 $OHAE$ 中(如图),



$$S_{OHAE}=\frac{1}{2}(x^2+r^2)\sin A=xr,$$

有
$$\sin A=\frac{2xr}{x^2+r^2}.$$

同理
$$\sin C=\frac{2(x-40)r}{(x-40)^2+r^2},$$

又 $\sin A=\sin C$,

即 $\dfrac{2xr}{x^2+r^2}=\dfrac{2(x-40)r}{(x-40)^2+r^2}$,

或 $$r^2=x(x-40),\qquad ①$$

同理 $\cos B=\dfrac{2yr}{y^2+r^2}$, $\cos D=\dfrac{2(y-20)r}{(y-20)^2+r^2}$,

有 $$r^2=y(y-20).\qquad ②$$

由①,②有 $x(x-40)=y(y-20)$, 有

$$\frac{x}{y}=\frac{y-20}{x-40}=\frac{110-x}{90-y}=\frac{x+(110-x)}{y+(90-y)}=\frac{11}{9}.$$

又 $\begin{cases}x+y=130,\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{9},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=71.5,\\ y=58.5,\end{cases}$

∴ $|x-y|=13$.

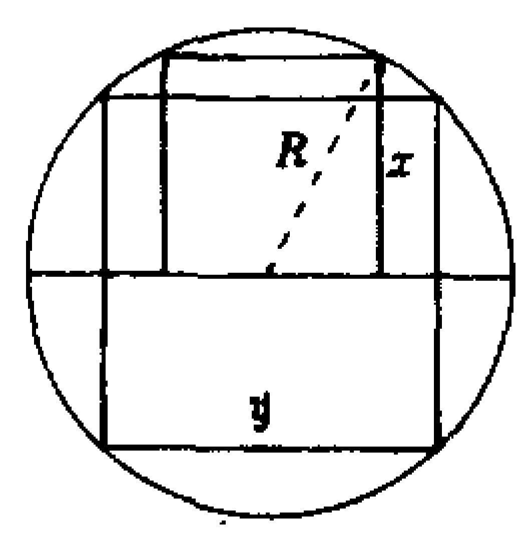
故选(B).

20·90 内接于半圆的正方形面积与内接于一整圆的面积的比为

(A) 1 : 2. (B) 2 : 3. (C) 2 : 5. (D) 3 : 4. (E) 3 : 5.

(第2届美国高中数学考试,1951年)

[解] 设内接于半圆的正方形边长为 x,内接于圆的正方形边长为 y,圆半径为 R.



由 $x^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=R^2$, 得 $x^2=\dfrac{4}{5}R^2$.

又 $y=\sqrt{2}R$, 有 $y^2=2R^2$.

故 $x^2:y^2=\dfrac{4}{5}R^2:2R^2=2:5$.

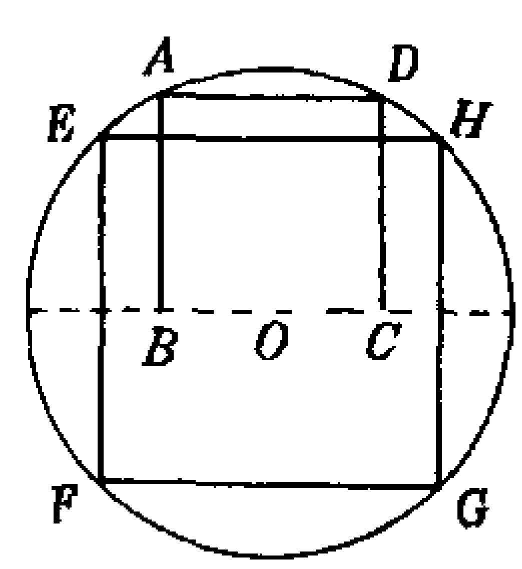
故选(C).

20·91 面积为40的正方形内接于一半圆,若以另一正方形内接于同一半径的全圆时,则此正方形的面积为

(A) 80. (B) 100. (C) 120.

(D) 160. (E) 200.

(第10届美国高中数学考试,1959年)



[解] 设正方形 $ABCD$ 边长为 a,则 $\odot O$ 半径

$$R=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

又正方形 $EFGH$ 对角线长为 $2R$，则

$$S_{\square EFGH}=\left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5a^2}{2}=100.$$

故选(B).

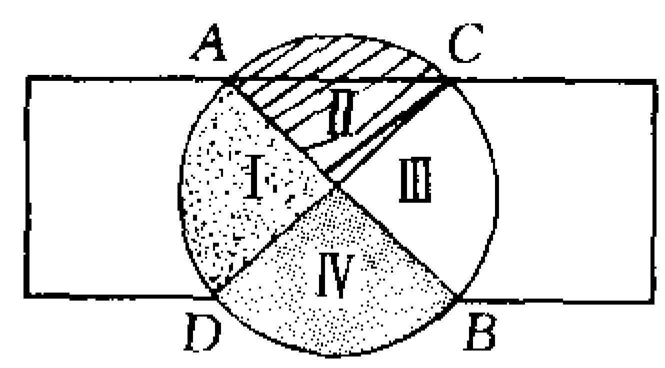
20·92　一个 $8\times 2\sqrt{2}$ 的矩形与一个半径为2的圆有共同的中心，那么二者重合部分的面积为

(A)2π.　　(B)$2\pi+2$.　　(C)$4\pi-4$.

(D)$2\pi+4$.　　(E)$4\pi-2$.

(第 45 届美国高中数学考试，1994 年)

[解]　圆与矩形重叠的四部分如图所示，因为 $2^2+2^2=(2\sqrt{2})^2$，



知两弦 $AB\perp CD$，从而

$$S_{\text{I}}+S_{\text{III}}=\frac{1}{2}S_{\odot O}=2\pi.$$

又　$S_{\text{II}}=S_{\text{IV}}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，

$\therefore$　$S_{\text{I}}+S_{\text{II}}+S_{\text{III}}+S_{\text{IV}}=2\pi+4.$

故选(D).

20·93　一圆内切于正三角形，一正方形内接于此圆，则此三角形与正方形的面积之比为

(A) $\sqrt{3}:1$.　　(B) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$.　　(C) $3\sqrt{3}:2$

(D) $3:\sqrt{2}$.　　(E) $3:2\sqrt{2}$.

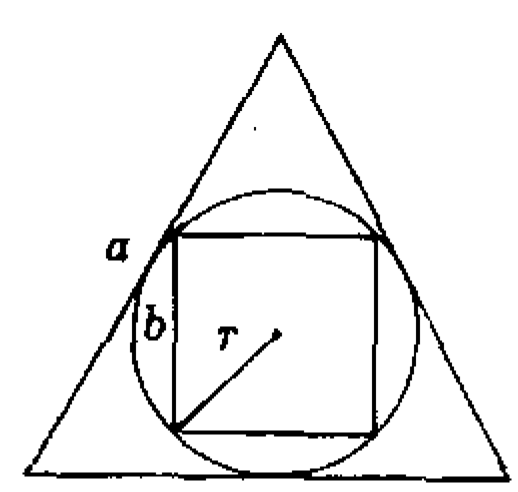
(第 14 届美国高中数学考试，1963 年)

[解]　设圆半径为 r，且正三角形边长为 a，正方形边长为 b. 则

$a=2\sqrt{3}r$，　$b=\sqrt{2}r$.

$$S_{\triangle}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\sqrt{3}r^2,$$

$$S_{\square}=b^2=2r^2.$$



因此　$S_{\triangle}:S_{\square}=3\sqrt{3}:2$.

故选(C).

20·94　一圆与一正方形有相等的周长，则

(A) 彼此的面积相等.　　(B) 圆的面积较大.

(C) 正方形的面积较大.　　(D) 圆的面积为正方形面积的 π 倍.

(E) 其他.

（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

[解]　设周长为 p 的圆半径为 r，正方形边长为 a.

故　$r=\dfrac{p}{2\pi},\ a=\dfrac{p}{4}.$

$$S_{\odot}=\pi r^2=\frac{p^2}{4\pi},\qquad S_{\square}=\left(\frac{p}{4}\right)^2=\frac{p^2}{16},$$

显然有　$4\pi<16$，　则　$S_{\odot}>S_{\square}$.

故选(B).

20·95　如图，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，BC 与以 AD 为直径的圆 O 相切，在下列哪种情况下 $ABCD$ 的面积是整数

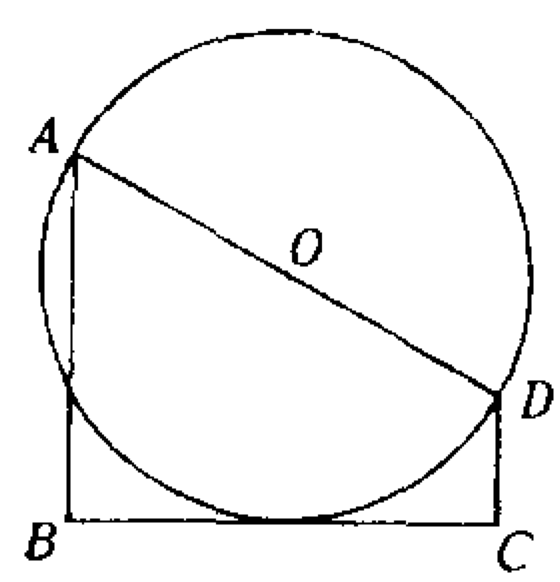
(A) $AB=3,\ CD=1$.

(B) $AB=5,\ CD=2$.

(C) $AB=7,\ CD=3$.

(D) $AB=9,\ CD=4$.

(E) $AB=11,\ CD=5$.



（第 39 届美国高中数学考试，1988 年）

[解]　若 E 为 BC 与 $\odot O$ 的切点，连 OE，且作 $DF\perp AB$.

设　$AB=a,\quad CD=b$.

则　$AD=2OE=AB+CD=a+b$.

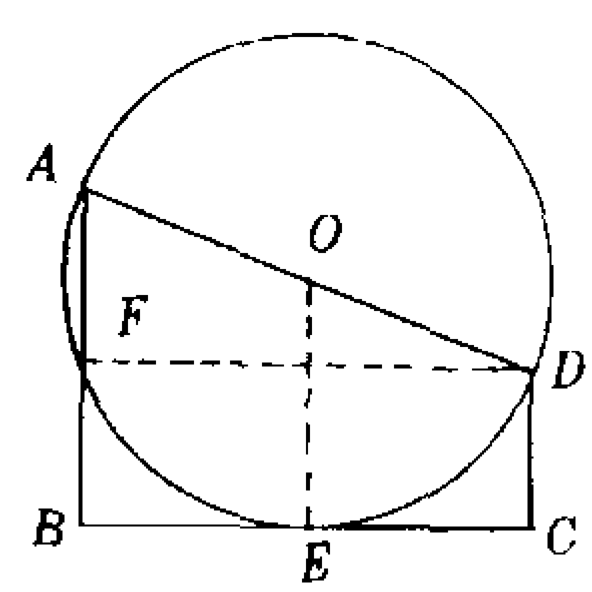
又　$BC^2=DF^2=AD^2-AF^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，

即　$BC=2\sqrt{ab}$.

则　$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AB+CD)\cdot BC$

$=\dfrac{1}{2}(a+b)\cdot 2\sqrt{ab}$

$=(a+b)\sqrt{ab}$.



显然，题设数组中仅当 $AB=9,CD=4$ 时 $\sqrt{ab}$ 是整数.

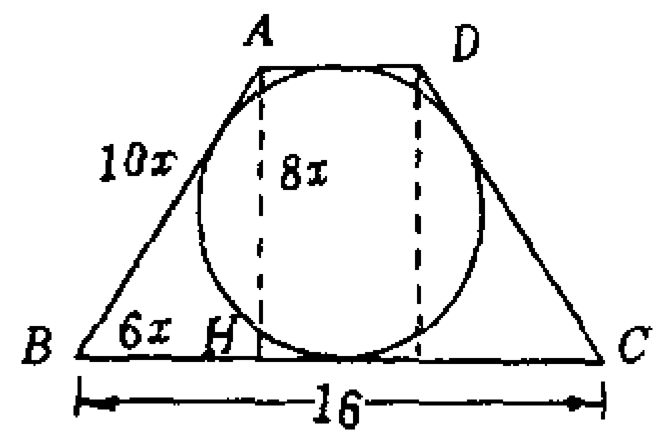
故选(D).

20·96　等腰梯形外切于一个圆，较长的底为16，一个底角为 arcsin0.8，则梯形的面积为

(A) 72.　(B) 75.　(C) 80.　(D) 90.　(E) 不惟一确定.

（第39届美国高中数学考试，1988年）

[解]　设梯形为 $ABCD$，又 $\angle B=\arcsin 0.8$，无妨设 $AH=8x$，$AB=10x$，则



$$BH=6x.\text{(如右图)}$$

又梯形外切于圆，则

$$AD+BC=AB+CD,$$

于是　$(16-12x)+16=10x+10x$，

得　$x=1$，

∴　$AH=8$，$AD=16-2\cdot 6=4$，则

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot(4+16)\cdot 8=80.$$

故选(C).

20·97　$ABCD$ 是等腰梯形，底 $AB=92$，$CD=19$，假定 $AD=BC=x$，圆心在 AB 上的圆与 AD，BC 相切，如果 m 是 x 的最小值，则 m^2 等于

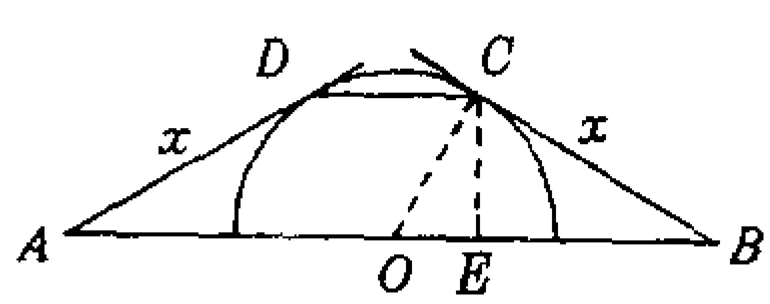
(A) 1369.　(B) 1679.　(C) 1748.

(D) 2109.　(E) 8825.

（第43届美国高中数学考试，1992年）

[解]　移动 CD，显然可见当 CD 过圆与腰 AD，BC 的切点时，AD，BC 最小.

如图，设此时圆心为 O，连 OC，且作 $CE\perp AB$.



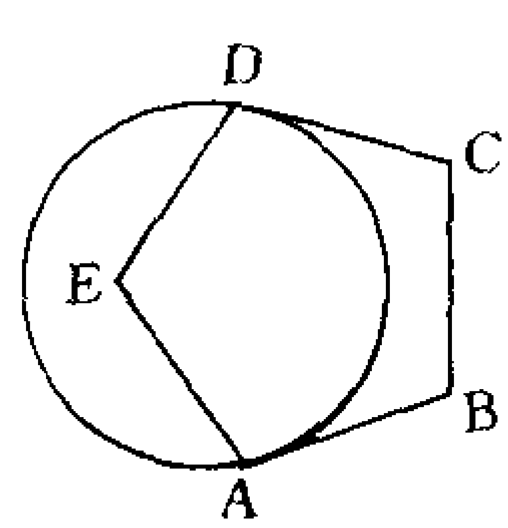
$$\because\quad BE=\frac{92-19}{2}=\frac{73}{2},$$

$$OB=\frac{92}{2}=46.$$

在 Rt△OCB 中，$CB^2=x^2=m^2$

$$=OB\cdot EB=1679.$$

故选(B).



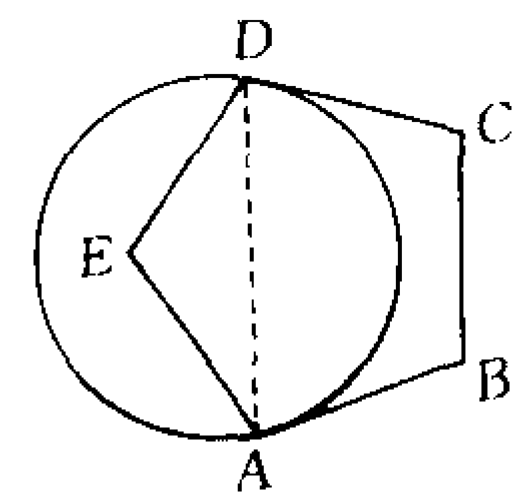
20·98　已知一圆与正五边形 $ABCDE$ 的边 DC 相切于 D，与边 AB 相切于 A，则 AD 间劣弧的度数是

(A)72.　　(B)108.　　(C)120.

(D)135.　　(E)144.

（第 46 届美国高中数学考试，1995 年）

[解]　连结 AD. 由设 $ABCDE$ 是正五边形，知 $\angle E=108^\circ$.



又 $\triangle EAD$ 为等腰三角形，知

$\angle EAD=(180^\circ-108^\circ)\div 2=36^\circ$,

$\therefore\quad \angle DAB=108^\circ-36^\circ=72^\circ$,

系弦切角，有 $\overset{\frown}{AD}\overset{m}{=}144^\circ$.

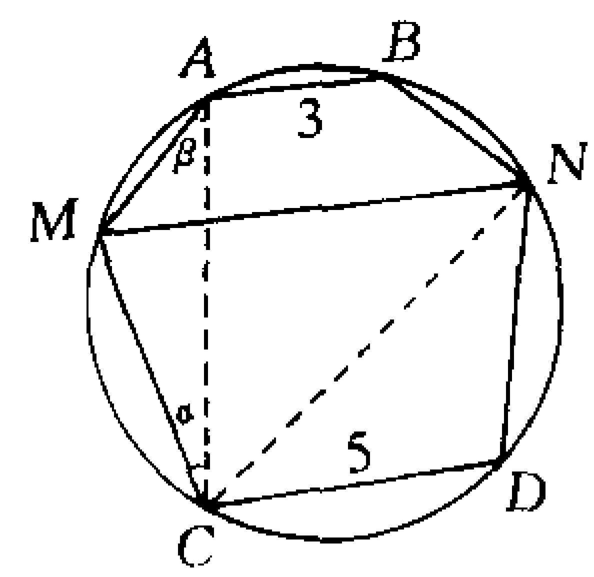
故选(E)

20·99　圆内接六边形的相邻三边长均为 3，另三边长皆为 5. 圆的弦将它分成两个四边形：一个四边形的三边长皆为 3，另一个四边形的三边长皆为 5，若该弦长为 $\frac{m}{n}$，其中 m,n 为互素的正整数，则 $m+n$ 等于

(A)309.　　(B)349.　　(C)369.　　(D)389.　　(E)409.

（第 47 届美国高中数学考试，1996 年）

[解]　设长为 3、5 的弦所对应的弧长分别为 2α 和 2β，连结 AC，



知　$\angle AMC=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 360^\circ=120^\circ$

在 $\triangle AMC$ 中，由余弦定理可求得 $AC=7$，再由正弦定理

$$\frac{3}{\sin\alpha}=\frac{5}{\sin\beta}=\frac{7}{\sin 120^\circ}=\frac{7}{\sqrt{3}/2},$$

得 $\sin\alpha=\frac{3}{14}\sqrt{3}$，$\sin\beta=\frac{5}{14}\sqrt{3}$，且 $\sin\alpha:\sin\beta=3:5$.

连结 CN，在 $\triangle CMN$ 中，$\frac{MN}{\sin\angle MCN}=\frac{MC}{\sin\angle MNC}$.

则　$MN=\frac{5\sin 3\alpha}{\sin\beta}=\frac{5(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)}{\sin\beta}$

$$=5\left(3\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-4\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\sin^2\alpha\right)$$

$$= 9 - 12\sin^2\alpha = 9 - 12\left(\frac{3}{14}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{360}{49}.$$

即 $\quad m + n = 360 + 49 = 409.$

故选(E).

第4节　圆与圆

20·100　如图 PA 切于半圆 SAR；PB 切于半圆 RBT；SRT 为一直线，各弧如图所示，$\angle APB$ 的度数为

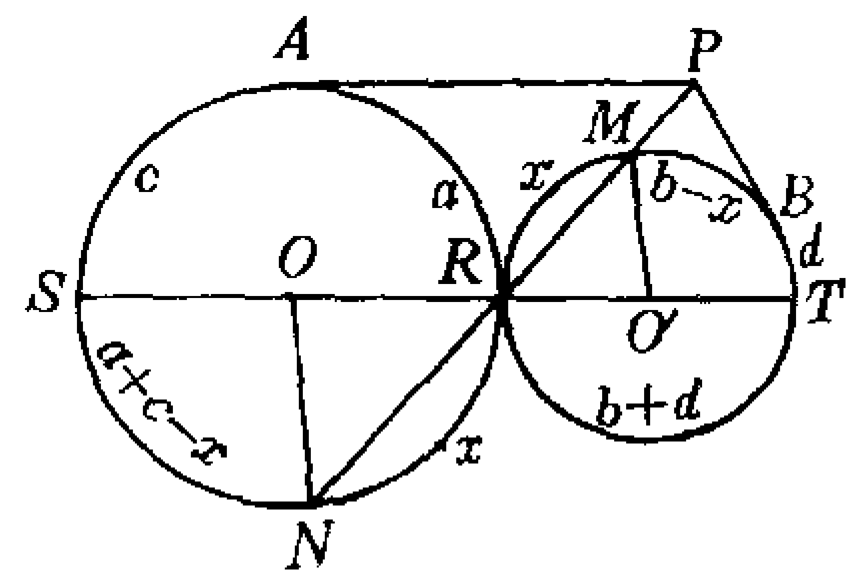
(A) $\frac{1}{2}(a-b)$.

(B) $\frac{1}{2}(a+b)$.

(C) $(c-a)-(d-b)$.

(D) $a-b$.

(E) $a+b$.



（第6届美国高中数学考试，1955年）

[解]　如图可有

$\angle APB = \angle APN + \angle BPR$

$$\overset{\text{m}}{=} \frac{1}{2}[(a+c-x+c)-a] + \frac{1}{2}[(b+d+d)-(b-x)]$$

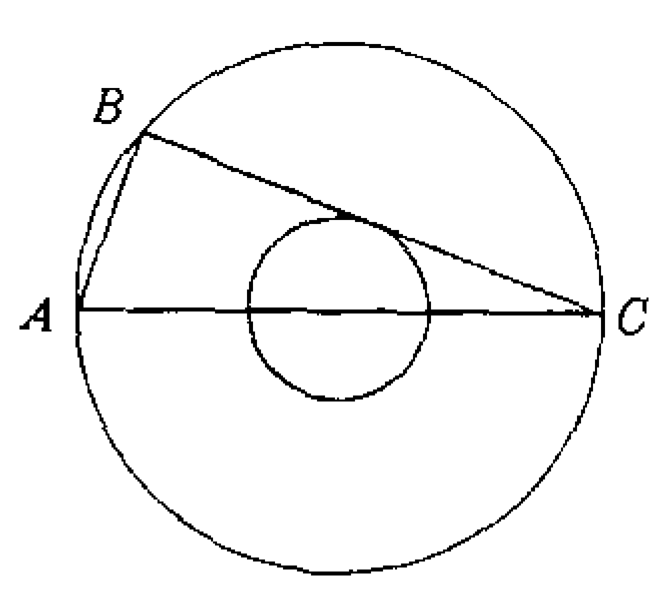
$$= \frac{1}{2}(2c-x) + \frac{1}{2}(2d+x) = c+d,$$

诸答数中无此项，应将 $c+d$ 视为 $\angle APB$ 周角的共轭角度数. 这样

$$\angle APB \overset{\text{m}}{=} 360-(c+d) = (180-c)+(180-d) = a+b.$$

故选(E).

20·101　如图，两个同心圆半径的比为 1 : 3. 如果 AC 是大圆的直径，BC 是与小圆相切的大圆的弦，$AB = 12$，则大圆的半径为



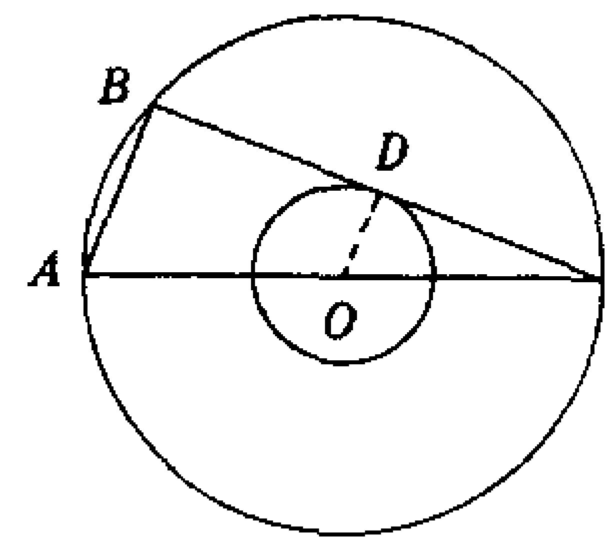
(A) 13.　　(B) 18.　　(C) 21.

(D) 24.　　(E) 26.

（第43届美国高中数学考试，1992年）

［解］ 设同心圆圆心为 O，且 BC 切小圆于 D，连 OD 即为小圆半径.

可证 $AB \parallel OD$，且 $\triangle CDO \backsim \triangle CBA$.



则 $\dfrac{OD}{AB} = \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{1}{2}$，即

$$OD = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

从而大圆半径为 $3 \cdot 6 = 18$.

故选 (B).

20·102 两同心圆面积之比为 $1:3$，若小圆的半径为 r，则两半径差的最佳近似值为

(A) $0.41r$. (B) 0.73. (C) 0.75.

(D) $0.73r$. (E) $0.75r$.

（第 6 届美国高中数学考试，1955 年）

［解］ 设两圆半径差为 d，由题设有 $\dfrac{\pi(r+d)^2}{\pi r^2} = \dfrac{3}{1}$，

即
$$\frac{r+d}{r} = \sqrt{3}.$$

求得 $d = 0.732r$.

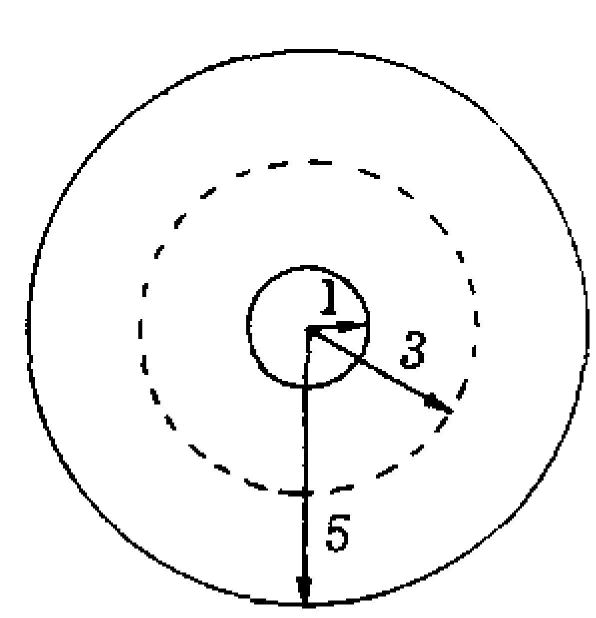
故选 (D).

20·103 将 5cm 宽的长纸条绕一直径为 2cm 的硬纸筒缠 600 圈成一直径为 10cm 的圆筒（假定纸条缠成 600 个同心圆筒，它们的直径从 2cm 均匀地变到 10cm）. 以米(m) 为单位计，纸条的长度是

(A) 36π. (B) 45π. (C) 60π. (D) 72π. (E) 90π.

（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）

［解］ 因纸条均匀地缠绕，其半径成等差数列变化（公差为纸的厚度 d），因纸很薄，因而每圈都近似地看成圆周（严格地讲并非如此）.



圆的周长为 $2\pi r$ 或 πD，因而每圈纸长也将以公差为 $2\pi d$ 变化，故可取其中值为平均长，这样

纸条长 $= 600 \cdot \pi \cdot 6 = 3600\pi(\text{cm}) = 36\pi(\text{m})$.

故选 (A).

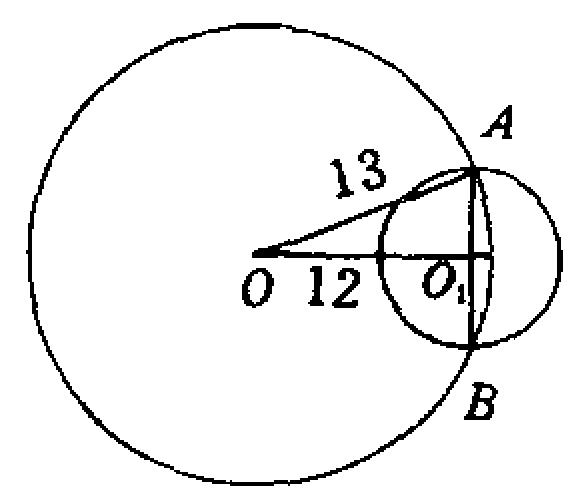
20·104　半径为 13 和半径为 5 的两个圆相交，圆心距为 12，则这两圆公共弦长为

(A) $3\sqrt{11}$.　　(B) $\frac{65}{6}$.　　(C) $4\sqrt{6}$.

(D) 10.　　(E) 以上结果都不对.

（中国天津市初中数学竞赛，1984 年）

［解］　如图，设两圆圆心分别为 O, O_1，两圆交点为 A, B.



连 O_1A，在 $\triangle OO_1A$ 中，$OA = 13$，$OO_1 = 12$，$OA = 5$.

则由 $5^2 + 12^2 = 13^2$，知 $\angle AO_1O$ 为直角.

即有 AB 弦过 O_1，且 $AB = 10$.

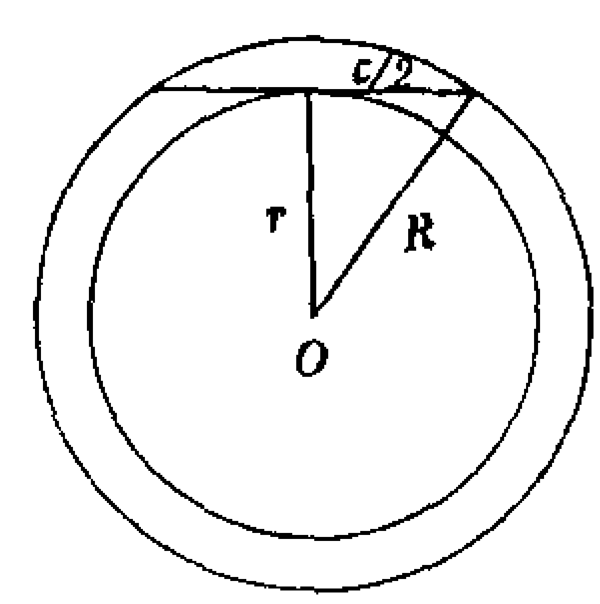
故选(D).

20·105　两个同心圆间的圆环的面积是 $12\frac{1}{2}\pi$ 平方英寸，切于小圆的大圆的弦长（以英寸为单位）是

(A) $\frac{5}{\sqrt{2}}$.　(B) 5.　(C) $5\sqrt{2}$.　(D) 10.　(E) $10\sqrt{2}$.

（第 20 届美国高中数学考试，1969 年）

［解］　设两圆半径分别为 R, r，又切小圆的大圆弦长为 c.



由设　$\frac{25}{2}\pi = \pi(R^2 - r^2)$,

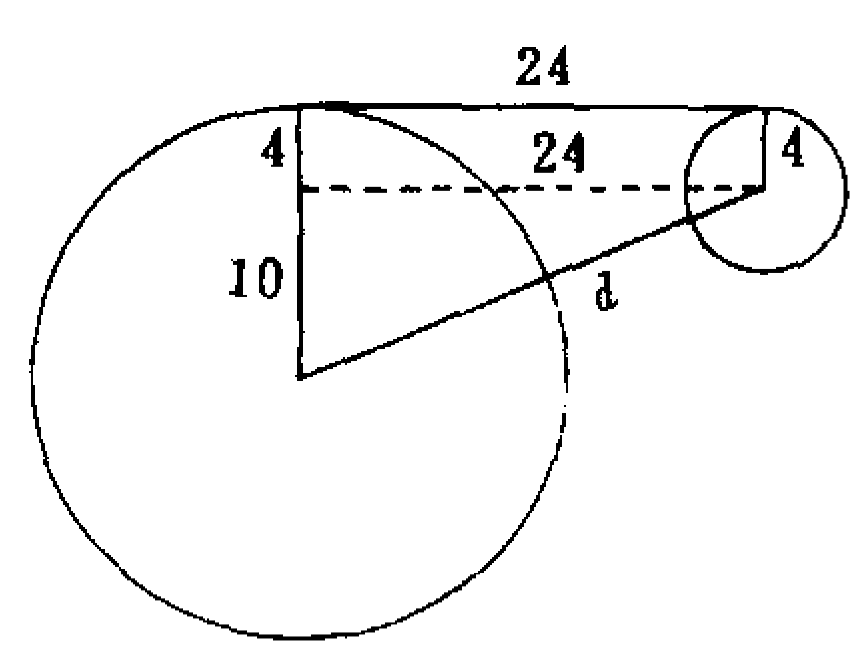
故　$R^2 - r^2 = \frac{25}{2}$,

又　$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 = \frac{25}{2}$,

则　$c^2 = 50$,　得　$c = 5\sqrt{2}$.

故选(C).

20·106　一条皮带安装在半径是 14 英寸和 4 英寸的两只皮带轮上（皮带紧绷且不相交），若皮带在两只轮子切点间的距离是 24 英寸，那么两轮圆心间的距离（英寸）是



(A) 24.　(B) $2\sqrt{119}$.　(C) 25.

(D) 26.　(E) $4\sqrt{35}$.

（第 22 届美国高中数学考试，1971 年）

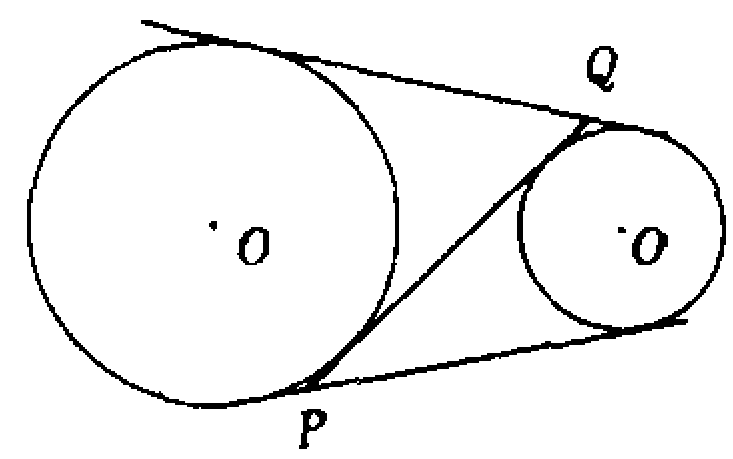
[**解**]　如图，由连心线，一条半径和一条平行于皮带的直线构成一个有 24 英寸和 10 英寸直角边的直角三角形.

则 d 满足 $d^2 = 24^2 + 10^2 = 26^2$，

即　$d = 26$ 英寸.

故选(D).

20·107　如图,圆 O' 的每一点都在圆 O 外.设 P 和 Q 是一条内公切线和两条外公切线的交点.那么 PQ 长是



(A) 内公切线长和外公切线长的平均数.

(B) 当且仅当圆 O 和圆 O' 有相等的半径时,等于一条外公切线的长.

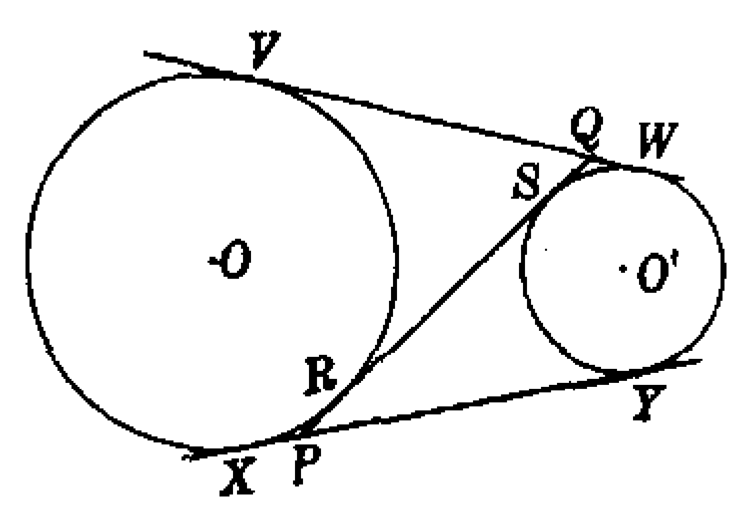
(C) 永远等于一条外公切线的长.

(D) 大于一条外公切线的长.

(E) 内公切线和外公切线长的几何平均.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[**解**]　如图,设 X,Y,V 和 W 是外公切线的切点,R 和 S 是内公切线的切点.由切线性质有



$$PR = PX,\qquad PS = PY,$$

$$QS = QW,\qquad QR = QV.$$

所以　$PR + PS + QS + QR$

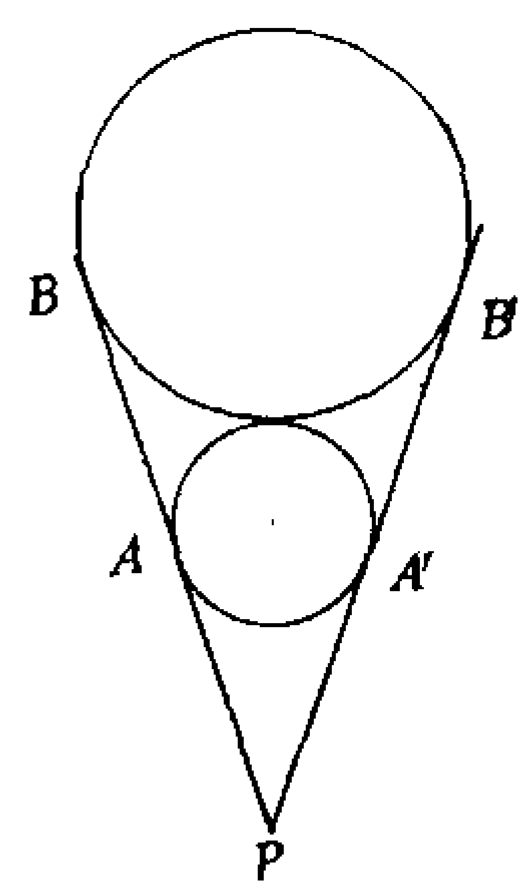
$= PX + PY + QW + QV.$

因为　$XY = VW$，且 $PQ = XY = VW$，

则　$2PQ = XY + VW.$

故选(C).

20·108　如图,两圆外切,直线 PAB 和 $PA'B'$ 是两圆的公切线,交小圆于 A 和 A',交大圆于 B 和 B',如果 $PA = AB = 4$,那么小圆的面积为



(A) 1.44π.　(B) 2π.　(C) 2.56π.

(D) $\sqrt{8}\pi$.　(E) 4π.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[**解**]　设大圆圆心为 O,半径为 R,且小圆圆心为 O',半径为 r.连 AO',BO 和 $PO'O$.由题设 $PA = AB$,则 O' 为 PO 中点,且 $R =$

$2r$.

又 $PB = PA + AB = 8$, $OB = 2r$,

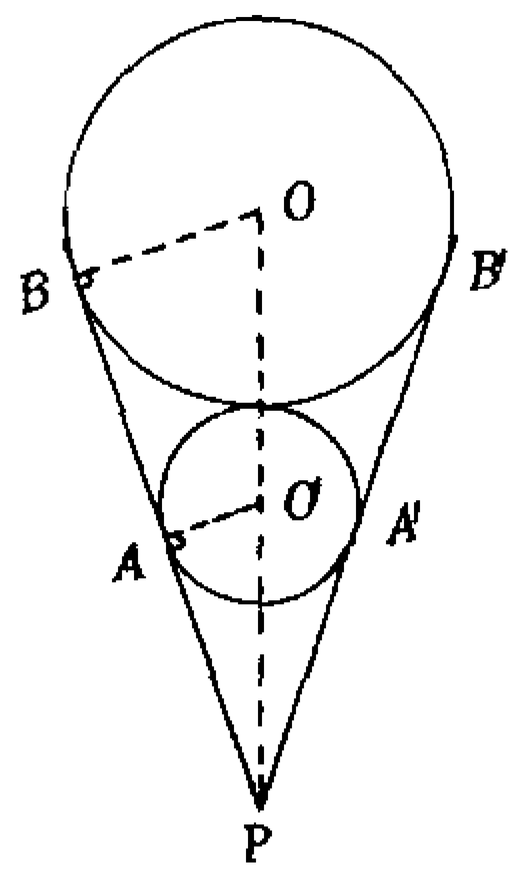
$PO = 2OO' = 2(R + r) = 2(2r + r) = 6r$,

则由勾股定理 $PO^2 = OB^2 + PB^2$,

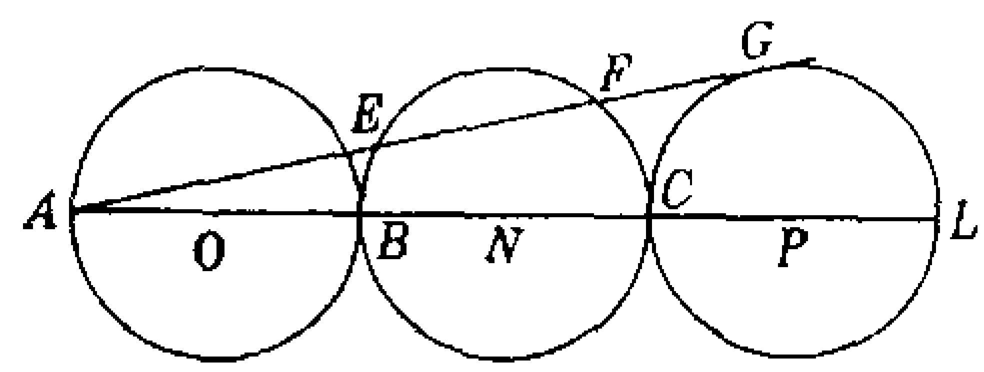
即 $64 + 4r^2 = 36r^2$, 得 $r^2 = 2$.

则小圆面积为 2π.

故选(B).



20·109 如图,点 B 和点 C 在线段 AD 上,且 AB, BC 和 CD 分别是圆 O, N, P 的直径. 圆 O, N, P 的半径均为15. 线段 AG 切圆 P 于 G. 如果 AG 交圆 N 于 E 和 F, 那么弦 EF 的长度为



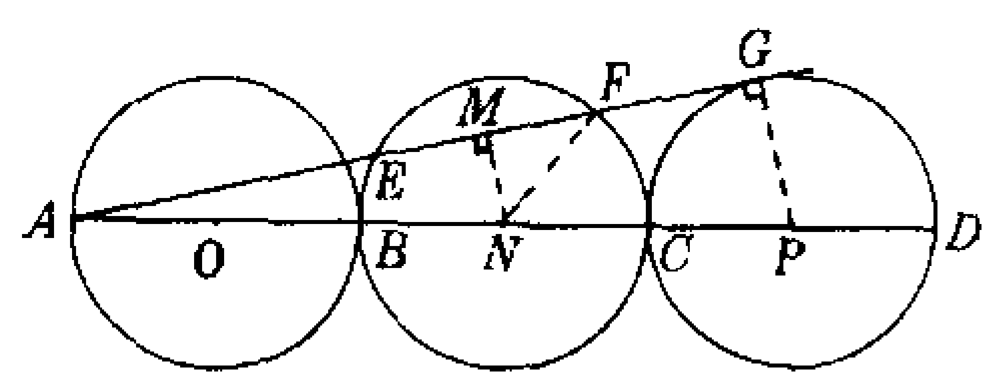
(A) 20. (B) $15\sqrt{2}$.

(C) 24. (D) 25.

(E) 不是以上这些值.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解] 连 PG, NF, 作 NM 垂直 AG 交 AG 于 M.



由 $\triangle AMN \backsim \triangle AGP$, 有

$$\frac{MN}{AN} = \frac{GP}{AP} \quad 或 \quad \frac{MN}{45} = \frac{15}{75},$$

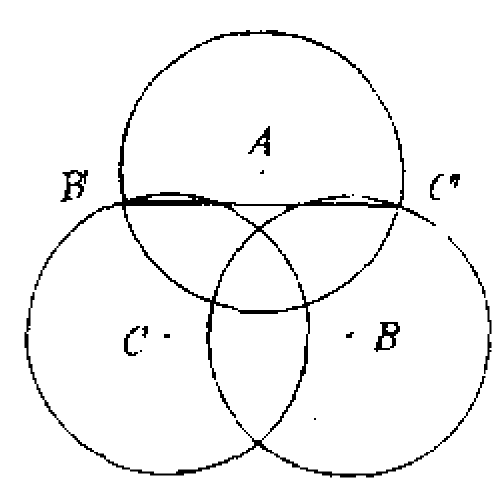
得 $MN = 9$.

在 $\triangle MNF$ 中,由勾股定理,有 $(MF)^2 = 15^2 - 9^2 = 144$.

即 $MF = 12$, $\therefore$ $EF = 24$.

故选(C).

20·110 以 A, B, C 为圆心的三个圆,半径均为 r, 其中 $1 < r < 2$. 每两个圆心间的距离都是2. 若 B' 是圆 A 和圆 C 的交点且在圆 B 外, C' 是圆 A 和圆 B 的交点且在圆 C 外, 那么 $B'C'$ 长等于



(A) $3r-2$.　　　　(B) r^2.

(C) $r+\sqrt{3}(r-1)$.　(D) $1+\sqrt{3(r^2-1)}$.

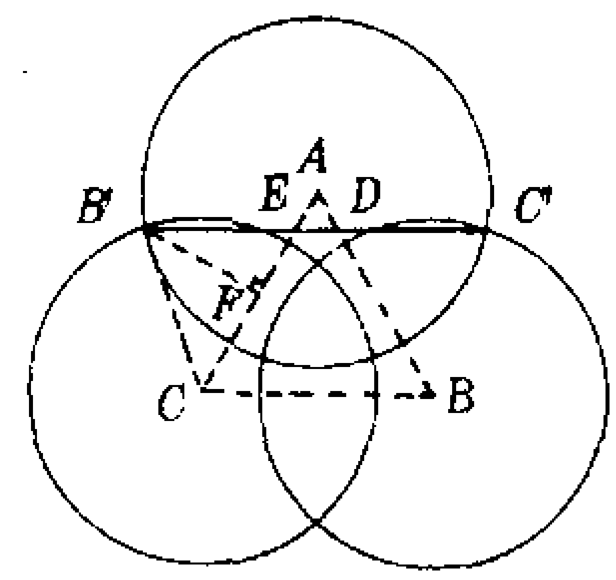
(E) 这些都不对.

（第 30 届美国高中数学考试,1979 年）

［**解**］ 设 D,E 分别是 $B'C'$ 和 AB,AC 的交点,并设 $B'F$ 是从 B' 到 AC 所作的垂线.

那么由对称性得 $ED \parallel CB$, 因而 $\angle AED=\angle B'EF=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle B'FC$ 中运用勾股定理得



$$B'F=\sqrt{r^2-1}.$$

而
$$\begin{aligned} B'C' &= B'E+ED+DC' \\ &= 2(B'E)+ED \\ &= 2(B'E)+EA, \end{aligned}$$

则
$$\begin{aligned} B'C' &= 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)B'F+(1-EF) \\ &= 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{r^2-1}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2-1}\right) \\ &= 1+\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2-1} \\ &= 1+\sqrt{3(r^2-1)}. \end{aligned}$$

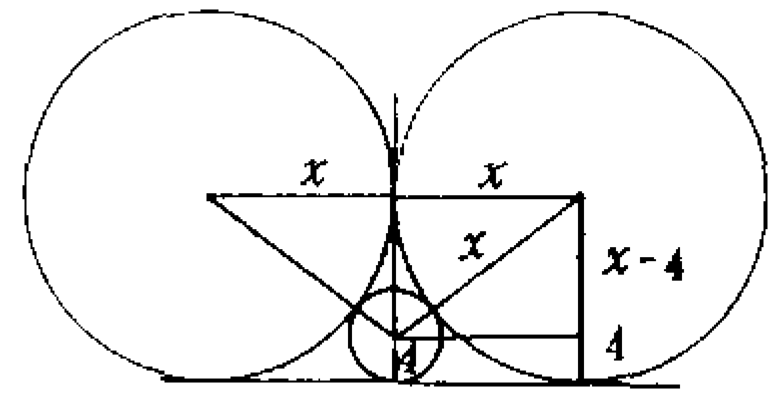
故选(D).

20·111　在一直线的同侧画三个圆:切于直线的一圆半径为 4,另两圆相等,且各切于直线及其它两圆,则两等圆的半径为

(A) 24.　　(B) 20.　　(C) 18.　　(D) 16.　　(E) 12.

（第 10 届美国高中数学考试,1959 年）

［**解**］ 设两等圆半径均为 x,如图



由勾股定理有

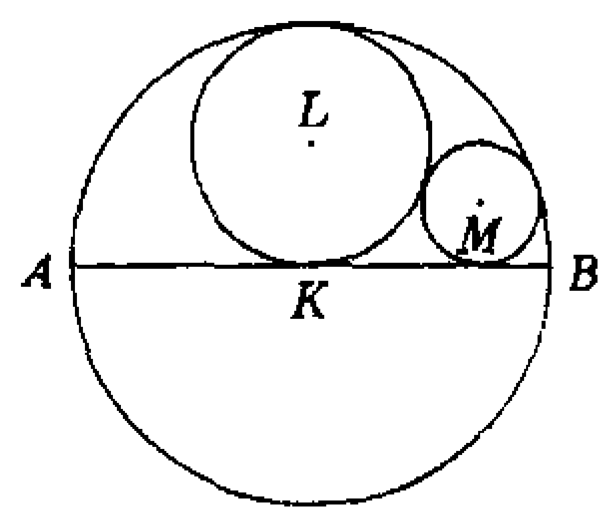
$$x^2+(x-4)^2=(x+4)^2.$$

解得　$x=16$ 或 0(舍之).

故选(D).

20·112　如图,圆 K 的直径是 AB,圆 L 与圆 K 相切并与直径 AB 相切于圆 K 的圆心;圆 M 与圆 K,圆 L 和直径 AB 都相切. 圆 K 的面积

与圆 M 的面积之比值是

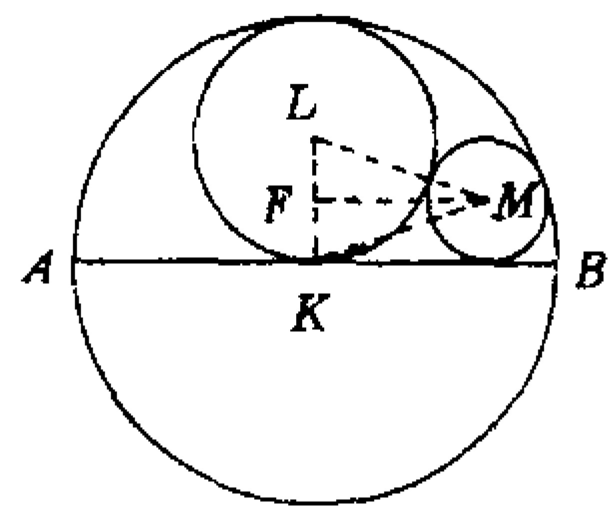


(A)12. (B)14. (C)16.

(D)18. (E) 不是整数.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 连 LK, LM, KM, 作 MF 平行于 AB 并与 KL 相交于 F. 设 $r, s(=r/2)$ 和 t 分别是圆心为 K, L 和 M 的圆的半径. 在 $\triangle FLM$ 和 $\triangle FKM$ 中由勾股定理有



$$MF^2=\left(\frac{r}{2}+t\right)^2-\left(\frac{r}{2}-t\right)^2,$$

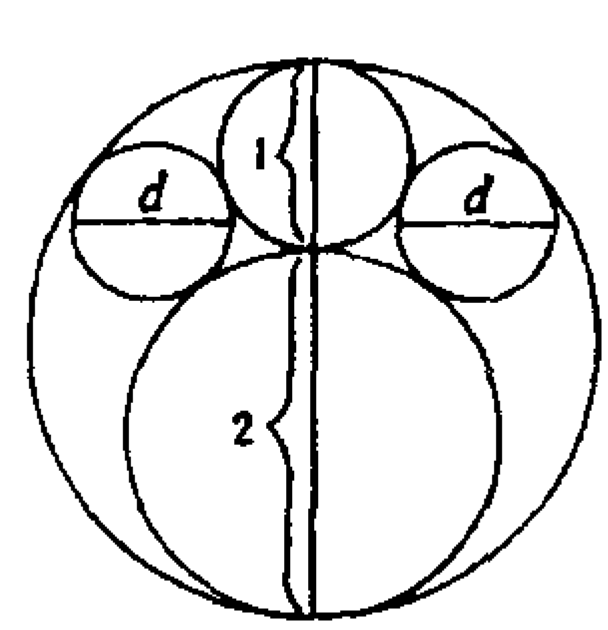
$$MF^2=(r-t)^2-t^2.$$

由 $\left(\frac{r}{2}+t\right)^2-\left(\frac{r}{2}-t\right)^2=(r-t)^2-t^2,$

得 $\frac{r}{t}=4.$ 因此所求的比是 16.

故选(C).

20·113 一工头监督一检查员以一个直径 2 英分的塞子和直径 1 英分的塞子检验一个直径 3 英分的洞(如图),为了使其所测位准确,用两个新块规(一种仪器)插入其中,若此两个块规完全相同,则要达到一英寸的 $\frac{1}{100}$ 的精确度,块规的直径 d 应为



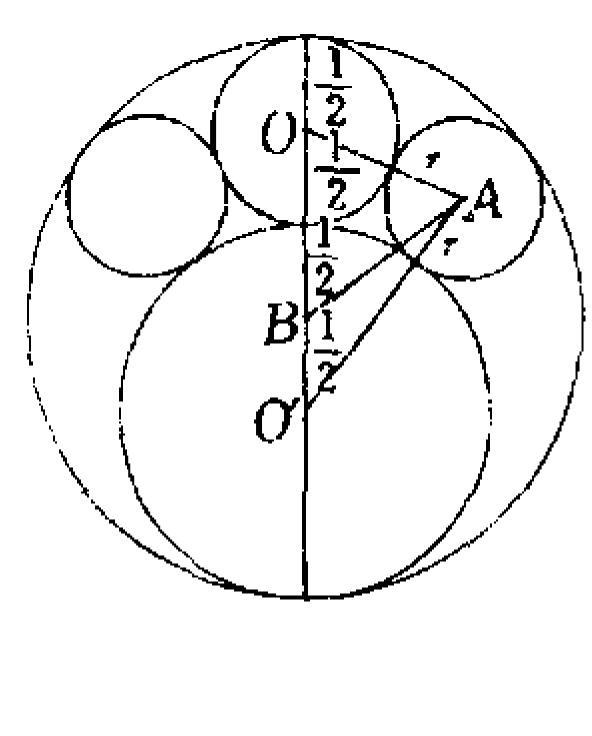
(A) 0.87. (B) 0.86. (C) 0.83.

(D) 0.75. (E) 0.71.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解] 如图,设 $\odot A$ 半径为 r,则 $OA=\frac{1}{2}+r,\ O'A=1+r,$

且 $AB=\frac{3}{2}-r.$



由 $S_{\triangle OAB}=2S_{\triangle BO'A},$

而 $\triangle OAB$ 半周长 $S_1=\frac{3}{2},$

且 $\triangle BO'A$ 半周长 $S_2=\frac{3}{2}.$

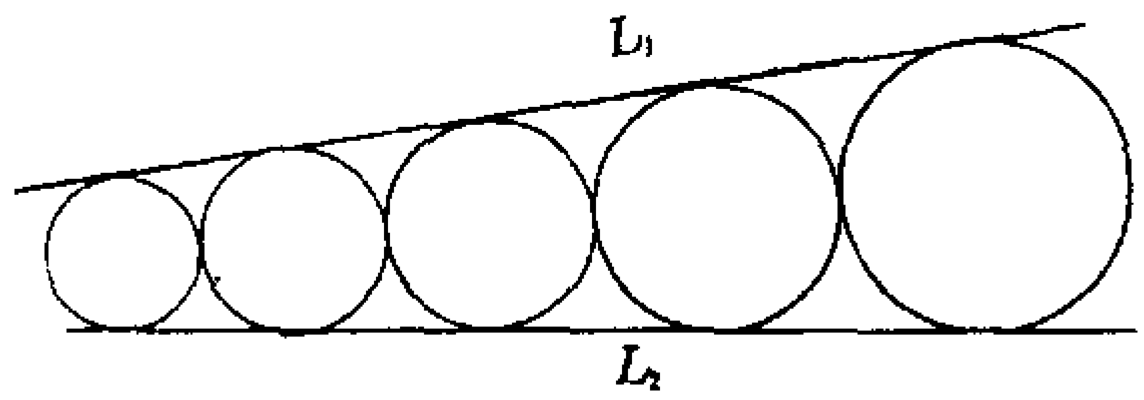
由海伦公式有

$$\sqrt{\frac{3}{2}(1-r)\cdot\frac{1}{2}\cdot r}=2\sqrt{\frac{3}{2}\cdot r\cdot 1\cdot(\frac{1}{2}-r)}$$

即　$7r=3,\ r=\frac{3}{7}$，　则　$d=\frac{6}{7}\approx 0.86$.

故选(B).

20·114　如图，五个圆分别都与直线 L_1, L_2 相切，且依次一个相切于另一个. 如果最大圆的半径是 18，最小圆的半径为 8，那么中间圆的半径是

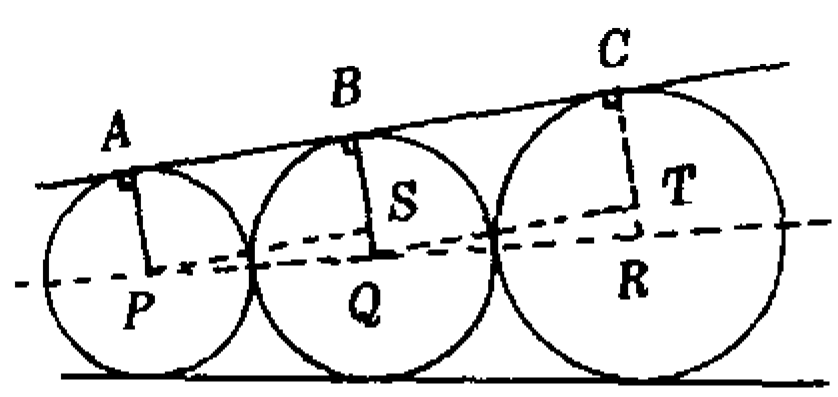


(A) 12.　(B) 12.5.　(C) 13.　(D) 13.5.　(E) 14.

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

[解]　考虑三个圆的情况，五个圆的情况类似.

如图，三圆的圆心 P, Q, R 是共线的，且此直线平分由两条切线所夹的角.



设 A, B, C 是切点，且 PS, QT 是平行于切线的两线段，则 $\triangle PQS \backsim \triangle QRT$.

若设 x, y, z 分别是小，中，大三个圆的半径，则

$$QS=y-x,\quad RT=z-y.$$

于是　$\frac{QS}{PQ}=\frac{RT}{QR}$　就变成了　$\frac{y-x}{x+y}=\frac{z-y}{y+z}$.

即　$y^2=xz$，　或　$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$.　这就说明了连续的半径之比是常数.

把这个结论应用到原题，该五圆连续的半径之比是常数，也就是说，这五个半径组成了一个等比数列.

由题设，可求出其公比为$\sqrt[4]{\frac{18}{8}}$，则中间圆的半径是 $8\sqrt{\frac{18}{8}}=12$.

故选(A).

20·115　由半径递减的圆组成一个无限序列，其中每一个圆与它后一个圆以及一个已知直角的两边相切. 第一个圆的面积和序列中所

有其他圆的面积之和的比是

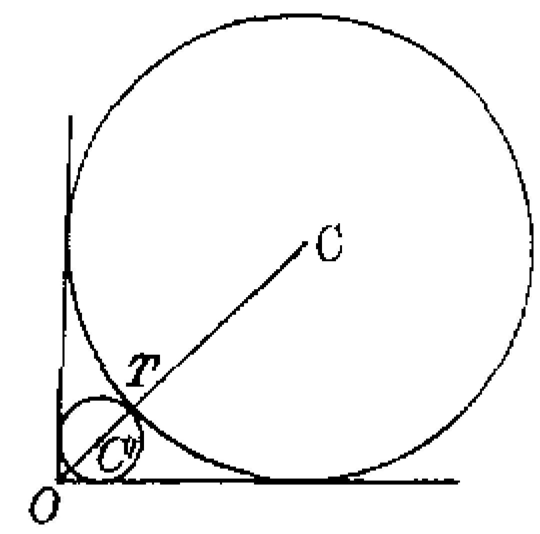
(A) $(4+3\sqrt{2}):4$.　　　(B) $9\sqrt{2}:2$.

(C) $(16+12\sqrt{2}):1$.　　　(D) $(2+2\sqrt{2}):1$.

(E) $(3+2\sqrt{2}):1$.

（第 22 届美国高中数学考试,1971 年）

[解]　以 O 表示直角的顶角, C 和 C' 是圆心, r 和 r' 是任何两个相邻圆的半径 $(r>r')$. 若 T 是两圆的切点,那么



$$OT = OC' + r' = (\sqrt{2}+1)r',$$

并且　$$OT = OC - r = (\sqrt{2}-1)r.$$

从这两个等式中得到相邻圆半径的比

$$\frac{r'}{r} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

如果 r 是数列中第一个圆的半径,那么它的面积是 πr^2,所有其他成为几何级数的圆的面积之和是

$$\pi r^2[(\sqrt{2}-1)^4+(\sqrt{2}-1)^8+\cdots]$$

$$=\frac{\pi(\sqrt{2}-1)^4r^2}{1-(\sqrt{2}-1)^4} = \frac{\pi r^2}{(\sqrt{2}+1)^4-1}.$$

∴　所求面积的比为

$$[(\sqrt{2}+1)^4-1]:1 = (16+12\sqrt{2}):1.$$

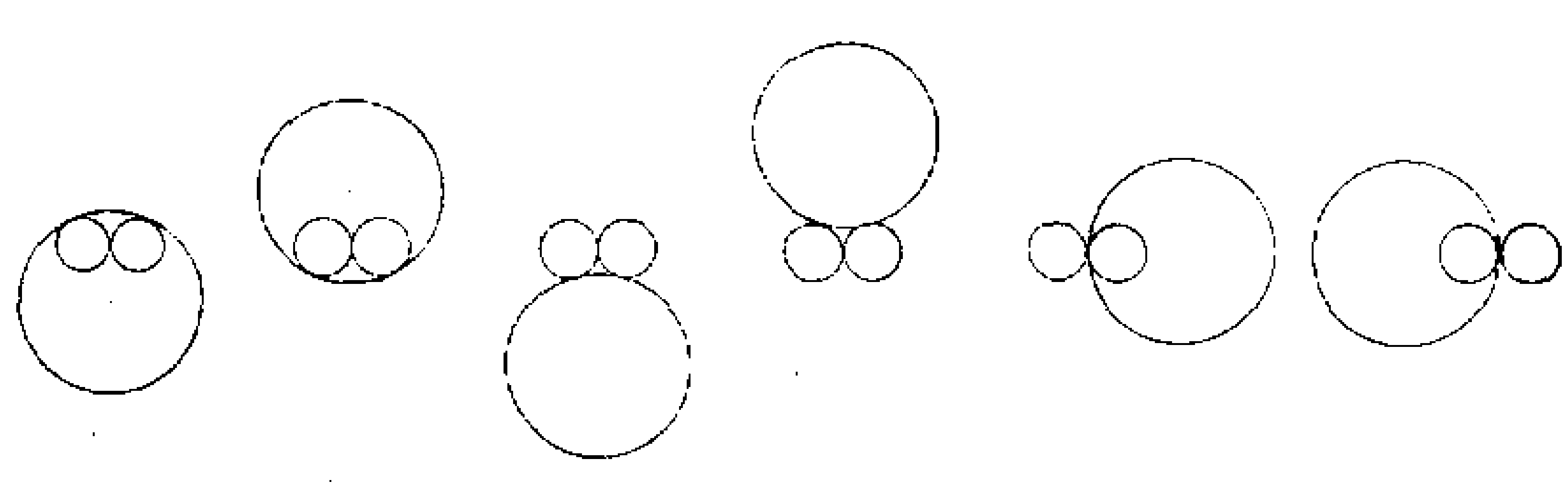
故选(C).

20·116　设 C_1 和 C_2 是同一平面上两个相切的半径为 1 的圆,在这平面上同时与 C_1 和 C_2 相切的半径为 3 的圆的个数是

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 5.　　(D) 6.　　(E) 8.

（第 44 届美国高中数学考试,1993 年）

[解]　如图所示,共 6 种情形,即有 6 个半径为 3 的圆与 C_1, C_2 都相切:



故选(D).

20·117　一个半径为 r 的圆被一个半径为R 的圆所包围,大圆的面积是大小圆之间区域的面积的$\frac{a}{b}$ 倍$(a>b)$,那么 $R:r$ 等于

(A) $\sqrt{a}:\sqrt{b}$.　　(B) $\sqrt{a}:\sqrt{a-b}$.

(C) $\sqrt{b}:\sqrt{a-b}$.　　(D) $a:\sqrt{a-b}$.

(E) $b:\sqrt{a-b}$.

（第 20 届美国高中数学考试,1969 年）

[解]　设两圆半径分别为 R,r.由设有

$$\pi R^2=\frac{a}{b}(\pi R^2-\pi r^2),\quad 或\quad \frac{a}{b}r^2=R^2(\frac{a}{b}-1).$$

则 $\frac{R^2}{r^2}=\frac{a}{a-b}$,　即 $\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$.

故选(B).

20·118　一个面积是 A_1 的圆包含在一个面积为 A_1+A_2 的大圆内.若大圆的半径是 3,而且 A_1,A_2,A_1+A_2 是一个等差数列,那么小圆的半径是

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) 1.　(C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.　(D) $\frac{3}{2}$.　(E) $\sqrt{3}$.

（第 30 届美国高中数学考试,1979 年）

[解]　因为 A_1,A_2,A_1+A_2 成等差数列,则

$$A_2-A_1=(A_1+A_2)-A_2,$$

即

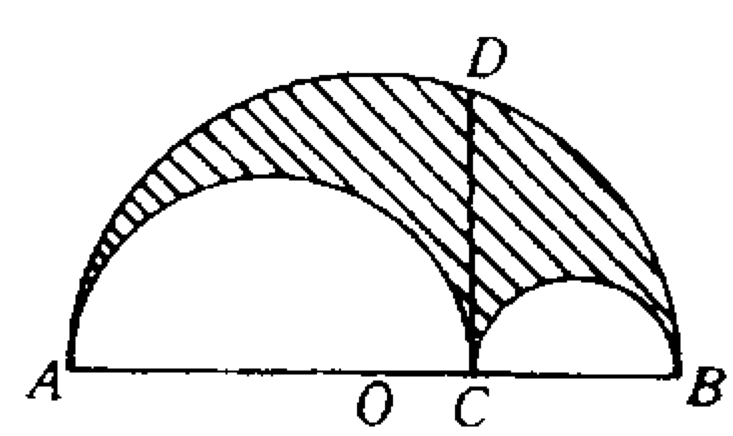
$$2A_1=A_2.$$

若 r 是小圆的半径,那么,

$$S_{大圆}=3^2\pi=9\pi=A_1+A_2=3A_1=3\pi r^2,\quad 则\quad r=\sqrt{3}.$$

故选(E).

20·119　如图,以 AB,AC,CB 为直径的三个半圆两两相切.如果 $CD\perp AB$,则阴影部分的面积与以 CD 为半径的圆的面积之比为



(A) $1:2$.　　(B) $1:3$.

(C) $\sqrt{3}:7$.　　(D) $1:4$.

(E) $\sqrt{2}:6$.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解] 令 A_1,A_2,A_3 分别表示直径为 $AB=d_1,AC=d_2,BC=d_3$ 的半圆面积,S 表示阴影部分面积,A 表示半径为 $CD=r$ 的圆面积即 $A=\pi r^2$. 于是

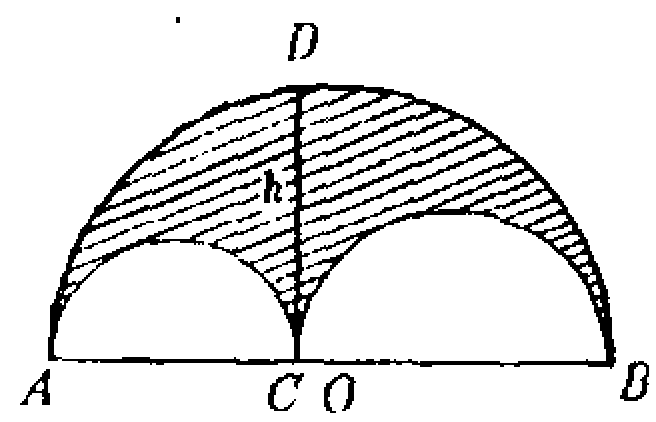
$$S=A_1-A_2-A_3=\frac{\pi}{8}(d_1^2-d_2^2-d_3^2)$$
$$=\frac{\pi}{8}[(d_2+d_3)^2-d_2^2-d_3^2]$$
$$=\frac{\pi}{4}d_2d_3.$$

又在 Rt△ADB 中, $CD^2=AC\cdot CB$, 即 $r^2=d_2d_3$,

则 $$A=\pi r^2=\pi d_2d_3=4S.$$

故选(D).

20·120 如图,在半圆的直径 AB 上取一点 C,分别以 AC,CB 为直径作半圆,过 C 作 $CD\perp AB$ 交圆周于 D,CD 的长为 h. 则阴影部分的面积为

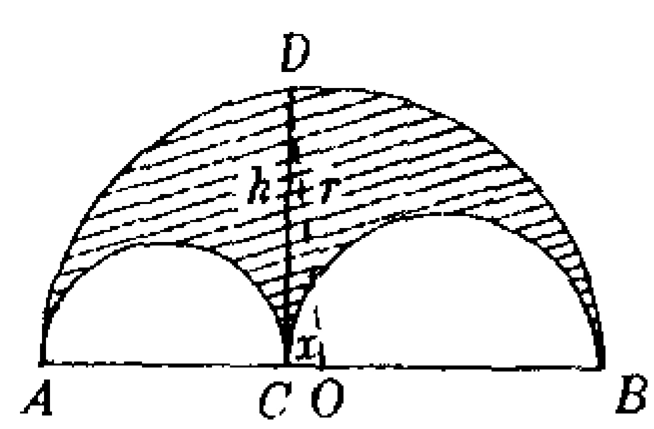


(A) $\frac{1}{3}\pi h^2$. (B) $\frac{1}{4}\pi h^2$.

(C) $\frac{1}{5}\pi h^2$. (D) $\frac{1}{6}\pi h^2$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1990 年)

[解] 设大圆半径为 r,且 $CO=x$. 依题设有



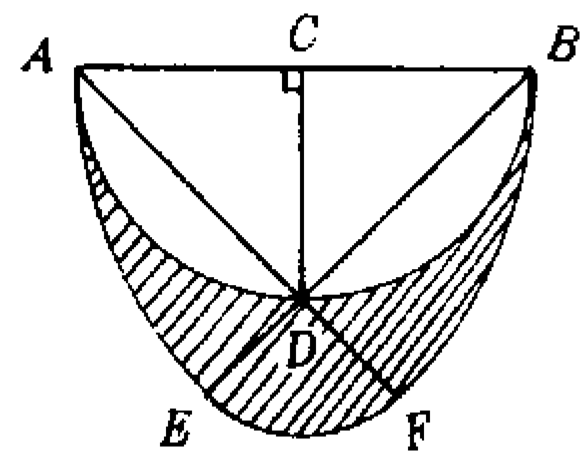
$$S_{阴影}=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi AC^2}{8}-\frac{\pi CB^2}{8}$$
$$=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi(r-x)^2}{8}-\frac{\pi(r+x)^2}{8}.$$
$$=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{\pi(r^2+x^2)}{4}=\frac{\pi}{4}(r^2-x^2),$$

又 Rt△COD 中, $OD^2-CO^2=CD^2$, 即 $r^2-x^2=h^2$,

故 $$S_{阴影}=\frac{\pi}{4}h^2.$$

故选(B).

20·121 如图,半圆$\overset{\frown}{AB}$的圆心为C,半径为1,点D在$\overset{\frown}{AB}$上,且$CD \perp AB$.分别延长BD和AD到E,F点,使得$\overset{\frown}{AE}$和$\overset{\frown}{BF}$分别是以B,A为圆心,半圆直径为半径的圆弧,$\overset{\frown}{EF}$是以D为圆心的弧.则图中阴影部分的面积是



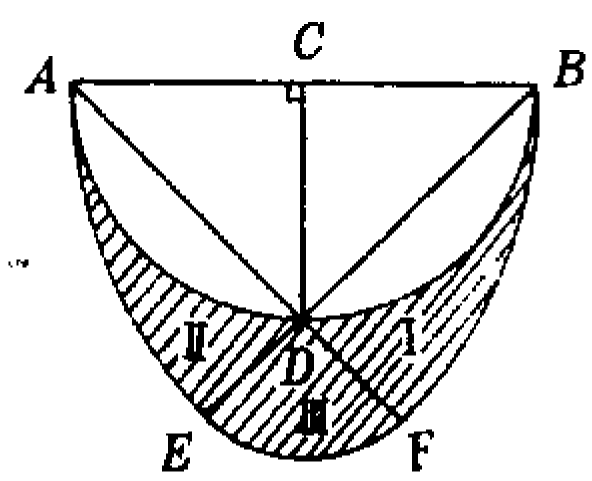
(A) $(2-\sqrt{2})\pi$.　　(B) $2\pi-\pi\sqrt{2}-1$.

(C) $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$.　　(D) $\frac{5\pi}{2}-\pi\sqrt{2}-1$.

(E) $(3-2\sqrt{2})\pi$.

(第43届美国高中数学考试,1992年)

[**解**] 用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ表示图中相应的部分,则有



$$S_{\text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}} = 2S_{扇形BAF} - S_{半圆AB} - S_{\triangle ADB}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$S_{\text{Ⅲ}} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(2-\sqrt{2})^2$$

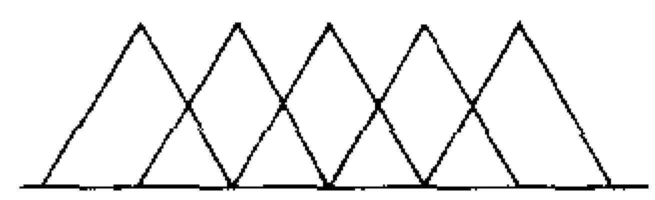
$$= \frac{3}{2}\pi - \sqrt{2}\pi.$$

故　$S_{阴影} = S_{\text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}} + S_{\text{Ⅲ}} = 2\pi - \sqrt{2}\pi - 1.$

故选(B).

第二十一章　覆盖与折叠

21·1　如图，平面上排列在直线同侧的五个等边三角形，边长都是 $2\sqrt{3}$，且每一个三角形底边的中点都是下一个三角形的顶点．这五个三角形盖住平面区域的面积是



(A) 10.　　(B) 12.　　(C) 15.

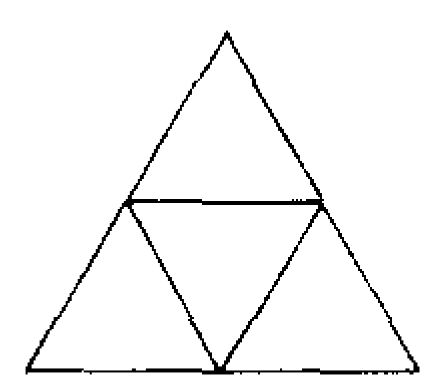
(D) $10\sqrt{3}$.　　(E) $12\sqrt{3}$.

（第 43 届美国高中数学考试，1992 年）

［解］　注意到每个正三角形可等分成四个全等的小正三角形，它恰好为两正三角形重叠的部分．

显然，这 5 个正三角形重叠的部分为 4 个小正三角形，恰好构成一正三角形．

即五个三角形盖住的区域面积为四个正三角形面积：



$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}.$$

故选(E)．

21·2　两个30°-60°-90°的全等三角形使它们一部分重叠并且斜边恰好重合．若每个三角形的斜边是 12，两个三角形的公共部分面积是

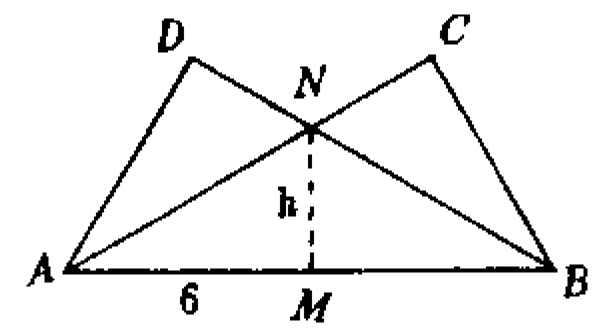
(A) $6\sqrt{3}$.　　(B) $8\sqrt{3}$.　　(C) $9\sqrt{3}$.

(D) $12\sqrt{3}$.　　(E) 24.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

［解］　如图，设 M 和 N 是长度为 h 的 $\triangle ABN$ 底边 AB 上高的两个端点，并且是两三角形公共部分等腰三角形的中线．

注意到 $\angle NAB = 30°$,则在 Rt△ANM 中,



$$h\sqrt{3} = 6,$$

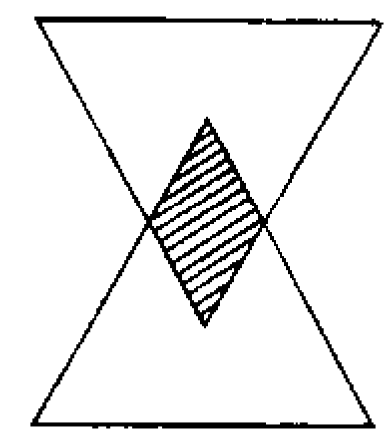
即 $$h = 2\sqrt{3}.$$

所求的公共部分面积是

$$\frac{1}{2}h(2AM) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})\cdot 12 = 12\sqrt{3}.$$

故选(D).

21·3　平面上两个全等的正三角形,其中一个三角形的顶点是另一个三角形的中心.则两者重叠部分之最大面积与最小面积比值是



(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(中国安徽省芜湖市初中数学竞赛,1990 年)

[解]　如下图 ② 的重叠部分面积最大,值为$\frac{2}{9}S$(参照图 ① 的计量),其中 S 为原等边三角形面积.

如图 ③ 的重叠部分面积最小,值为$\frac{1}{9}S$.

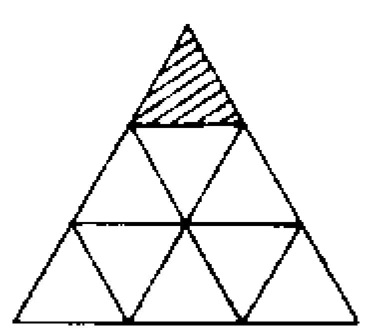


图 ①

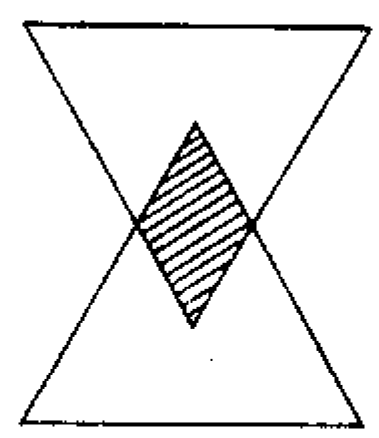


图 ②

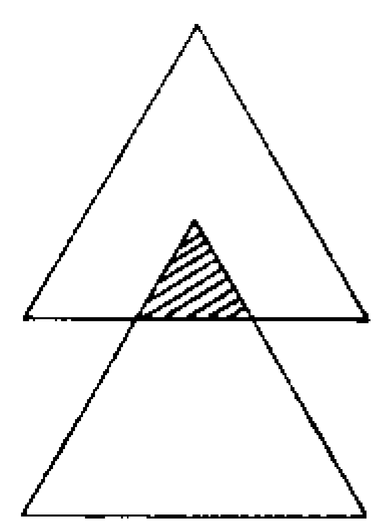


图 ③

则两者面积比为　2 : 1.

故选(B).

21·4　边长为8的正方形要用对角线的长为 $\sqrt{65}$ 的长方形覆盖,若全部覆盖至少需要这样的长方形

(A) 2 个.　　(B) 3 个.　　(C) 4 个.　　(D) 5 个.

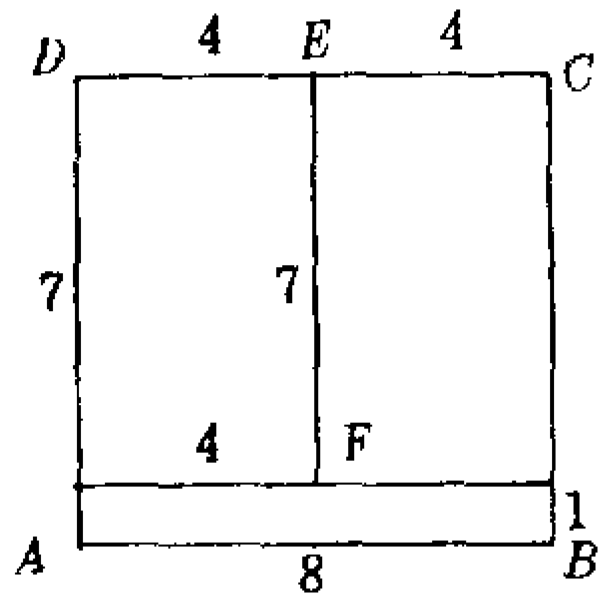
(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　如图,将正方形分成两个 4×7 和一个 1×8 的矩形,它们的对角线长分别为

$$\sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}, \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}.$$

这时,它们恰好把正方形完全覆盖.

又对角线长是 $\sqrt{65}$ 的长方形不能覆盖距离大于 $\sqrt{65}$ 的两点. 这样若用两个对角线长为 $\sqrt{65}$ 的长方形去覆盖 8×8 的正方形时,则 AC 或 B,D 不能同时被一个长方形覆盖,即它们中的每个至多只能覆盖 A,B,C,D 四点中的两个点.

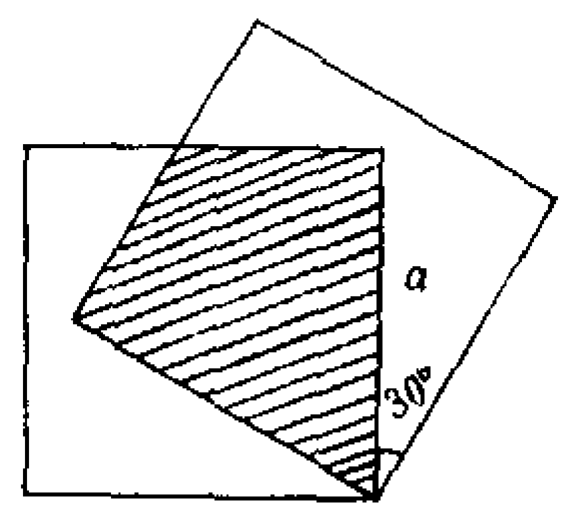


设一个覆盖 A,D 点,另一个覆盖 B,C 点. 但这时 DC 中点 E 却无法被它们覆盖,因为 $\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}>\sqrt{65}$.

综上,至少要 3 个这样的矩形.

故选 (B).

21·5 两边长为 a 的正方形的一对顶点重合. 重叠部分如图中阴影所示,则非重叠部分面积和应为



(A) $a^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. (B) $2(1-\frac{\sqrt{3}}{3})a^2$.

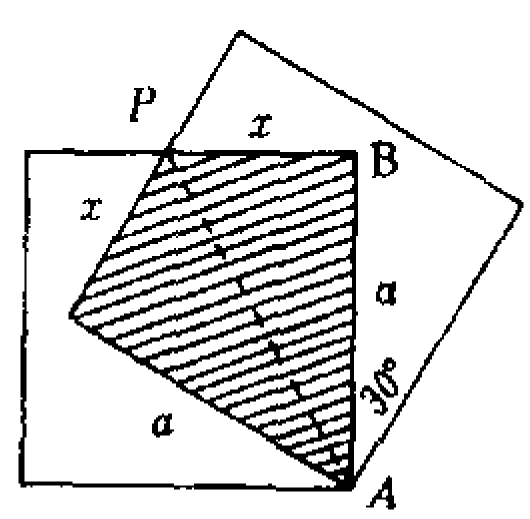
(C) $2a^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. (D) $a^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1988 年)

[解] 若如右图连接 AP,设 $PB=x$. 根据正方形的对称性,知图中的非重叠部分的面积相等,重叠部分(阴影部分)的两个直角三角形全等.

显然,边 x 所对锐角等于 30°,

$$x=a\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$



故 阴影部分的面积 $=2\cdot\frac{1}{2}ax=ax$

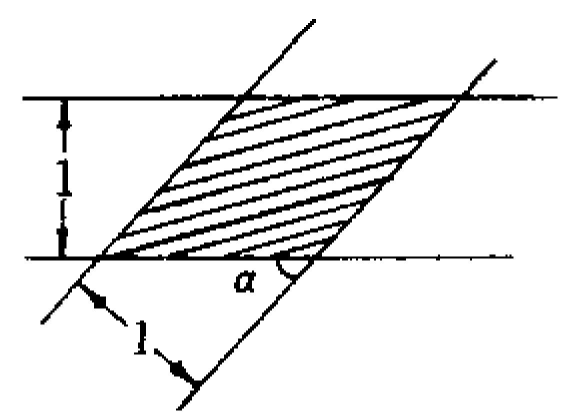
$$=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2.$$

因此 非重叠部分的面积和 $=2(a^2-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2)=2(1-\frac{\sqrt{3}}{3})a^2$.

故选 (B).

21·6 如图所示,有两条宽为 1 的带子,彼此交角为 α,阴影部分的面积为

(A) $\sin\alpha$. (B) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$.



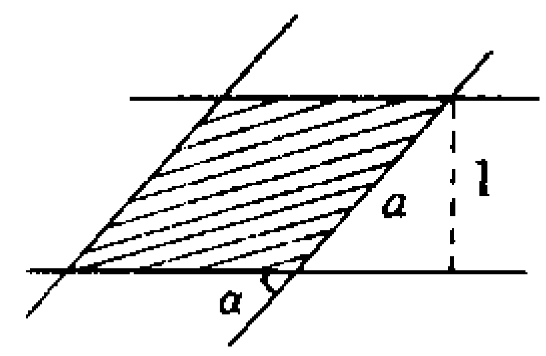
(C) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$. (D) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

(E) $\dfrac{1}{(1-\cos\alpha)^2}$.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 显然阴影部分为菱形. 设其边长为 a,

则
$$a=\frac{1}{\sin\alpha}.\text{(如图)}$$



$$\therefore\quad S_{\text{阴影}}=a\cdot 1=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

故选(B).

21·7 矩形 $ABCD$ 中,$AB=CD=2$,$BC=AD=8$. 矩形内部有一点 O,它与 AB,BC,AD 的距离都是 1,把矩形 $ABCD$ 绕 O 点旋转 45°,那么旋转后的公共部分的面积是

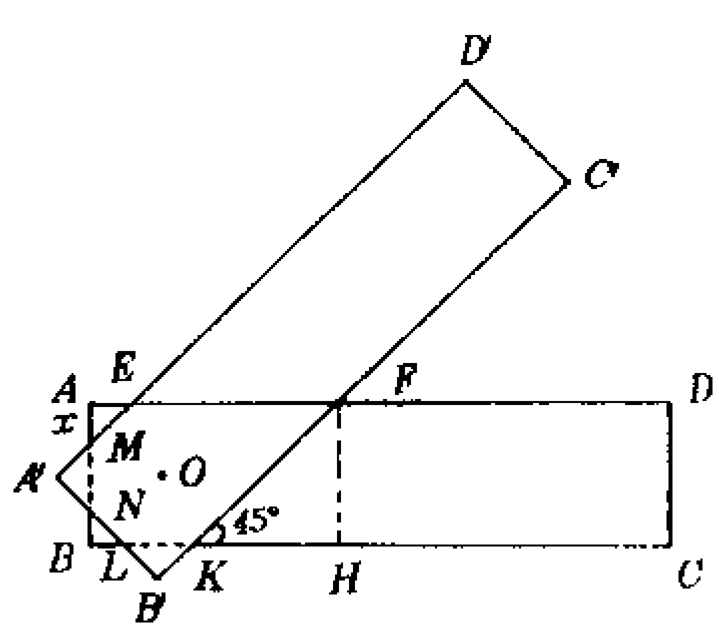
(A) $\dfrac{6\sqrt{2}+1}{2}$. (B) $2(3\sqrt{2}-2)$.

(C) $4\dfrac{3}{4}$. (D) $4\dfrac{1}{18}$.

(第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年)

[解] 如图设 $AM=x$,依题设有 $MN=\sqrt{2}x$,且 $BN=x$.

故 $x+\sqrt{2}x+x=2$, 则
$$x=\frac{2}{2+\sqrt{2}}.$$



在 Rt△KFH 中,$KF=\sqrt{2}FH=2\sqrt{2}$.

又
$$S_{MNLKFE}=S_{A'EFB'}-S_{\triangle A'MN}-S_{\triangle LB'K}$$
$$=\frac{1}{2}(A'E+B'F)\cdot A'B'-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(\sqrt{2}+1)}{2+\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\right)\right]$$

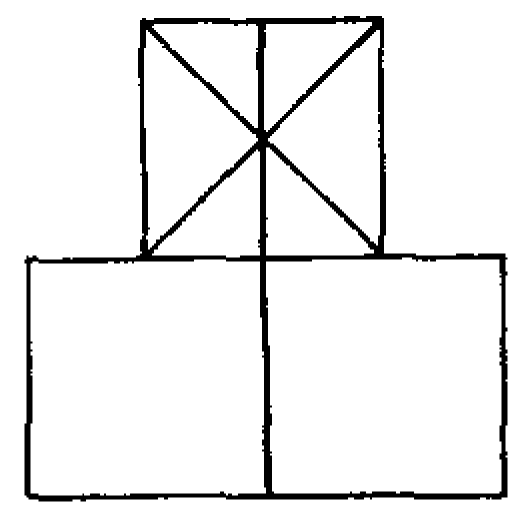
$$\cdot 2 - \left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 + 2\sqrt{2}) \cdot 2 - 2(3 - 2\sqrt{2})$$

$$= 2(3\sqrt{2} - 2).$$

故选(B).

21·8　右图示出由 3 个单位的正方形组成的对称图形. 包含这个图形的最小圆的半径是



(A) $\sqrt{2}$.　　(B) $\sqrt{1.25}$.

(C) 1.25.　　(D) $\frac{5\sqrt{17}}{16}$.

(E) 这些都不对.

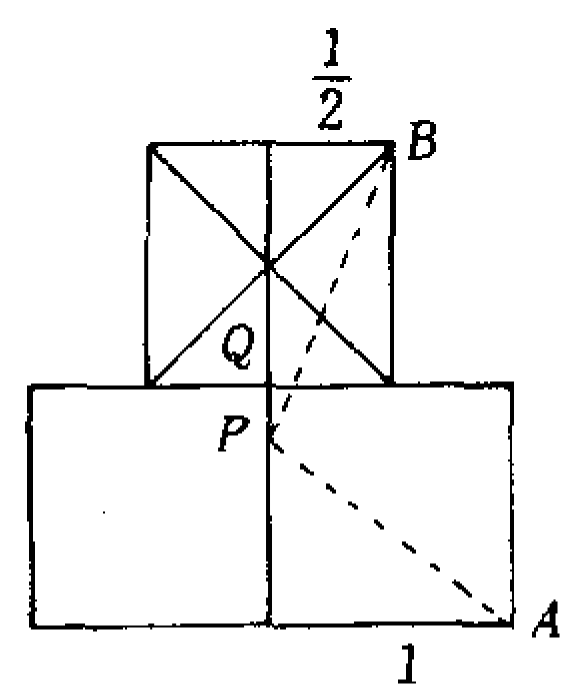
(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解]　如图,设 P 为外接圆的圆心,得到$\overline{AP}^2 = \overline{PB}^2$. 所以

$$(1 - \overline{QP})^2 + 1^2 = (1 + \overline{QP})^2 + (\frac{1}{2})^2,$$

即　$$-2\overline{QP} + 1 = 2\overline{QP} + \frac{1}{4},\quad 得\quad QP = \frac{3}{16}.$$

因此　$$AP^2 = (1 - QP)^2 + 1^2$$



$$= \left(\frac{13}{16}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{25 \cdot 17}{256},$$

$\therefore$　$$AP = \frac{5\sqrt{17}}{16}.$$

故选(D).

21·9　已知 Rt△ABC 的斜边 $BC = 2\pi$. 以 A 为圆心,r 为半径的圆 A 与 BC 相切. 设 Rt△ABC 被圆 A 覆盖后剩余部分面积为 S. 则 S 的最大值为

(A) π^2.　　(B) π.　　(C) $\frac{\pi}{2}$.　　(D) $\frac{\pi^2}{4}$.

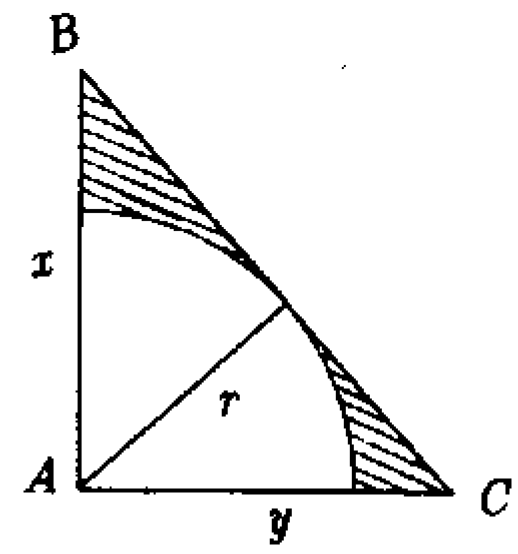
(中国安徽省安庆等县初中数学竞赛,1991 年)

[解]　设 △ABC 两直角边分别为 x, y,圆 A 半径为 r.

则　$$S = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}\pi r^2.$$

而，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}BC\cdot r=\pi r$，则

$r=\frac{xy}{2\pi}$， 因而 $S=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{16\pi}(xy)^2$，



其可视为 xy 的二次三项式.

$$\therefore\qquad S_{\max}=\frac{0-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{-4\cdot\frac{1}{16\pi}}=\pi.$$

或由 $S=-\left(\frac{xy}{4\sqrt{\pi}}-\sqrt{\pi}\right)^2+\pi$，知 $S_{\max}=\pi$.

故选(B).

21·10 $\triangle ABC$ 的三边分别为$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，则能覆盖住这个三角形的最小圆纸片的面积是

(A) 2π.　(B) 4π.　(C) $2\sqrt{3}\pi$.　(D) $(2+\sqrt{3})\pi$.

（中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛，1990 年）

[解] 由题设及余弦定理有

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+8-8-4\sqrt{3}}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}<0,$$

则 $\angle C$ 为钝角，且以 c 为半径的圆是能覆盖该三角形的最小圆.

其面积为

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2\pi=(2+\sqrt{3})\pi.$$

故选(D).

21·11 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，分别以 A,B,C,D 四点为圆心，以 1 为半径画圆弧，则所得的四个扇形的公共部分面积是

(A) $1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.　(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{2}-1$.　(D) $2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{8}$.

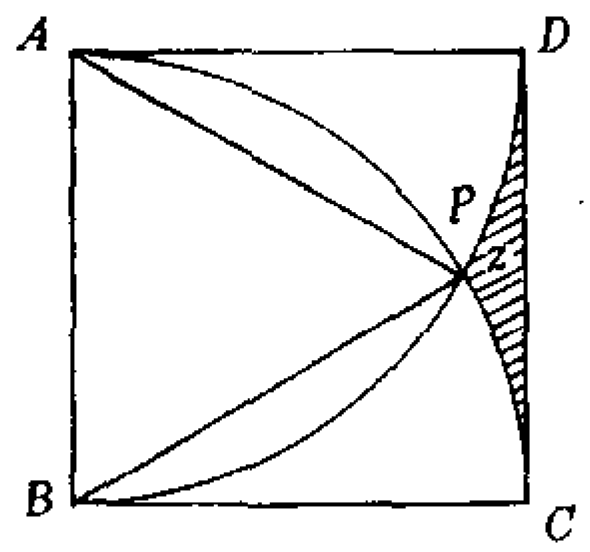
（中国浙江省初中数学竞赛，1991 年）

[解 1] 如图 ①，设图中阴影部分面积为 z，则由

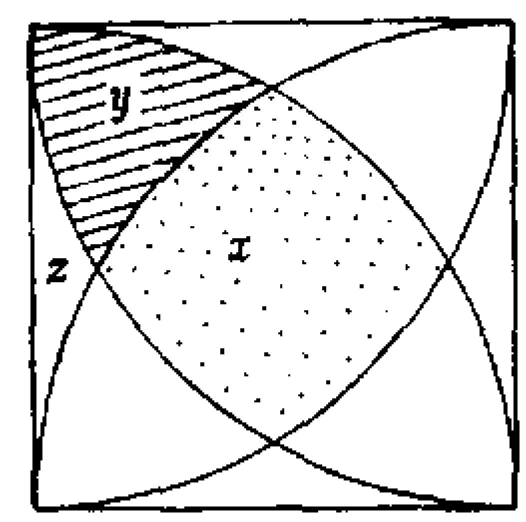
$$S_{\text{正}\triangle ABP}=\frac{\sqrt{3}}{4},\quad 及\quad S_{\text{扇形}APD}=\frac{30^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{12}$$

有
$$\frac{\sqrt{3}}{4}+z+2\cdot\frac{\pi}{12}=1,$$

即 $z=1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$.



图①



图②

再如图②,设四个扇形公共部分面积为 x,阴影部分面积为 y,则

$$y+2z=1-\frac{\pi}{4}, \quad 即 \quad y=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

这样 $x+4y+4z=1$,则 $x=1-4y-4z$.

因而 $$x=1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$

故选(A).

[解 2] 如上图②,可列方程组

$$\begin{cases} x+3y+2z=\frac{\pi}{4}, \\ y+2z=1-\frac{\pi}{4}, \\ x+2y+z=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}, \end{cases}$$

解得 $$x=1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}.$$

故选(A).

21·12 以凸 n 边形的各边为直径作圆,凸 n 边形必能被这 n 个圆所覆盖. 则 n 的最大值是

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 大于 5.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1993 年)

[解] 在任一三角形中,由最大角顶点向对边作高线,则以两条较小的边为直径的圆能覆盖整个三角形.

对任一凸四边形 $ABCD$,以各边为直径作圆,则这四个圆一定能覆盖整个四边形. 我们用反证法.

假设凸四边形内有一点 P 没被四个圆中的任何一个所覆盖,则 $\angle APB,\angle BPC,\angle CPD,\angle DPA$ 均小于 90°,这与 $\angle APB+\angle BPC+\angle CPD+\angle DPA=360^\circ$ 矛盾.

当 $n\geqslant 5$ 时,在正 n 边形中,边心距与所作圆的半径(即边长之半)之比为

$$\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}>1.$$

因此,以各边为直径的圆不能覆盖正 n 边形的中心.

所以,n 的最大值是 4.

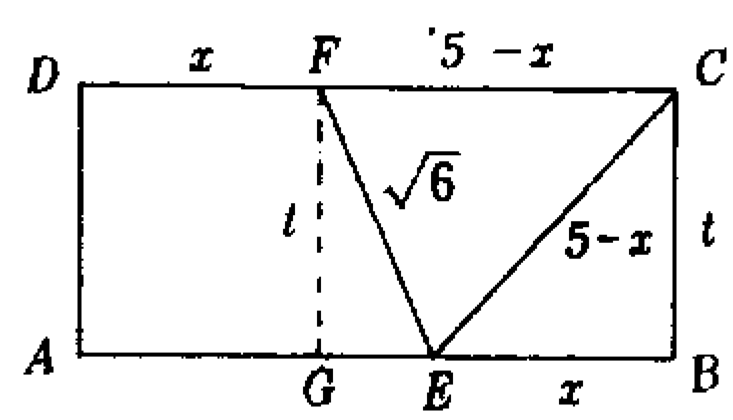
故选(B).

21·13　矩形的一边长为 5,另一边小于 4,将矩形折起来,使两对顶重合,若折痕长为$\sqrt{6}$,则另一边长为

(A) $\sqrt{2}$.　(B) $\sqrt{3}$.　(C) 2.　(D) $\sqrt{5}$.　(E) $\sqrt{\frac{11}{2}}$.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解]　设 AE 折至 EC 上,且 EF 为折痕.设 $BE=x$, $BC=t$.



则　$AE=EC=5-x$,　且

$DF=x$,　$AG=x$,

$GE=5-2x$.

由勾股定理可有

$$t^2=EF^2-EG^2$$
$$=(\sqrt{6})^2-(5-2x)^2,$$

又　$t^2=CE^2-EB^2=(5-x)^2-x^2$,

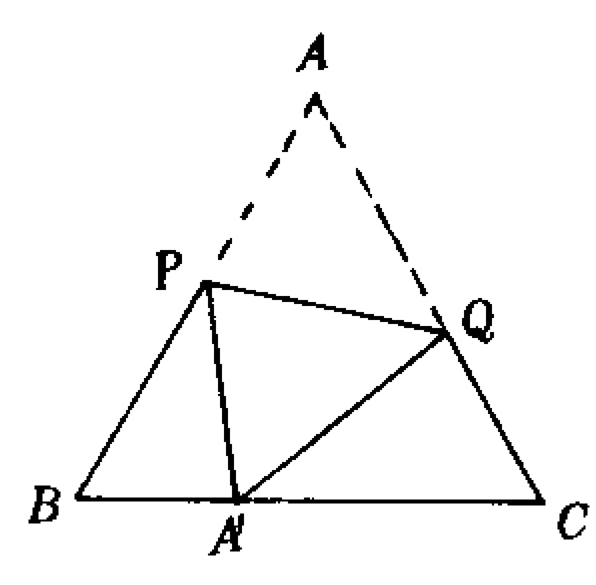
故综合上两式有　$20x^2-15x+22=0$.

得　$$x=2\text{ 或 }5\frac{1}{2}.$$

因 $5\frac{1}{2}>5-5\frac{1}{2}$,在 Rt$\triangle BEC$ 中不妥(直角边大于斜边).

由　$x=2$　得　$BC=t=\sqrt{5}$.

故选(D).



21·14　如图,将等边三角形 ABC 折叠,使顶

点 A 落在 BC 边的 A' 处. 如果 $BA'=1, A'C=2$,那么折痕 PQ 的长度是

(A) $\frac{8}{5}$.　　(B) $\frac{7}{20}\sqrt{21}$.

(C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.　　(D) $\frac{13}{8}$.　　(E) $\sqrt{3}$.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解]　设 $AP=x$,则 $BP=3-x$;设 $AQ=y$,则 $QC=3-y$.

在 $\triangle A'BP$ 中,由 $A'P=AP=x$,再由余弦定理有

$$x^2=(3-x)^2+1^2-2\cdot1\cdot(3-x)\cos60°.$$

解得
$$x=\frac{7}{5}.$$

同理　在 $\triangle A'QC$ 中可解得 $A'Q=y=\frac{7}{4}$.

这样在 $\triangle APQ$ 中,由余弦定理有

$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos60°=x^2+y^2-xy$$
$$=\left(\frac{7}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{49\cdot21}{400}.$$

故
$$PQ=\sqrt{\frac{49\cdot21}{400}}=\frac{7}{20}\sqrt{21}.$$

故选(B).

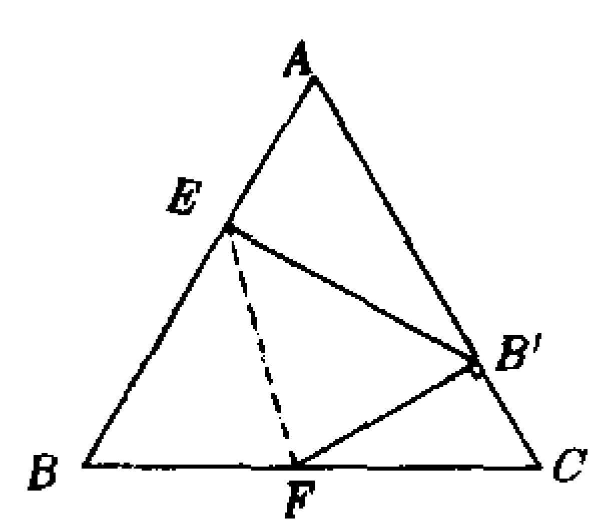
21·15　如图,边长为 1 的正 $\triangle ABC$,沿 EF 把其一角折叠,使 B 落在 AC 上的某点 B',且 $FB'\perp AC$. 则折成的四边形 $AEFC$ 的面积是

(A) $\frac{1}{6}(17\sqrt{3}-27)$.

(B) $\frac{1}{6}(15\sqrt{3}-27)$.

(C) $\frac{1}{8}(17\sqrt{3}-27)$.

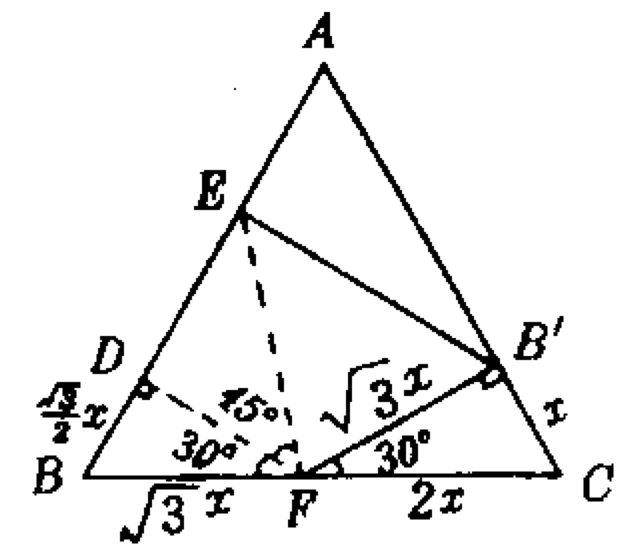
(D) $\frac{1}{8}(15\sqrt{3}-27)$.



(中国安徽省芜湖市初中数学竞赛,1991 年)

[解]　由设 $FB'\perp AC$,且 $\angle C=60°$,则 $\triangle FB'C$ 为 $30°$-$60°$-$90°$ 的三角形.

设 $B'C = x$，则 $FC = 2x$，从而 $FB' = \sqrt{3}x$.



又 $\qquad BF = B'F = \sqrt{3}x$.

作 $FD \perp AB$，则由 $\angle B = 60°$，知

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad DF = \frac{3x}{2}.$$

$\because \quad \angle BFE = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$,

$\therefore \quad \angle DFE = 45°$.

$\therefore \quad DE = DF = \frac{3x}{2}$.

而 $\quad \sqrt{3}x + 2x = 1$， 即 $\quad x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

因而 $\quad S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)x \cdot \frac{3}{2}x$.

$\therefore$
$$\begin{aligned} S_{AEFC} &= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BEF} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}(17\sqrt{3} - 27). \end{aligned}$$

故选(C).

几何篇（中）

（立体几何）

第二十二章　直线与平面

22·1　若异面直线 a,b 分别在平面 α 和 β 内,且 $\alpha \cap \beta = c$,则直线 c

(A) 与 a,b 都相交.　　(B) 与 a,b 都不相交.

(C) 至少与 a,b 之一相交.　　(D) 至多与 a,b 之一相交.

(中国四川省高中数学竞赛,1989 年)

[解]　如下图 ① 可否(B),(D);图 ② 可否(A).

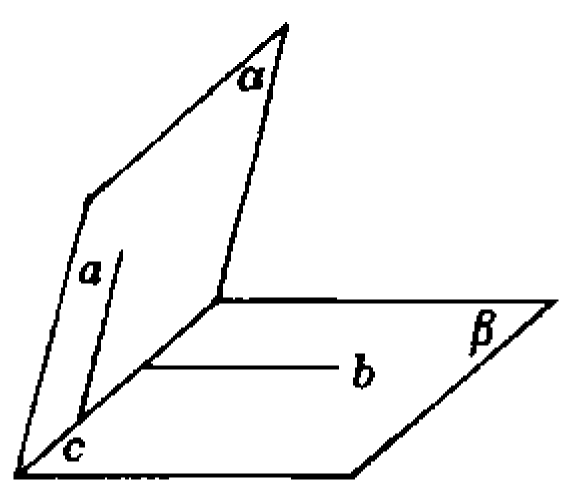


图 ①

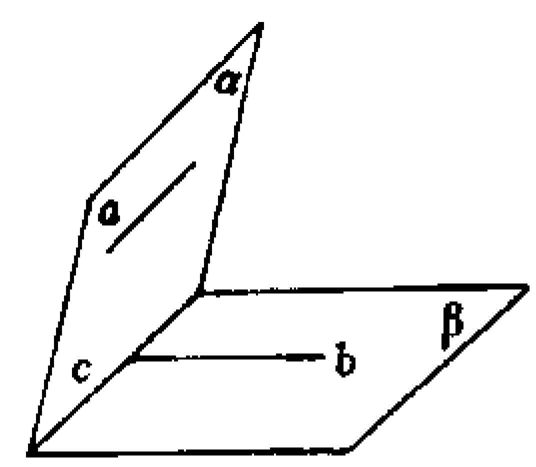


图 ②

故选(C).

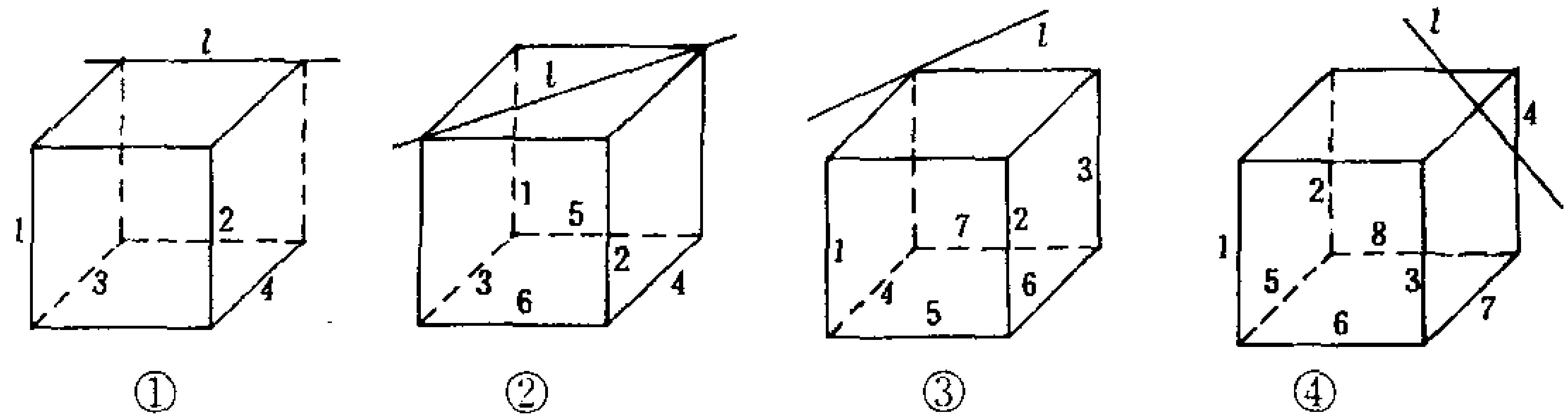
22·2　在正方体的一个面所在的平面内,任意画一条直线,则与它异面的正方体的棱的条数是

(A) 4 或 5 或 6 或 7.　　(B) 4 或 6 或 7 或 8.

(C) 6 或 7 或 8.　　(D) 4 或 5 或 6.

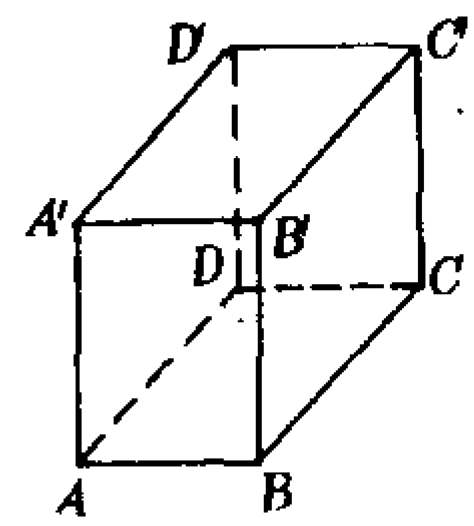
(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　下面图 ① ~ ④ 中与 l 为异面直线的棱的条数分别是 4,6,7,8.



故选(B).

22·3 给出长方体 $ABCD—A'B'C'D'$,下列十二条直线:AB',BA',CD',DC',AD',DA',BC',CB',AC,BD,$A'C'$,$B'D'$ 中异面直线的对数为



(A) 30 对. (B) 60 对.

(C) 24 对. (D) 48 对.

(中国高中数学联赛,1981 年)

[解] 这 12 条直线恰是长方体侧面的 12 条对角线所在直线. 对每个侧面上的一条对角线,都有另五个侧面上的五条对角线与它异面.

这样,12 条对角线将形成 60 对异面对角线组(有重复的计算),但在上述计数中,每对异面直线都计算了 2 次,因此,只有 30 对异面直线组.

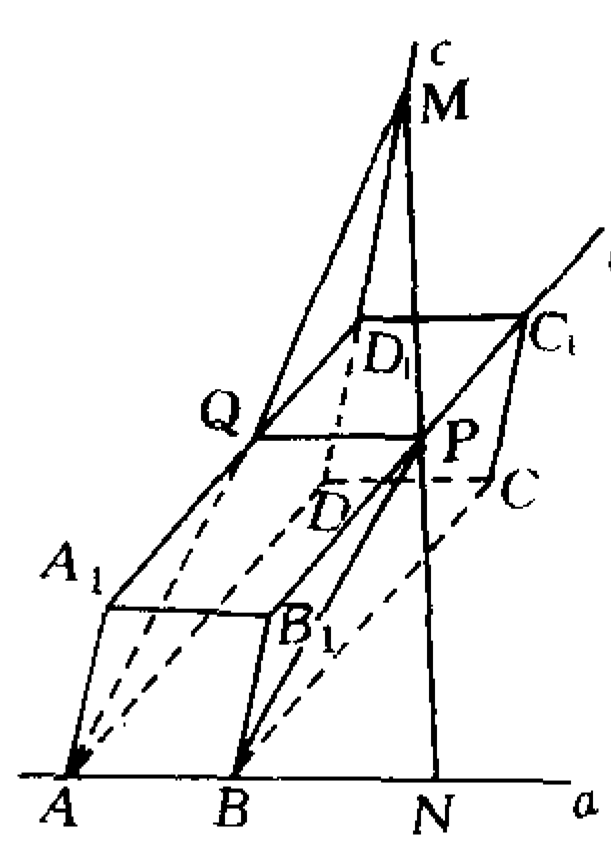
故选(A).

22·4 如果空间三条直线 a、b、c 两两成异面直线,那么与 a、b、c 都相交的直线有

(A)0 条. (B)1 条. (C) 多于 1 的有限条. (D) 无穷多条.

(中国高中数学联赛,1997 年)

[解] 首先,无论 a、b、c 的位置关系是怎样的,我们总可作一个平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,使 AB 在直线 a 上,B_1C_1 在直线 b 上,D_1D 在直线 c 上.



再在 DD_1 的延长线上任取一点 M. 由 M 与 a 确定一个平面α,平面 α 与直线B_1C_1 交于 P,与直线 A_1D_1 交于 Q,则 $PQ \parallel a$.

于是,在平面 α 内,直线 PM 不与 a 平行,

PM 必与 a 交于一点 N.

这样直线 MN 就同时与直线 a、b、c 相交.

由于点 M 的取法有无穷多种,故同时与 a、b、c 都相交的直线有无穷多条.

故选(D).

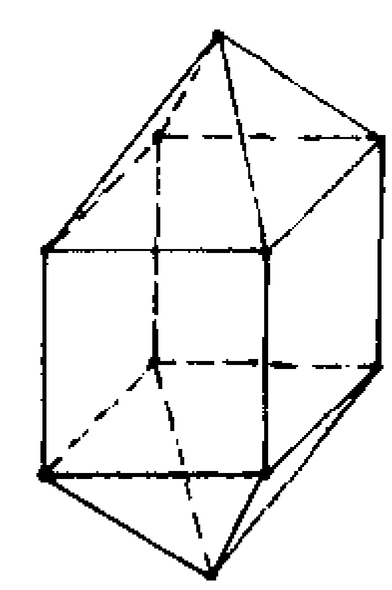
22·5　空间中不全在一个平面上的有限点集 M,它有如下性质:对任意 $A \in M, B \in M$,总有 $C \in M$ 和 $D \in M$,使得直线 AB 和 CD 是彼此平行的两条不同直线. M 中的点的个数至少有

(A) 4 个.　　(B) 6 个.　　(C) 10 个.　　(D) 13 个.

(东北三省数学邀请赛,1989 年)

[解]　容易验证 M 中仅有 4 个点和 6 个点无法满足题设要求.

∵　4 个点最多可构成两组平行线,但 4 个点可连 $C_4^2 = 6$ 条不同的线段.



又 6 个点最多可构成 6 组平行线(正三棱柱),但 6 个点却可连成 $C_6^2 = 15$ 条不同的线段.

10 个点的情形见右图所示(M 是 12 面体的 10 个顶点),其可满足题设要求(其上下两个四棱锥的高为正方体棱长之半).

故选(C).

22·6　已知三个平面 α, β, γ,每两个平面之间的夹角都是 θ,且 $\alpha \cap \beta = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $\gamma \cap \alpha = c$. 若有

命题甲:　$\theta > \frac{\pi}{3}$.

命题乙:　a, b, c 相交于一点.

则这两命题的关系是

(A) 甲是乙的充分条件但不必要.

(B) 甲是乙的必要条件但不充分.

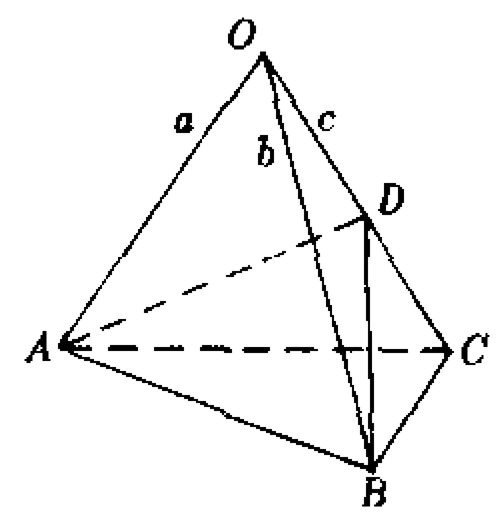
(C) 甲是乙的充分必要条件.

(D)(A),(B),(C) 都不对.

(中国高中数学联赛,1988 年)

[解]　三个平面 α, β, γ 两两的交线 a, b, c 有两种可能:或者 a, b, c 两两平行,或者 a, b, c 交于一点.

若命题甲成立,则 a,b,c 不能两两平行.事实上,若 $a\parallel b$, $b\parallel c$,则可作一直三棱柱,使其侧面分别在 α,β,γ 平面上.此三棱柱的底面三角形的每个内角,是 α,β,γ 中某两个平面的二面角,即此三角形的每一内角都等于 θ,而 $\theta>\frac{1}{3}\pi$,这是不可能的.



这就证得:若命题甲成立,则 a,b,c 交于一点,即甲是乙的充分条件.

若命题乙成立,如图,设 a,b,c 交于O,由于平面 α,β,γ 两两交角都是θ,故可作一三棱锥 $O—ABC$,使底面 $\triangle ABC$ 是一正三角形,而棱锥的侧面分别在 α,β,γ 上,过 AB 作平面$ABD\perp OC$(即直线 c),交 OC 于D.

由于 BC 是直角三角形BCD 的斜边,所以 $BC>BD$.

同理 $AC>AD$,于是,在 $\triangle ABD$ 中,$AB>AD,AB>BD$,

因而 $\angle ADB>\frac{1}{3}\pi$.而由作图知 $\angle ADB=\theta$,即 $\theta>\frac{1}{3}\pi$.

则命题甲成立.即甲是乙的必要条件.

故选(C).

注 此解答基于"两平面相交,所成二面角只有一个"这一点的.

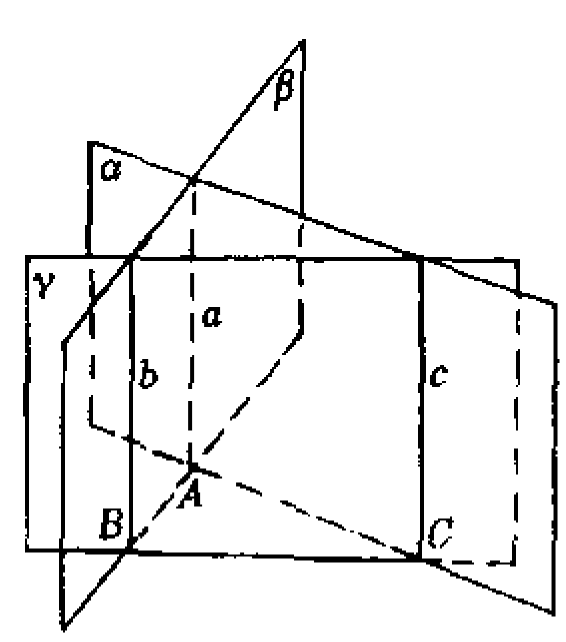
但是,若认为"两个相交平面组成四个二面角,每一个都小于 180°",依此观点,此题的答案应是(A):甲是乙的充分条件而不必要.证明如下:

三个平面 α,β,γ 两两相交,交线分别是 a,b,c,则有且仅有 $a\parallel b\parallel c$,或 a,b,c 三线交于一点的两种可能.

充分性:每两个平面相交,得到的二面角均相等.即是"互补"的两组 θ,θ',

当 $\theta>\frac{\pi}{3}$,且 $\theta'>\frac{\pi}{3}$,即 θ,θ' 都在$\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$之间时,$a,b,c$ 交于一点.

如果 a,b,c 不交于一点,则 $a\parallel b\parallel c$,如图.α,β,γ 围成一个三棱柱面,作其直截面 ABC 交三直线分别于A,B,C 三点.则 $\triangle ABC$ 的三个内角及外角都是α,β,γ 两两相交所成二面角的平面角.由题设,夹角都是 θ.

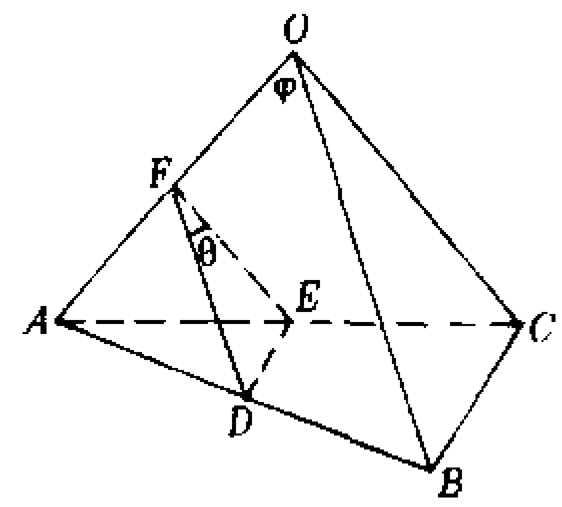


所以,$\angle ABC=\angle BCA=\angle CAB=\theta=\frac{\pi}{3}$.

另一组(外角)$\theta'=\frac{2\pi}{3}$ 与 θ,θ' 都大于$\frac{\pi}{3}$ 矛盾.

故三线必定交于一点.

反之,必要性未然,即 a,b,c 三线交于一点时,未必 θ,θ' 都大于$\frac{\pi}{3}$.



如图. 三平面 α,β,γ 两两相交, 交线 a,b,c 交于一点 O, 组成三面角 $O-ABC$. 当每个面角 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\varphi=\arccos(-\frac{1}{3})$ 时, 易证:

二面角 $B-OA-C=$ 二面角 $B-OC-A=$ 二面角 $A-OB-C$.

与它们"对应"的另一组二面角也必然相等.

截 $OA=OB=OC=1$, 构成三棱锥 $O-ABC$.

AB,AC 的中点 D,E, 作 $DF\perp OA$ 交于 F, 连结 EF,DE.

由 $\triangle AOB\cong\triangle AOC$ 易证 $EF\perp OA$.

$\angle DFE=\theta$ 为二面角 $B-OA-C$ 的平面角.

因而
$$AB=AC=2\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$AD=AE=DE=\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$DF=EF=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\sin\varphi.$$

由余弦定理
$$\cos\theta=\frac{DF^2+EF^2-DE^2}{2DF\cdot EF}=\frac{2DF^2-DE^2}{2DF^2}$$
$$=1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}\sin^2\varphi}=-\frac{1}{2},$$

$\therefore\quad \theta=\frac{2}{3}\pi$, 与之对应 $\theta'=\frac{\pi}{3}$.

此时, 两组二面角都大于 $\frac{\pi}{3}$ 不成立. 因而, 甲是乙的充分条件, 但不必要. 故选(A).

22·7 给定二面角 $\alpha-PQ-\beta$. A,B 两点在半平面 α 上, C 点在半平面 β 上(A,B,C 均不在 PQ 上, 且 A,B 到 PQ 的距离不等). 以 A,B,C 三点为三个顶点作梯形, 使所作梯形的第四个顶点也在二面角的半平面上, 则合于上述条件的梯形

(A) 不存在. (B) 只有一个.

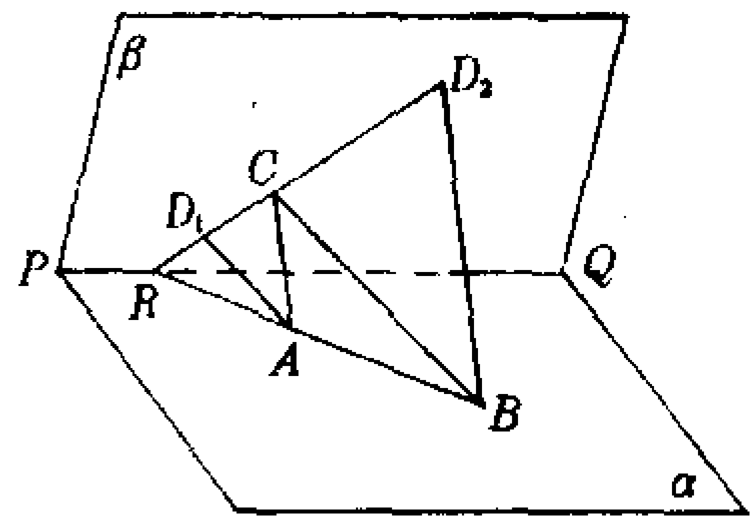
(C) 有两个. (D) 有无穷多个.

(中国北京市高中数学竞赛, 1986 年)

[**解**] 如图, 连B, A交PQ于R, 连 RC. 这样画出了过 A,B,C 三点的平面与平面 α 的交线 RB, 与平面 β 的交线 RC.

第二十二章 直线与平面

过 B 作 AC 的平行线交 RC 于 D_2，完成梯形 ABD_2C；过 A 作 BC 的平行线交 RC 于 D_1，完成梯形 $ABCD_1$. 过 C 若作 AB 的平行线不会与平面 β 再相交于异于 C 的点，所以作不出梯形. 因此合于条件的梯形有两个.



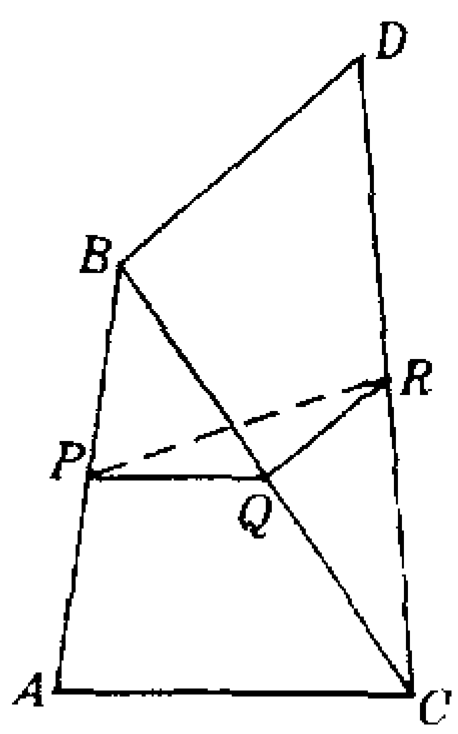
故选(C).

22·8　AB,BC,CD 为不在同一平面内的三条线段. 又 AB,BC,CD 的中点分别为 P,Q,R，且 $PQ=2,QR=\sqrt{5},PR=3$. 则直线 AC 与 BD 所成的角为

(A) $60°$.　　(B) $30°$.　　(C) $90°$.　　(D) $120°$.

（中国北京市高中数学竞赛，1986 年）

［解］　如图，$BD\parallel QR$，　$AC\parallel PQ$.



所以 AC,BD 所成的角的度数等于 $\angle PQR$ 的度数. 但在 $\triangle PQR$ 中，

$$PQ^2+QR^2=2^2+(\sqrt{5})^2=3^2=PR^2,$$

故
$$\angle PQR=90°.$$

所以 AC,BD 所成的角为 $90°$.

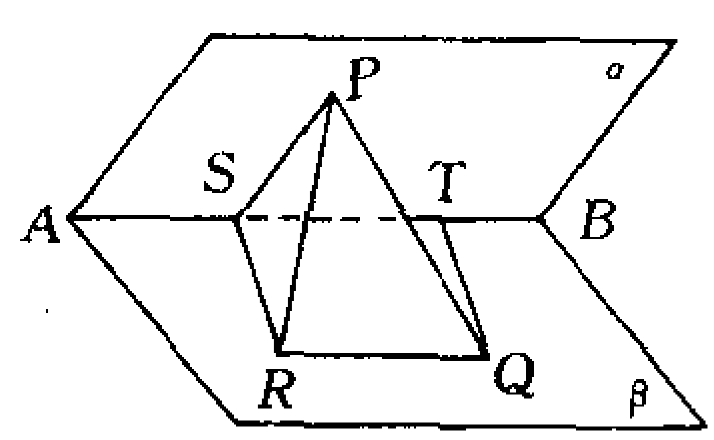
故选(C).

22·9　二面角 $\alpha-AB-\beta$ 为 $60°$，$P\in\alpha,Q\in\beta$，且 P、Q 均不在 AB 上，PQ 与 AB 所成的角为 $45°$，又 $PQ=7\sqrt{2}$，Q 与 AB 的距离为 3，则 P 与 AB 的距离为

(A)5.　　(B) $\sqrt{37}$.　　(C)8.　　(D) $\sqrt{79}$.

（中国四川省高中数学竞赛，1993 年）

［解］　如图，作 $QT\perp AB$ 于 T，作 $QR\parallel AB$，再作 $PR\perp QR$ 于 R，且 $RS\perp AB$ 于 S，连结 PS，则 $PS\perp AS$.



$$\therefore\quad \angle PSR=60°.$$

又　$\angle PQR=45°$，$PQ=7\sqrt{2}$，

$$\therefore\quad PR=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=7.$$

由余弦定理得

$$PR^2=PS^2+SR^2-2PS\cdot SR\cos\angle PSR.$$

又　$SR = QT = 3$，$PR = 7$，$\angle PSR = 60^\circ$，代入上式化简后有

$$PS^2 - 3PS - 40 = 0,$$

解得　$PS = 8$(舍去负值).

故选(C).

22·10　一条直线 l 与一个直二面角的两个半平面相交，且与这两个半平面所成的角分别为 α 和 β. 则 $\alpha + \beta$ 必不能取到的值是

(A) 90°.　　(B) 73°.　　(C) 87°.　　(D) 95°.

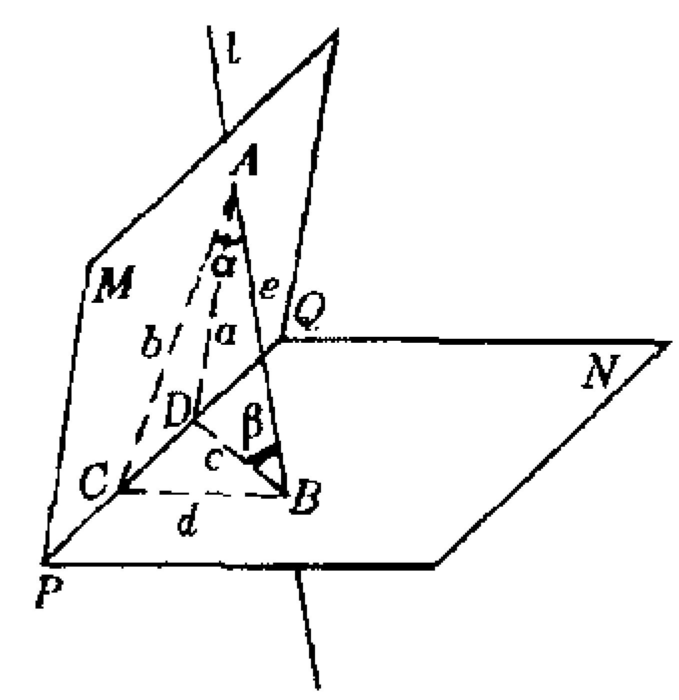
（中国北京市高中数学竞赛，1990 年）

[解]　如图 $BC \perp PQ$，$AD \perp PQ$，连 AC，BD，则 $\angle CAB$，$\angle ABD$ 分别为直线 l 与平面 M 和 N 的夹角 α，β. 其余线段长如图设.

则　$\sin\alpha = \dfrac{d}{e}$，　$\cos\alpha = \dfrac{b}{e}$，$\sin\beta = \dfrac{a}{e}$，　$\cos\beta = \dfrac{c}{e}$.

由　$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{bc}{e^2} - \frac{ad}{e^2} = \frac{bc - ad}{e^2},$$



在　$\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$$a < b,\ d < c,$$

$\therefore$　$\cos(\alpha + \beta) > 0$，则　$\alpha + \beta < 90^\circ$.

因而　$\alpha + \beta$ 不能为 95°.

故选(D).

22·11　点 P 在 $\triangle ABC$ 所在的平面外，$PA \perp$ 平面 ABC，以 S_1，S_2 分别表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 的面积，则 $S_1 : S_2$ 的值

(A) 大于 0，且不大于 1.　　(B) 大于 0 且小于 1.

(C) 大于 1.　　(D) 不小于 1.

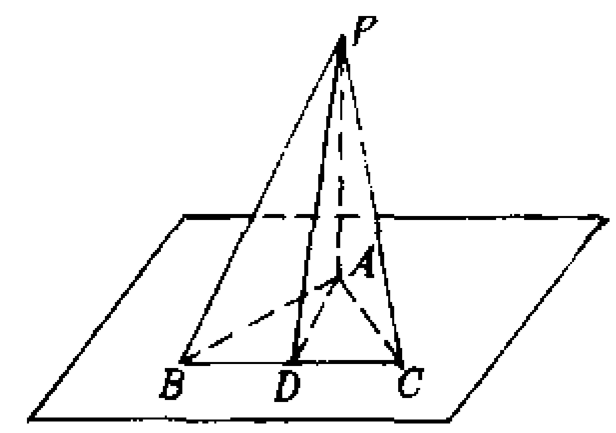
（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　作 $AD \perp BC$，连 PD. 由三垂线定理知 $PD \perp BC$. 则

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AD}{\frac{1}{2}BC \cdot PD} = \frac{AD}{PD} = \cos\angle PDA \in (0,1),$$

故选(B).

22·12　设 O 是正三棱锥 $P-ABC$ 底面 $\triangle ABC$ 的中心，过 O 的动平面与 $P-ABC$ 的三条侧棱或其延长线的交点分别记为 Q,R,S. 则和式 $\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$



(A) 有最大值而无最小值.

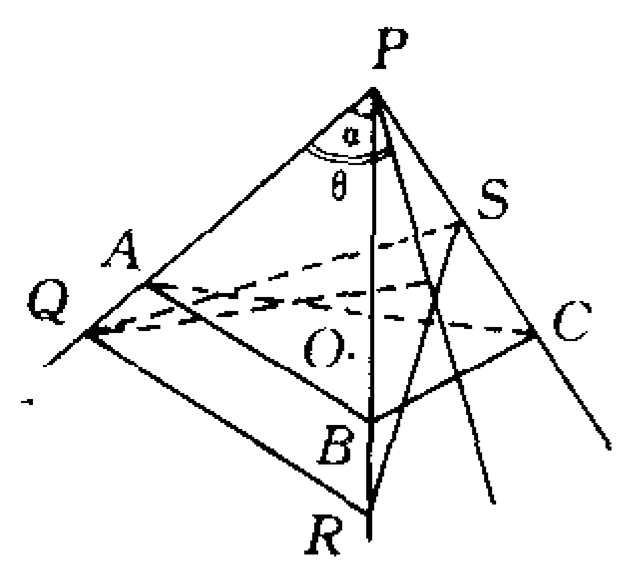
(B) 有最小值而无最大值.

(C) 既有最大值又有最小值，且二者不等.

(D) 是一个与平面 QRS 位置无关的常量.

（中国高中数学联赛，1995年）

[解]　四面体 $PQRS$ 可以划分成以 O 点为公共顶点，以 $\triangle PQR$，$\triangle PRS$，$\triangle PQS$ 为底面的三个三棱锥.



由已知　$\angle QPR=\angle RPS=\angle SPQ=\alpha$.

又 O 是 $P-ABC$ 底面 $\triangle ABC$ 的中心，O 点到三个侧面的距离相等，可设为 d，则三棱锥 $O-PQR$、$O-PRS$、$O-PQS$ 的高都是 d，于是

$$V_{PQRS}=V_{O-PQR}+V_{O-PRS}+V_{O-PQS}$$
$$=\frac{1}{6}PQ\cdot PR\cdot\sin\alpha\cdot d+\frac{1}{6}PR\cdot PS\cdot\sin\alpha\cdot d$$
$$+\frac{1}{6}PQ\cdot PS\cdot\sin\alpha\cdot d.$$

另一方面，四面体 $PQRS$ 又可以看做是以 Q 为顶点，以 $\triangle PRS$ 为底面的三棱锥 $Q-PRS$，设 PA 与面 PBC 的交角为 θ，则该三棱锥的高是 $PQ\sin\theta$.

于是，又有

$$V_{PQRS}=V_{Q-RPS}=\frac{1}{6}PR\cdot PS\cdot\sin\alpha\cdot PQ\cdot\sin\theta.$$

故　$$PQ\cdot PR\cdot d+PR\cdot PS\cdot d+PS\cdot PQ\cdot d$$
$$=PR\cdot PS\cdot PQ\cdot\sin\theta,$$

即 $\frac{1}{PS}+\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}=\frac{\sin\theta}{d}$ 为常量.

故选(D).

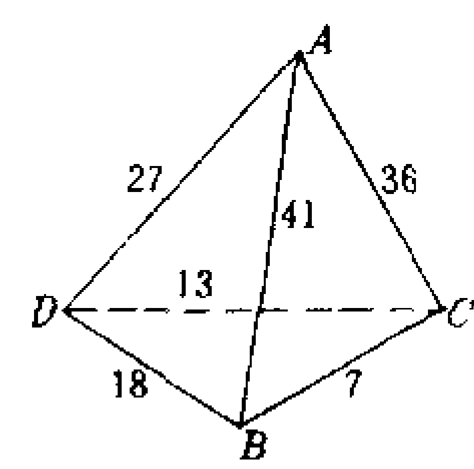
注 若考虑 Q,R,S 在侧棱延长线上,则(B)也对.

第二十三章　多面体

23·1　四面体 $ABCD$ 的六条棱分别为 7,13,18,27,36,41 个长度单位,如果 AB 长为 41,则 CD 的长为

(A) 7.　(B) 13.　(C) 18.　(D) 27.　(E) 36.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)



[解]　由三角形组成条件:

一边小于其他两边和,则这些棱长只能按右图所示方式组合.

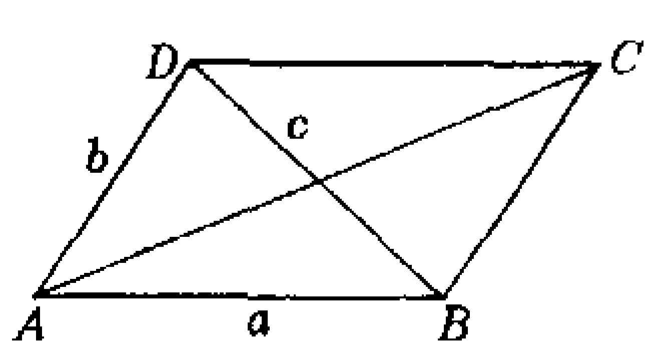
故选(B).

23·2　如果四面体的每一个面都不是等腰三角形,那么其长度不等的棱的条数最少为

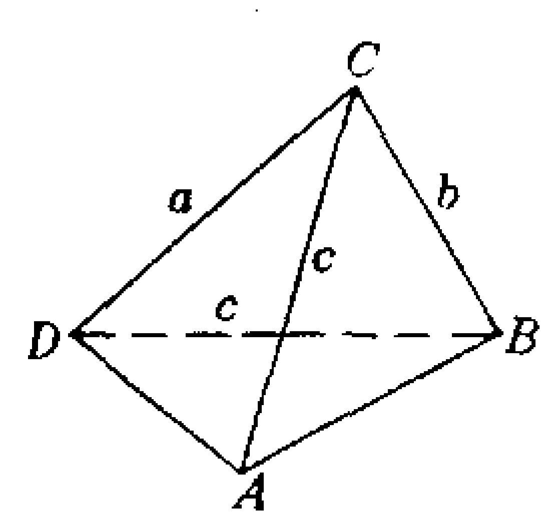
(A) 3.　(B) 4.　(C) 5.　(D) 6.

(中国高中数学联赛,1986 年)

[解]　如图①,作□$ABCD$,使 $AB=a$,$AD=b$,短对角线 $BD=c$ (a,b,c 互不相等).



图①



图②

固定△ABD,把△BCD 沿 BD 边折起来,折至 $AC=c$,即可得图②所示四面体,它的每面都不是等腰三角形,仅有三条长度不等的棱.

故选(A).

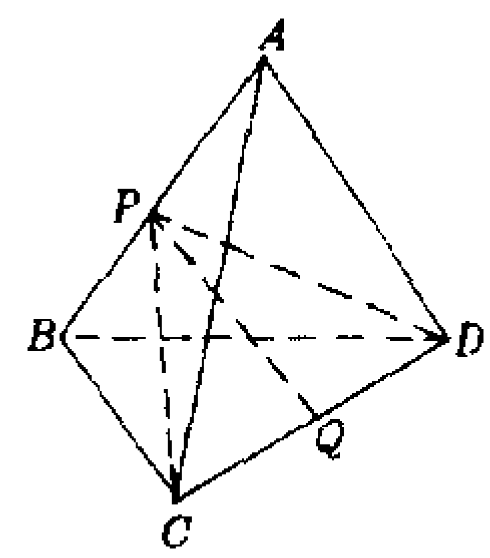
23·3　四面体 $ABCD$ 的各棱长均为 1，P 为棱 AB 中点，Q 为棱 CD 中点.则线段 PQ 的长是

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（北京市高中数学竞赛，1987 年）

［解］　连 PC，PD，则 $PC = PD$.（全等的等边三角形的中线相等）.

因此 PQ 为等腰三角形 PCD 底边 CD 上的中线，它也是底边上的高线，即 $PQ \perp CD$（如图）.



容易计算　$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$CQ = \frac{1}{2}$，

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选(D).

23·4　在正方体的 8 个顶点、12 条棱的中点、6 个面的中心及正方体的中心共 27 个点中，共线的三点组的个数是

(A)57.　　(B)49.　　(C)43.　　(D)37.

（中国高中数学联赛，1998 年）

［解］　两端点皆为顶点的共线三点组共有 $\frac{8 \times 7}{2} = 28$(个)；

两端点皆为面的中心的共线三点组共有 $\frac{6 \times 1}{2} = 3$(个)；

两端点皆为各棱中点的共线三点组共有 $\frac{12 \times 3}{2} = 18$(个)，且没有别的类型的共线三点组.

所以题设诸点中共线的三点组总共有 $28 + 3 + 18 = 49$ 个.

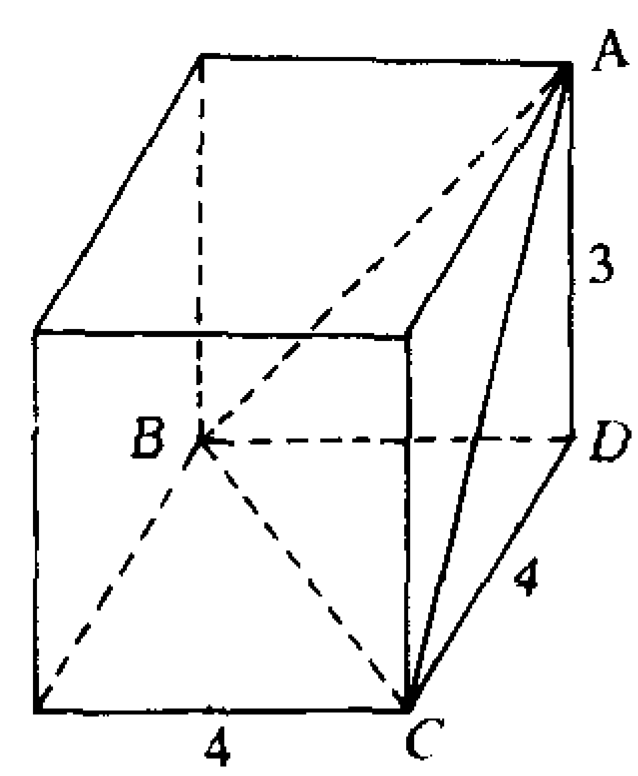
故选(B).

23·5　一个 $4 \times 4 \times 3$ 的长方体，顶点 A，B，C 与 D 相邻，则点 D 到平面 ABC 的距离最接近

(A)1.6.　　(B)1.9.　　(C)2.1.

(D)2.7.　　(E)2.9.

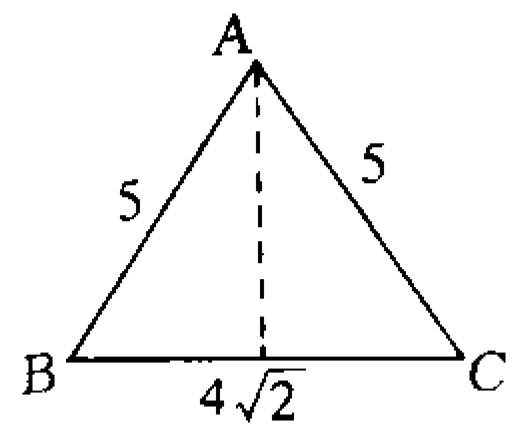
（第 47 届美国高中数学考试，1996 年）



［解］　D 到平面 ABC 的距离即为三棱锥 $D-ABC$ 顶点 D 在底面 ABC 上的高 h 长.

一方面 $V_{D-ABC}=\frac{1}{6}V_{长方体}=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 4\cdot 3=8$,

另一方面 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h$,



而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=2\sqrt{34}$,

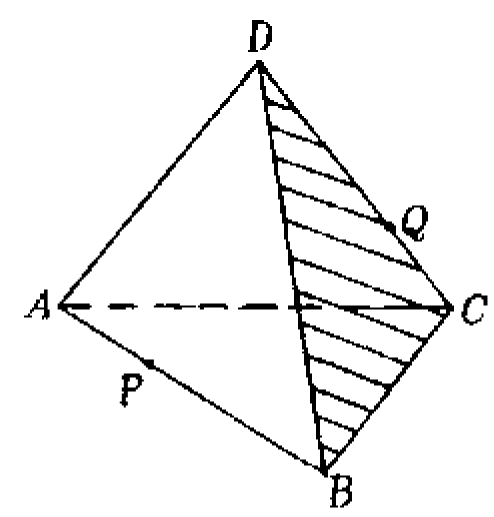
从而 $h=\frac{3V}{S_{\triangle ABC}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}\approx 2.1$

故选(C).

23·6 以 A,B,C,D 为顶点的正四面体的每边棱长是 1. 点 P 在棱 AB 上,点 Q 在棱 CD 上. 找出在点 P 和 Q 之间的最短的可能距离

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 因为点到直线的最短路线是从这点所到直线的垂线段,所以所求的距离的极小值可由对称性得到.

即分别选择 AB 和 CD 的中点为 P 和 Q,

因为 PC 和 PD 分别是等边三角形 ABC 和 ABD 的高,则

$$PC=PD=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又因为 Q 是 DC 边的中点,有 $QC=\frac{1}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CPQ$ 中,由勾股定理得

$$PQ=\sqrt{PC^2-QC^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选(C).

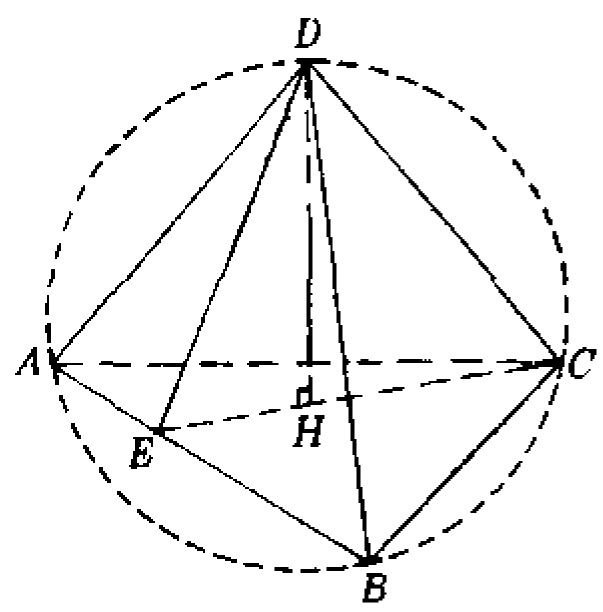
23·7 正四面体 $ABCD$ 的四个顶点在半径为 R 的球面上,则 AB 的长为

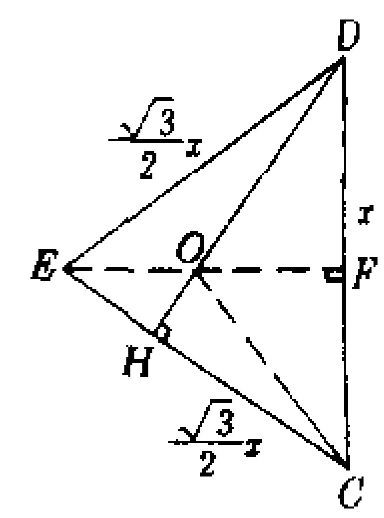
(A) $\sqrt{2}R$. (B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$. (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}R$. (D) $\frac{3\sqrt{6}}{4}R$.

(中国山西省太原市高中数学竞赛,1990 年)

[解] 过 D,C 作正四面体中截面 DEC，若设 $AB=x$，易算得

$$DE=CE=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$





若 $DH\perp EC$，$EF\perp DC$，

由 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}EC\cdot DH=\frac{1}{2}DC\cdot EF$，

则 $DH=\sqrt{\frac{2}{3}}x$，同时在 $\triangle DHC$ 中可求 $HC=\sqrt{\frac{1}{3}}x$.

设球心为 O，则由 $OD=OC=R$，有

$$OD^2=OC^2=OH^2+HC^2,$$

若设 $OD=t\cdot DH$，　则　$OH=(1-t)DH$.

$$\therefore\quad t^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}x\right)^2+(1-t)^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2.$$

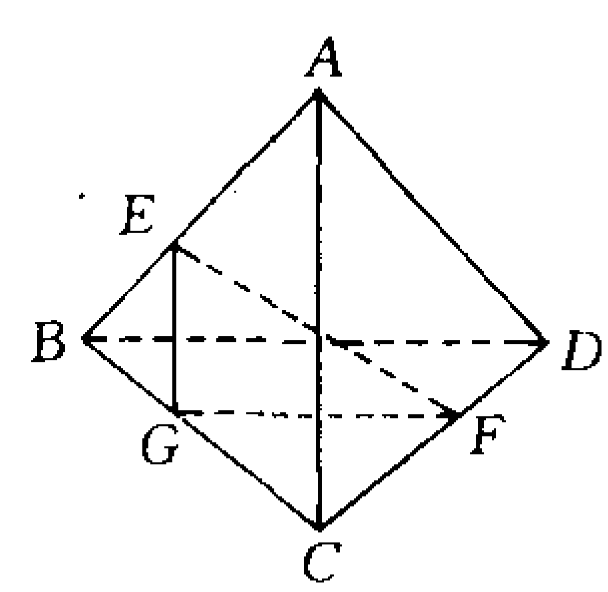
解得 $t=\frac{3}{4}$.　即　$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}x=R$，

$$\therefore\qquad x=\frac{2\sqrt{6}}{3}R.$$

故选(C).

23·8　如图，正四面体 $ABCD$ 中，E 在棱 AB 上，F 在棱 CD 上，且使得

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda\quad(0<\lambda<+\infty).$$



记 $f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$，其中 α_λ 表示 EF 与 AC 所成的角，β_λ 表示 EF 与 BD 所成的角. 则

(A) $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.

(B) $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少.

(C) $f(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 单调增加，而在 $(1,+\infty)$ 单调减少.

(D) $f(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 为常数.

（中国高中数学联赛，1997年）

[解] 因 $ABCD$ 是正四面体，故 $AC \perp BD$. 作 $EG // AC$ 交 BC 于 G，连结 GF.

则 $\alpha_\lambda = \angle GEF$，且 $\dfrac{CG}{GB} = \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{CF}{FD}$.

有 $GF // BD$.

故 $GF \perp EG$，且 $\beta_\lambda = \angle EFG$.

$$\therefore \quad f(\lambda) = \alpha_\lambda + \beta_\lambda = \angle GEF + \angle EFG = 180^\circ - \angle EGF = 90^\circ.$$

故选(D).

23·9 四面体 $ABCD$ 中，$BD = DC = CB = \sqrt{2}$，$AC = \sqrt{3}$，$AB = AD = 1$. M 为 CD 中点. 则异面直线 BM 与 AC 所成角的余弦值是

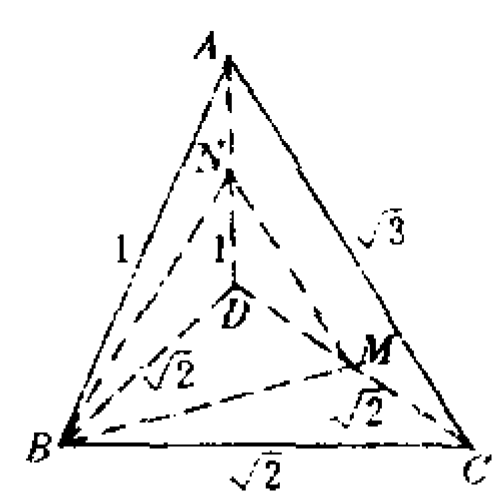
(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

（中国四川省高中数学竞赛，1993年）

[解] 取 AD 中点 N，连 BN，MN. 则由中位线定理知

$$MN // AC, \quad MN = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\angle BMN$ 即为异面直线 BM 与 AC 所成的角.



设 $\angle BMN = \alpha$.

由 $\triangle ABD$ 的边长知 $\angle BAD = 90^\circ$.

在直角 $\triangle ABN$ 中，

$$BN = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

BM 为正 $\triangle BCD$ 中 DC 边上的高，$BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

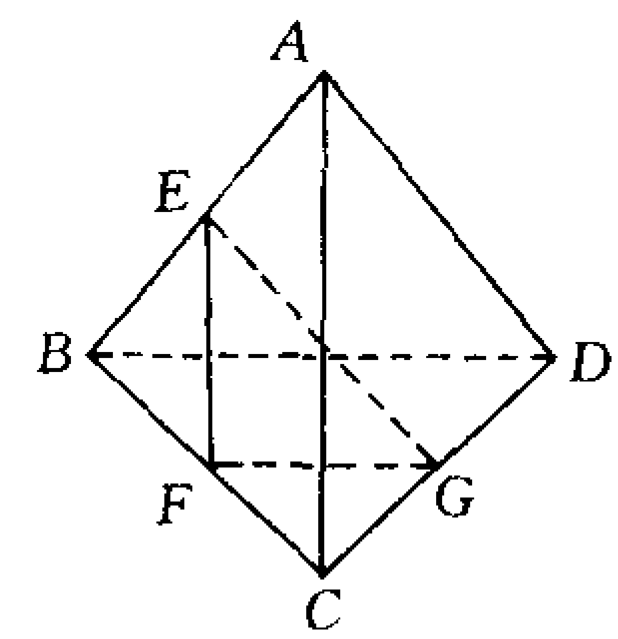
在 $\triangle BMN$ 中应用余弦定理得

$$\cos\alpha = \cos\angle BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2 \cdot BM \cdot MN} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

故选(A).

23·10　设 E、F、G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD 的中点,则二面角 $C-FG-E$ 的大小是



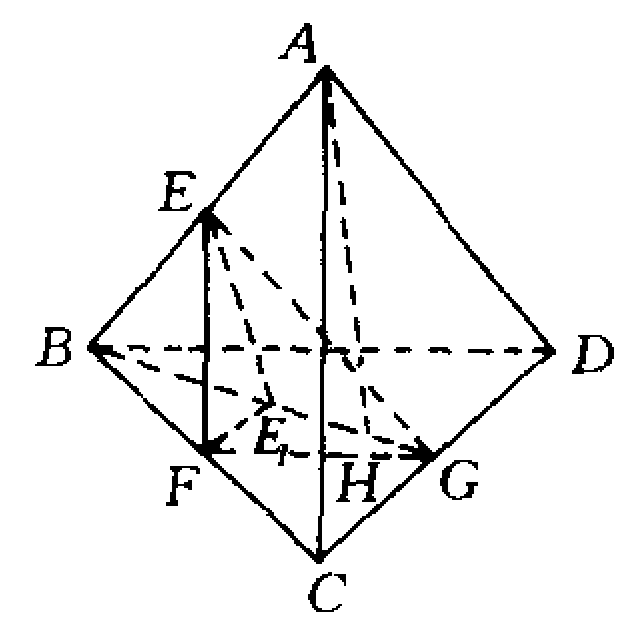
(A)$\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(B)$\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(C)$\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

(D)$\pi-\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(中国高中数学联赛,1998年)



[解]　如图,作 $EE_1\perp$ 平面 BCD,则 $EE_1\perp BG$.

$\because$　$ABCD$ 是正四面体,

$\therefore$　$AC\perp BD$

又 $\because$　$EF\,/\!/\,AC$,$FG\,/\!/\,BD$,

$\therefore$　$EF\perp FG$.

故　$E_1F\perp FG$.

所以 $\angle EFE_1$ 是二面角 $E-FG-B$ 的平面角,记为 α.

设正四面体 $ABCD$ 的棱长为1,则它的高

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\therefore$　$$EE_1=\frac{1}{2}AH=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

又　$$EF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2},$$

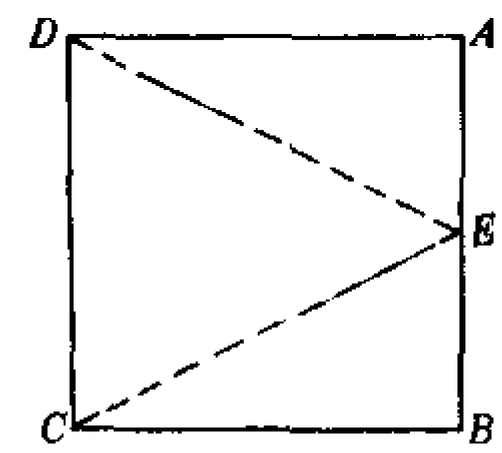
$\therefore$　$$\alpha=\arcsin\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

从而,二面角 $C-FG-E$ 的大小为

$$\pi - \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选(D).

23·11　边长为2的正方形$ABCD$中,E是AB中点.现沿EC,ED折叠,使AE与BE重合,A点与B点重合,命名为O点.则四面体$O-CDE$的体积是



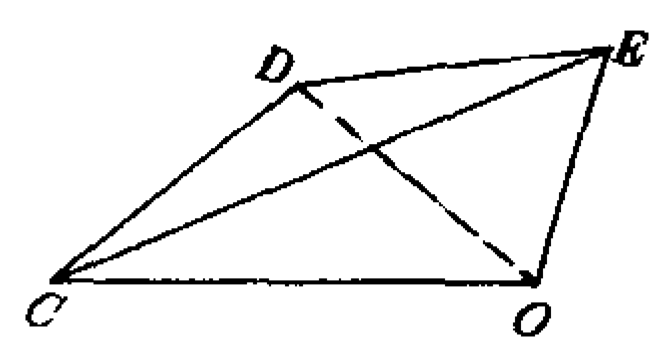
(A) $\sqrt{3}$.　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(中国安徽省芜湖市高中数学竞赛,1990年)

[解]　折叠后得如图所示的四面体,其底面OCD为边长是2的正三角形,则其面积为$\sqrt{3}$.

又　$OE \perp OC$,$OE \perp OD$,则$OE \perp$平面OCD,即EO为四面体底面OCD的高,且　$EO = 1$.



则　$V_{O-CDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle OCD} \cdot h$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选(C).

23·12　一个正棱锥体的底是一个边长为6的等边三角形,其余每条棱长$\sqrt{15}$,这个正棱锥体的体积是

(A)9.　　(B) $\frac{9}{2}$.　　(C) $\frac{27}{2}$.

(D) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.　　(E) 这些都不对.

(第24届美国高中数学考试,1973年)

[解]　棱锥体的体积等于三分之一底面积乘高.

又边为6的等边的底面积是$3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

以棱锥体的棱长$\sqrt{15}$为斜边,以从底面的中心到底的一个顶点的距离$2\sqrt{3}$为一条直角边构成一个直角三角形,棱锥高h是这个直角三角形的另一条直角边.

故　$$h^2 = (\sqrt{15})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 3,$$

$$h = \sqrt{3},$$

则 $V = \frac{1}{3}\cdot$(底面积)$\cdot$(高) $= \frac{1}{3}(9\sqrt{3})\sqrt{3} = 9.$

故选(A).

23·13 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$ 在其定义域上

(A) 是增函数但无最大值.　　(B) 是增函数且有最大值.

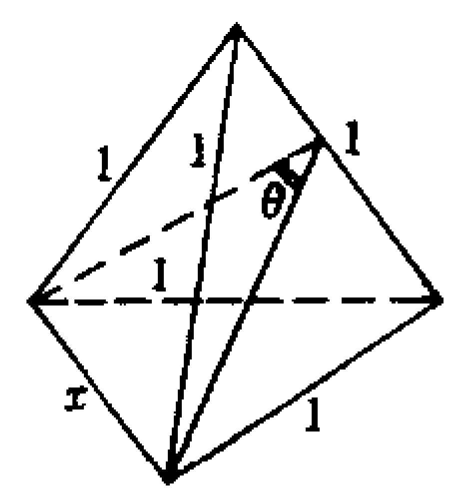
(C) 不是增函数且无最大值.　　(D) 不是增函数但有最大值.

（中国高中数学联赛，1984 年）

[解] 四面体中三条棱长均为 1 的两个面的夹角 θ 的大小与 x 有关，θ 越大，x 越大.

当 $0° < \theta < 90°$ 时，$F(x)$ 随 x 增大而增大；

当 $\theta = 90°$ 时，两个面垂直时，四面体体积最大为 $\frac{1}{8}$，这时 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$；



当 $180° > \theta > 90°$ 时，四面体的体积 $F(x)$ 将随角度大增而减小，即此时 x 越大，$F(x)$ 越小.

综上可知 $F(x)$ 在其定义域内不是增函数，但有最大值.

故选(D).

23·14 设四面体四个面的面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4，它们的最大值为 S，记 $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{4} S_i}{S}$，则 λ 一定满足

(A) $2 < \lambda \leqslant 4$.　　(B) $3 < \lambda < 4$.

(C) $2.5 < \lambda \leqslant 4.5$.　　(D) $3.5 < \lambda < 5.5$.

（中国高中数学联赛，1992 年）

[解] $\because$ $S_i \leqslant S(i = 1,2,3,4)$,

$\therefore$ $\sum_{i=1}^{4} S_i \leqslant 4S$.

从而 $$\frac{\sum_{i=1}^{4} S_i}{S} \leqslant 4. \quad ⊛$$

特别地，当四面体为正四面体时，⊛ 式中等号成立，从而否定(B).

考察侧面与底面所成二面角的平面角为 45° 的任一正三棱锥,以 S_4 表示其底面面积,则

$$S = S_4 = (S_1 + S_2 + S_3)\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 + S_2 + S_3),$$

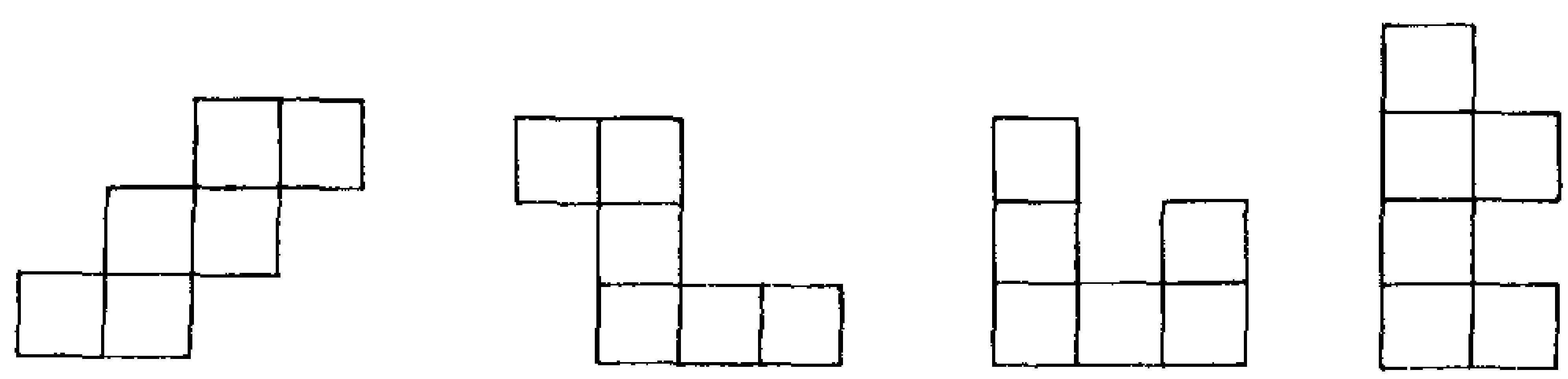
于是 $$S_1 + S_2 + S_3 = \sqrt{2}S,$$

即 $$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (1 + \sqrt{2})S.$$

则 $2 < \lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} S_i}{S} = 1 + \sqrt{2} < 2.5$, 从而否定$(C)$,$(D)$.

故选(A).

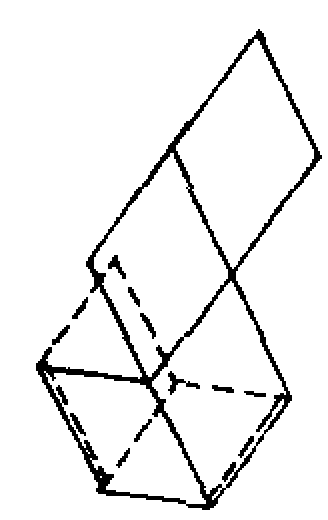
23·15 下列各图是由全等的正方形组成的图形,能围成立方体的图形是



(A) (B) (C) (D)

(中国福建省初中数学竞赛,1984 年)

[解] 不难将(A)中左下角四个方格围拢成右图样子,余下的不难把它围成一个立方体.



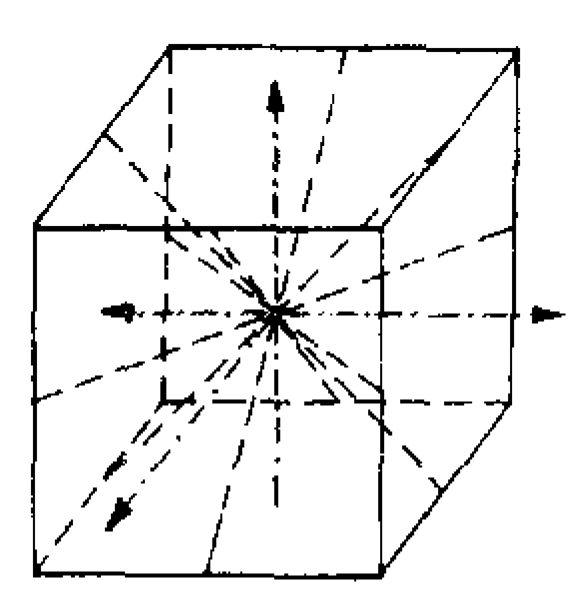
故选(A).

23·16 正方体的对称轴共有 n 条,则 n 等于

(A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 13.

(中国北京市高中数学竞赛,1985 年)

[解] 如图,连结正方体对面中心的直线,共三条,是三条对称轴.



连结正方体对面上的对棱中点的直线也是对称轴,共计六条.

总计,正方体的对称轴有九条.

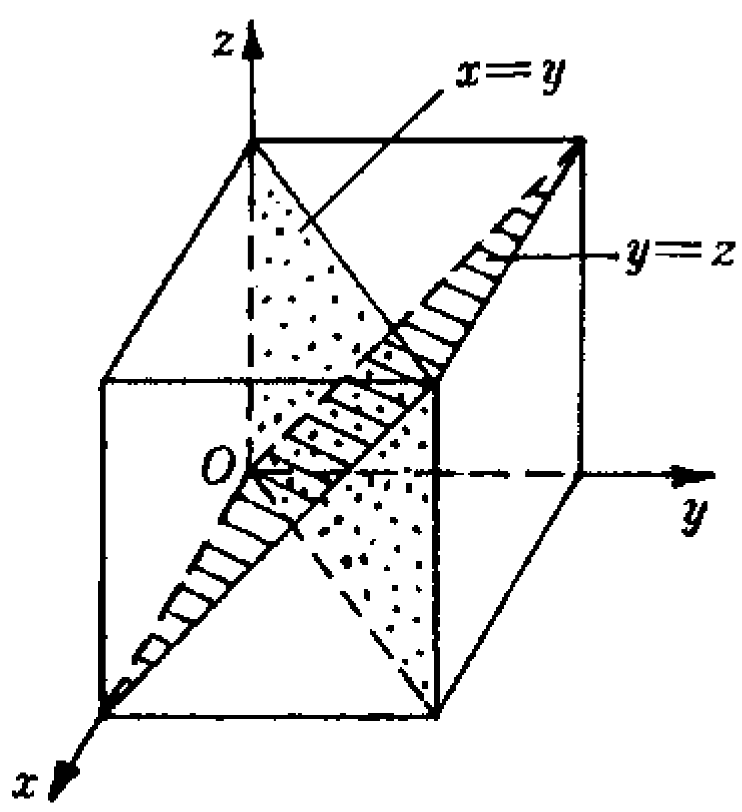
故选(C).

23·17　立方体 $C=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x,y,z\leqslant 1\}$ 被平面 $x=y$, $y=z$, 　$z=x$ 切开后分成的部分数是

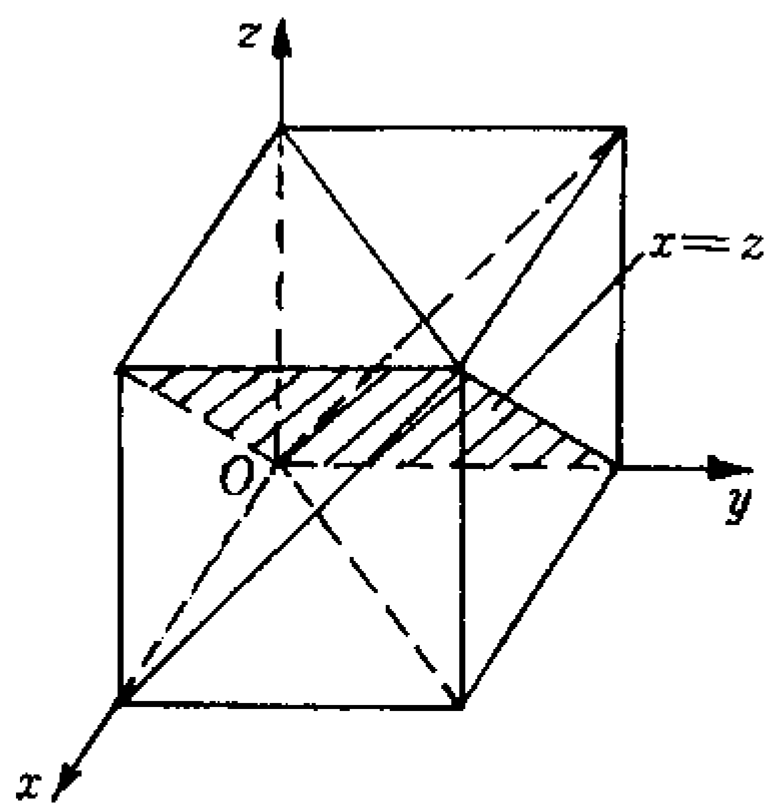
(A) 5.　　(B) 6.　　(C) 7.　　(D) 8.　　(E) 9.

（第38届美国高中数学考试,1987年）

［解］　显然,C 为第一卦限的单位立方体.



图①



图②

当它被平面 $x=y$, 　$y=z$ 剖分时,分成4部分(见下图①);当再用平面 $z=x$ 去切时,其中的两部分一分为二(见图②).

这样,立方体被三平面切成6部分.

故选(B).

23·18　由一个正方体的三个顶点构成的正三角形的个数为

(A) 4.　　(B) 8.　　(C) 12.　　(D) 24.

（中国高中数学联赛,1991年）

［解］　公有一个顶点的三个两两互相垂直的面上,各有一条对角线共同组成惟一的正三角形.

因此,在正三角形集与顶点集之间可以建立"一一对应"关系.

一个正方体共有8个顶点,因此恰有8个正三角形.

故选(B).

23·19　以长方体8个顶点中的任意3个为顶点的所有三角形中,锐角三角形的个数为

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 8.　　(D) 24.

（中国高中数学联赛,1989年）

［解］　易知,以长方体的8个顶点中的任意3个为顶点的三角形

共有 C_8^3 个，且这些三角形只能是直角三角形或锐角三角形.

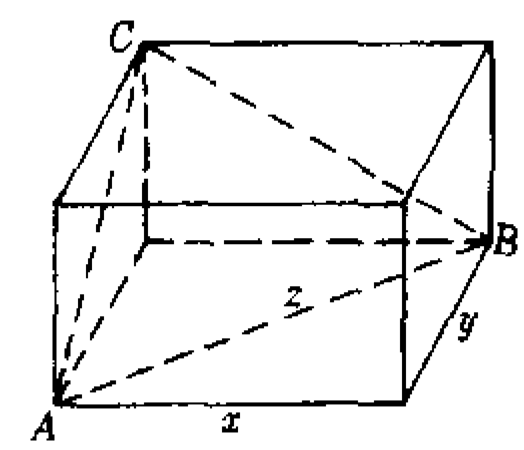
而以长方体的每个顶点为直角顶点的三角形都是 6 个，所以在 C_8^3 个三角形中共有 $6 \cdot 8 = 48$(个) 直角三角形.

从而所求锐角三角形的个数为 $C_8^3 - 48 = 8$.

故选(C).

注 对“以长方体顶点组成的三角形只能是直角或锐角三角形”的结论稍作解释：

对于三边中有以棱为边的三角形显然是直角三角形；而无以棱为边的三角形是锐角三角形，如图，有



$$AB^2 = x^2 + y^2,\quad BC^2 = x^2 + z^2,\quad AC^2 = y^2 + z^2.$$

由余弦定理有

$$x^2 + y^2 = (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) - 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2}\cos C,$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + z^2}} > 0.$$

又 $0° < \angle C < 180°$,

则 $\angle C$ 为锐角. 同理 $\angle A, \angle B$ 亦为锐角.

故选(C).

23·20　某长方体的体积为 8cm^3，全表面积为 32cm^2，且其长，宽，高成等比级数. 则此立方体的全部棱长之和(cm) 为

(A) 28.　　(B) 32.　　(C) 36.　　(D) 40.　　(E)44.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

[解]　设长方体长，宽，高分别为 $\frac{x}{q}, x, xq$，依题意有

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8, & ① \\ 2(\frac{x}{q} \cdot x + x \cdot xq + \frac{x}{q} \cdot xq) = 32, & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $x = 2$，代入 ② 式有 $1 + q + \frac{1}{q} = 4$，而

$$4(\frac{x}{q} + x + xq) = 4(1 + q + \frac{1}{q})x = 32.$$

故选(B).

23·21　下面的集合中三个元素不可能分别是长方体(一只“盒子”) 的三条外对角线的长度(一条外对角线就是这盒子的一个矩形面

的一条对角线)是

(A) $\{4,5,6\}$.　　(B) $\{4,5,7\}$.　　(C) $\{4,6,7\}$.

(D) $\{5,6,7\}$.　　(E) $\{5,7,8\}$.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解] 令 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 表示长方体三条边的长度. $p,q,r(p\leqslant q\leqslant r)$ 表示三个面对角线的长度. 由勾股定理,得

$$p^2=a^2+b^2,\quad q^2=a^2+c^2,\quad r^2=b^2+c^2.$$

则
$$r^2=p^2+q^2-2a^2<p^2+q^2.$$

经验证,只有 $\{4,5,7\}$ 不满足这个关系.

故选(B).

23·22　下列各组数中,有一组数不可能是某一四面体的四条高,这组数是

(A) $1,\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(B) $4,\frac{25\sqrt{3}}{3},\ \frac{25\sqrt{3}}{3},\ \frac{25\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{30}}{2},\ \frac{\sqrt{30}}{2},\ \frac{\sqrt{30}}{2}$.

(D) $2,\frac{6\sqrt{5}}{5},\ \frac{6\sqrt{5}}{5},\ \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1990 年)

[解] 设四面体体积为 V,四个面面积为 S_1,S_2,S_3,S_4,其上的高 h_1,h_2,h_3,h_4,这样

$$V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4,$$

即
$$S_1h_1=S_2h_2=S_3h_3=S_4h_4,$$

则
$$S_1:S_2:S_3:S_4=\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}:\frac{1}{h_3}:\frac{1}{h_4},$$

对于(B)来讲,

$$\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}:\frac{1}{h_3}:\frac{1}{h_4}=\frac{1}{4}:\frac{\sqrt{3}}{25}:\frac{\sqrt{3}}{25}:\frac{\sqrt{3}}{25},$$

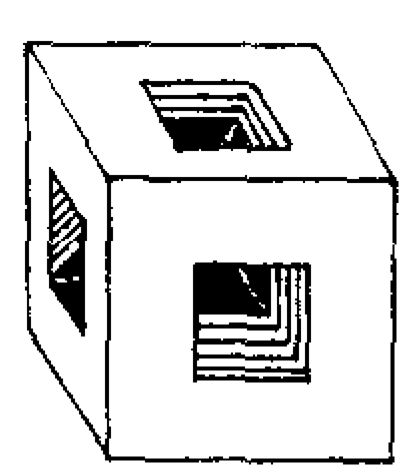
又
$$\frac{1}{4}=\frac{6}{24}>\frac{6}{25}>\frac{3\sqrt{3}}{25},$$

此即说若上述一组数作为四面体的高,则它的一面面积大于其余三面

面积和，这不可能．则(B)组中数不能是四面体的高．

故选(B)．

23·23　如图，一个边长为 3 米的正方体木块，在每个面的中心开一个边长为 1 米的正方形洞，一直打穿．这个洞的边分别平行于正方体相应的边．问此物体全部的表面积(包括内部)以平方米计算是



(A) 54.　　(B) 72.　　(C) 76.

(D) 84.　　(E) 86.

(第 33 届美国高中数学考试，1982 年)

[解]　每个面的中心减去一个小正方形的面积，所以它们的面积和为

$$6\cdot 3^2-6=48,$$

中间六个小的正方形洞，每个洞的表面积为 4，所以内外的表面积之和为

$$48+4\cdot 6=72.$$

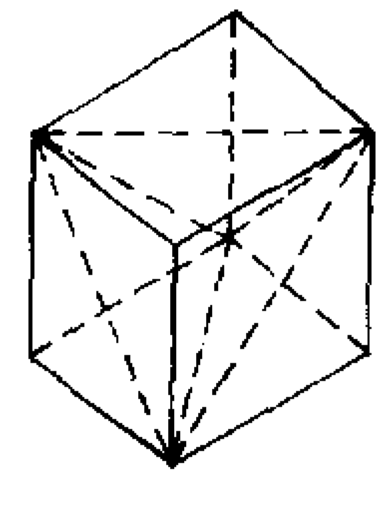
故选(B)．

23·24　立方体八个顶点中有四个恰是正四面体的顶点．找出立方体的表面积与四面体的表面积之比值

(A) $\sqrt{2}$.　　(B) $\sqrt{3}$.　　(C) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.　　(D) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.　　(E) 2.

(第 31 届美国高中数学考试，1980 年)

[解]　四面体的棱是立方体面的对角线，所以若 s 是立方体的棱长，四面体的每一面的面积是



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(s\sqrt{2})\cdot s\sqrt{2}$$
$$=\frac{(s\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{s^2\sqrt{3}}{2},$$

所求的比是 $$\frac{6\cdot s^2}{4\cdot\left(\frac{s^2\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{3}.$$

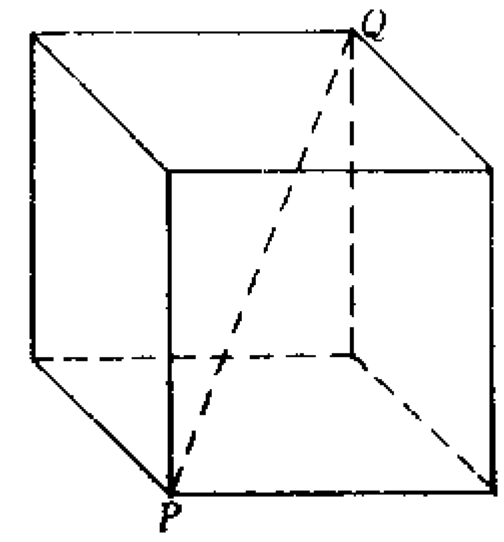
故选(B)．

23·25　如图，PQ 是一个正方体的一条对角线．如果 PQ 的长度为 a，那么此正方体的表面积是

(A) $2a^2$.　　　　(B) $2\sqrt{2}a^2$.

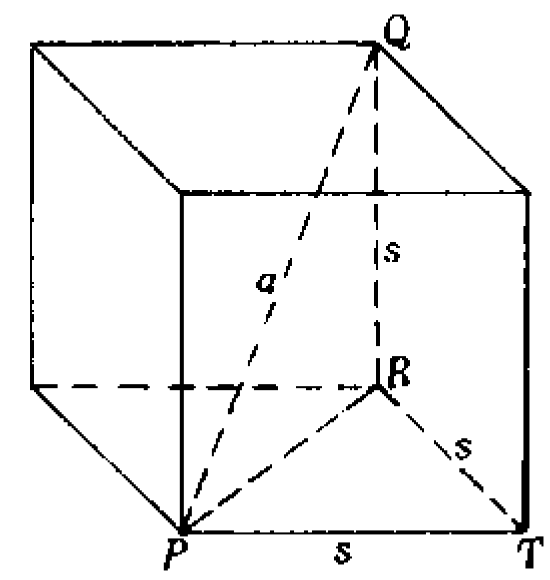
(C) $2\sqrt{3}a^2$.　　　　(D) $3\sqrt{3}a^2$.

(E) $6a^2$.



(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解]　如图,设 s 为正方体的边长,T 和 R 是正方体的两个顶点.



在 $\triangle PQR$ 和 $\triangle PRT$ 之中,由勾股定理,有

$$a^2 - s^2 = (PR)^2 = s^2 + s^2,$$

即

$$a^2 = 3s^2.$$

所以立方体表面积是　$6s^2 = 2a^2$.

故选(A).

23·26　长方体的侧,前,底面的面积分别为 12 平方英寸,8 平方英寸,6 平方英寸时,则其体积是

(A) 576 立方英寸.　　　　(B) 24 立方英寸.

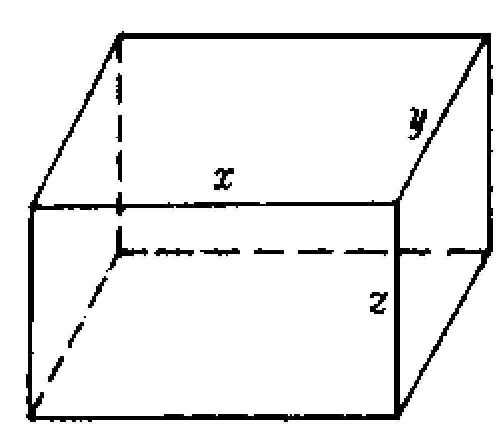
(C) 9 立方英寸.　　　　(D) 104 立方英寸.

(E) 以上答案都不正确.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解]　设长方体长,宽,高分别为 x,y,z,则长方体体积

$$\begin{aligned} V &= xyz \\ &= \sqrt{x^2y^2z^2} \\ &= \sqrt{xy \cdot yz \cdot zx} \\ &= \sqrt{12 \cdot 8 \cdot 6} = 24. \end{aligned}$$



故选(B).

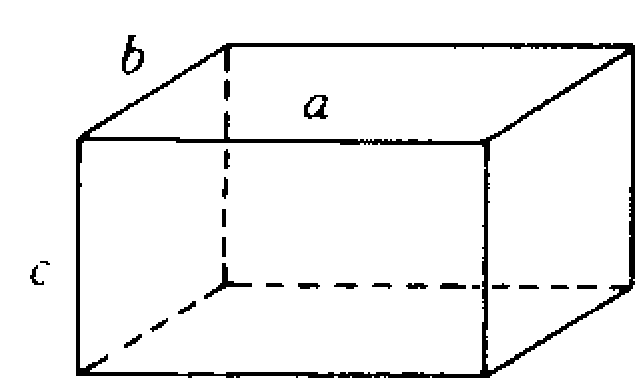
23·27　一长 方体的盒子 12 条棱长总和为 140,又它的对角线长为 21,则该盒子的表面积是

(A)776.　(B)784.　(C)798.　(D)800.　(E)812.

(第 47 届美国高中数学考试,1996 年)

[解]　设长方体,长,宽,高分别为 a,b,c.由题设

$$\begin{cases} 4(a+b+c) = 140, \\ a^2+b^2+c^2 = 21^2. \end{cases}$$



从而　$a+b+c = 35$.

第二十三章　多面体

$$\therefore \quad S_{表}=2(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$
$$=35^2-21^2=784.$$

故选(B).

23·28　正方体表面正方形的对角线中存在异面的对角线,如果其中两条异面直线的距离是1,那么正方体的体积是

(A) 1.　　　　　　(B) $3\sqrt{3}$.

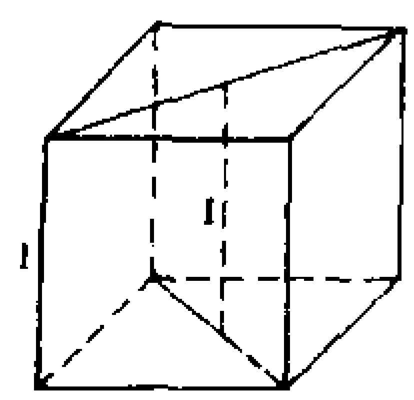
(C) 1 或 $3\sqrt{3}$.　　　　(D) $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}$.

(第2届"希望杯"全国数学邀请赛,1991年)

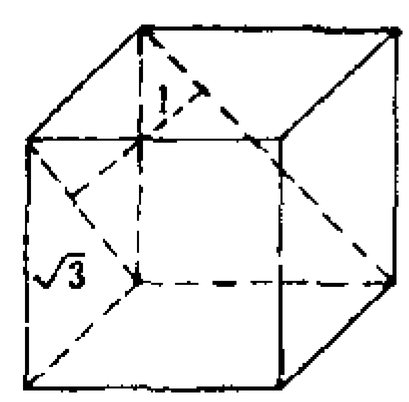
[解]　分两种情形讨论:

(1) 若两异面对角线处于正方体相对面上(见图①), 知正方体棱长为1,则

$$V_{正方体}=1^3=1.$$



图①



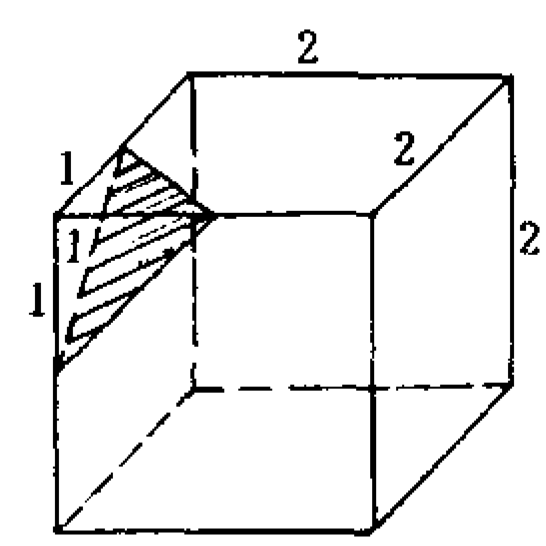
图②

(2) 若两异面对角线处于正方体相邻的两面(见图②),可求得正方体棱长 $a=\sqrt{3}$.这样

$$V_{正方体}=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}.$$

故选(C).

23·29　对于正方体,它的每个顶点与交于此顶点的三条棱的中点截得一个四面体,正方体切去这八个四面体的剩余部分叫做残缺正方体,这个残缺正方体与原正方体的体积比最接近于



(A) 75%.　　(B) 78%.　　(C) 81%.

(D) 84%.　　(E) 87%.

(第43届美国高中数学考试,1992年)

[解]　设正方体棱长为2.则每个小正四面体体积为

$$V_{正四面体}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)\cdot1=\frac{1}{6}.$$

又　$V_{正方体}=2^3=8$,则

$$V_{残缺正方体}:V_{正方体}=(8-\frac{8}{6}):8=5:6\approx 84\%.$$

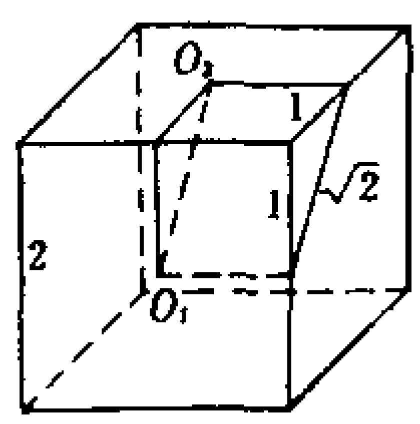
故选(D).

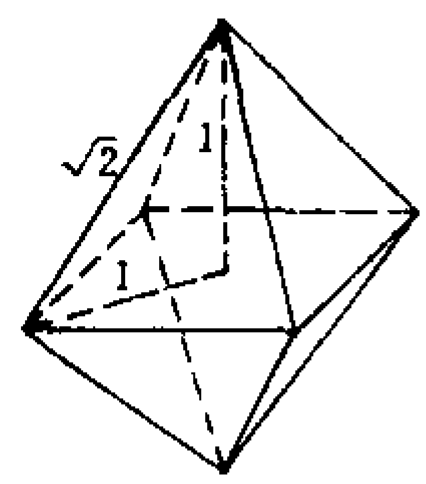
23·30　连接正方体相邻面的中心,得到一个正八面体.那么,这个八面体与正方体的体积比是

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$.　(B) $\frac{\sqrt{6}}{16}$.　(C) $\frac{1}{6}$.　(D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.　(E) $\frac{1}{4}$.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解]　设立方体棱长为 2,如图易求出内接正八面体棱长为$\sqrt{2}$.而棱长为$\sqrt{2}$的正八面体体积为 $V_1=\frac{4}{3}$.





而正方体体积为　$V_0=8$.

$\therefore\quad V_1:V_0=\frac{4}{3}:8=1:6.$

故选(C).

23·31　在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,P,M,N 分别是棱 AA_1, BC,CC_1 的中点,这三个点确定的平面与正方体表面的交线构成的图形是

(A) 菱形.　　(B) 正五边形.

(C) 正六边形.　　(D) 只是边相等的六边形.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

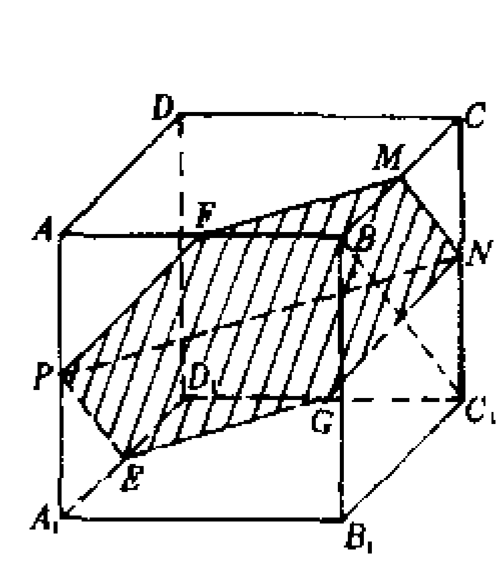
[解]　如图,连 MN,BC_1,易证 $MN\parallel BC_1$,且 $MN=\frac{1}{2}BC_1$.

取 A_1D_1 中点 E, 则 $PE\ \underline{\mathbin{/\!/}}\ \frac{1}{2}AD_1$.

而　$AD_1\ \underline{\mathbin{/\!/}}\ BC_1\ \underline{\mathbin{/\!/}}\ 2MN$, 则

$PE\ \underline{\mathbin{/\!/}}\ MN$,知 E 在截面上.

再取 AB,D_1C_1 中点 F,G,连 PN,同理可有



$FM \mathrel{\underline{\parallel}} EG \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}PN$,即点 F,G 亦在截面上.

综上,知截面是六边形 $PFMNGE$,且其为正六边形.

故选(C).

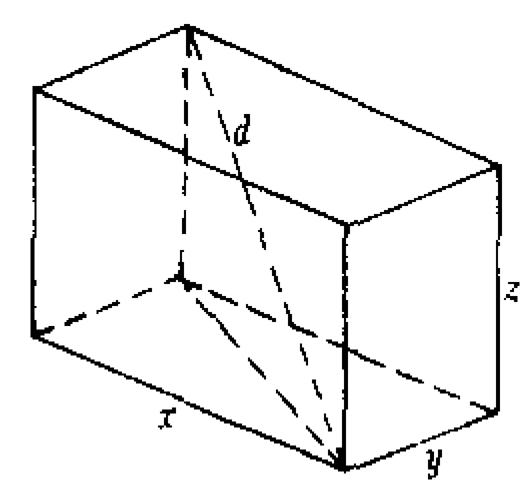
23·32 一个长方体的表面积为 22cm^2,并且它的所有棱的总长度为 24cm.那么它的对角线的长度(按 cm 计)是

(A) $\sqrt{11}$. (B) $\sqrt{12}$. (C) $\sqrt{13}$.

(D) $\sqrt{14}$. (E) 不能被惟一确定.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解] 如图所示,x,y,z 分别是此长方体的长,宽,高,又 d 为它的一条对角线.于是有



$$\begin{cases}2xy+2xz+2yz=22, & ①\\ 4x+4y+4z=24, & ②\\ d^2=x^2+y^2+z^2 & ③\end{cases}$$

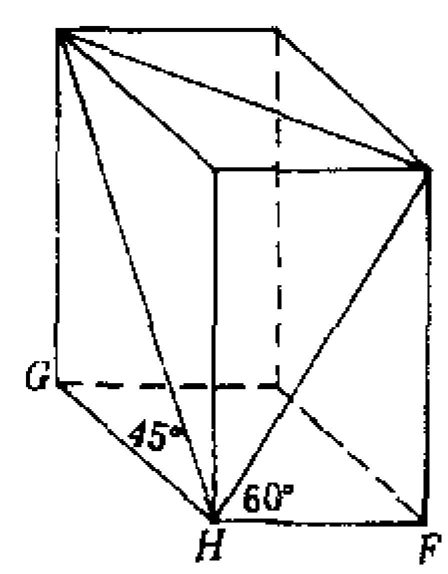
由 ② 得 $(x+y+z)^2=6^2$,

或 $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=36$,

将 ① 和 ③ 代入上式,得到 $d^2+22=36$, 即 $d=\sqrt{14}$.

故选(D).

23·33 如图,在长方体中 $\angle DHG=45°$,$\angle FHB=60°$,那么 $\angle BHD$ 的余弦值是



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (E) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解] 设 $HF=1$,则 $BH=\dfrac{HF}{\cos60°}=2$.

因而 $BF^2=BH^2-HF^2=3$, 则 $BF=\sqrt{3}$.

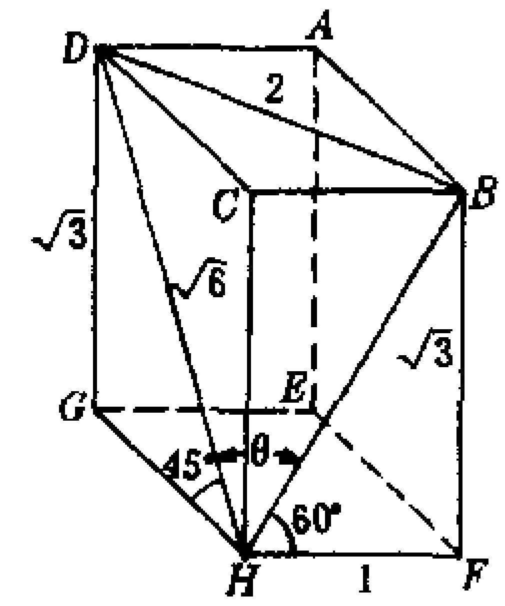
故 $BF=DG=GH=\sqrt{3}$,$DH=\sqrt{6}$.

又因为 $DC=HC=\sqrt{3}$,所以 $\triangle DCB\cong\triangle HCB$,所以 $DB=HB=2$.

因此 $\triangle DBH$ 是等腰三角形,且 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

故选(D).

23·34　一矩形盒子的底面，侧面，前面的面积均为已知，这些面积的乘积等于



(A) 盒子的体积.　　(B) 体积的平方根.

(C) 体积的两倍.　　(D) 体积的平方.

(E) 体积的立方.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解]　设盒子的长，宽，高分别为 x,y,z，则盒子的各侧面面积分别为 xy、yz、zx.

由　$xy\cdot yz\cdot zx=(xyz)^2$，知其为其体积的平方.

故选(D).

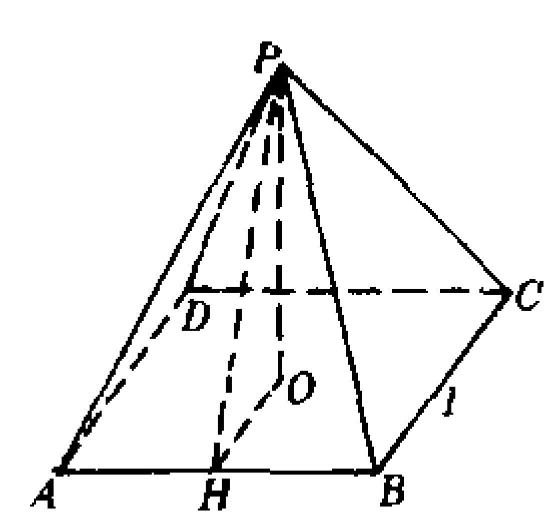
23·35　锥体 P-$ABCD$ 的底 $ABCD$ 是正方形，顶点 P 与 A、B、C、D 等距，如果 $AB=1$，$\angle APB=2\theta$，那么锥体的体积为

(A) $\dfrac{\sin\theta}{6}$.　　(B) $\dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{6}$.　　(C) $\dfrac{1}{6\sin\theta}$.

(D) $\dfrac{1-\sin2\theta}{6}$.　　(E) $\dfrac{\sqrt{\cos2\theta}}{6\sin\theta}$.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解]　作侧面 $\triangle PAB$ 的斜高 PH，又设 O 为底面正方形中心，连结 HO.



由设　$\angle APB=2\theta$，　则 $PH=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta$.

又 $PO\perp OH$，在 Rt$\triangle PHO$ 中，

$$\begin{aligned}PO&=\sqrt{PH^2-HO^2}\\&=\sqrt{(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta)^2-(\frac{1}{2})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta-1}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\cos2\theta}}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

故 $\quad V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{6\sin\theta}.$

故选(E).

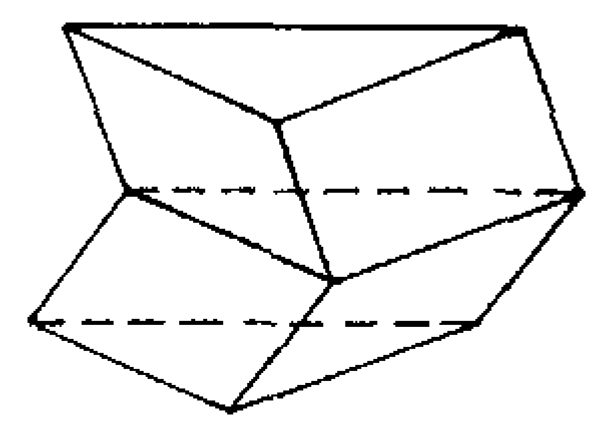
23·36　如果一个多面体有两个面互相平行，其他的面都是平行四边形，那么这个多面体是

(A) 正棱柱.　　(B) 直棱柱.　　(C) 棱柱.

(D) 可能不是棱柱.　　(E) 不可能是棱柱.

（中国北京市高中数学竞赛，1984年）

[解]　显然，棱柱满足题述条件，但满足题设条件的多面体未必是棱柱．如图所示的多面体满足有两个面互相平行，其他面都是平行四边形，但它不是棱柱．故选择结论“可能不是棱柱”．



故选(D).

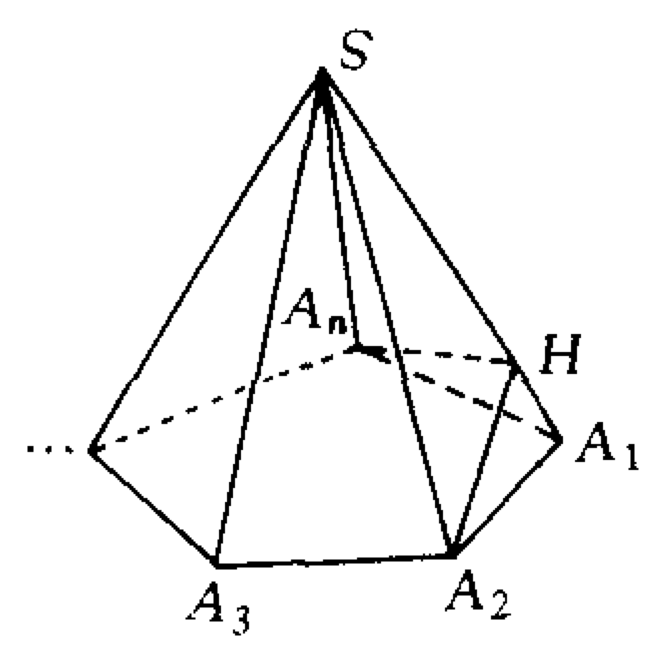
23·37　在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是

(A) $\left(\frac{n-2}{n}\pi,\pi\right)$.　　(B) $\left(\frac{n-1}{n}\pi,\pi\right)$.

(C) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.　　(D) $\left(\frac{n-2}{n}\pi,\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

（中国高中数学联赛，1994年）

[解]　如图，设正 n 棱锥为 $S-A_1A_2\cdots A_n$，不妨设底面正 n 边形固定，顶点 S 运动，相邻两侧面所成二面角的平面角为 $\angle A_2HA_n$.



当 S 向下运动逼近极端位置（即到底面正 n 边形的中心）时，$\angle A_2HA_n$ 趋于平角；

当 S 向上运动，趋向无穷远处，则正 n 棱锥趋近于正 n 棱柱，$\angle A_2HA_n$ 趋于

$$\angle A_2A_1A_n=\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

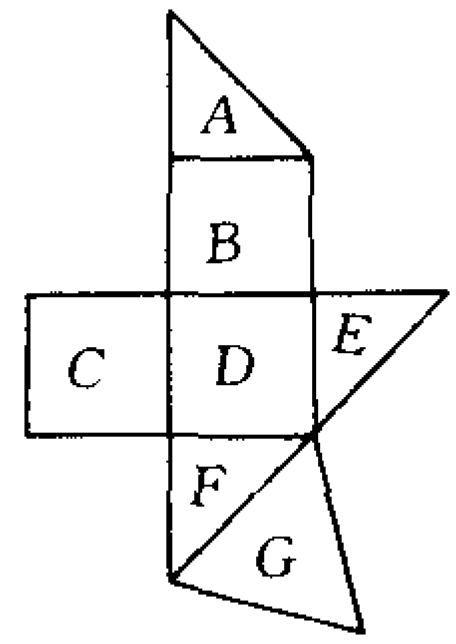
因而 $$\frac{(n-2)}{n}\pi<\angle A_2HA_n<\pi.$$

故选(A).

注　本题也可用取特殊值法解.

23·38　如图，B,C,D 是边长为1的正方形，A,E,F 是等腰直角

三角形,G 是正三角形,此图形沿图中直线可折成一个以这些多边形为面的多面体,则该多面体体积是

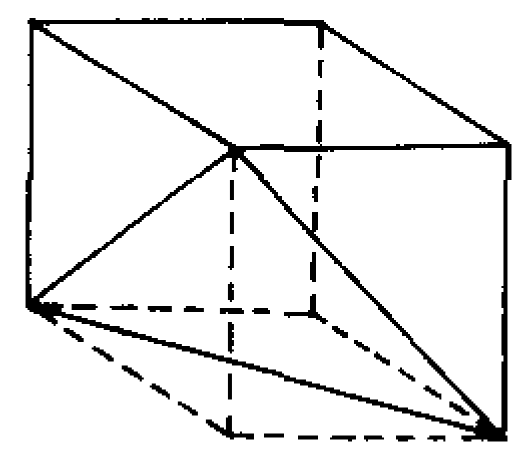


(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $\frac{2}{3}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.

(D) $\frac{5}{6}$.　　(E) $\frac{4}{3}$.

(第 48 届美国高中数学考试,1997 年)

[**解**]　题设图形可折成一个去角的正方形,这个角即一直三棱锥,其体积

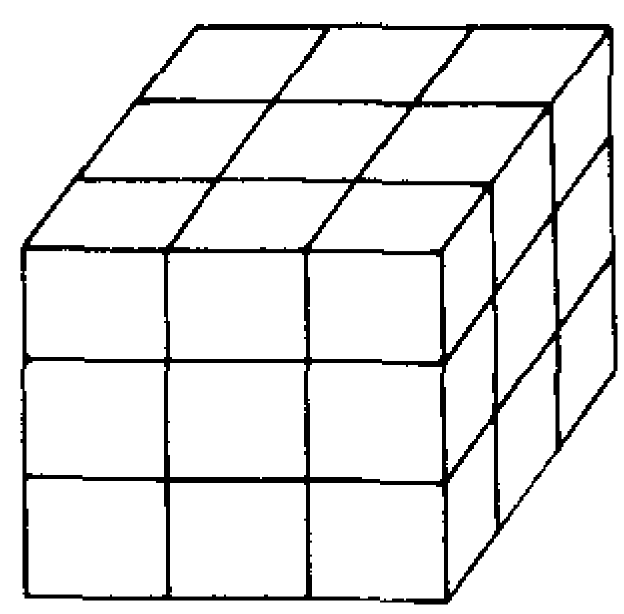


$$V_{三棱锥}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{1}{6}.$$

因而 $V=V_{正方体}-V_{三棱锥}=\frac{5}{6}$

故选(D).

23·39　由 27 个小立方体堆成一个大立方体. 一平面与该大立方体的一条对角线垂直且平分该对角线. 则与该平面相截的小立方体数目为



(A)16.　　(B)17.　　(C)18.

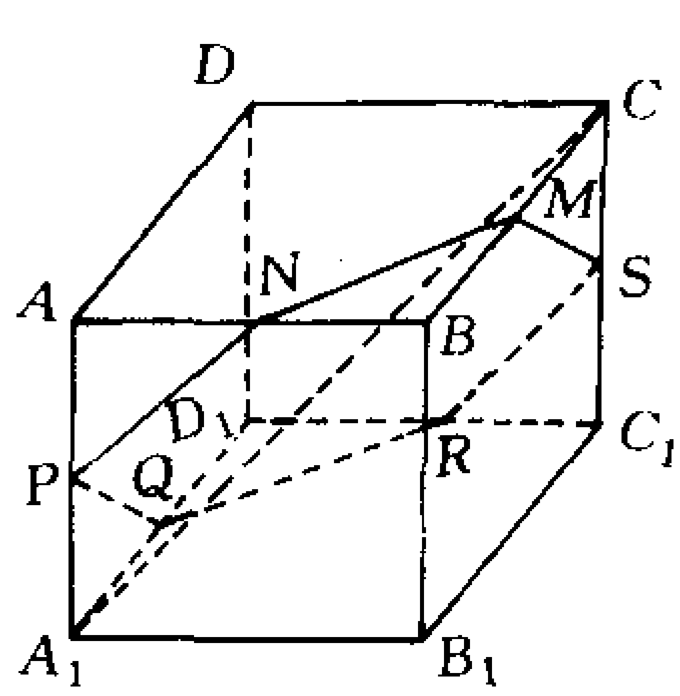
(D)19.　　(E)20.

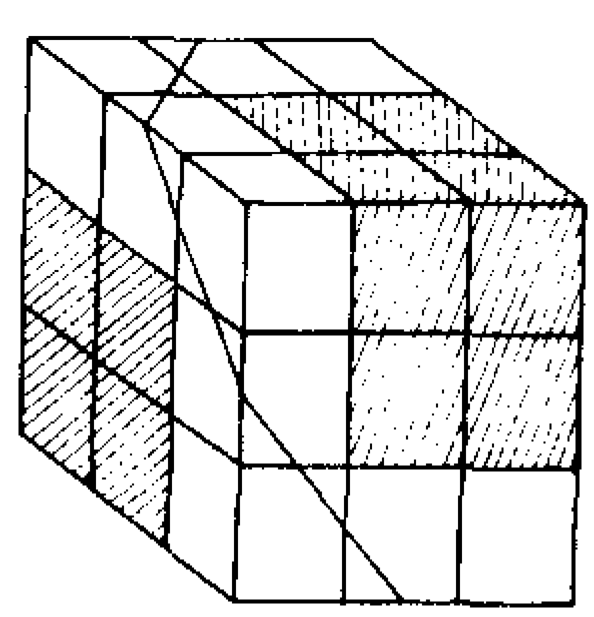
(第 46 届美国高中数学考试,1995 年)

[**解**]　显然,过下图诸棱中点的平面即与立方体对角线垂直,且将其平分.

再从右下图可以看到:平面上、下两角各有 4 个小立方体未与平面相截. 这样与之相截的小立方体数为 $27-8=19$.

故选(D).





第二十四章　旋转体

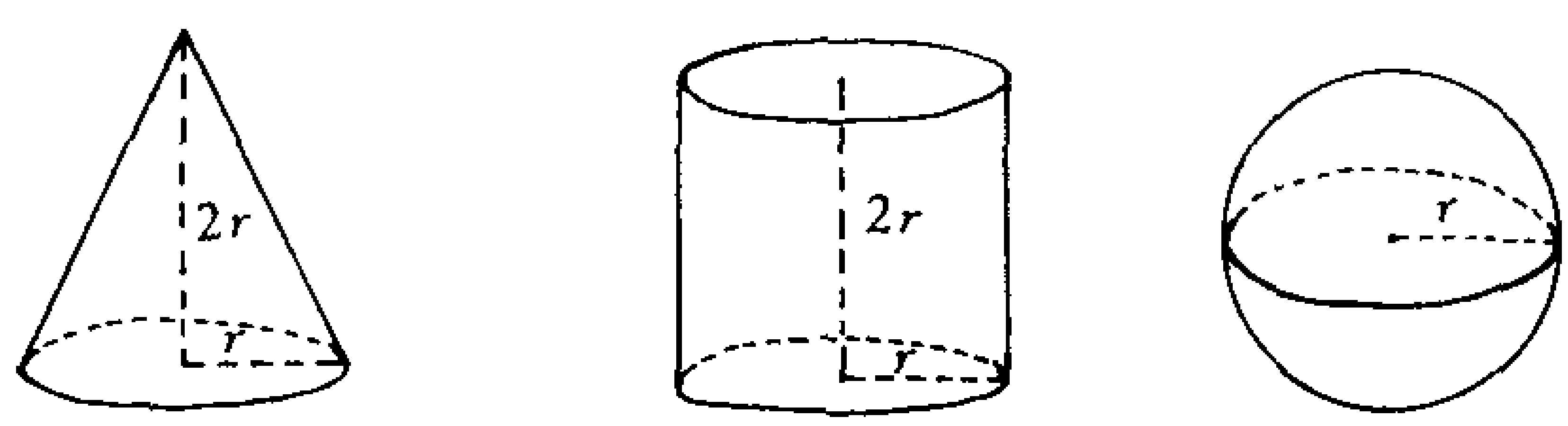
24·1　一圆锥的体积为 A,圆柱体积为 M,球体积为 C.它们有相同的半径,且圆锥、圆柱的高等于球的直径.则

(A)$A-M+C=0$.　(B)$A+M=C$.　(C)$2A=M+C$.

(D)$A^2-M^2+C^2=0$.(E)$2A+2M=3C$.

(第49届美国高中数学考试,1998年)

[解]　由题设若圆锥、圆柱底面半径为 γ,则它们的高为 2γ.



$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot 2r=\frac{2}{3}\pi r^3=A.$$

$$V_{圆柱}=\pi r^2\cdot 2r=2\pi r^3=M.$$

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3=C.$$

由上可知　$A-M+C=0$.

故选(A).

24·2　一圆柱的半径为8英寸,高为3英寸,体积 $V=\pi R^2H$,当 R 增加 x 英寸及 H 增加 x 英寸时,体积均增加同一固定正量,那么满足此情况的 x

(A) 无实数值.　　(B) 是一整数.

(C) 是有理数,但不是整数.　　(D) 是一无理数.

(E) 是两实数.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 由设 $\pi(R+x)^2H=\pi R^2(H+x)$,

即 $Hx^2+(2RH-R^2)x=0$,

因 $x\neq 0$, 故 $Hx+2RH-R^2=0$.

从而 $x=\dfrac{R^2-2RH}{H}=\dfrac{8^2-2\cdot 8\cdot 3}{3}=\dfrac{16}{3}$.

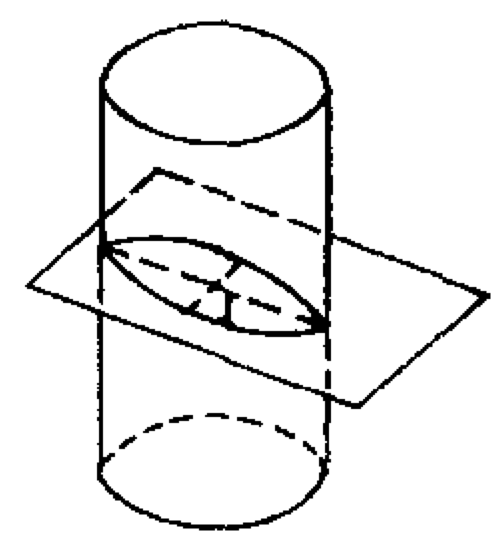
故选(C).

24·3 一个平面与半径为1 的直圆柱相交形成一个椭圆.若椭圆的长轴比短轴长 50%,该长轴的长度是

(A) 1. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) 2.

(D) $\dfrac{9}{4}$. (E) 3.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)



[解] 如图,易知椭圆短半轴为圆柱半径 1,则其长半轴为 1.5.

所以该椭圆长轴为 3.

故选(E).

24·4 底面半径为1 的直圆柱被一个平面所截,截面形状为椭圆,该椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$,这个截面与圆柱底面所成的锐角是

(A) $\dfrac{\pi}{4}$. (B) $\dfrac{\pi}{3}$. (C) $\arccos\dfrac{2}{3}$. (D) $\arccos\dfrac{1}{3}$.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 设椭圆长轴为 $2a$,则其短轴即为直圆柱底面圆的直径 2.

又椭圆离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}$, 得 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3}$.

注意到截面与圆柱底面夹角 θ 的余弦

$$\cos\theta=\frac{1}{a},\quad 即\quad \theta=\arccos\frac{2}{3}.$$

故选(C).

24·5 圆锥的母线长为 l,轴截面的顶角是 120°,则过锥顶的圆锥截面面积的变化范围是

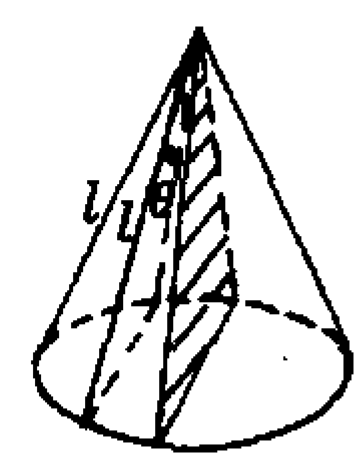
(A) $\left(0,\quad \frac{\sqrt{3}}{4}l^2\right]$.　　　(B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}l^2,\quad \frac{l^2}{2}\right]$.

(C) $\left(0,\quad \frac{l^2}{2}\right]$.　　　(D) $\left[0, \frac{l^2}{2}\right]$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　如图,过锥顶的圆锥截面为腰是 l 的等腰三角形,设顶角为 θ,则其面积

$$S = \frac{1}{2}l^2\sin\theta,$$



又其轴截面顶角是 120°,则　$0° < \theta \leqslant 120°$.

故　$0 < S \leqslant \frac{1}{2}l^2\sin 90° = \frac{1}{2}l^2$.

故选(C).

24·6　圆台上底面积为1,下底面积为16,用一个平行于底面的平面截这个圆台,该平面到上底面的距离是它到下底面距离的 2 倍,这个截面面积是

(A) 4.　　(B) 9.　　(C) $\frac{5}{2}$.　　(D) $\frac{25}{4}$.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　设圆台上、下底面和截面面积分别为 $S_{上}$,$S_{下}$ 和 $S_{中}$,则

$$\sqrt{S_{中}} = \frac{\sqrt{S_{上}} + 2\sqrt{S_{下}}}{3} = \frac{1+2\cdot 4}{3} = 3,$$

故

$$S_{中} = 9.$$

故选(B).

24·7　用一个与圆台上、下底面都相交的平面截圆台,所得的截面图形

(A) 是等腰梯形.　　(B) 是矩形.

(C) 是等腰梯形或等腰三角形.　　(D) 可能是曲边图形.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　圆台系圆锥的一部分,题设平面所截圆台情况,可能是平面截圆锥情况,这样产生的曲线往往是圆锥曲线.

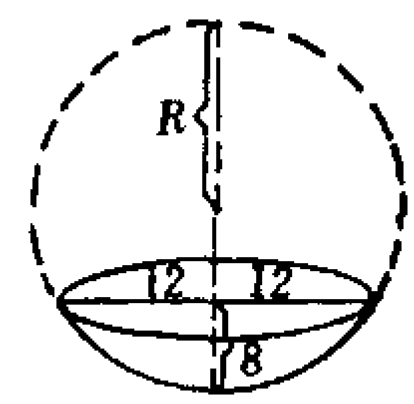
故选(D).

24·8　湖结冰时一球正漂在其上.球取出后(未弄破冰)冰面上留下一个顶面直径为 24cm,深为 8cm 的空穴,问球的半径是

(A) 8cm.　　　(B) 12cm.　　　(C) 13cm.

(D) $8\sqrt{3}$cm.　　　(E) $6\sqrt{6}$cm.

（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）



［解］　设球半径为 R，在球大圆上，用相交弦定理有　$(2R-8)\cdot 8 = 12\cdot 12$，　解得　$R = 13$.

故选(C).

24·9　液体 X 不溶于水，把它倒入水中时，除非搅拌，否则它将在水面上形成一个厚为 0.1cm 的圆形薄膜. 一个长，宽，高分别是 6cm，3cm，12cm 的长方体容器装满液体 X，把这些液体倒在一个很大的水面上时，形成的圆形薄膜的半径是

(A) $\dfrac{\sqrt{216}}{\pi}$.　　　(B) $\sqrt{\dfrac{216}{\pi}}$.　　　(C) $\sqrt{\dfrac{2160}{\pi}}$.

(D) $\dfrac{216}{\pi}$.　　　(E) $\dfrac{2160}{\pi}$.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

［解］　设圆薄膜半径为 r，依题设有

$$0.1\cdot \pi r^2 = 6\cdot 3\cdot 12.$$

得　$r^2 = \dfrac{2160}{\pi}$，　即　$r = \sqrt{\dfrac{2160}{\pi}}$.

故选(C).

24·10　在半径为 R 的球体外面均匀地包上一层球壳形“外衣”，若“外衣”的体积与球的体积相等，球壳“外衣”的厚度是

(A) $(\sqrt[3]{3}-1)R$.　　　(B) $\sqrt[3]{3}R$.

(C) $\sqrt[3]{2}R$.　　　(D) $(\sqrt[3]{2}-1)R$.

（第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年）

［解］　设球壳半径为 $R+x$，依题意有

$$\frac{4}{3}\pi(R+x)^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right),$$

即

$$(R+x)^3 = 2R^3,$$

得

$$x = (\sqrt[3]{2}-1)R.$$

故选(D).

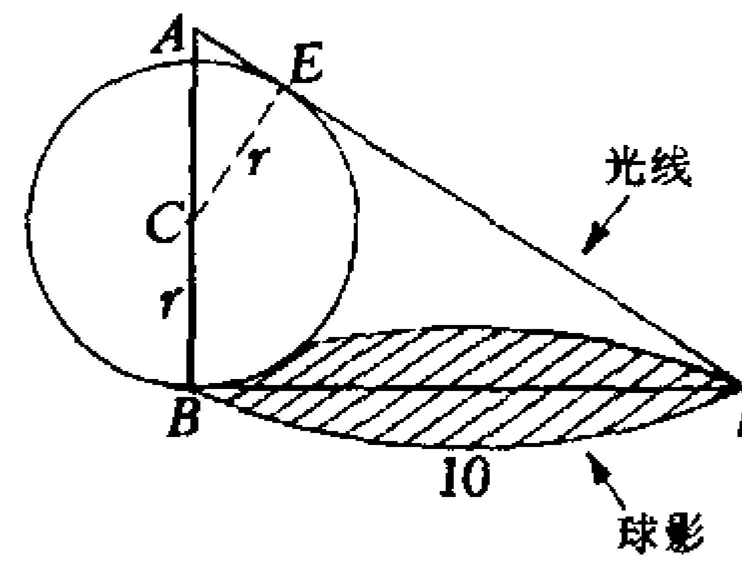
24·11　在阳光下，平面上放着一个球. 在某一时刻球的影子达到的最远点距球与平面的切点 10m. 在同一时刻一根垂直于平面的米尺杆投下的影长为 2m. 那么此球的半径长度为（单位：m，假定太阳光是平行的，米尺杆为一线段）

(A) $\dfrac{5}{2}$.　　　(B) $9-4\sqrt{5}$.　　　(C) $8\sqrt{10}-23$.

(D) $6-\sqrt{15}$.　　(E) $10\sqrt{5}-20$.

（第 34 届美国高中数学考试，1983 年）

[解]　我们先给出如下图形：



因为米尺杆投影的长度为 2m，所以 $AB = 5$，且 $AD = 5\sqrt{5}$，

而 $\triangle CEA \backsim \triangle DBA$，于是有

$$\frac{CE}{AC}=\frac{BD}{AD},\quad 即\quad \frac{r}{5-r}=\frac{10}{5\sqrt{5}}.$$

所以　$\sqrt{5}r = 10-2r$，

即
$$r=\frac{10}{2+\sqrt{5}}=10\sqrt{5}-20.$$

故选(E).

24·12　四个半径为1 的球相切，三个放在地板上，第四个摞在其他三个上面. 作一个棱长为 s 的正四面体外切这些球，那么 s 等于

(A) $4\sqrt{2}$.　　(B) $4\sqrt{3}$.　　(C) $2\sqrt{6}$.

(D) $1+2\sqrt{6}$.　　(E) $2+2\sqrt{6}$.

（第 31 届美国高中数学考试，1980 年）

[解]　正好与一个球外切的小正四面体可用如图 ① 所示平行于水平面的平面来构成. 设这个四面体的棱为 t. 再作四边形 $C_1B_1B_2C_2$，其中 C_1 和 C_2 是两个球的球心.

根据球与四面体的对称性，边 $C_1B_1 \underline{\underline{/\!/}} C_2B_2$，因而

$$B_1B_2 = C_1C_2 = 1+1 = 2.$$

这样 $s = t+2$，我们的问题归结到了 t 的确定.

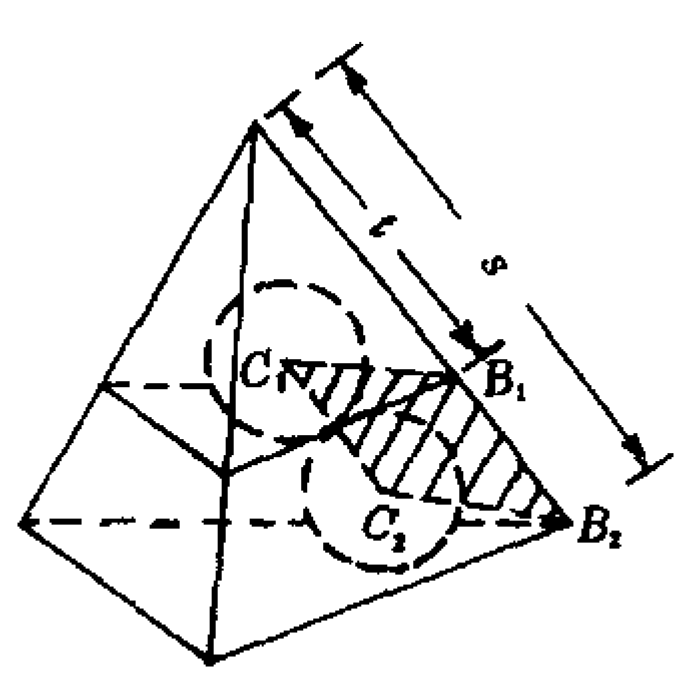


图 ①

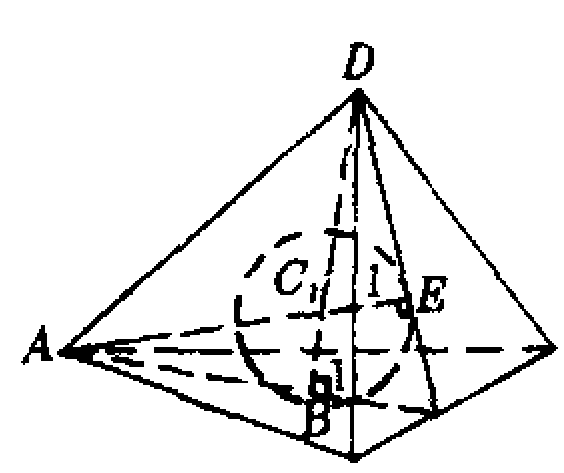


图 ②

如图②，在 $\triangle ABC_1$ 中，AC_1 的长度是小四面体的高 DB 或 AE 的长度 b 减去球的半径，AB 的长是 $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，因为 B 是四面体的面重心.

对于 $\triangle ABC_1$ 运用勾股定理得

$$(b-1)^2 = 1^2 + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]^2,$$

并且对于 $\triangle ADB$ 运用勾股定理得

$$t^2 = b^2 + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]^2.$$

联立上两方程得到 t 的正值 $\quad t = 2\sqrt{6}$.

这样 $\quad s = 2 + t = 2 + 2\sqrt{6}$.

故选(E).

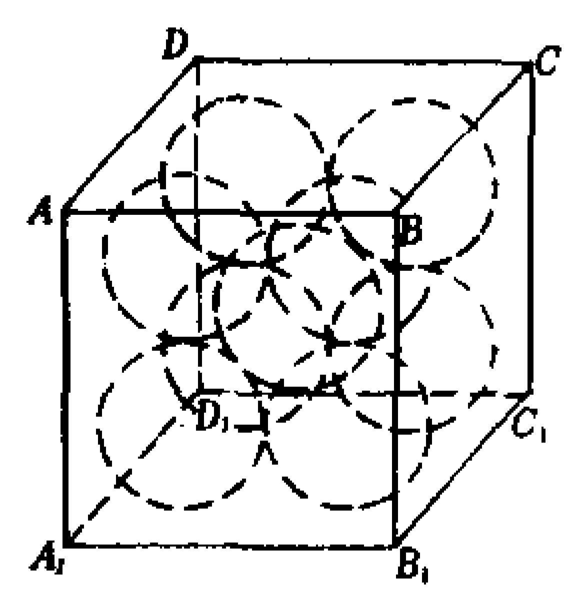
24·13　9 个全等的球放置在一个单位立方体内，已知其中一个球的球心位于立方体之中心，其余 8 个球分别与此球相切且与立方体的三个平面相切，则每个球的半径是

(A) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.　(C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(D) $\frac{1}{4}$.　(E) $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}$.

（第 41 届美国高中数学考试，1990 年）

［解］　如图，作正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角面截面 AA_1C_1C，截得五个相互相切的圆.



在矩形 AA_1C_1C 中，

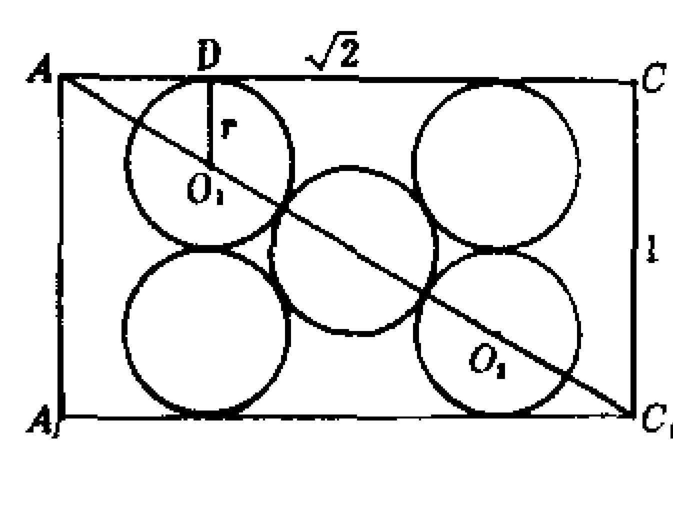
$$AA_1 = 1, AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

则 $\quad AC_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{3}$.

设球的半径为 r，依图有

$$AO_1 = C_1O_2 = \sqrt{3}r,$$

这样 $\quad 4r + 2\sqrt{3}r = \sqrt{3}$,



解得 $\quad r = \frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4^2-(2\sqrt{3})^2}$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}.$$

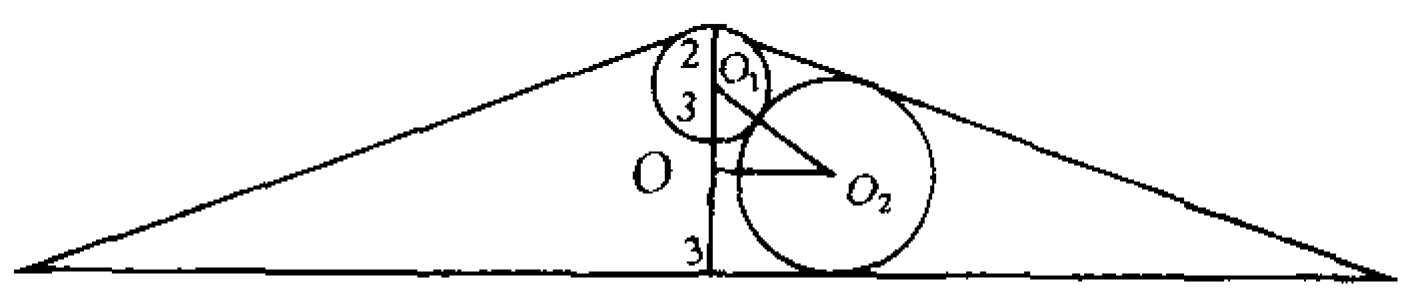
故选(B).

24·14　高为8的圆台内有一个半径为2的球O_1,球心O_1在圆台的轴上,球O_2与圆台的上底面、侧面都相切.圆台内可再放入一个半径为3的球O_2,使得球O_2与球O_1、圆台的下底面及侧面都只有一个公共点.除球O_2,圆台内最多还能放入半径为3的球的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

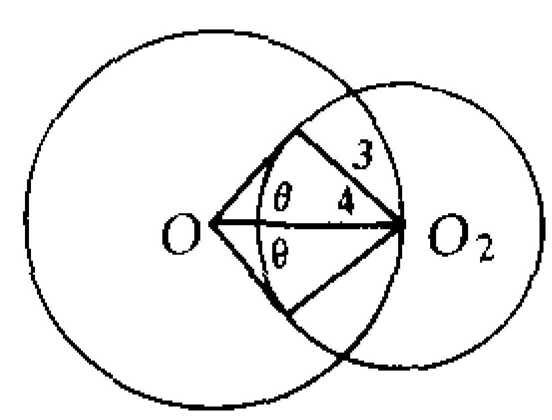
(中国高中数学联赛,1996年)

[**解**]　作过O_2的圆台的轴截面,如下图再作过O_2与圆台的轴垂直的截面,过截面与圆台的轴交于圆O.由下图,易求得$OO_2 = 4$.



这个问题等价于:在以O为圆心、4为半径的圆上,除O_2外最多还可放几个点,使以这些点及O_2为圆心、3为半径的圆彼此至多有一个公共点.由下右图

$$\sin 45^\circ < \sin\theta = \frac{3}{4} < \sin 60^\circ,$$



有　$$45^\circ < \theta < 60^\circ.$$

所以,最多还可以放入

$$\left[\frac{360^\circ}{2\theta}\right] - 1 = 3 - 1 = 2$$

个点,满足上述要求.

因此,圆台内最多还可以放入半径为3的球2个.

故选(B).

24·15　如果漆6英尺高的塑像需1品脱油漆,那么油漆(相同厚度)540个1英尺高的复制塑像需要油漆的品脱数是

(A) 90.　　(B) 72.　　(C) 45.　　(D) 30.　　(E) 15.

(第24届美国高中数学考试,1973年)

[**解**]　油漆的品脱数p和每个塑像的高h的平方及油漆的塑像数n之积成正比,这就是说

$$p = knh^2.$$

当 $n = 1$，$h = 6$，$p = 1$ 时得 $k = \frac{1}{36}$，

所以 $p = \frac{1}{36}nh^2$.

那么 $n = 540$，$h = 1$，得 $p = \frac{1}{36} \cdot 540 \cdot 1^2 = 15$.

故选(E).

几何篇(下)

（解析几何）

第二十五章　点坐标，直线方程与性质

25·1　平面上有点 $A(-2,1)$，$B(1,4)$，$C(4,-3)$，点 D 在直线 AB 上，$\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，延长 DC 到 E，使 $\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{1}{4}$. 则 E 点坐标为

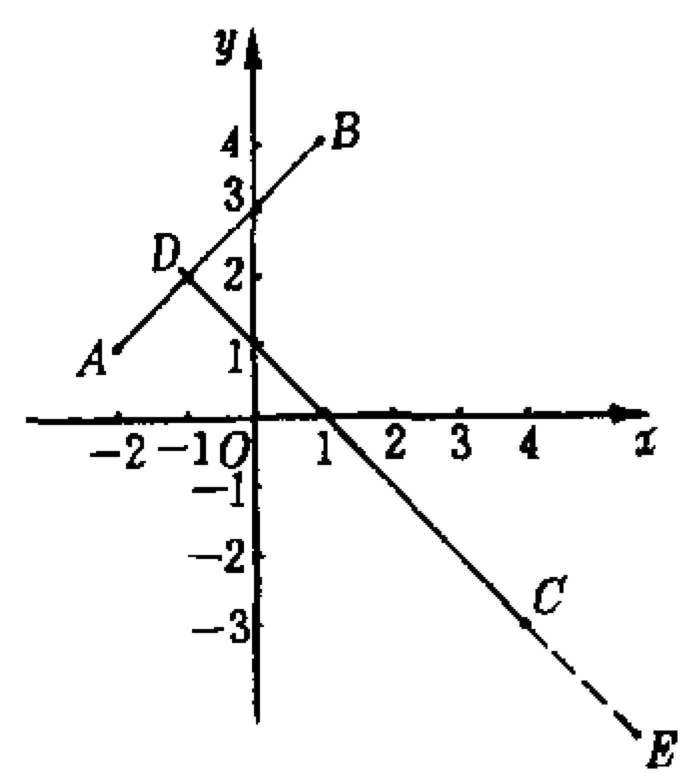
(A)$(0,1)$.

(B)$(0,1)$ 或 $\left(\frac{6}{3},\frac{11}{3}\right)$.

(C)$\left(-\frac{8}{3},\frac{11}{3}\right)$.

(D)$\left(\frac{17}{3},-\frac{14}{3}\right)$.

(E)$\left(-\frac{16}{5},-\frac{11}{5}\right)$.



（中国北京市初中数学竞赛，1983 年）

［解］　只要依题设数据画出较为精确的草图，就可验证或求得 E 点坐标为 $\left(\frac{17}{3},-\frac{14}{3}\right)$.

故选(D).

25·2　代数式 $2x+3y-6=0$，$4x-3y-6=0$，$x=2$ 与 $y=\frac{2}{3}$ 的图形相交于

(A)6 点.　　(B)1 点.　　(C)2 点.

(D) 无点.　　(E) 不限数的点.

（第 6 届美国高中数学考试，1955 年）

［解］ 由前两方程可解得 $x=2,\quad y=\frac{2}{3}$.

从而可知四直线交于一点.

故选(B).

25·3 在 xOy 直角坐标平面中,作不同的直线经过点(3, 4)以及以(－4, 5),(5, －1)为端点的线段的三分点,其中一条直线的方程为

(A)$3x-2y-1=0$. (B)$4x-5y+8=0$.

(C)$5x+2y-23=0$. (D)$x+7y-31=0$.

(E)$x-4y+13=0$.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

［解］ 依定比分点公式,以(－4, 5),(5, －1)为端点的线段三分点分别为:$P(-1,\ 3)$,$Q(2,\ 1)$.

过点(3,4)和 P,Q 的直线方程方程分别为

$$x-4y+13=0 \quad 和 \quad 3x-y-5=0.$$

故选(E).

25·4 在 xy 平面上过点(4, 3),且在 x 轴上截距为(正)素数,在 y 轴上截距为正整数的直线条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. (E)4.

(第 45 届美国高中数学考试,1994 年)

［解］ 截距为(a, 0)和(0, b)的直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

又直线过(4, 3)点,有 $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$, 则有

$$(a-4)(b-3)=12,$$

注意到 12 的因子有 1,2,3,4,6,12,分别代入上式,注意到 a 为素数,b 为正整数,仅有

$(a,b)=(5,\ 15)$ 或 $(7,\ 7)$

两组解,即有两条直线为所求.

故选(C).

25·5 如图,直线 l_1 和 l_2 上点的坐标(x,y)满足关系式

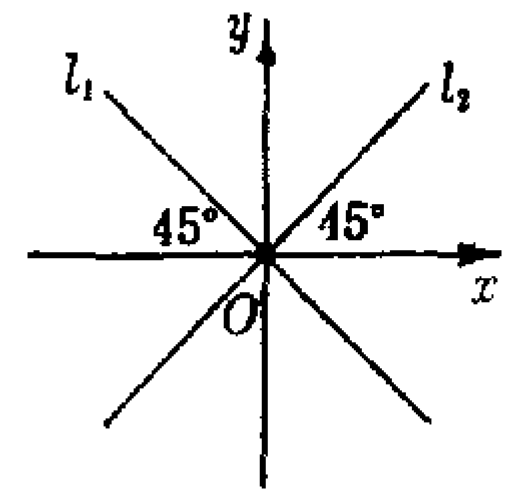
(A) $|x|+|y|=0$.

(B) $|x|+\sqrt{y^2}=1$.

(C) $\sqrt{x^2}-|y|=1$.

(D) $|x|-|y|=0$.

(E) $x-|y|=0$.



(中国天津市初中数学竞赛;中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 题设两直线分别满足方程 $y=\pm x$.

即 $|y|=|x|$, 或 $|x|-|y|=0$.

故选(D).

25·6 在坐标平面上,直线 l 和 k 关于直线 $y=x$ 对称.如果直线 l 的方程是 $y=ax+b$,其中 $a\neq 0$, $b\neq 0$,那么直线 k 的方程是 y 等于

(A) $\frac{1}{a}x+b$. (B) $-\frac{1}{a}x+b$. (C) $-\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

(D) $\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$. (E) $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 直线 l 上的点(p,q)关于直线 $y=x$ 的对称点(q,p)必在直线 k 上.

所以 k 上的点必满足 $x=ay+b$, 即 $y=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$.

故选(E).

25·7 直线 $y=mx+b$ 与直线 $x-3y+11=0$ 关于 x 轴对称,则 $m+b$ 的值为

(A) -6. (B) -5. (C) -4. (D) -3. (E) -2.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 与直线 $x-3y+11=0$ 关于 x 轴对称的直线方程为

$$x+3y+11=0,\quad 即\quad y=-\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}.$$

则 $$m=-\frac{1}{3},\quad b=-\frac{11}{3}.$$

因而 $$m+b=-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}=-4.$$

故选(C).

25·8　一张坐标纸对折一次后(0,2)与(4,0)重叠,若(7,3)与(m,n)重叠,则 $m+n$ 等于

(A)6.7.　(B)6.8.　(C)6.9.　(D)7.0.　(E)8.0.

(第49届美国高中数学考试,1998年)

[解]　由设 $A(0,\ 2)$ 和 $B(4,\ 0)$ 的对称轴方程过(2, 1)点,且与 $k_{AB}=\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}$ 方向垂直,则其方程是

$$y-1=2(x-2),\ 即\ y-2x+3=0.$$

又(7, 3)与(m,n)折后重合(沿对称轴),显然有

①$\left(\frac{7+m}{2},\frac{3+n}{2}\right)$在直线上;

② $\frac{n-3}{m-7}$ 方向与 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$ 方向平行.这样有

$$\begin{cases}\frac{3+n}{2}-(7+m)+3=0,\\ \frac{n-3}{m-7}=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得 $m=0.6$, $n=6.2$, 则 $m+n=6.8$.

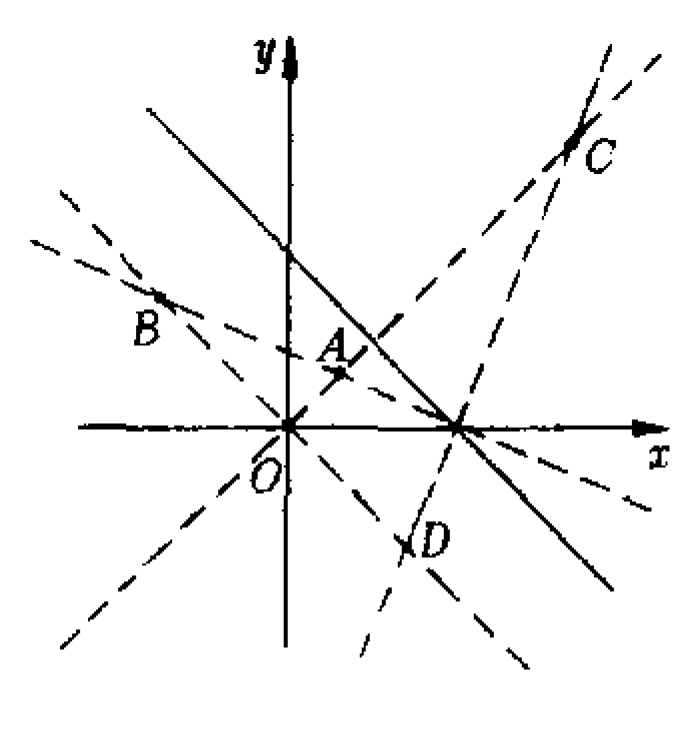
故选(B).

25·9　在坐标平面上选择一个点(x,y),使得它与 x 轴,y 轴和直线 $x+y=2$ 的距离相同,则 x 的值是

(A) $\sqrt{2}-1$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $2-\sqrt{2}$.

(D)1.　(E)不能惟一确定.

(第35届美国高中数学考试,1984年)



[解1]　在平面直角坐标系中,与 x 轴和y轴等距的点(x,y)必定在 $y=x$ 或$y=-x$(即x轴与y轴的角平分线)上,如图所示直线上;

而与 x 轴和$x+y=2$ 等距的点(x,y)必

定在过(2,0)(它们的交点)的两条角平分线上,如图所示直线上.

于是在图上找到它们的交点,即图上标有 A,B,C,D 的点.这四个点的横坐标依次为

$$-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\ \text{ 和 }\ \sqrt{2}.$$

故选(E).

[解 2] 直线 $x+y=2$ 与两个坐标轴构成了一个三角形,它有一个内切圆,三个旁切圆.

这些圆的圆心到三边的距离相等,因此满足题设的条件(且仅有这四个点满足条件),所以共有四个点.

从图上很容易看到它们的横坐标是不相同的.

故选(E).

25·10 若(a,b)和(c,d)是直线 $y=mx+k$ 上的两点,那么(a,b)和(c,d)间的距离用 a,c,m 来表示是

(A) $|a-c|\sqrt{1+m^2}$.　　(B) $|a+c|\sqrt{1+m^2}$.

(C) $\dfrac{|a-c|}{\sqrt{1+m^2}}$.　　(D) $|a-c|(1+m^2)$.

(E) $|a-c||m|$.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解] 因为(a,b)和(c,d)在同一条直线 $y=mx+k$ 上,它们满足同一个方程,所以 $b=ma+k,\quad d=mc+k$.

又点(a,b)和(c,d)间的距离是 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

从上两个方程得$(b-d)=m(a-c)$,所以

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}&=\sqrt{(a-c)^2+m^2(a-c)^2}\\&=|a-c|\sqrt{1+m^2}.\end{aligned}$$

故选(A).

25·11 已知直线 $y=\dfrac{3}{4}x+6$,现有一直线 l 与此直线平行,且相距 4 个单位,则 l 的一个可能的方程式为

(A) $y=\dfrac{3}{4}x+1$.　　(B) $y=\dfrac{3}{4}x$.

(C) $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}$.　　(D) $y=\dfrac{3}{4}x-1$.

选择题卷

(E) $y=\frac{3}{4}x+2$.

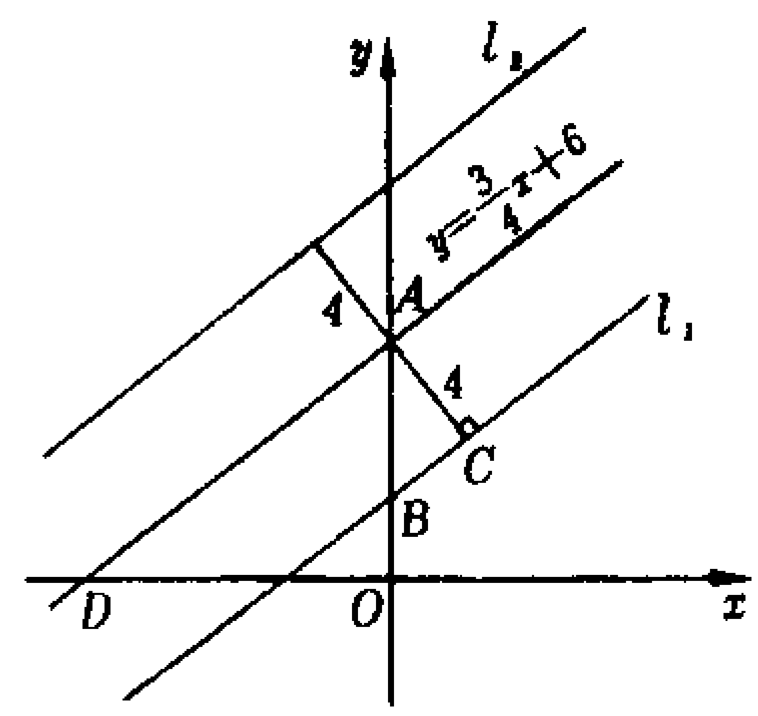
（第 14 届美国高中数学考试，1963 年）

[解] 如图，显然有两解.

设 l_1 方程为 $y=\frac{3}{4}x+b$，b 为 y 轴上的截距，其值待定.

由图易知 $\triangle ABC\backsim\triangle DAO$，则

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{DO},$$



由 $y=0$，得 $x=-8$；$x=0$，得

$$y=6.$$

故知 $A(0,6)$，$D(-8,0)$. 从而

$$AD=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

因而 $\frac{AB}{10}=\frac{4}{8}$，得 $AB=5$，从而

$$OB=6-5=1.$$

则 l_1 方程为 $y=\frac{3}{4}x+1$.

故选(A).

25·12 若方程 $3x+by+c=0$ 与 $cx-2y+12=0$ 的图形相同，设 n 为 b,c 的值的组数，则 n 为

(A)0.　(B)1.　(C)2.

(D) 有限个但多于 2.　(E) 大于任何有限数.

（第 15 届美国高中数学考试，1964 年）

[解] 由题设有 $3:c=b:-2=c:12$，令其为 k 则有

$$3=ck,\quad b=-2k,\quad c=12k.$$

解得 $c=6$，$b=-1$ 或 $c=-6$，$b=1$.

故选(C).

25·13 在同一直角坐标系内，表达式为 $y=kx+b$(其中 k,b 为实数，且 $k\neq0$) 的直线有无数条，在这些直线中不论怎样抽取，都要保证其中有两条直线经过完全相同的象限，问至少要抽的直线条数为

(A)4 条.　(B)5 条.　(C)6 条.　(D)7 条.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1992 年）

[解] 由直线所在象限分，平面上直线可分为下面六类：

$$k>0,\ \begin{cases}b>0,\\ b=0,\\ b<0;\end{cases}\qquad k<0,\ \begin{cases}b>0,\\ b=0,\\ b<0.\end{cases}$$

若保证有两条直线经过完全相同的象限,至少要抽 7 条.

故选(D).

25·14　在 xOy 平面上,图形:$(x+y-5)(2x-3y+5)=0$ 和 $(x-y+1)(3x+2y-12)=0$ 的不同公共点的数目是

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.　(E)4.　(G) 无穷.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解]　两方程分别等价于下面四条直线方程:

Ⅰ:$x+y-5=0$,　Ⅱ:$2x-3y+5=0$,

Ⅲ:$x-y+1=0$,　Ⅳ:$3x+2y-12=0$.

易验证,四条直线均过点(2,3).

又这些直线斜率各不相同,故它们仅有一个公共点.

故选(B).

25·15　由下面方程:

$$(x-y+2)(3x+y-4)=0$$

及
$$(x+y-2)(2x-5y+7)=0$$

确定的图形的公共点的数目是

(A)2.　(B)4.　(C)6.　(D)16.　(E) 无穷.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　前一方程给出两条直线

Ⅰ:$x-y+2=0$,　和　Ⅱ:$3x+y-4=0$;

后一方程也给出两条直线

Ⅲ:$x+y-2=0$,　和　Ⅳ:$2x-5y+7=0$.

因为这四条直线斜率皆不相同,因而

Ⅰ,Ⅲ;　Ⅰ,Ⅳ;　Ⅱ,Ⅲ;　Ⅱ,Ⅳ

这四组直线皆两两相交,且给出四个不同交点:

$$(0,\ 2),\quad (-1,\ 1),\quad (1,\ 1),\quad \left(\frac{13}{17},\ \frac{29}{17}\right).$$

故选(B).

25·16　设 a 是正数,考虑点集 S. 集 S 的点的直角坐标(x,y)满

足下列所有五个条件:

(i) $\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant 2a$.　(ii) $\frac{a}{2} \leqslant y \leqslant 2a$.　(iii) $x + y \geqslant a$.

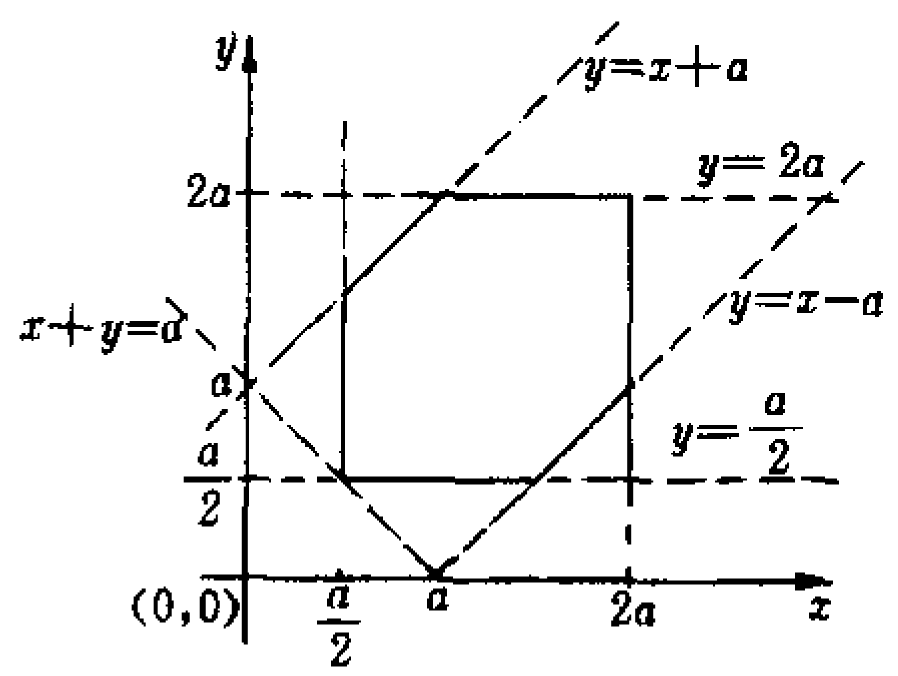
(iv) $x + a \geqslant y$.　(v) $y + a \geqslant x$.

S 集的边界多边形的边数是

(A)3.　(B)4.　(C)5.　(D)6.　(E)7.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解]　满足题设的点集和边界如下图所示.



故选(D).

25·17　设 P 为等腰直角三角形 ABC 的斜边(或其延长线)上的一点.若 $s = AP^2 + BP^2$,那么

(A) 对 P 的有限个位置,有 $s < 2CP^2$.

(B) 对 P 的无限个位置,有 $s < 2CP^2$.

(C) 只有当 P 是 AB 的中点或 AB 的一个端点时,才有 $s = 2CP^2$.

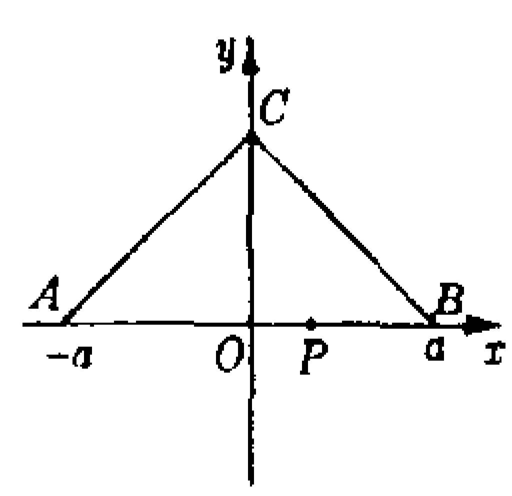
(D) $s = 2CP^2$ 永远成立.

(E) 如果 P 在 AB 的三分点上,有 $s > 2CP^2$.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　如右下图建立直角坐标系,且设点 A,B 的坐标分别为 $(-a,0)$,$(a,0)$,P 点坐标为 $(x,0)$.依题设

$$s = [x - (-a)]^2 + (x - a)^2 = 2(x^2 + a^2),$$



又由上设知 C 点坐标为 $(0,a)$.因而

$$CP^2 = (0 - x)^2 + (a - 0)^2 = x^2 + a^2,$$

即

$$2CP^2 = s.$$

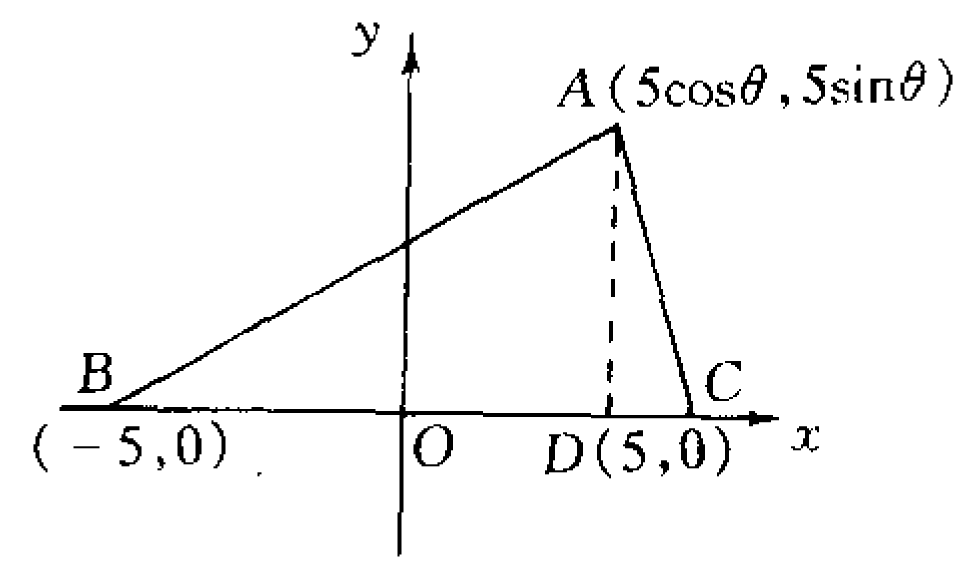
故选(D).

25·18　对于某些角 θ 而言，顶点在 $(-5,0)$，$(5,0)$ 和 $(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ 的面积是 10 的三角形的个数有

(A)0.　　(B)2.　　(C)4.　　(D)6.　　(E)8.

（第 49 届美国高中数学考试，1998 年）

[解]　由设知 $|BC|=10$，且 BC 的高 $AD=|5\sin\theta|$（如图）.



又 $S_{\triangle}=10=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot AD$，

知 $|5\sin\theta|=2, 0<\theta<2\pi$，解得

$$\theta=\sin^{-1}\frac{2}{5},\ \theta=\pi\pm\sin^{-1}\frac{2}{5},\ \theta=2\pi-\sin^{-1}\frac{2}{5}.$$

共四组解（从几何角度看结论是显然的）.

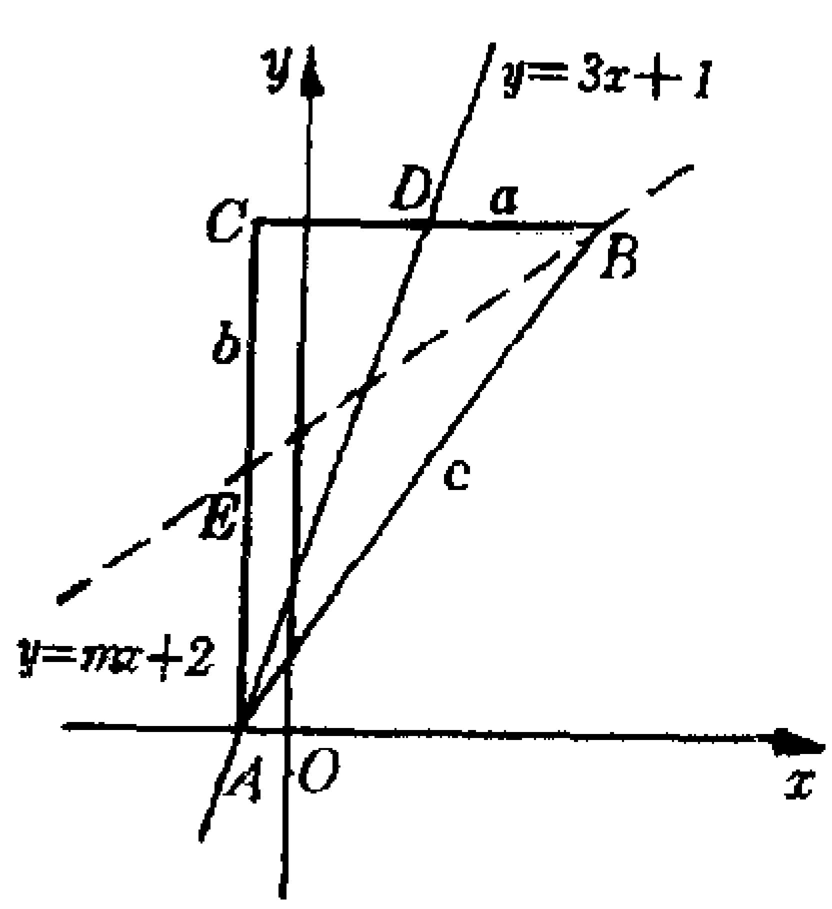
故选(C).

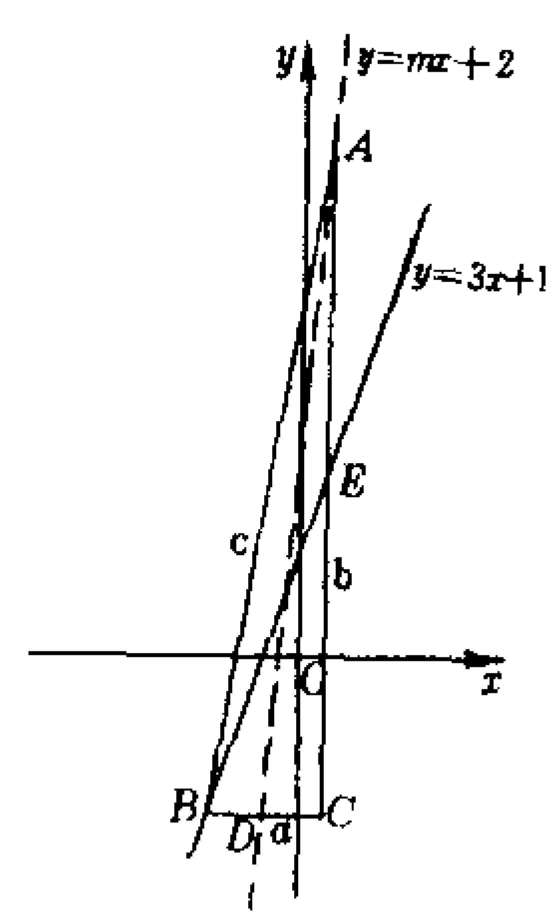
25·19　在坐标平面中要作一个直角三角形，使得它的两直角边与 x，y 轴平行，并使它的两直角边上的中线分别落在直线 $y=3x+1$ 和 $y=mx+2$ 之上，问使这种三角形存在的常数 m 的个数是

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　(E) 大于 3.

（第 37 届美国高中数学考试，1986 年）

[解 1]　从下面图像中可以看出：满足题设的 m 有两个，即过(0, 2)的直线束中，有两条为所求.





具体计算可如：

由题设 $BC \parallel x$ 轴，$AC \parallel y$ 轴，AD 为 BC 中线，BE 为 AC 中线，

又设 $BC=a$，$AC=b$，则

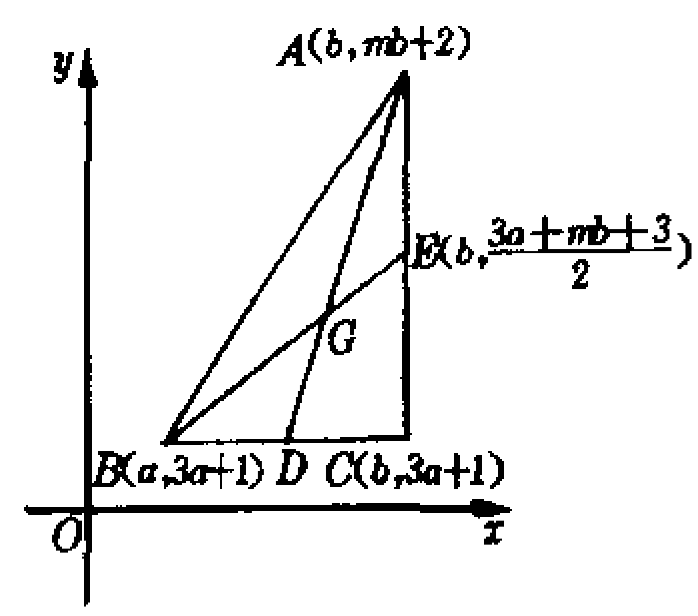
$$k_{BE}=\frac{EC}{BC}=\frac{\frac{b}{2}}{a}=\frac{b}{2a},\quad k_{AD}=\frac{AC}{CD}=\frac{b}{\frac{a}{2}}=\frac{2b}{a},$$

故 $$k_{BE}:k_{AD}=1:4;$$

即其两中线斜率比为 4. 因而 $\frac{3}{m}=4$，或 $\frac{m}{3}=4$，

得 $m=12$ 或 $\frac{3}{4}$. 即 m 有两个值.

故选 (C).



[解 2] 设 A,B,C 三点坐标分别为 (因为它们在题设的中线上).

$A(b,\ mb+2)$, $B(a,\ 3a+1)$,

$C(b,\ 3a+1)$.

则 E 点坐标为 $\left(b,\ \frac{3a+mb+3}{2}\right)$.

所以 G 点坐标是

$$x=\frac{a+2b}{3},\quad y=\frac{6a+mb+4}{3}, \qquad ①$$

由 G 在 BE, AD 上，又有

$$y=\frac{a+2b}{3}\cdot 2+1 \qquad ②$$

且 $$y=\frac{a+2b}{3}m+2, \qquad ③$$

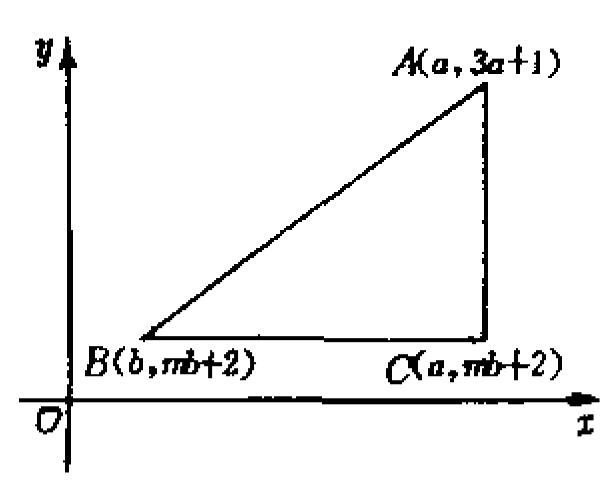
由 ①,② 可有 $6a+mb+4=3a+6b+3$,

即 $(m-6)b+3a+1=0$. ④

同理由 ①,③ 有

$$(m-6)a+mb+2=0. \quad ⑤$$

由 ④,⑤ 可得 $m=12$.



同理设如右图，可解得 $m=\frac{3}{4}$.

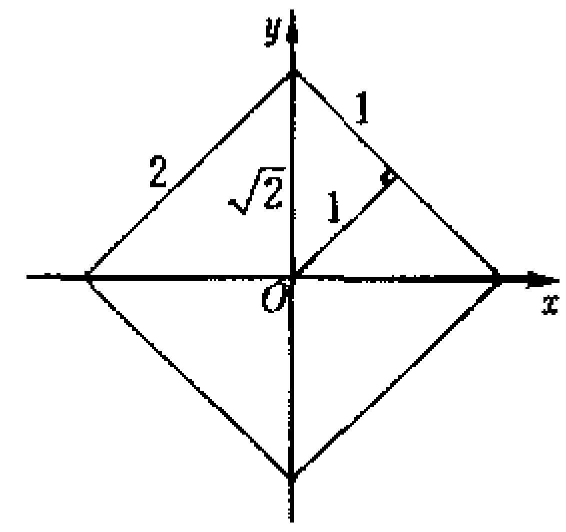
综上知 m 有两值.

故选 (C).

25·20 一个正方形的对角线长为 $2\sqrt{2}$，且两条对角线与坐标轴重合，则原点到这个正方形的距离为

(A)1.　(B)$\sqrt{2}$.　(C)2.　(D)$2\sqrt{2}$.

(中国天津市初中数学竞赛,1983 年)



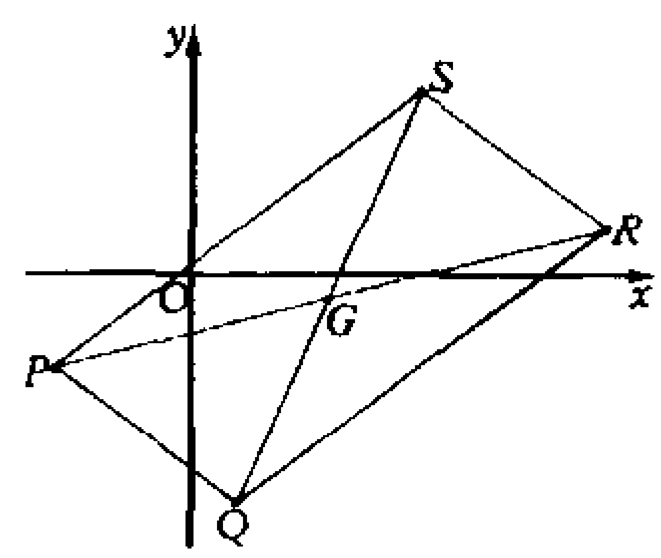
[解]　如右图,易求出正方形边长为 2.
原点 O 到其一边距离为 1.
故选(A).

25·21　平行四边形 $PQRS$ 的三顶点为 $P(-3,-2)$,$Q(1,-5)$,$R(9,1)$,其中 P 与 R 对顶,则 S 的坐标之和为

(A)13.　(B)12.　(C)11.　(D)10.　(E)9.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解]　设 G 为$\square PQRS$ 对角线交点,则 G 为 PR,QS 的中点. 由定比分点公式有



$$x_G=\frac{x_P+x_R}{2}=\frac{-3+9}{2}=3,$$

$$y_G=\frac{y_P+y_R}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

同理　$3=\dfrac{x_S+x_Q}{2}=\dfrac{x_S+1}{2}$,

得　$x_S=5$,

且　$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_S+y_Q}{2}=\dfrac{y_S-5}{2}$, 得 $y_S=4$.

则　$x_S+y_S=9$,

故选(E).

25·22　已知三个不同点 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 与 $R(x_1+x_2,y_1+y_2)$,现将此三点与原点彼此连成线段,则所成的图形 $OPRQ$,由点 P,Q 和 R 的位置而定,在三种可能情况:

(1) 平行四边形. (2) 直线. (3) 梯形.

中可以成立的为

(A) 仅(1).　(B) 仅(2).　(C) 仅(3).

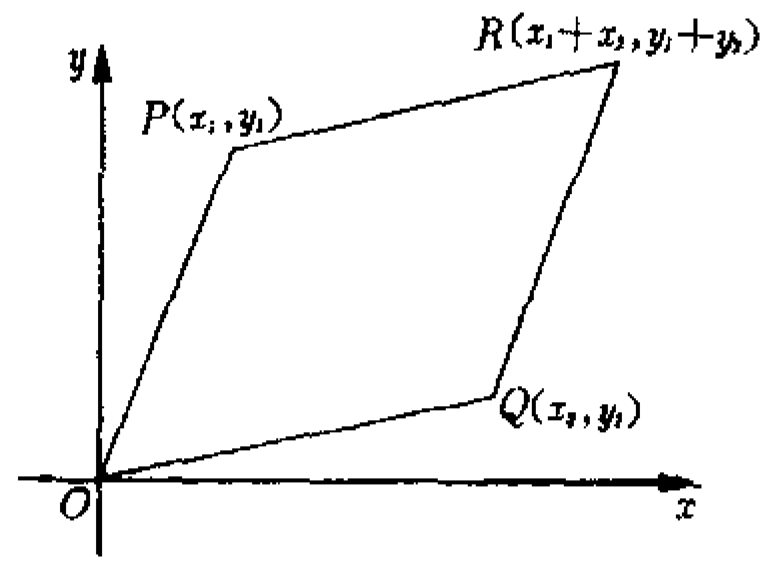
(D) 仅(1) 或(2).　(E) 所提三种情况都不存在.

(第 15 届美国高中数学考试,1964 年)

[解]　由题设知 x_1,y_1 或 x_2,y_2 不能全为 0,否则它们则无区别而与题设相违.

若 OP,OQ 方程分别为 $y_1 = k_1x_1$, $y_2 = k_2x_2$,当 $k_1 = k_2$ 时,P,Q,R 均在过 O 的直线上.

若 $k_1 \neq k_2$,易算得 RQ 的斜率为 k_1;且 PR 斜率为 k_2.



即 $RQ \parallel OP$, $PR \parallel OQ$.

即 $OPRQ$ 或为直线或为平行四边形.

故选(D).

25·23 在平面直角坐标系中,方程

$$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$$

(a,b 为不相等的两个正数)所代表的曲线是

(A) 三角形. (B) 正方形.

(C) 非正方形的长方形. (D) 非正方形的菱形.

(中国高中数学联赛,1994 年)

[解 1] 直线 l_1:$x-y=0$ 与 l_2:$x+y=0$ 将平面 xOy 分成4个区域:

Ⅰ $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\geqslant 0;\end{cases}$ Ⅱ $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0;\end{cases}$

Ⅲ $\begin{cases}x+y\leqslant 0,\\ x-y\leqslant 0;\end{cases}$ Ⅳ $\begin{cases}x+y\leqslant 0,\\ x-y\geqslant 0.\end{cases}$

在区域(Ⅰ)中,方程

$$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1 \quad ①$$

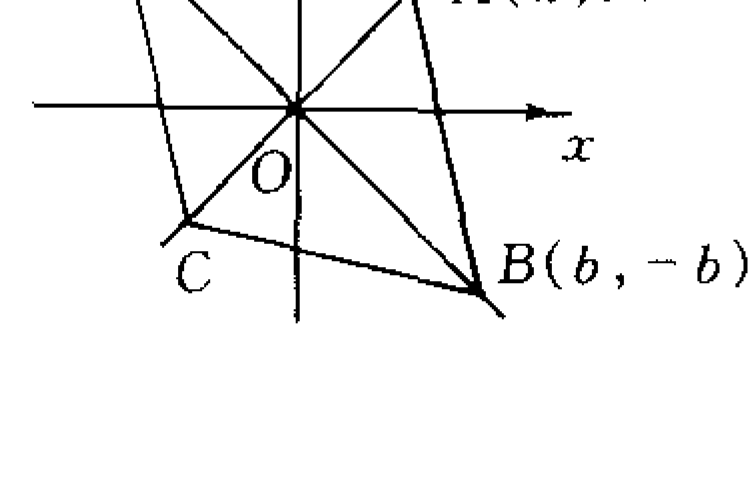
变化为

$$\frac{x+y}{2a}+\frac{x-y}{2b}=1. \quad ②$$

它代表直线 l_3,令 l_3 与 l_1 相交于点 A.则由

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2a}+\dfrac{x-y}{2b}=1,\\ x-y=0\end{cases}$$

得点 A 的坐标(a,a).



令 l_3 与 l_2 相交于点 B,由

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2a}+\dfrac{x-y}{2b}=1,\\ x+y=0\end{cases}$$

得点 B 的坐标为$(b,-b)$.

因此,① 代表的曲线在区域(Ⅰ)中是线段 AB.

同样在区域(Ⅱ)中,方程①成为 $\dfrac{x+y}{2a}+\dfrac{x-y}{2b}=1$,它代表直线 l_4.而 l_4 与 l_1 相交于点 A,且 l_4 与 l_2 相交于点 $D(-b,b)$,方程①代表的曲线在区域(Ⅲ)中是一条线段 AD.

同前,得点 $C(-a,a)$ 在①代表的曲线上,且①代表的曲线在区域Ⅲ中是线段 CD,①代表的曲线在区域(Ⅳ)中是线段 CB.

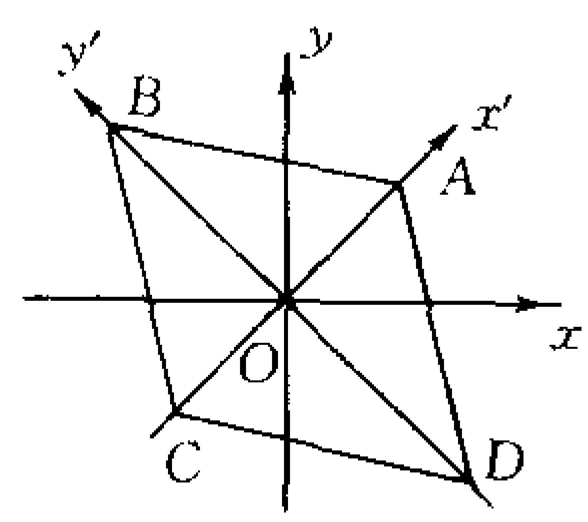
又由于 $AO=CO,\ BO=DO,\ AC\neq BD,\ AC\perp BD$,

所以①代表的四边形 $ABCD$ 是非正方形的菱形.

故选(D).

[解2] 将直角坐标系 xOy 绕原点逆时针旋转 $45°$,得到新坐标系 $x'Oy'$.点 P 在坐标系 $x'Oy'$ 中的坐标为$(x'y')$,在坐标系 xOy 中的坐标为(x,y).则

$$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y).\end{cases}$$



题设方程 $$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1 \quad ①$$

化成 $$\frac{|x'|}{a}+\frac{|y'|}{b}=\sqrt{2}. \quad ②$$

显然,②代表的曲线关于 x' 轴,y' 轴对称,在 $x'Oy'$ 的第Ⅰ象限内,②成为$\dfrac{x'}{a}+\dfrac{y'}{b}=\sqrt{2}$,即为线段 AB,其中 $A(\sqrt{2}a,0)$,$B(0,\sqrt{2}b)$.

据对称性,在第Ⅱ象限内方程②是线段 BC,其中 $C(-\sqrt{2}a,0)$;

在第Ⅲ象限内方程②是线段 CD,其中 $D(0,-\sqrt{2}b)$;

在第Ⅳ象限内方程②是线段 AD.

由对称性知 $AB=BC=CD=AD$.

又由于 $a\neq b$,故 $AC\neq BD$.所以,$ABCD$ 是非正方形的菱形.

故选(D).

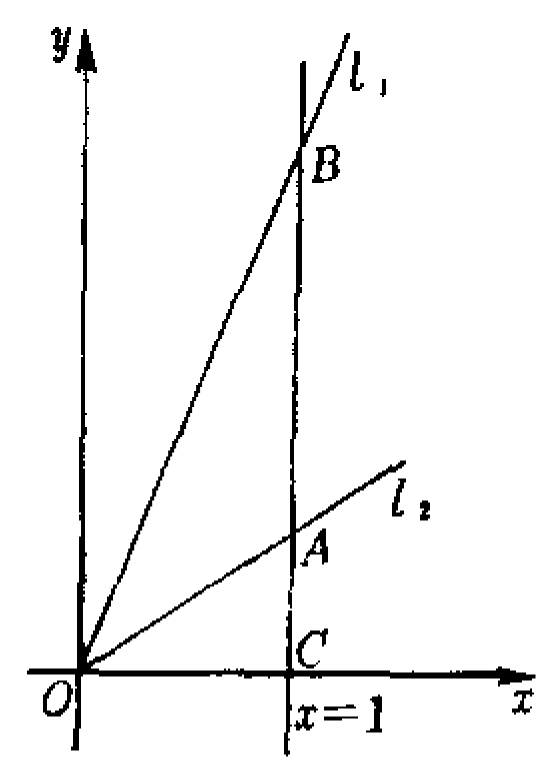
25·24　直线 l_1 和 l_2 的方程分别为 $y = mx$ 和 $y = nx$. 假设 l_1 与水平方向的夹角(从 x 轴的正方向按逆时针方向来量)是 l_2 的两倍,并且 l_1 的斜率是 l_2 的 4 倍. 若 l_1 不水平,那么乘积 mn 是

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(C) 2.

(D) -2.　　(E) 按已知条件无惟一的解.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解 1]　如图,l_1 和 l_2 分别与直线 $x = 1$ 相交于 B 和 A,又 C 是直线 $x = 1$ 和 x 轴的交点.



$\because$　$OC = 1$,　l_2 的斜率为 $\frac{AC}{OC} = AC$,

及　　l_1 的斜率为 $\frac{BC}{OC} = BC$,

$\therefore$　$AC = n$,　$BC = m$,　且 $AB = 3n$.

又 $\because$　OA 是角平分线,$\therefore$　$\frac{OC}{OB} = \frac{AC}{AB}$,

即
$$\frac{1}{OB} = \frac{n}{3n},\quad 得\quad OB = 3.$$

在 Rt$\triangle OBC$ 中,根据勾股定理有 $1 + (4n)^2 = 9$,

所以
$$n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为　$m = 4n$,　则　$mn = 4n^2 = 2$.

故选(C).

[解 2]　设 θ_1 和 θ_2 分别是直线 L_1 和 L_2 的倾角,那么
$$m = \mathrm{tg}\theta_1,\ n = \mathrm{tg}\theta_2.$$

因为 $\theta_1 = 2\theta_2$,且 $m = 4n$,则
$$4n = m = \mathrm{tg}\theta_1 = \mathrm{tg}2\theta_2 = \frac{2\mathrm{tg}\theta_2}{1 - \mathrm{tg}^2\theta_2} = \frac{2n}{1 - n^2}.$$

这样
$$4n(1 - n^2) = 2n.$$

因为　$n \neq 0$,有 $2n^2 = 1$,因而 $mn = 4n^2 = 2$.

故选 (C).

25·25　如果 $a, b > 0$,直线 $ax + by = 6$ 与坐标轴在第一象限内

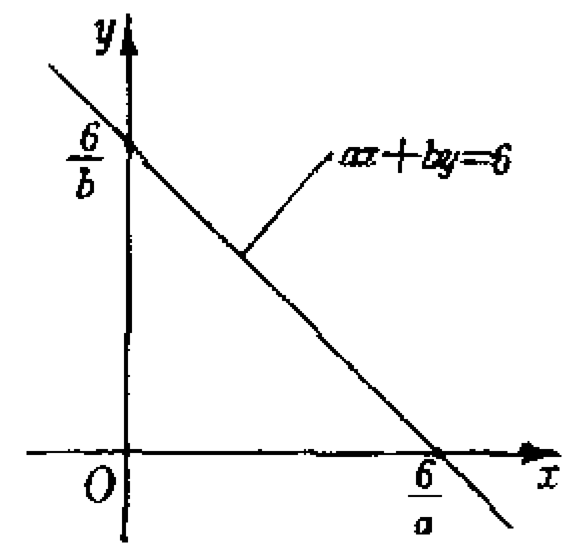
所围成的三角形面积为 6，那么 ab 等于

(A)3.　(B)6.　(C)12.　(D)108.　(E)432.

（第 40 届美国高中数学考试，1989 年）

［解］ 如图，直线与两坐标轴交点分别为

$$\left(\frac{6}{a},0\right)\text{和}\left(0,\frac{6}{b}\right),$$



则 $$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{a}\cdot\frac{6}{b}=6.$$

故 $$ab=3.$$

故选(A).

25·26 一直线过($-a$,0) 点，且分割第二象限得一三角形区域，其面积为 T，此直线方程为

(A)$2Tx+a^2y+2aT=0$.　(B)$2Tx-a^2y+2aT=0$.

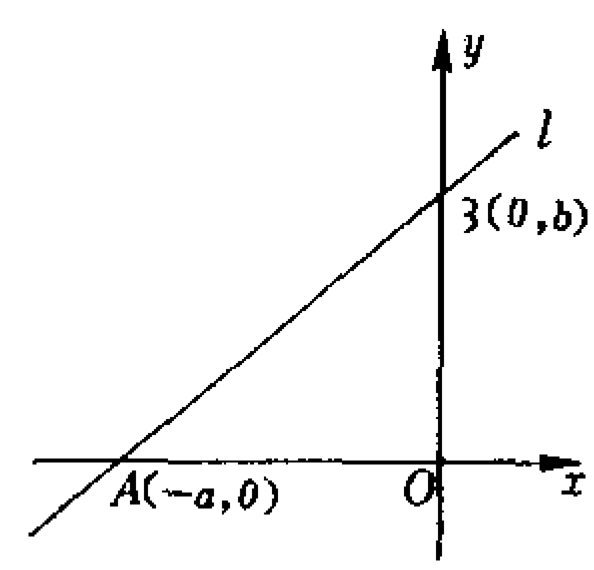
(C)$2Tx+a^2y-2aT=0$.　(D)$2Tx-a^2y-2aT=0$.

(E) 非上述答案.

（第 15 届美国高中数学考试，1964 年）

［解］ 显然直线与 x 轴交点为 ($-a$,0)，又设其与 y 轴交点为($0,b$)，由设

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}ab=T,\text{ 则 } b=\frac{2T}{a}.$$



故直线斜率为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2T}{a^2}$，直线方程为

$$y=\frac{2T}{a^2}x+\frac{2T}{a},$$

或 $$2Tx-a^2y+2aT=0.$$

故选(B).

25·27 $\triangle PQR$ 的顶点坐标为$P(0,a)$，$Q(b,0)$，$R(c,d)$，其中 a，b，c，d 都是正数，原点与 R 点在PQ 的两侧，$\triangle PQR$ 的面积可表示为

(A) $\dfrac{ab+ac+bc+cd}{2}$.　(B) $\dfrac{ac+bd-ab}{2}$.

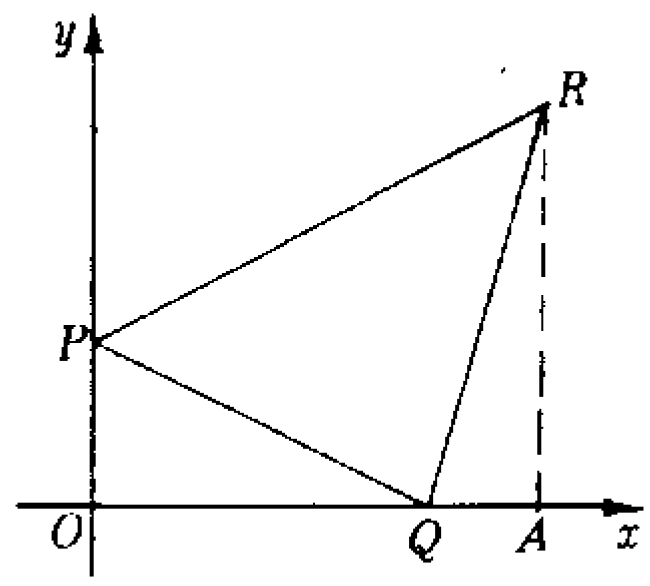
(C) $\dfrac{ab-ac-bd}{2}$.　(D) $\dfrac{ac+bd+ab}{2}$.

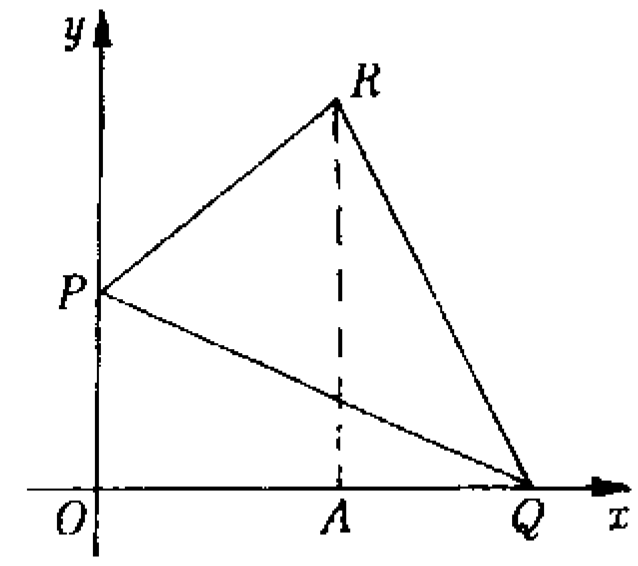
(E) $\dfrac{ac+bd-ab-cd}{2}$.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

［解］ 如图分两种情形，先过 R 作$RA\perp Ox$.

(1) 若 $b<c$，则





$$S_{\triangle PQR}=S_{四边形OPRA}-S_{\triangle QAR}-S_{\triangle OPQ}$$
$$=\frac{1}{2}c(a+d)-\frac{1}{2}d(c-b)-\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}(ac+bd-ab);$$

(2) 若 $c<b$，则

$$S_{\triangle PQR}=S_{四边形OPRA}+S_{\triangle QAR}-S_{\triangle OPQ}$$
$$=\frac{1}{2}c(a+d)+\frac{1}{2}d(b-c)-\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}(ac+bd-ab).$$

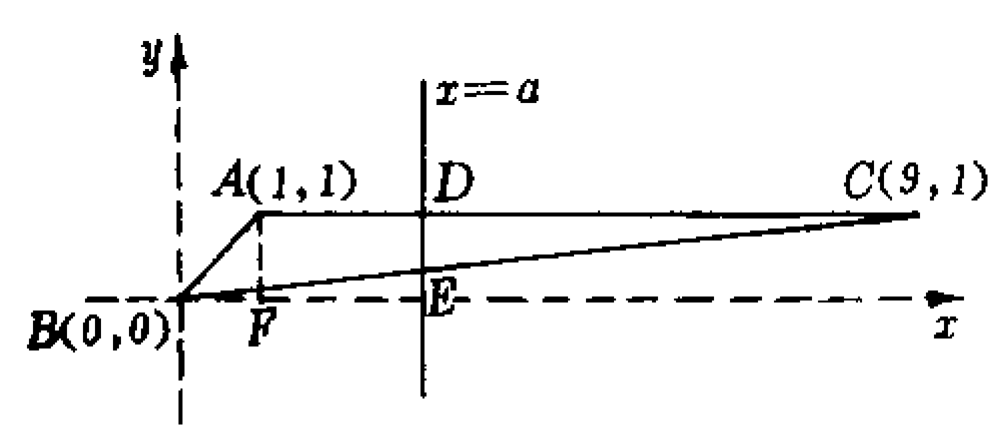
故选(B).

25·28　在 xy-坐标平面上,一垂直于 x 轴的直线将顶点为$(0,0)$,$(1,1)$,$(9,1)$ 的一个三角形分为面积相等的两个区域,则此直线的方程为 x 等于

(A)2.5.　(B)3.0.　(C)3.5.　(D)4.0.　(E)4.5.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解]　如图,设在坐标平面上作 $\triangle ABC$,又直线 $x=a$ 将 $\triangle ABC$ 分成两个面积相等的区域.



由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8=4$,那么两个面积相等的区域的面积都为 2.

因为 $\triangle ABC$ 中被过A 点且垂直于 x 轴的直线分出的左边部分的面

积小于 $\triangle ABF$ 的面积 $=\frac{1}{2}$，所以直线 $x=a$ 一定在 A 点的右侧.

直线 BC 的方程为 $y=\frac{x}{9}$，所以 E 点的坐标是 $\left(a,\ \frac{a}{9}\right)$.

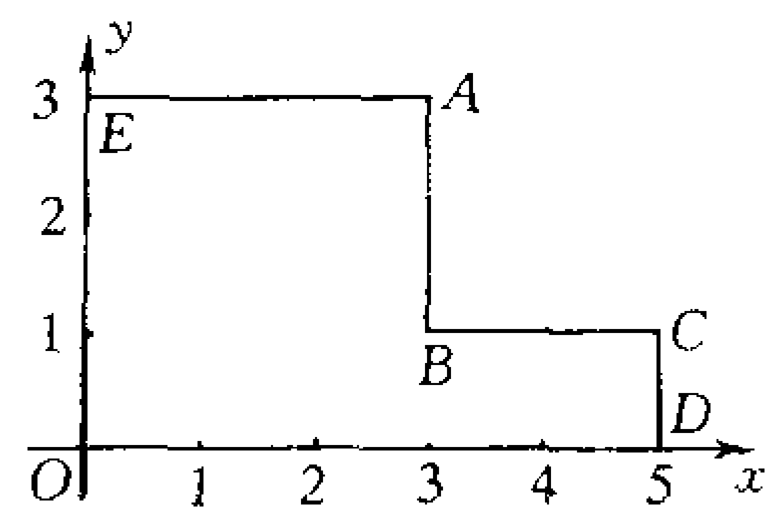
这样 $S_{\triangle DEC}=2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{9}\right)\cdot(9-a)$，即 $(9-a)^2=36$.

有 $9-a=\pm 6$，得 $a=15$ 或 3.

又因为此直线必须与 $\triangle ABC$ 相交，所以取 $x=3$.

故选 (B).

25·29 在 xy 平面内，过点 $(0,0)$，$(0,3)$，$(3,3)$，$(3,1)$，$(5,1)$ 和 $(5,0)$ 的水平，竖直连线围成"L"形区域(见图). 则过原点且将该图形面积平分的直线斜率是



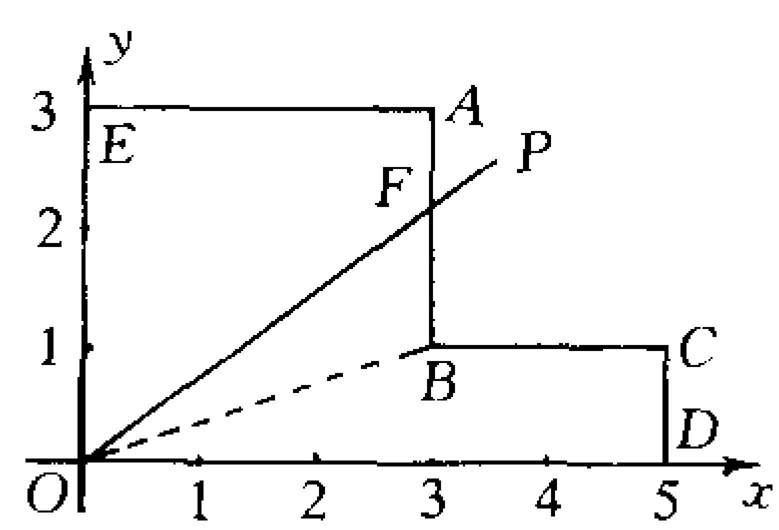
(A) $\frac{2}{7}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{3}{4}$. (E) $\frac{7}{9}$.

(第 45 届美国高中数学考试，1994 年)

[解] 由题设易求得

$$S_{ABCDOE}=11,$$



又 $S_{OBCD}=\frac{7}{2}<\frac{1}{2}S_{ABCDOE}$，

知面积等分线 OP 与 AB 交点 F 在 B 点上方，设 $AF=t$，

$\because\quad S_{\text{梯形}AEOF}=\frac{1}{2}\cdot(3+t)\cdot 3=\frac{11}{2}$，解得 $t=\frac{2}{3}$.

$\therefore\quad F$ 点坐标为 $\left(3,\ \frac{7}{3}\right)$，知 $k_{OP}=\frac{7}{9}$.

故选 (E).

25·30 设由 x 轴，直线 $x=8$，曲线 $f=\{(x,y)\mid y=x$，其中 $0\leqslant x\leqslant 5$，$y=2x-5$ 其中 $5\leqslant x\leqslant 8\}$ 所包围的面积为 k，k 等于

(A)21.5. (B)36.4. (C)36.5.

(D)44. (E) 小于 44 但接近 44.

(第 20 届美国高中数学考试，1969 年)

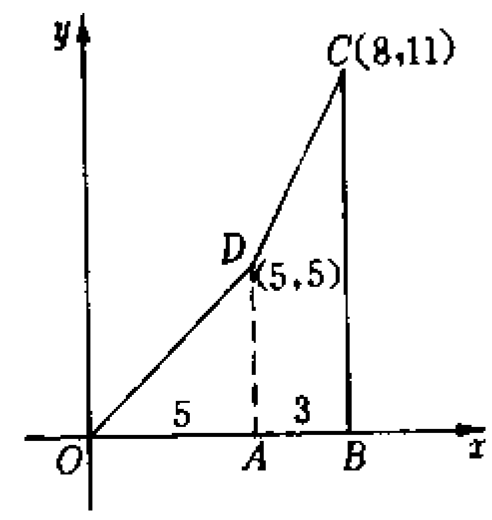
[解] 容易作出曲线 f 的图像如右图.

$\therefore \quad k = S_{\triangle AOD} + S_{梯形ABCD}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (11 + 5)$

$= 36.5.$

故选(C).



第二十六章　圆锥曲线

26·1　在同一平面上，半径为 a 的所有圆经过一定点，则这些等圆的圆心的轨迹是

(A) 一点．　(B) 一直线．　(C) 两直线．　(D) 一圆．　(E) 两圆．

（第 11 届美国高中数学考试，1960 年）

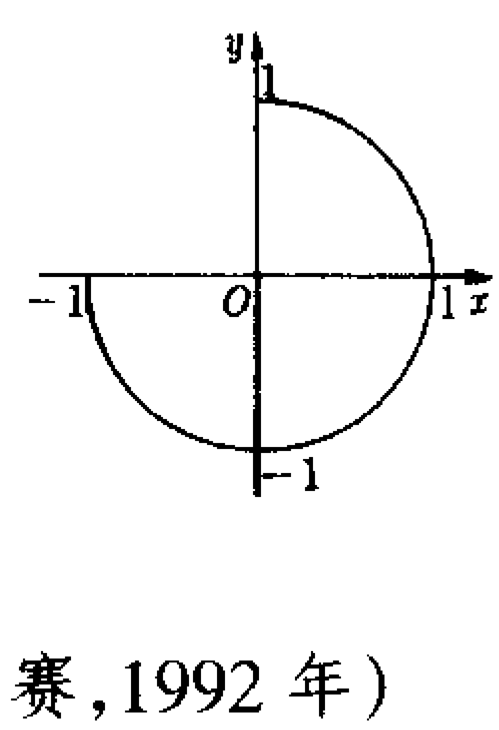
[解]　方程 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$ 表示圆心在 (α,β)，且半径为 a 的圆．

反过来考虑　$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=a^2$ 同样表示许多圆，圆心在 (x,y) 且过 (α,β)．

因而圆心 (x,y) 的轨迹是圆．

故选 (D)．

26·2　已知如图的曲线是以原点为圆心，1 为半径的圆的一部分，则这一曲线的方程是



(A) $(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$.

(B) $(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$.

(C) $(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$.

(D) $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$.

（中国高中数学联赛，1992 年）

[解]　∵ 曲线是右半单位圆和下半单位圆的并集，注意到

右半单位圆方程为　$x-\sqrt{1-y^2}=0$,

下半单位圆方程为　$y+\sqrt{1-x^2}=0$.

则题设曲线方程为 $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$.

故选(D).

26·3 若动点 $P(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动,则点 $Q(-2xy,\ y^2-x^2)$ 的运动方式是

(A) 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动.

(B) 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动.

(C) 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动.

(D) 以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动.

(中国高中数学联赛,1984 年)

[**解**] $\because$ 动点 $P(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆上逆时针运动,

$\therefore$ 可设 $x=\cos\omega t,\quad y=\sin\omega t$,

则 $-2xy=-2\cos\omega t\sin\omega t=-\sin2\omega t=\cos(270^\circ-2\omega t)$,

$y^2-x^2=\sin^2\omega t-\cos^2\omega t=-\cos2\omega t=\sin(270^\circ-2\omega t)$.

这表示 Q 点是以$(0,-1)$为始点,在单位圆上顺时针运动,且角速度为 2ω.

故选(C).

26·4 若曲线 $x^2\cos\alpha-y^2\sin\alpha+2=0$ 是一椭圆,则$(x+\cos\alpha)^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ 这个圆的圆心在

(A) 第一象限. (B) 第二象限.

(C) 第三象限. (D) 第四象限.

(中国四川省高中数学竞赛,1990 年)

[**解**] 由设椭圆方程可化为 $y^2\sin\alpha-x^2\cos\alpha=2$,

因其为椭圆,则 $\sin\alpha>0$,且 $\cos\alpha<0$,知 α 在第二象限.

又题设圆圆心在$(-\cos\alpha,-\sin\alpha)$,则其在第四象限.

故选(D).

26·5 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=2$ 为定长.自 A 引 BC 的中线 AD, $AD=1\frac{1}{2}$.又 D 点为动点,那么三角形顶点 C 的轨迹是

(A) 直线 AB,自 A 之长为 $1\frac{1}{2}$.

(B) 一圆,以 A 为中心,半径为 2.

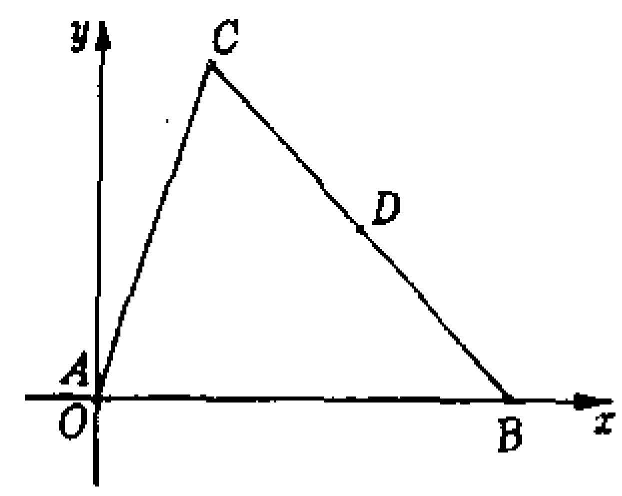
(C) 一圆,以 A 为中心,半径为 3.

(D) 一圆,半径为 3,且中心在 AB 上,距 B 为 4.

(E) 一椭圆,以 A 为焦点.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解] 以 A 为原点,AB 所在边为横轴建立坐标系,则 A、B 的坐标分别为(0,0),(2,0). 设 C 的坐标为(x,y),则 BC 中点 D 的坐标为 $\left(\frac{x+2}{2},\frac{y}{2}\right)$,由设



$$AD=\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}-0\right)^2+\left(\frac{y}{2}-0\right)^2}=\frac{3}{2},$$

即 $(x+2)^2+y^2=9$, 此为圆心在 $(-2,0)$, 半径为 3 的圆.

故选(D).

注 因 C 是三角形的一个顶点,C 不能位于 AB 边上,所以 C 的轨迹应是 (D) 中的圆去掉$(1,0)$和$(-5,0)$两点.

26·6 已知一边长为 s 的等边三角形,P 是在该三角形所在平面上的点,从 P 到三角形三顶点的距离平方和是一个定值 a. 找出所有符合这样条件的点 P 的轨迹是

(A) 若 $a>s^2$,是一个圆.

(B) 若 $a=2s^2$,只含有三点,若 $a>2s^2$,是一个圆.

(C) 只有当 $s^2<a<2s^2$ 时,是一个有正半径的圆.

(D) 对于 a 的任何值,只含有有限个数的点.

(E) 这些都不是.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 设 P 点在坐标系中的坐标是(x,y),而等边三角形的顶点是$(0,0)$,$(s,0)$ 和 $\left(\frac{s}{2},\frac{\sqrt{3}s}{2}\right)$. 那么 P 点的轨迹满足

$$a=x^2+y^2+(x-s)^2+y^2+\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}s}{2}\right)^2,$$

即
$$a=(3x^2-3sx)+(3y^2-s\sqrt{3y})+2s^2,$$

或
$$\frac{a-2s^2}{3}=\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}s}{6}\right)^2-\frac{s^2}{3}.$$

亦即
$$\frac{a-s^2}{3}=\left(x-\frac{s}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}s}{6}\right)^2.$$

这样,若 $a < s^2$ 这个轨迹是空集;若 $a = s^2$,轨迹是 $\left\{\left(\frac{s}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}s\right)\right\}$;若 $a > s^2$,轨迹是一个圆.

故选(A).

26·7 把圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 与椭圆 $9x^2+(y+1)^2=9$ 的公共点用线段连结起来,所得到的图形为

(A) 线段. (B) 不等边三角形.

(C) 等边三角形. (D) 四边形.

(中国高中数学联赛,1996 年)

[解] 圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 与椭圆 $9x^2+(y+1)^2=9$ 的交点 $A(x,y)$ 的坐标应满足方程

$$x^2+\frac{(y+1)^2}{9}=x^2+(y-1)^2.$$

解得 $y=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

于是相应地求得 $x=0$ 或 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

这样,得到给定圆与椭圆的三个交点:

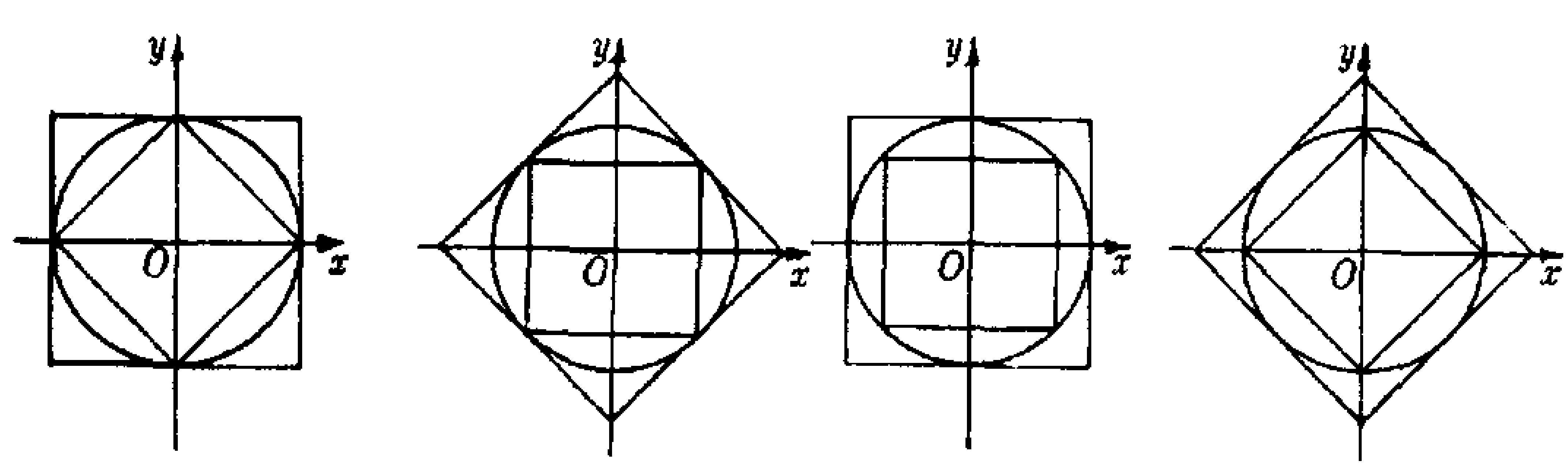
$$A_1(0,\ 2),\ A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

易求得 $|A_1A_2|=|A_1A_3|=|A_2A_3|=\sqrt{3}$.

因此,所得图形为正三角形.

故选(C).

26·8 一个有外切正方形和内接正方形的圆,其圆心在一个有 x 轴 Ox 和 y 轴 Oy 的直角坐标系的原点 O 上,如下列 Ⅰ 到 Ⅳ 的各图所示不等式 $|x|+|y|\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}\leqslant 2\max(|x|,|y|)$ 表示的几何



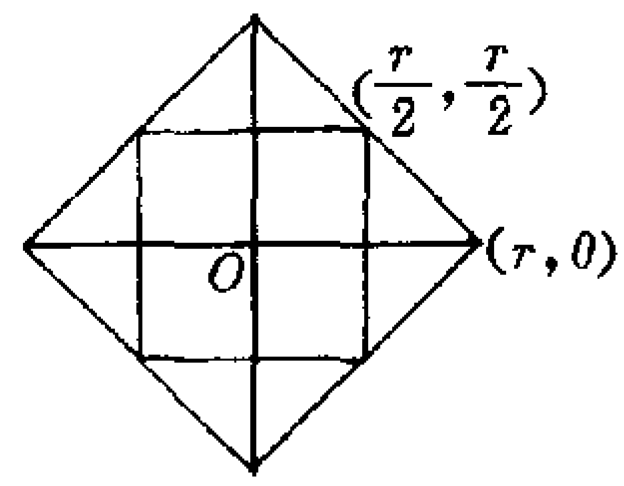
Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

意义的图形是

(A)Ⅰ.　(B)Ⅱ.　(C)Ⅲ.　(D)Ⅳ.　(E)都不是.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

[解]　对于一些正整数 r 观察右图.



外面正方形的方程是 $|x|+|y|=r$，在正方形上面或里面的点满足：

(1)　$|x|+|y|\leqslant r$.

圆方程是 $x^2+y^2=\frac{r^2}{2}$，所以在圆上的点满足：

(2) $\sqrt{2(x^2+y^2)}=r$.

里面的正方形的方程是 $\max(|x|,|y|)=\frac{r}{2}$，所以在正方形上面或外面的点满足：

(3)　$r\leqslant 2\max(|x|,|y|)$.

这样，从(1)，(2) 和(3) 可以看到在圆上的点满足：

$$|x|+|y|\leqslant r=\sqrt{2(x^2+y^2)}\leqslant 2\max(|x|,|y|).$$

故选(B).

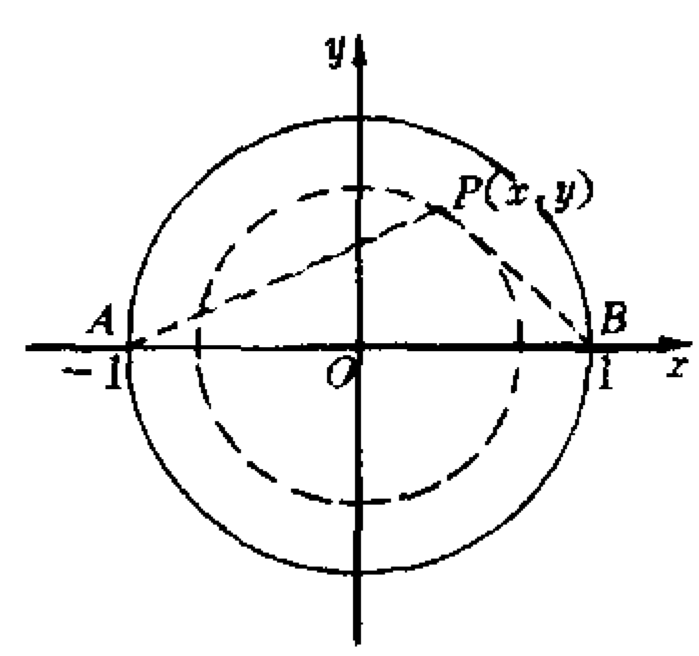
26·9　某些点 P 在半径为 1 的圆所包围的区域内，而且从这些 P 点到某一直径的端点的距离的平方和是 3，设 n 为 P 点的数目，则 n 是

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)4.　(E)无限大.

（第 20 届美国高中数学考试，1969 年）

[解]　在平面直角坐标系下，半径为 1，圆心在原点的圆方程为

$$x^2+y^2=1.$$



设 AB 为直径，则 A，B 的坐标分别为

$$(-1,0),\ (1,0).$$

又设 P 点坐标为(x,y)，依题设有

$$[(x+1)^2+y^2]+[(x-1)^2+y^2]=3,$$

即　$x^2+y^2=\frac{1}{2}$. 则在此圆上的点均为所求.

故选(E).

26·10　在平面直角坐标系中，若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=$

$(x-2y+3)^2$ 表示的曲线为椭圆，则 m 的取值范围为

(A)$(0,\ 1)$. (B)$(1,+\infty)$. (C)$(0,\ 5)$. (D)$(5,+\infty)$.

（中国高中数学联赛，1997 年）

[解] 由题设得

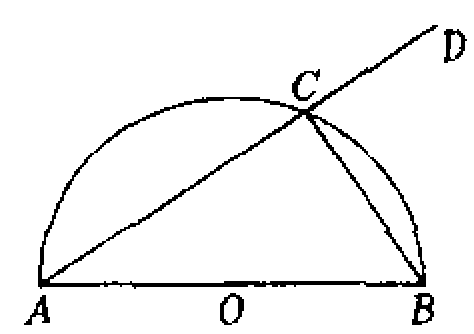
$$\frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\left|\dfrac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|}=\sqrt{\frac{5}{m}}.$$

此即说明(x,y)到定点$(0,-1)$与到定直线 $x-2y+3=0$ 的距离之比为常数$\sqrt{\dfrac{5}{m}}$.

由椭圆定义得 $\sqrt{\dfrac{5}{m}}<1$，所以 $m>5$.

故选(D).

26·11 如图，半径为 1 的半圆周以 0 为圆心，以 AB 为直径．动点 C 在整个圆周上移动．延长 AC 到 D 点，使得$\dfrac{CD}{CB}=k$ $(k>0,k$ 为常数$)$．则 D 点所描出的曲线的长度是



(A)$(1+k)\cdot\pi$. (B)$\pi\cdot\sqrt{1+k}$.

(C)$(1+k^2)\cdot\pi$. (D)$\pi\cdot\sqrt{1+k^2}$.

（中国四川省高中数学竞赛，1993 年）

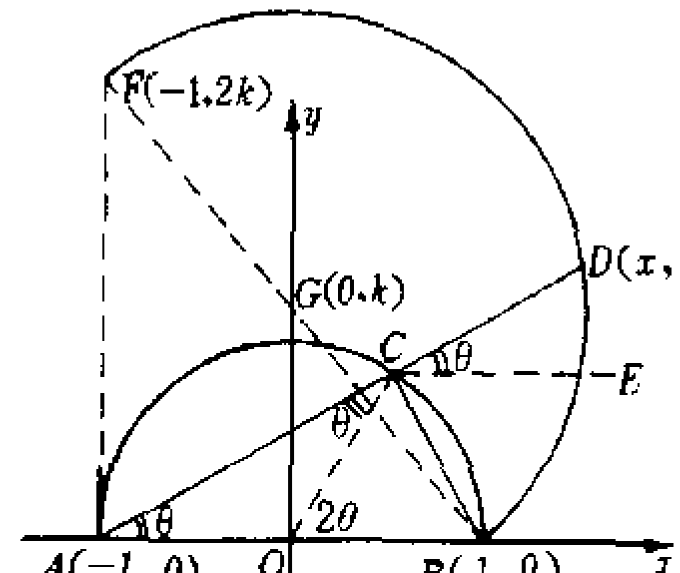
[解] 如图，记 $\angle CAB=\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$．则

$$\angle COB=2\theta,\quad CB=2\sin\theta,\quad CD=2k\sin\theta.$$

C 点的坐标为$(\cos2\theta,\sin2\theta)$.

过 C 点作 $CE\parallel AB$，则 $\angle DCE=\angle CAB=\theta$.

令 D 点的坐标为(x,y)，则



$$\begin{cases}x=\cos2\theta+2k\sin\theta\cos\theta,\\ y=\sin2\theta+2k\sin\theta\sin\theta,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\cos2\theta+k\sin2\theta,\\ y=\sin2\theta+k(1-\cos2\theta).\end{cases}$$

解得 $\sin2\theta=\dfrac{y+kx-k}{1+k^2}$

（由此得 $kx+y\geqslant k$），

$$\cos 2\theta = \frac{x - ky + k^2}{1 + k^2}.$$

再由 $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$,

得 $$(y + kx - k)^2 + (x - ky + k^2)^2 = (1 + k^2)^2,$$

即 $$x^2 + (y - k)^2 = (\sqrt{1 + k^2})^2.$$

并且还有 $kx + y \geqslant k$.

由此可知:D 点轨迹是以点 $F(-1,2k)$ 和 $B(1,0)$ 所连线段为直径的(上侧部分)半圆周,其圆心为 $G(0,k)$,

半径为 $\sqrt{1 + k^2}$,所以其轨迹长度为 $\pi\sqrt{1 + k^2}$.

故选(D).

26·12 函数 $f(x) = x^2 + 2bx + 1$ 和 $g(x) = 2a(x + b)$,其中变量 x 和常量 a, b 都是实数.每一对常量 a, b 可以考虑为 ab 平面上的一个点 (a,b).设 S 是这些点 (a,b) 的集合,对于这些点 (a,b) 曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 xy-平面上不交.S 的面积为

(A)1. (B)π. (C)4. (D)4π. (E)无限.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)

[解] 由题设,集合 S 中的点 (a,b) 满足使关于 x 的方程

$$x^2 + 2bx + 1 = 2a(x + b)$$

没有实根,也就是使方程

$$x^2 + 2(b - a)x + (1 - 2ab) = 0$$

没有实根.

因而 $\Delta = [2(b - a)]^2 - 4(1 - 2ab) < 0$,

即 $$4(a^2 - 2ab + b^2) - 4 + 8ab < 0,$$

或 $$4a^2 + 4b^2 < 4, \text{亦即 } a^2 + b^2 < 1.$$

所以 S 为没有边界的单位圆,其面积为 π.

故选(B).

26·13 设 r 是原点和 P 点的距离,已知 P 点坐标为 (x,y),若 $s = \frac{y}{r}$, $c = \frac{x}{r}$,则 $s^2 - c^2$ 的范围在

(A)$(-\infty,-1)$ 或 $(1,+\infty)$. (B)$(-\infty,-1]$ 或 $[1,+\infty)$.

(C)$(-1,1)$. (D)$[-1,1]$.

(E)只等于 -1 和 $+1$.

(第 9 届美国高中数学考试,1958 年)

[解] 由设知 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,因而

$$s^2-c^2=\left(\frac{y}{r}\right)^2-\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=1-\frac{2x^2}{x^2+y^2}.$$

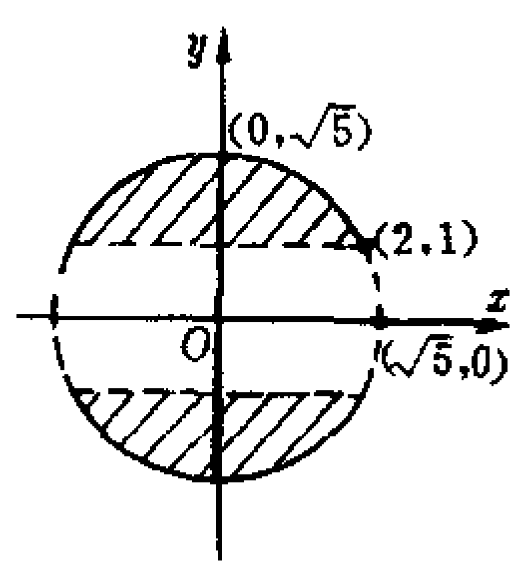
又 $$\frac{2x^2}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, 当 x=0,y=r 时;\\2, 当 x=r,y=0 时.\end{cases}$$

故 $$-1\leqslant 1-\frac{2x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1,$$

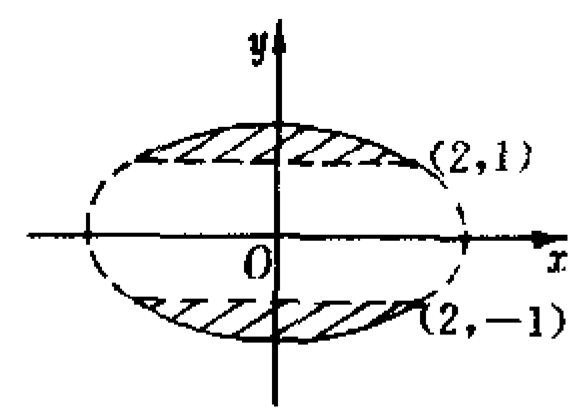
即 $$-1\leqslant s^2-c^2\leqslant 1.$$

故选(D).

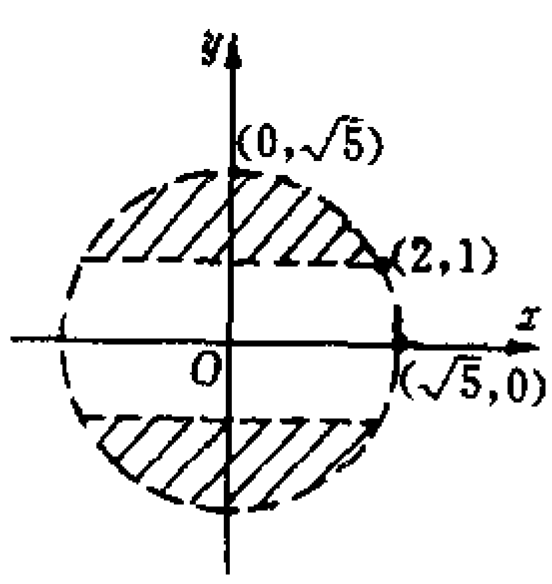
26·14　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$通过点$(2,1)$,则所有这些椭圆上满足$|y|>1$的点的集合用阴影表示是下面图中的



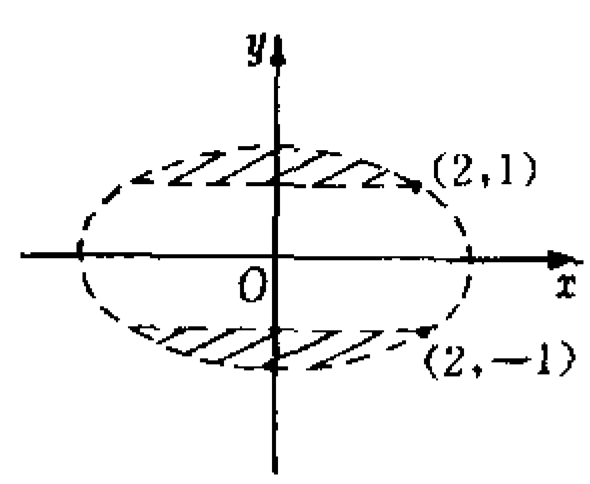
(A)



(B)



(C)



(D)

(中国高中数学联赛,1990年)

[解]　$\because$ 点$(2,1)$在椭圆上,$\therefore\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. 即

$$b^2=\frac{a^2}{a^2-4} \qquad ①$$

$\because\ a^2>b^2$, $\therefore\ a^2>\frac{a^2}{a^2-4}$, $a^2>5$.

将 ① 代入椭圆方程，得 $a^2 = \frac{4y^2 - x^2}{y^2 - 1}$，于是

$$\frac{4y^2 - x^2}{y^2 - 1} > 5 \quad ②$$

当 $|y| > 1$，② 式可化为 $x^2 + y^2 < 5$.

故这些椭圆上满足 $|y| > 1$ 的点的集合为 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 5, |y| > 1\}$.

知(C)表示此集合.

故选(C).

26·15　已知原点在椭圆 $k^2x^2 + y^2 - 4kx + 2ky + k^2 - 1 = 0$ 的内部，那么参数 k 的取值范围是

(A) $|k| > 1$.　　(B) $|k| \neq 1$.

(C) $-1 < k < 1$.　　(D) $0 < |k| < 1$.

（中国高中数学联赛，1988 年）

[解]　令 $f(x,y) = k^2x^2 + y^2 - 4kx + 2ky + k^2 - 1$，则当点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆内部时有 $f(x_0, y_0) < 0$.

$\therefore \quad f(0,0) = k^2 - 1 < 0$，　即　$0 < |k| < 1$.

故选(D).

26·16　极坐标方程 $\rho = \frac{1}{1 - \cos\theta + \sin\theta}$ 所确定的曲线是

(A) 圆.　(B) 椭圆.　(C) 双曲线.　(D) 抛物线.

（中国高中数学联赛，1982 年）

[解]　原方程化简为

$$\rho = \frac{1}{1 - \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

由离心率 $e = \sqrt{2} > 1$，知它为双曲线.

故选(C).

26·17　对所有满足 $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant 5$ 的 m, n，极坐标方程

$$\rho = \frac{1}{1 - C_m^n \cos\theta}$$

表示的不同双曲线条数是

(A)15.　(B)10.　(C)7.　(D)6.

（中国高中数学联赛，1984 年）

[解] ∵ 方程 $\rho = \dfrac{1}{(1 - C_m^n\cos\theta)}$ 表示双曲线，

∴ $C_m^n > 1$. 而 $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant 5$,

∴ C_m^n 可表示为 $C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4, C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_2^1, C_2^2, C_1^1$ 共十五种表示法.

但 $C_1^1 = C_2^2 = C_3^3 = C_4^4 = C_5^5 = 1$ 不合题意，应去掉这五种表示法.

又 $C_5^1 = C_5^4$, $C_5^2 = C_5^3$, $C_4^1 = C_4^3$, $C_3^1 = C_3^2$, 故应去掉重复的四条.

∴ 共有 $15 - 5 - 4 = 6$ 条不同的双曲线.

故选(D).

26·18 曲线 $\dfrac{x^2}{16-k} - \dfrac{y^2}{k} = 1$ 与曲线 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的焦距相等的充要条件是

(A) $k < 16$, 且 $k \neq 0$. (B) $k > 0$, 且 $k \neq 16$.

(C) $0 < k < 16$. (D) $k < 0$ 或 $k > 16$.

(第 2 届“希望杯”全国数学邀请赛，1991 年)

[解] 易求得椭圆 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 的焦距为 8.

又由 $\dfrac{x^2}{16-k} - \dfrac{y^2}{k} = 1$, 知 $k \neq 0$.

且当 $k < 0$ 时，其表示椭圆，且焦距为

$$2\sqrt{(16-k)+k} = 2\sqrt{16} = 8;$$

当 $0 < k < 16$ 时，该方程表示双曲线，且焦距为

$$2\sqrt{(16-k)+k} = 2\sqrt{16} = 8.$$

从而 $k \in (-\infty, 0) \cup (0, 16)$.

故选(A).

26·19 设动点 $M(x,y)$ 到点 $F(4,0)$ 的距离与到直线 $x = 3$ 的距离之比为 2，则 $M(x,y)$ 的轨迹方程为

(A) $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. (B) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.

(C) $3x^2 - y^2 - 16x + 20 = 0$. (D) $3y^2 - x^2 - 16y + 20 = 0$.

(中国四川省高中数学竞赛，1989 年)

[解]　依题设可有 $\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{|x-3|}=2$，即

$$3x^2-y^2-16x+20=0.$$

故选(C).

26·20　设 a,c 是正的实常数.对于每个实数 t,设(x_t,y_t)是抛物线 $y=ax^2+tx+c$ 的顶点坐标.那么对于所有实数 t,顶点(x_t,y_t)在平面上组成的图形是

(A) 一条直线.　　　　(B) 一条抛物线.

(C) 一条抛物线的一部分而不是全部.　　(D) 双曲线的一支.

(E) 非以上这些.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解]　$y=ax^2+tx+c$ 是一个含参数 t 的抛物线族,那么它们的顶点坐标(x_t,y_t)也一定是参数 t 的函数.

又抛物线 $y=ax^2+tx+c$ 的顶点都在它的对称轴 $x=\dfrac{-t}{2a}$ 上.

这样 $x_t=\dfrac{-t}{2a}$,并且

$$y_t=a\left(\frac{-t}{2a}\right)^2+t\left(\frac{-t}{2a}\right)+c=c-\frac{t^2}{4a}.$$

这是 x_t,y_t 关于 t 的参数方程,消去参数,化为一般方程,有

$$y_t=c-ax_t^2=-ax_t^2+c.$$

所以每一顶点(x_t,y_t)都在抛物线 $y=-ax^2+c$ 上.

反过来,抛物线 $y=-ax^2+c$ 上的点(x,y)都是(x_t,y_t)的形式,也就是只要引进参数 $t,x=-\dfrac{t}{2a}$,即为原抛物线族的顶点.

故选(B).

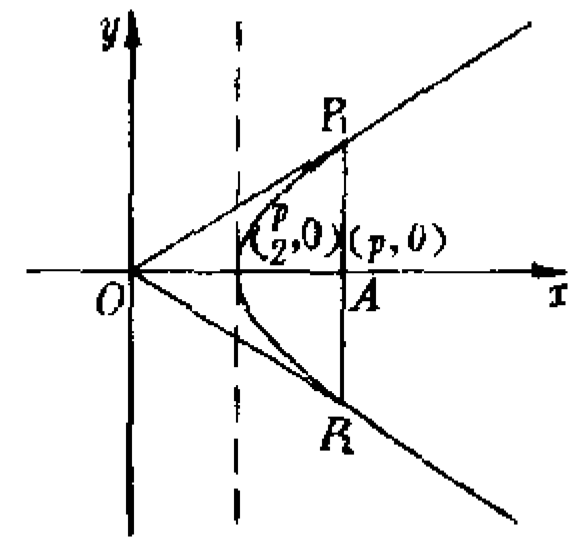
26·21　过 $A(p,0)$ 作与抛物线 $y^2+p^2=2px(p>0)$ 对称轴垂直的弦 P_1P_2.若 O 为原点,则 $\angle P_1OP_2$ 是

(A) 直角.　　(B) 钝角.　　(C) 锐角.　　(D) 不确定.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　注意到　$y^2+p^2=2px$ 可变形为 $y^2=2p\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$.

再由题设知　$|P_1P_2|=2p$.



故 $|AP_1| = |AP_2| = p$.

又 $|OA| = p$,知 $\mathrm{Rt}\triangle OAP_1$,$\mathrm{Rt}\triangle OAP_2$ 均为等腰直角三角形.则

$$\angle P_1OP_2 = \angle P_1OA + \angle P_2OA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

故选(A).

26·22 对于每个自然数 n,抛物线 $y = (n^2+n)x^2 - (2n+1)x + 1$ 与 x 轴交于A_n,B_n两点,以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离,则 $|A_1B_1| + |A_2B_2| + \cdots + |A_{1992}B_{1992}|$ 的值是

(A) $\frac{1991}{1992}$. (B) $\frac{1992}{1993}$. (C) $\frac{1991}{1993}$. (D) $\frac{1993}{1992}$.

(中国高中数学联赛,1992 年)

[解] 当 $y = 0$ 时有$(nx-1)[(n+1)x-1] = 0$,

解得 $$x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{1}{n+1}.$$

所以 $$|A_nB_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

则 $$\sum_{k=1}^{1992}|A_iB_i| = \sum_{k=1}^{1992}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{1993} = \frac{1992}{1993}.$$

故选(B).

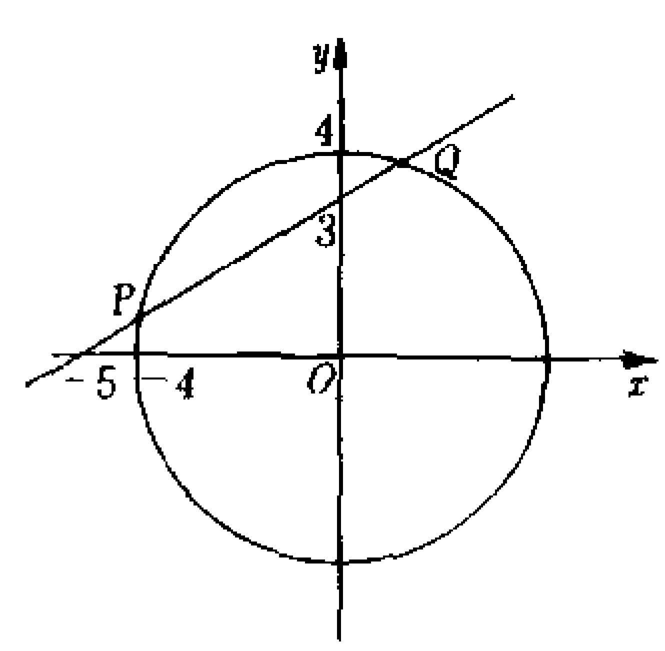
26·23 设 n 满足 $5y - 3x = 15$ 与 $x^2 + y^2 \leqslant 16$ 的数对(x,y)的组数,则 n 等于

(A)0. (B)1. (C)2.

(D) 有限个,但多于 2. (E) 大于任何有限数.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解] $x^2 + y^2 \leqslant 16$ 在直角坐标系中表示圆心在原点,半径为 4 的圆(圆周及内部)所有点.



$5y - 3x = 15$ 代表的直线与该圆有两个交点 P,Q,则 PQ 上所有点均满足题设.

故选(E).

26·24 若 r 是正数,并且方程为 $x + y = r$ 的一条直线与方程为

$x^2+y^2=r$ 的圆相切,那么 r 等于

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B)1.　　(C)2.　　(D) $\sqrt{2}$.　　(E)$2\sqrt{2}$.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解]　若方程为 $x+y=r$ 的直线与方程为 $x^2+y^2=r$ 的圆相切,易求得切点 $\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)$,它与原点间的距离是 $\sqrt{r}$.

$\therefore\ \left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2=r$,　解得　$r=2$.

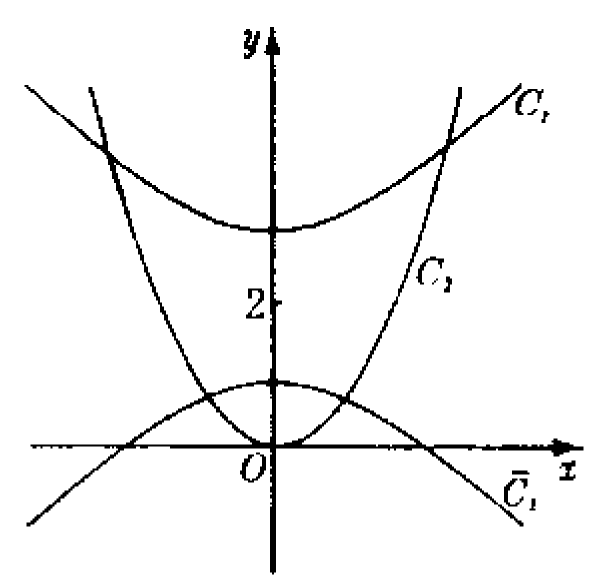
故选(C).

26·25　曲线 $C_1:x^2-y^2+4y-3=0$,　曲线 $C_2:y=ax^2$ $(a>0$,　a 为常数$)$,　C_1 与 C_2 交点的数目是

(A)2.　　(B)4.　　(C)6.　　(D) 不确定.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　注意到 $x^2-y^2+4y-3=0$ 即 $(y-2)^2-x^2=1$,此即以 $(0,2)$ 为中心,y 轴为实轴的等轴双曲线.



又 $y=ax^2(a>0)$ 的图像,系以原点为顶点,开口向上的抛物线.

则它们的交点有 4 个.

故选(B).

26·26　曲线 $x^2+4y^2=1$ 及 $4x^2+y^2=4$ 的公共点的个数为

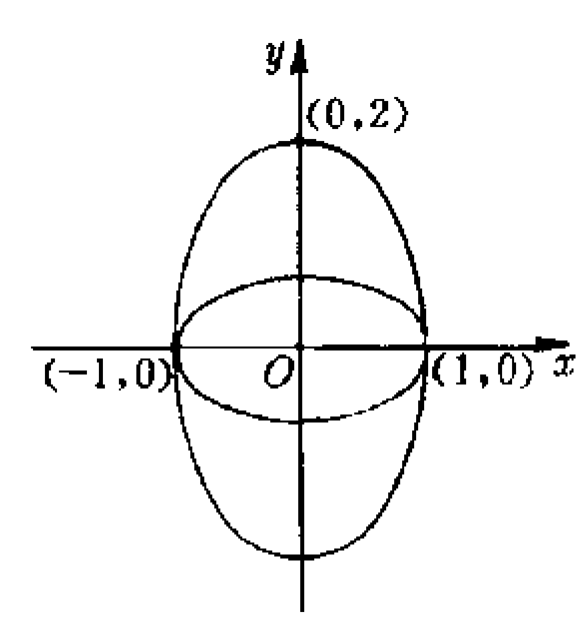
(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　(E)4.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解]　将题设曲线方程标准化有

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1, \quad ①$$

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1. \quad ②$$



它们均系椭圆,且 ① 的长轴为 ② 的短轴.

因而两曲线公共点仅 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 两点

选择题卷

(曲线切点).

故选(C).

26·27　考虑函数 $y = Ax^2$ 与 $y^2 + 3 = x^2 + 4y$ 的图形,其中 A 是一个正的常数,且 x 与 y 是实的变量.这两曲线的交点

(A) 恰好 4 个.　　　　　　(B) 恰好 2 个.

(C) 至少 1 个,且交点的个数随 A 取不同值而变化.

(D) 至少对 1 个 A 的正数值,交点个数为 0.

(E) 以上结论都不对.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　由设 $y = Ax^2(A > 0)$,则 $x^2 = \dfrac{y}{A}$ 代入另一方程有

$$y^2 + 3 = \frac{y}{A} + 4y,\quad 即\quad y^2 - \left(4 + \frac{1}{A}\right)y + 3 = 0.$$

由　$\Delta = \left(4 + \dfrac{1}{A}\right)^2 - 12 > 0$　(注意到 $A > 0$),且方程一次项系数小于 0,常数项大于 0,由韦达定理知其有两个正根,设为 y_1, y_2.

因而　$x = \pm\sqrt{\dfrac{y_1}{A}}$, 或 $\pm\sqrt{\dfrac{y_2}{A}}$.

∴　两曲线有四个交点.

故选(A).

26·28　方程 $x^2 + y^2 - 16 = 0$ 和 $x^2 - 3y + 12 = 0$ 有一公共实数解,那么 y 的值是

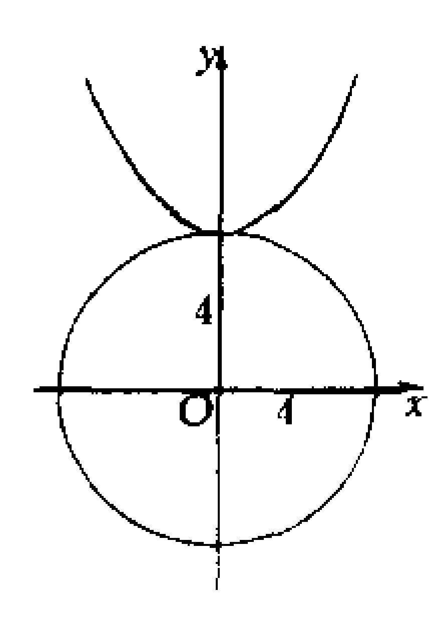
(A) 只是 4.　　　　(B) -7,4.　　　　(C)0,4.

(D)y 无解.　　　　(E)y 的所有值.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解 1]　作出以原点为圆心,4 为半径的圆和 y 截距为 4 的抛物线.从图可见,它们只在 $y = 4$ 点相交.

故选(A).



[解 2]　从前一方程中减去后一方程得

$y^2 + 3y - 28 = 0$, 知 $y = -7$ 或 4.

当 $y = 4$ 时,知 $x = 0$,但是对于 $y = -7$ 时,x 无

实数解.

故选(A).

26·29　函数 $x^2+y^2=4+12x+6y$ 和 $x^2+y^2=k+4x+12y$ 的图像,当不同的 k 值满足 $a\leqslant k\leqslant b$ 时总相交,则 $b-a$ 的值为

(A)5.　(B)68.　(C)104.　(D)140.　(E)144.

(第 49 届美国高中数学考试,1998 年)

[解]　题设两函数可分别化为:

$$(x-6)^2+(y-3)^2=7^2 \quad ①$$

$$(x-2)^2+(y-6)^2=40+k \quad ②$$

它们分别代表两个圆心在(6,3),(2,6) 半径分别为 7 和 $\sqrt{40+k}$ 的圆.

两圆相交$\Leftrightarrow R_1-R_2\leqslant$圆心距$\leqslant R_1+R_2$,这里 R_1、R_2 分别表示两圆半径.

这样可有

$$|7-\sqrt{40+k}|\leqslant\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}\leqslant 7+\sqrt{40+k}.$$

即　$|7-\sqrt{40+k}|\leqslant 5\leqslant 7+\sqrt{40+k}$,

右端不等式总成立,因而只须解 $|7-\sqrt{40+k}|\leqslant 5$.

即　$2\leqslant\sqrt{40+k}\leqslant 12$, 得 $-36\leqslant k\leqslant 104$.

$\therefore\quad b-a=140$.

故选(D).

26·30　如果 $x^2+y^2=m$ 的图形与 $x+y=\sqrt{2m}$ 的图形相切,那么

(A)$m=\dfrac{1}{2}$.　(B)$m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.　(C)$m=\sqrt{2}$.

(D)$m=2$.　(E)m 可以是任意非负实数.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　平面上任一点(x_1,y_1)到直线 $x+y=\sqrt{2m}$ 的距离是

$$d=\left|\frac{x_1+y_1-\sqrt{2m}}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}-\sqrt{m}\right|,$$

则原点(0,0) 到直线距离为 $\sqrt{m}$,即直线是圆 $x^2+y^2=m$ 的切线,m 可为任意非负实数.

故选(E).

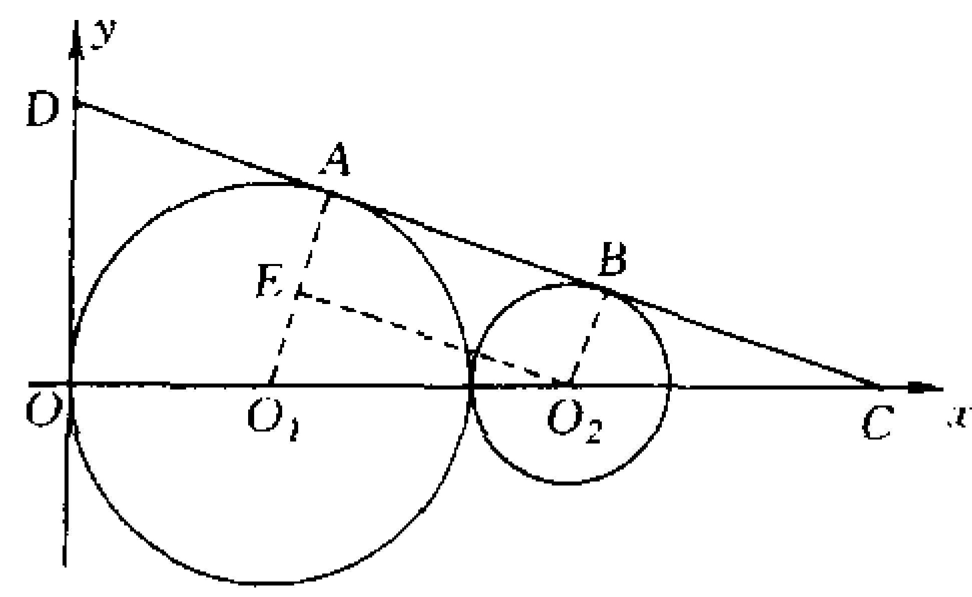
选择题卷

26·31　一圆圆心在(2,0)半径为2,另一圆圆心为(5,0)半径为1,一直线与两圆在第一象限相切,该直线在 y 轴截距最接近

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.　(B) $\frac{8}{3}$.　(C) $1+\sqrt{3}$.　(D) $2\sqrt{2}$.　(E) 3.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解]　如图,易证 $\triangle CBO_2 \backsim \triangle CAO_1 \backsim \triangle O_2EO_1 \backsim \triangle COD$.



由
$$\frac{O_1A}{O_1C}=\frac{O_2B}{O_2C}=\frac{O_1A-O_2B}{O_1C-O_2C}$$

$$\therefore\quad O_2C=O_2B\cdot\frac{O_1C-O_2C}{O_1A-O_2B}=1\cdot\frac{5-2}{2-1}=3,$$

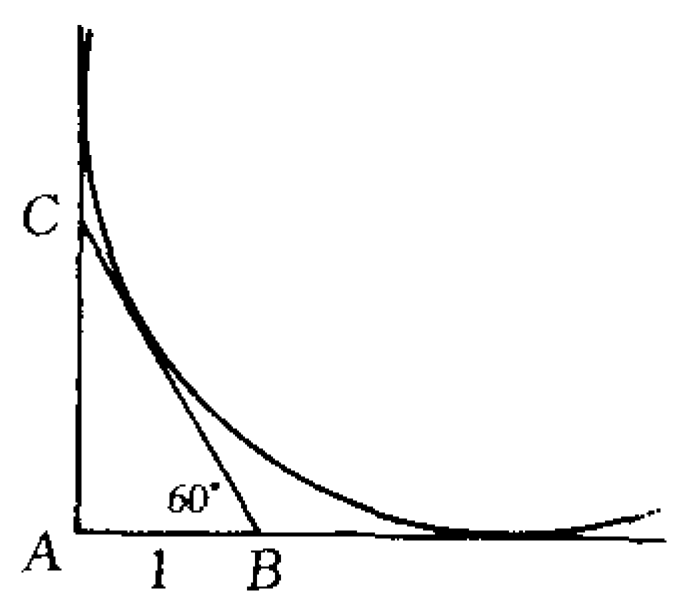
且
$$B=\sqrt{8}.$$

同时　$\frac{OD}{O_2B}=\frac{OC}{CB}$, 又 $OC=OO_1+O_2C=8$,

$$\therefore\quad OD=\frac{O_2B\cdot OC}{CB}=\frac{1\cdot 8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

故选(D).

26·32　一圆与平面直角坐标 系两坐标轴及一个 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的三角形,斜边相切(如图),又 $AB=1$.则该圆半径保留小数点后两位的值是



(A)2.18.　(B)2.24.　(C)2.31.
(D)2.37.　(E)2.41.

(第48届美国高中数学考试,1997年)

[解]　设该圆心为 O,半径为 r,显然 O 点坐标为 (r,r).
易求得 BC 所在直线方程为　$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$.
r 为 O 到 BC 所在直线的距离:

$$\frac{|\sqrt{3}r+r-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=r,\ \text{解得}\ r=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2.37.$$

故选(D).

26·33　在 xy 坐标平面上,点(0,0)与(12,16)之间最短路线长是

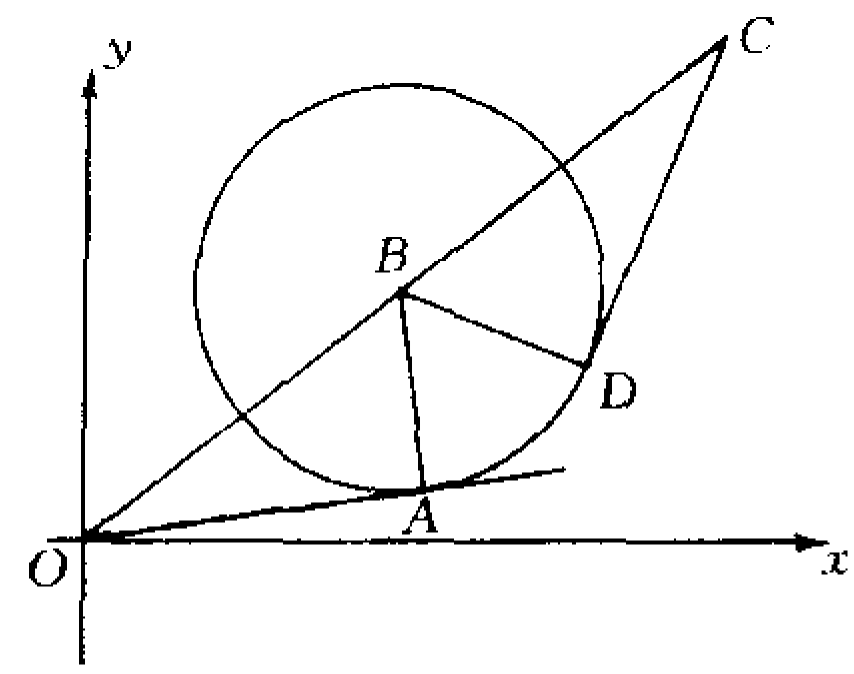
多少?当然它们连线须绕过圆$(x-6)^2+(y-8)^2=25$.

(A)$10\sqrt{3}$. (B)$10\sqrt{5}$. (C)$10\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}$.

(D)$40\frac{\sqrt{3}}{3}$. (E)$10+5\pi$.

(第 47 届美国高中数学考试,1996 年)

[**解**] 所求最短路线显然如右图所示,它包括两条线段和一段弧,这些线段均与已知圆相切.



易由 $AB=5, OB=10$,

又 $AB\perp OA$, 知 $\angle OBA=60°$,

同理 $\angle CBD=60°$.

且 $OA=5\sqrt{3}$.

同理 $CD=5\sqrt{3}$, 注意到 B 为OC 的中点.

则 $\angle ABD=60°$ 且 $\overset{\frown}{AD}=\frac{5}{3}\pi$.

$\therefore$ 最短路线长为 $10\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}$.

故选(C).

26·34 若直线 $y=mx+1$ 和椭圆 $x^2+4y^2=1$ 相交于一点(相切),那么 m^2 的值是

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{4}{5}$. (E) $\frac{5}{6}$.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[**解**] 两曲线仅有一个交点,即要求二次方程

$x^2+4(mx+1)^2=1$ 的两个根相等,从而判别式是零.

即 $\Delta=(8m)^2-4(4m^2+1)\cdot 3=0$, 解得 $m^2=\frac{3}{4}$.

故选(C).

26·35 设双曲线的左右焦点是 F_1, F_2, 左右顶点是 M, N, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的顶点 P 在双曲线上,则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与边 F_1F_2 的切点位置是

(A) 在线段 MN 内部.

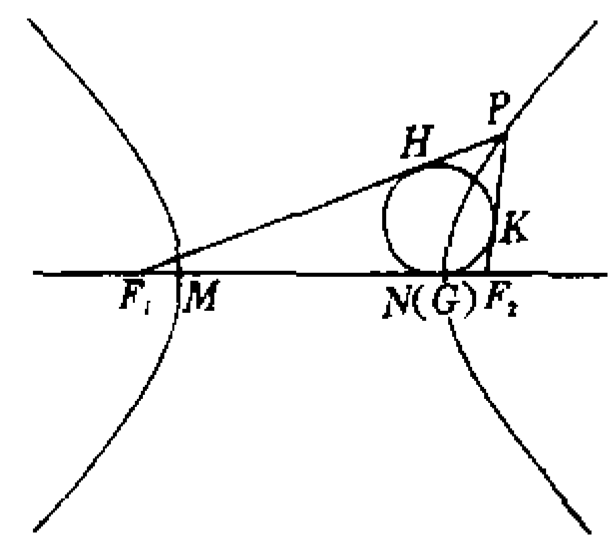
(B) 在线段 F_1M 内部或线段 NF_2 内部.

(C) 点 M 或点 N.

(D) 不能确定的.

(中国高中数学联赛,1990年)

[解] 设内切圆切 F_1F_2 于点 G,切 PF_1 于 H,切 PF_2 于 K. 当 P 在右支上时,得



$$\begin{aligned}&|GF_1|-|GF_2|\\=&|HF_1|-|KF_2|\\=&(|HF_1|+|HP|)-(|KF_2|+|KP|)\\=&|PF_1|-|PF_2|.\end{aligned}$$

由双曲线定义知,G 在双曲线上,于是 G 与 N 重合.

同理,若点 P 在左支上,则 G 与 M 重合.

故选(C).

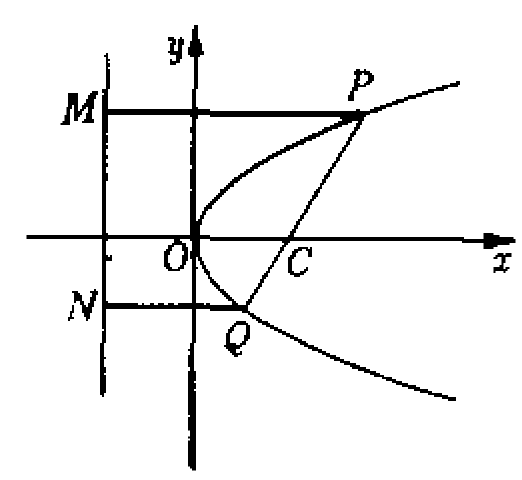
26·36 PQ 为经过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的任意一条弦,MN 为 PQ 在准线 l 上的射影,PQ 绕 l 旋转一周所得的旋转面面积为 S_1,以 MN 为直径的球面面积为 S_2,则下面的结论中,正确的是

(A) $S_1>S_2$. (B) $S_1<S_2$. (C) $S_1\geqslant S_2$.

(D) 有时 $S_1>S_2$,有时 $S_1=S_2$,有时 $S_1<S_2$.

(中国高中数学联赛,1985年)

[解] 如右图,设 C 为抛物线的焦点,则



$$PM=PC,QN=QC.$$

于是 $S_1=\pi\cdot PQ(PM+QN)=\pi\cdot PQ^2$,

同理 $S_2=\pi\cdot MN^2$.

因 $PQ\geqslant MN$, 故 $S_1\geqslant S_2$.

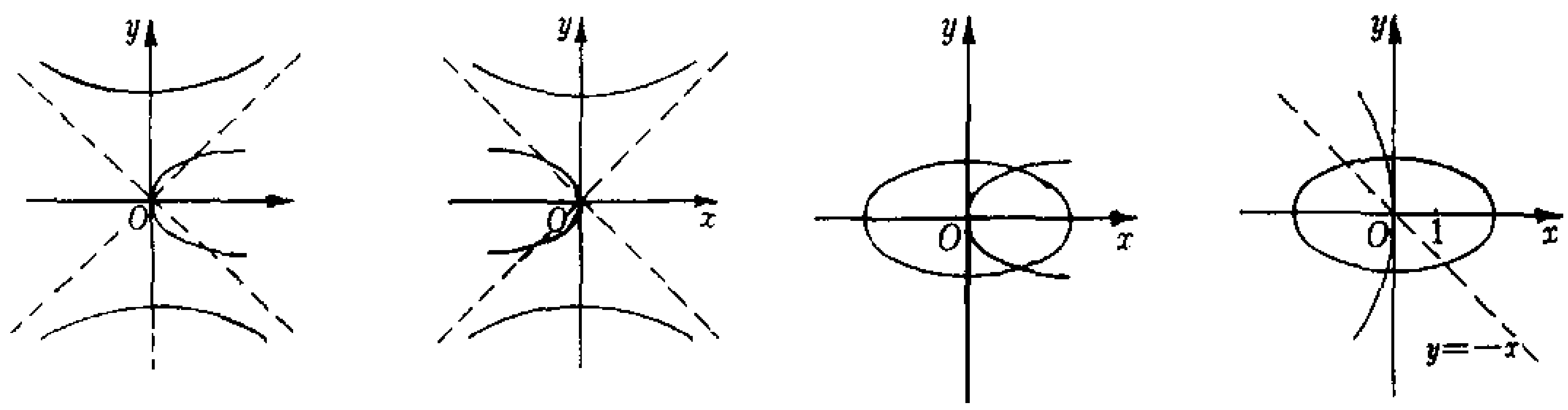
故选(C).

26·37 在下列四个图形中,已知有一个是方程 $mx+ny^2=0$ 与 $mx^2+ny^2=1(m\neq0,n\neq0)$ 在同一坐标系中的示意图,它应是

(中国高中数学联赛,1985年)

[解] 当 $m<0$, $n>0$ 时,$mx^2+ny^2=1$ 是以 y 轴为实轴的双曲线,$mx+ny^2=0$ 是开口朝右的抛物线.

又双曲线的渐近线 $y=\pm\sqrt{\frac{-m}{n}}x$ 与抛物线 $mx+y^2=0$ 联立,由



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

判别式 $\Delta = m^2 > 0$ 确定有两个交点,故图(A)正确.

当 $m>0$, $n>0$时, 设 $m=\frac{1}{a^2}$, $n=\frac{1}{b^2}$, 图(D)中的椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad 且 a>b>0, \quad a>1.$$

但这时抛物线$\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$与直线 $y=-x$ 有两个交点:

$$(0,0),\left(-\frac{b^2}{a^2},\frac{b^2}{a^2}\right), 且 -1<-\frac{b^2}{a^2}<0.$$

这一事实在图(D)中未示出,则图(D)错.

故选(A).

26·38　平面上有三个点集 M,N,P:

$$M=\{(x,y) \mid |x|+|y|<1\},$$

$$N=\left\{(x,y) \mid \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right\},$$

$$P=\{(x,y) \mid |x+y|<1, \quad |x|<1, \quad |y|<1\}.$$

则它们的关系是

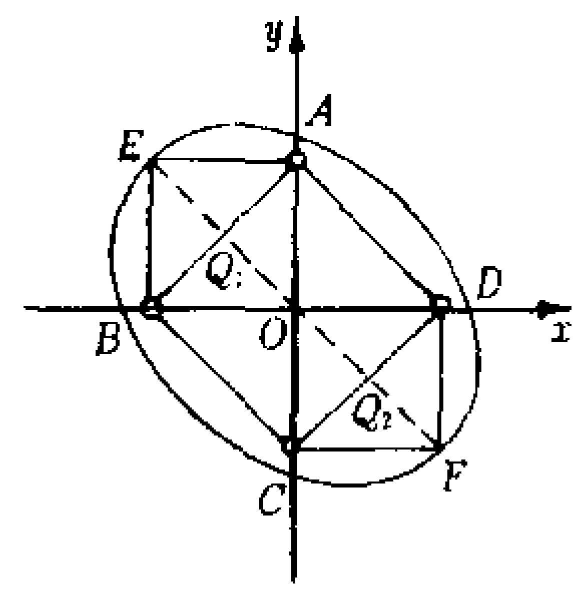
(A)$M\subset P\subset N$.　　(B)$M\subset N\subset P$.

(C)$P\subset N\subset M$.　　(D)(A),(B),(C)都不成立.

(中国高中数学联赛,1988年)

[解]　如图,集合 M 是正方形 $ABCD$ 的内部,集合 P 是六边形 $AEBCFD$ 的内部,故 $M\subset P$.

集合 N 是以点 $Q_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 及 $Q_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 为焦点，长半轴为 $\sqrt{2}$ 的椭圆内部.



易知点 E,F 在椭圆上($\because$ $EQ_1+EQ_2=2\sqrt{2}$)，点 A,B,C,D 在椭圆内部($\because$ $AQ_1+AQ_2<2\sqrt{2}$)，故 $P\subset N$. $\therefore$ $M\subset P\subset N$.

故选(A).

26·39 已知点 $A(1,2)$，过点$(5,-2)$的直线与抛物线 $y^2=4x$ 交于另外两点 B,C，那么 $\triangle ABC$ 是

(A) 锐角三角形. (B) 钝角三角形.

(C) 直角三角形. (D) 答案不确定.

(中国高中数学联赛，1999 年)

[解] 设 $B(t^2,2t)$，$C(s^2,2s)$，$s\neq t$，$s\neq 1$，$t\neq 1$.

则直线 BC 的方程为 $\dfrac{y-2t}{2s-2t}=\dfrac{x-t^2}{s^2-t^2}$，

即
$$2x-(s+t)y+2st=0.$$

$\because$ 直线 BC 过点$(5,-2)$，

$\therefore$
$$2\cdot 5-(s+t)(-2)+2st=0,$$

即
$$(s+1)(t+1)=-4.$$

因而 $k_{AB}\cdot k_{AC}=\dfrac{2t-2}{t^2-1}\cdot\dfrac{2s-2}{s^2-1}=\dfrac{4}{(s+1)(t+1)}=-1$.

$\therefore$ $\angle BAC=90°$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

故选(C).

26·40 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 那么，使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是

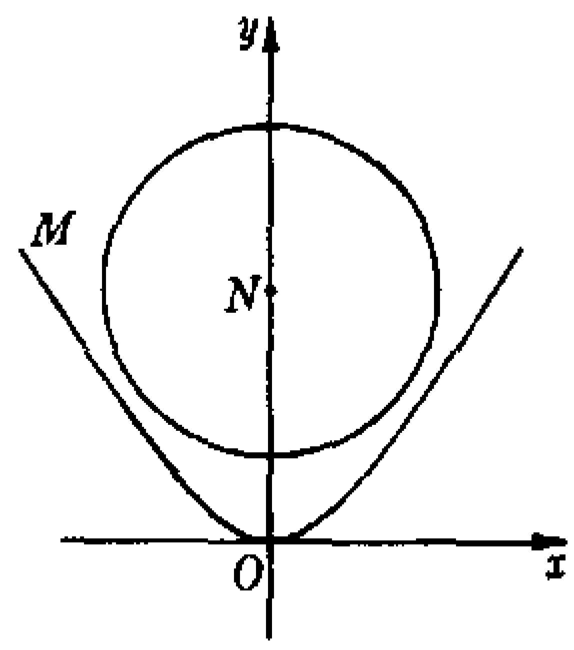
(A)$a\geqslant 1\frac{1}{4}$. (B)$a=1\frac{1}{4}$. (C)$a\geqslant 1$. (D)$0<a<1$.

(中国高中数学联赛，1983 年)

[解] $M\cap N=N$ 的充要条件是 $N\subset M$，由于集 M 是右图所示的抛物线的内部(包括抛物线 $y=x^2$)，而 N 是以$(0,a)$为心，1 为半径为圆周及其内部，当 a 是充分大的正数时，显然，必有 $N\subset M$，从而否

定了(B)及(D).

当$a=1$时,易求抛物线$y=x^2$和圆周$x^2+(y-1)^2=1$有三个交点$(0,0)$及$(\pm 1,1)$.因此$N\not\subset M$,否定(C).



故选(A).

注 关于(A)的正确性的严格证明如下:

由 $x^2+(y-a)^2\leqslant 1$, 得

$$x^2\leqslant y-y^2+(2a-1)y+(1-a^2).$$

于是,当

$$-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)\leqslant 0 \qquad ①$$

时,必有$y\geqslant x^2$,即$N\subseteq M$.而(1)式成立的条件是

$$y_{\max}=\frac{-4(1-a^2)-(2a-1)^2}{-4}\leqslant 0,$$

即
$$4(1-a^2)+(2a-1)^2\leqslant 0.\text{或 } a\geqslant 1\frac{1}{4}.$$

下面再证明$a<1\frac{1}{4}$时,不可能有$N\subset M$.

(1) 当$a<1$时,N中必有$y<0$的点(x,y),而M中的点必满足$y\geqslant 0$,故$N\not\subset M$.

(2) 将$y=x^2$代入$x^2+(y-a)^2=1$中,

得
$$y^2+(1-2a)y+a^2-1=0. \qquad ②$$

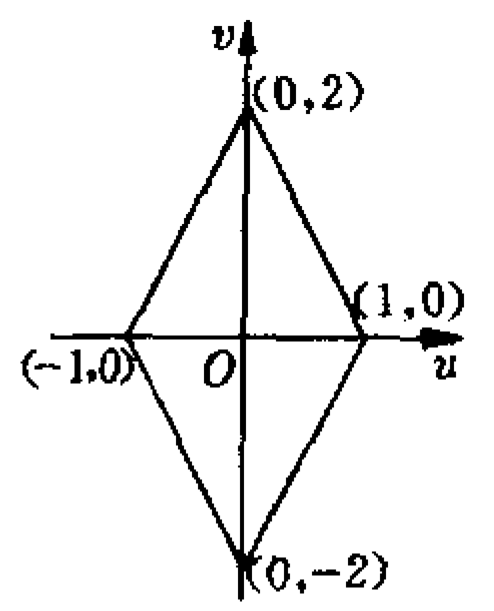
当 $1\leqslant a<1\frac{1}{4}$时,$\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)>0$,

得 $1-2a<0$, $a^2-1\geqslant 0$,故方程②有两相异非负根.

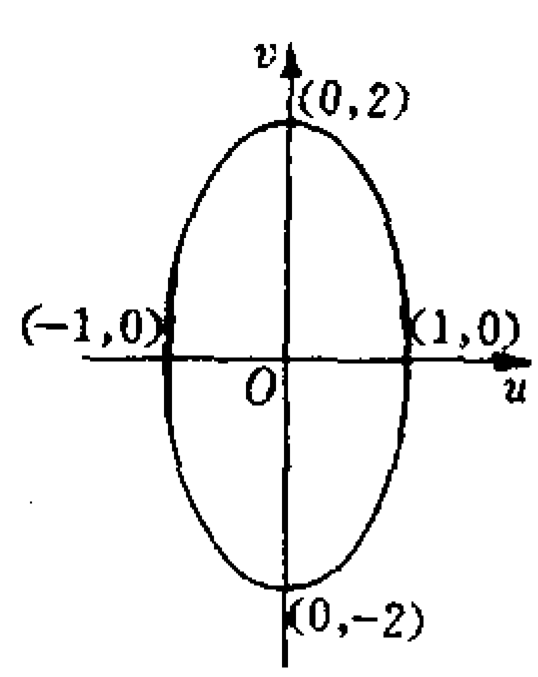
因而$y=x^2$与$x^2+(y-a)^2=1$有三个或四个交点.故$N\not\subset M$.

26·41 设$OABC$是xy平面上的一个正方形单位,其中$O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$及$C(0,1)$.设$u=x^2-y^2$, $v=2xy$是一个由xy平面到uv平面上的变换,正方形的变换(或象点)是

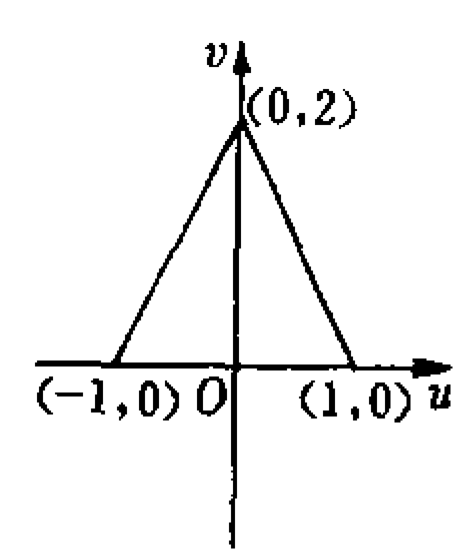
(第20届美国高中数学考试,1969年)



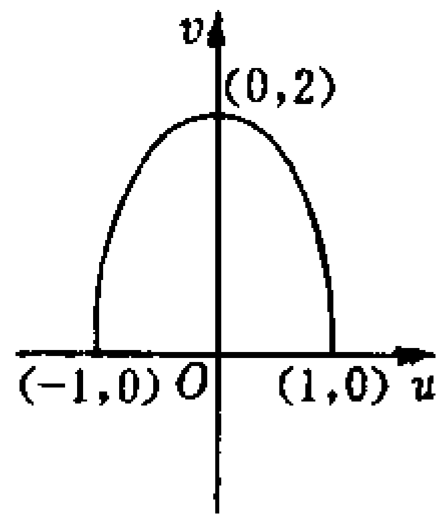
(A)



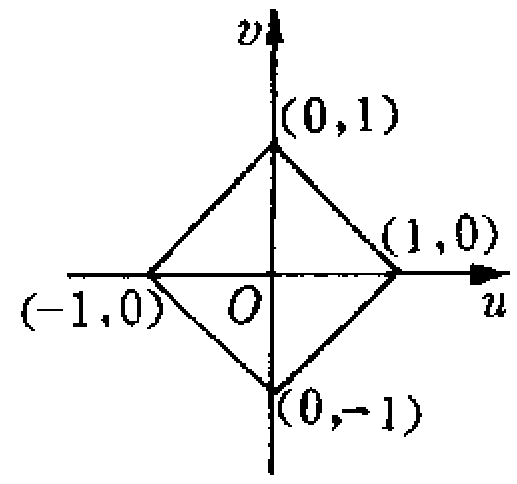
(B)



(C)

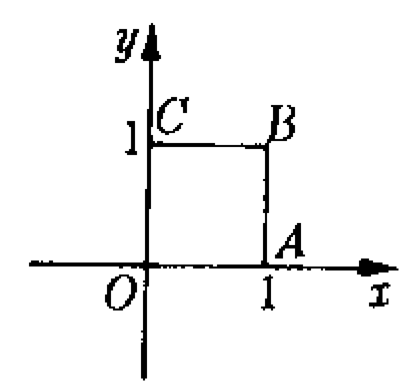


(D)



(E)

[解] 以 → 表示从 xy 平面到 uv 平面的已知映射，且以 O',A'，B',C' 表示 O,A,B,C 在 uv 平面上的象点. 直接代入有



$O(0,0)\to O'(0,0)$，　$A(1,0)\to A'(1,0)$，

$B(1,1)\to B'(0,2)$，　$C(0,1)\to C'(-1,0)$.

线段 $OA\to$ 线段 $O'A'$，

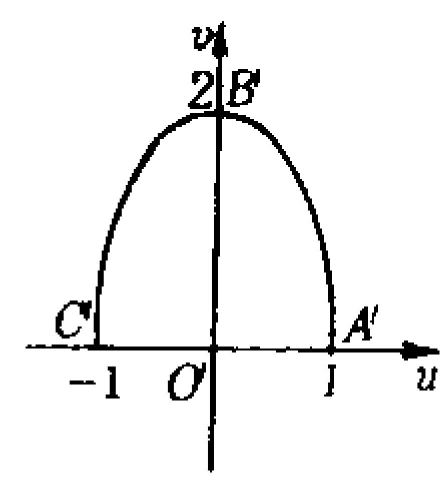
线段 $AB\to$ 抛物线 $u=1-\dfrac{v^2}{4}$ 的一段 $A'B'$，

线段 $BC\to$ 抛物线 $u=\dfrac{v^2}{4}-1$ 的一段 $B'C'$，

线段 $CO\to$ 线段 $C'O'$.

注意到：AB 中 $x=1$，　BC 中 $y=1$ 即可.

故选(D).



第二十七章　极(最)值与杂例

27·1　已知在 xy 平面上两点 $P(-1,-2)$ 和 $Q(4,2)$，取点 $R(1,m)$，使得 $PR+RQ$ 最小，那么 m 等于

(A) $-\frac{3}{5}$.　　(B) $-\frac{2}{5}$.　　(C) $-\frac{1}{5}$.

(D) $\frac{1}{5}$.　　(E) $-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{5}$.

（第 20 届美国高中数学考试，1969 年）

[解]　要使 $PR+RQ$ 最小，只须 P,R,Q 共线即可.

因而 $\frac{m-(-2)}{1-(-1)}=\frac{2-(-2)}{4-(-1)}$，

得
$$m=-\frac{2}{5}.$$

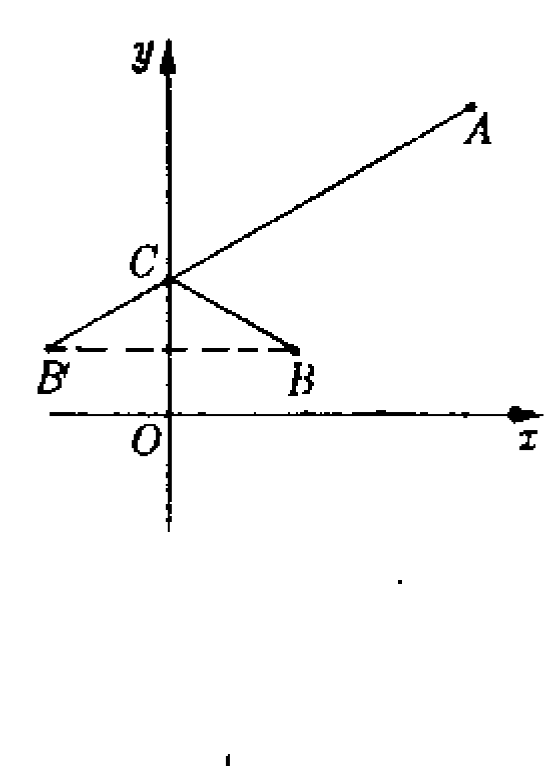
故选(B).

27·2　A,B 与 C 的坐标各为$(5,5)$，$(2,1)$ 与$(0,k)$，欲使 $AC+BC$ 尽可能的小时，k 的值为

(A)3.　(B)$4\frac{1}{2}$.　(C)$3\frac{6}{7}$.　(D)$4\frac{5}{6}$.　(E)$2\frac{1}{7}$.

（第 4 届美国高中数学考试，1953 年）

[解]　欲使 $AC+BC$ 最小，只须先作出 B 关于 y 轴的对称点 B'，连 AB' 交 y 轴于 C，则 C 即为所求.



显然，AB' 的方程为

$$\frac{y-5}{x-5}=\frac{5-1}{5-(-2)}=\frac{4}{7},$$

令 $x = 0$, 得 $y = 2\frac{1}{7}$.

即 $$k = 2\frac{1}{7}.$$

故选(E).

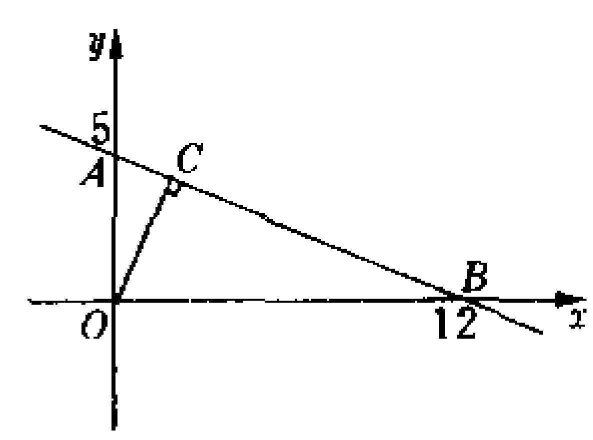
27·3 若 $5x + 12y = 60$, 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的极小值为

(A) $\frac{60}{13}$. (B) $\frac{13}{5}$. (C) $\frac{13}{12}$. (D)1. (E)0.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解] 由于 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为原点 O 至点(x,y)的距离,则在 $5x + 12y = 60$ 约束(条件)下,求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的极小值,即为 O 至直线 $5x + 12y = 60$ 的垂线段长.

由 $\mathrm{Rt}\triangle OCB \backsim \mathrm{Rt}\triangle AOB$, 有



$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{AB},$$

则 $$OC = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{60}{13}.$$

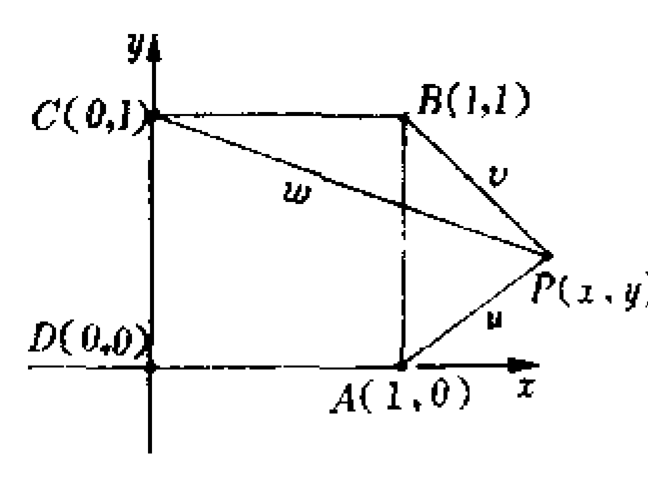
故选(A).

27·4 P 点与给定的边长为 1 的正方形在同一平面内. 设此正方形的顶点为 A,B,C,D(反时针方向),且 P 到 A,B,C 的距离分别为 u,v,w. 如果 $u^2+v^2=w^2$,那么 P 点到D 点的最大距离为

(A)$1+\sqrt{2}$. (B)$2\sqrt{2}$. (C)$2+\sqrt{2}$.

(D)$3\sqrt{2}$. (E)$3+\sqrt{2}$.

(第 34 届美国高中数学考试,1983 年)



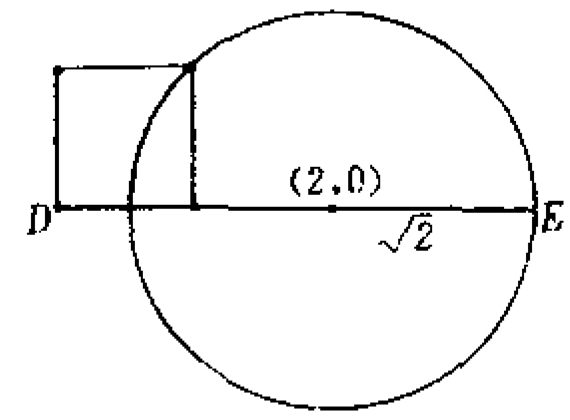
[解] 如右图建立平面直角坐标系:

由题设 $u^2+v^2=w^2$ 则有

$$[(x-1)^2+y^2]+[(x-1)^2+(y-1)^2] = x^2+(y-1)^2,$$

即 $x^2-4x+2+y^2=0$,

或$(x-2)^2+y^2=2$.



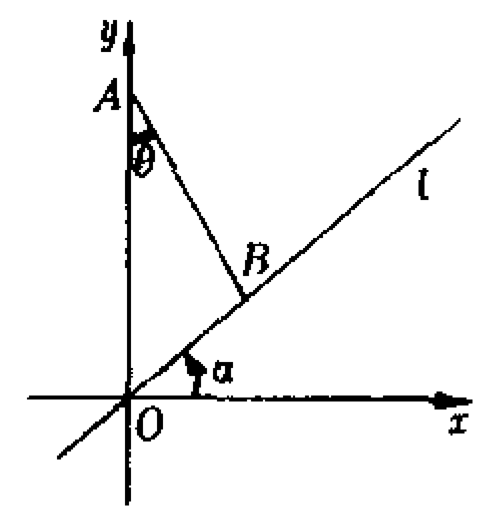
这样 P 点的轨迹就是一个圆心在$(2,0)$,半径为$\sqrt{2}$ 的圆.

从右面的图可以清楚地看到,此圆上距

D 最远的点是 $E(2+\sqrt{2},0)$.

故选(C).

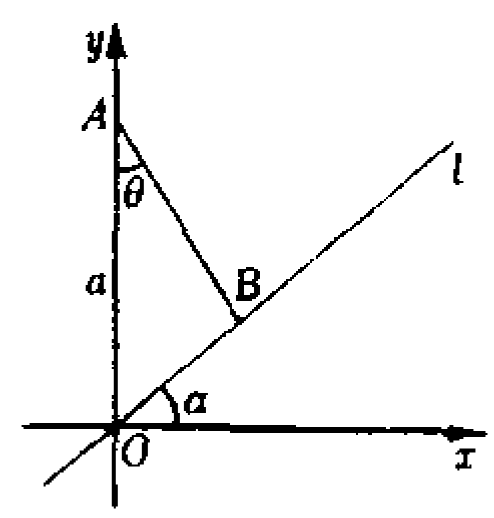
27·5　如图,在竖直坐标平面 xOy 中,直线 l 过坐标原点 O,且 l 在第 Ⅰ 和第 Ⅲ 象限内,l 与 x 轴的夹角为 $\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$. 有一质点(不计质点的大小)在 y 轴上 O 点正上方的位置 A 处,该质点从静止状态开始在重力的作用下,沿着直线路径滑行到 l 上的 B 点处终止,记 $\angle BAO=\theta$. 则当质点下滑到 l 时所花费的时间为最短时,θ 等于



(A)0°.　(B) $\frac{\alpha}{4}$.　(C) $\frac{\alpha}{2}$.　(D)α.

(中国山西省太原市高中数学竞赛,1993 年)

[解]　如图,设 $OA=a$,重力加速度为 g,显然 $\angle AOB=90^\circ-\alpha$.



由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{a}{\sin(180^\circ-90^\circ+\alpha-\theta)},$$

即
$$AB=\frac{a\cdot\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}.$$

由于重力加速度 g 在 AB 方向上的分量为 $g\cdot\cos\theta$,所以由物理学公式知,质点从 A 沿线段 AB 下滑至 l 所用的时间为

$$t=\sqrt{\frac{2\cdot AB}{q\cdot\cos\theta}}=\sqrt{\frac{2a\cos\alpha}{q\cdot\cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha)}},$$

式中 α,a,g 都是定值.

欲使 t 最小,只须使 $\cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha)$ 为最大.

由 $\cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(2\theta-\alpha)+\cos\alpha]$,

知 当 $2\theta-\alpha=0$ 时,$\cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha)$ 为最大.

因此,当 $\theta=\frac{\alpha}{2}$ 时,质点下滑所用的时间为最小.

故选(C).

27·6　若点 $A(a,0)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外,点 $P,Q\in$ 圆 O,点 M,P 关于点 A 对称,又 $OP\perp OQ$,且 $a>0$,则线段 MQ 长度的最大

选择题卷

值必是

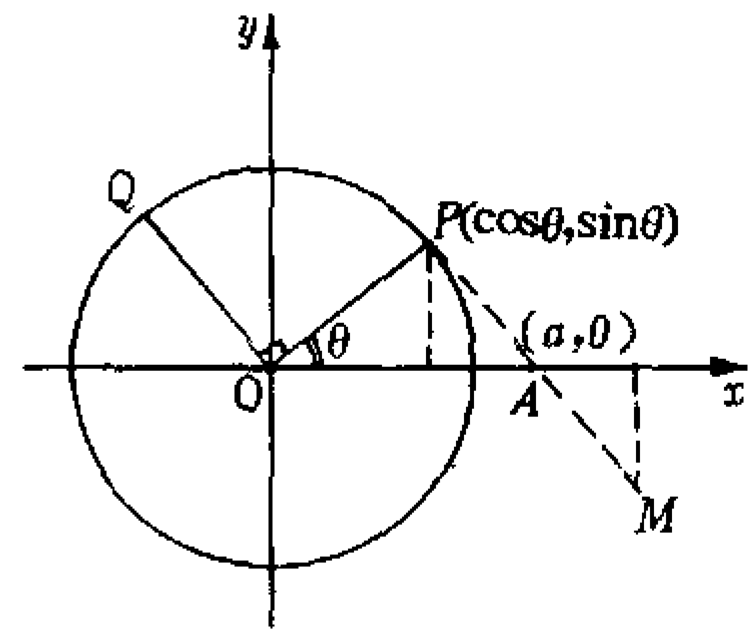
(A) $\sqrt{4a^2+4\sqrt{2}a+2}$.　　(B) $\sqrt{4a^2-4a+2}$.

(C) $\sqrt{a^2+a+1}$.　　(D) $\sqrt{a^2-a+2}$.

(中国山西省太原市高中数学竞赛,1990年)

[解]　设 P 点坐标为 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$,则 P 关于 A 点对称的点 M 坐标为

$$(2a-\cos\theta,\ -\sin\theta),$$



又 $OP\perp OQ$,则 Q 点坐标为

$$(\cos(\theta+90^\circ),\ \sin(\theta+90^\circ))$$

即　$(-\sin\theta,\ \cos\theta)$,

这样

$$|MQ|=\sqrt{(2a-\cos\theta+\sin\theta)^2+(-\sin\theta-\cos\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4a^2+4a(\sin\theta-\cos\theta)+2},$$

而　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta-45^\circ)$,

当　$\theta=135^\circ$ 时,　$(\sin\theta-\cos\theta)_{\max}=\sqrt{2}$.

则　$|MQ|_{\max}=\sqrt{4a^2+4\sqrt{2}a+2}$.

故选(A).

27·7　在满足方程

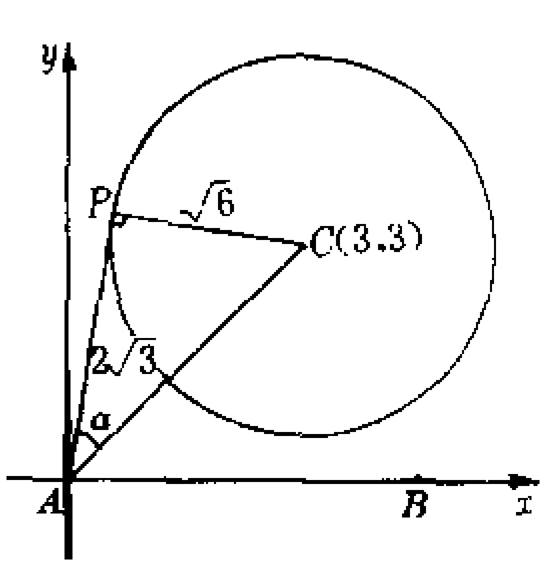
$(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 的实数对 (x,y) 中,$\frac{y}{x}$ 的最大值是

(A) $3+2\sqrt{2}$.　　(B) $2+\sqrt{3}$.　　(C) $3\sqrt{3}$.

(D) 6.　　(E) $6+2\sqrt{3}$.

(第35届美国高中数学考试,1984年)

[解1]　在平面直角坐标内,设 $P=(x,y)$,$A=(0,0)$,$C=(3,3)$,B 是 x 正半轴上的任意一点. P 点的轨迹是圆心在 C,半径为 $\sqrt{6}$ 的一个圆(如图).而 $\frac{y}{x}$ 是 P 点的纵坐标与横坐标之比,若把 AP 连接起来,则可将 $\frac{y}{x}$ 看做是 AP 直线的斜率.



显然当 P 在圆 C 上运动时,$\frac{y}{x}$ 是随着 P 的位置

的变化而变化的.　　P 点是在第一象限运动的(注意$\sqrt{6}<3$).因此从图上可直观地看出,当 AP 在该圆的左侧,与之相切时,这个斜率最大.为计算出它的值,不妨将 AC 连接,因为 $C=(3,3)$,所以 $\angle CAB=45^\circ$.

设 $\angle PAC=\alpha$,于是此时

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

在 $\triangle APC$ 中,因为 $\angle APC=90^\circ$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{PC}{PA}$.

又由勾股定理, $PA=\sqrt{(AC)^2-(PC)^2}=2\sqrt{3}$.

这样 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

所以 $$\frac{y}{x}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}=3+2\sqrt{2}.$$

故选(A).

[解 2]　考虑$\dfrac{y}{x}$的最大值就是过原点与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=6$相交的直线斜率的最大值.显然当此斜率取得最大值时,该直线与圆相切并且是两条切线中较陡的那条.因此有

(1) $y=mx$ 是圆的切线;

(2) 方程组$\begin{cases}y=mx,\\(x-3)^2+(y-3)^2=6,\end{cases}$ 仅有一组解(x,y);

(3) 二次方程$(x-3)^2+(mx-3)^2=6$,

即 $(m^2+1)x^2-6(m+1)x+12=0$ 有一对重根;

(4) 判别式为零,即 $36(m+1)^2-48(m^2+1)=0$.

解最后的方程,得到 $m=3\pm2\sqrt{2}$,选其较大的那个,即

$$m=3+2\sqrt{2}.$$

故选(A).

[解 3]　令$\dfrac{y}{x}=k$,则 $y=kx$,这样$\dfrac{y}{x}$的最大值即为过圆上一点与原点直线的斜率最大值.

故 $\sqrt{6}=\dfrac{|3-3k|}{\sqrt{1+k^2}}$,　解得 $k=3\pm2\sqrt{2}$.

则 $\quad \dfrac{y}{x}$ 最大值是 $3+2\sqrt{2}$.

故选(A).

27·8　若直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 被曲线 C:

$(x-\arcsin a)(x-\arccos a)+(y-\arcsin a)(y+\arccos a)=0$

所截得的弦长为 d,当 a 变化时 d 的最小值是

(A) $\dfrac{\pi}{4}$.　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) π.

(中国高中数学联赛,1993年)

[解1]　由题设知,曲线 C 是以

$$P_1(\arcsin a,\arcsin a),P_2(\arccos a,-\arccos a)$$

两点为直径端点的圆.其圆心的横坐标

$$x_a=\frac{\arcsin a+\arccos a}{2}=\frac{\pi}{4},$$

故直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 过圆心,d 就是该圆的直径.

而 $d^2=2[(\arcsin a)^2+(\arccos a)^2]\geqslant(\arcsin a+\arccos a)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

故 $$d\geqslant\frac{\pi}{2}.$$

又当 $\arcsin a=\arccos a$ 时相应的 $d_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$.

故选(C).

[解2]　取 $a=1$ 或0, 得 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi<\pi$, 否(D).

取 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $d=\dfrac{\pi}{2}$.

取 $a=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 得 d 等值,且 $d>\dfrac{\pi}{2}$.

据对称性知(C)正确.

故选(C).

27·9　测出三个朋友的体重 y,身高 x,得到点 (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3).如果 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_3-x_2=x_2-x_1$,下列的数与上述三点"最贴近"的直线的斜率是("最贴近"是指从上述三点到这条直线的

距离的平方和小于它们到其他任何直线距离的平方和)

(A) $\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$.　　(B) $\dfrac{(y_2-y_1)-(y_3-y_2)}{x_3-x_1}$.

(C) $\dfrac{2y_3-y_1-y_2}{2x_3-x_1-x_2}$.　　(D) $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$.

(E) 不是以上任一个.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解] 设所求直线为 $y=a+bx$,依题设应求

$$Q(a,b)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

最小,由配方计算后,可求得

$$a=\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x},\quad b=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.$$

这里 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i,$

且 $\sigma_x^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\sigma_{xy}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$

这样由题设 $x_3-x_2=x_2-x_1$, 设 $x_2=a$, $x_2-x_1=h$,

则

$$x_1=a-h,\quad x_3=a+h.$$

故

$$\bar{x}=\frac{1}{3}[(a-h)+a+(a+h)]=\frac{1}{3}a,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

又

$$\sigma_x^2=\frac{1}{3}(h^2+0+h^2)=\frac{2}{3}h^2,$$

且

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{3}[-h(y_1-\bar{y})+h(y_3-\bar{y})]=\frac{h}{3}(y_3-y_1),$$

故所求直线斜率为

$$b=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=\frac{\frac{h}{3}(y_3-y_1)}{\frac{2}{3}h^2}=\frac{y_3-y_1}{2h}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}.$$

故选(A).

注 此题亦可用"最小二乘多项式拟合"法求解.

27·10 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足

$$-4 \leqslant f(1) \leqslant -1, \quad -1 \leqslant f(2) \leqslant 5.$$

那么,$f(3)$ 应满足

(A) $-7 \leqslant f(3) \leqslant 26$.　　(B) $-4 \leqslant f(3) \leqslant 15$.

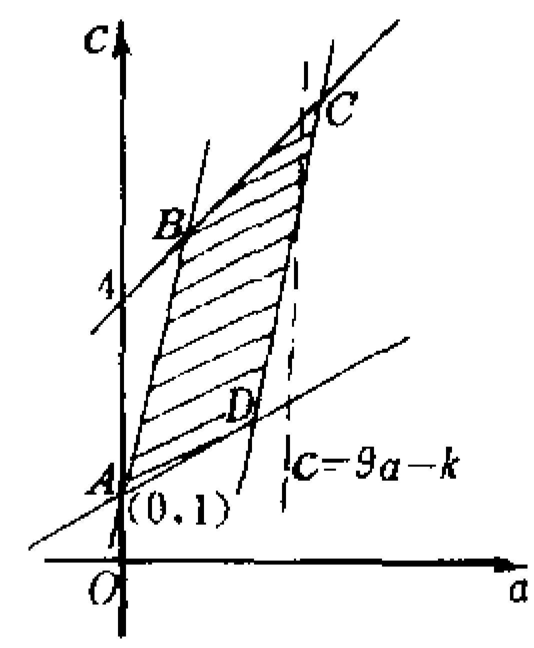
(C) $-1 \leqslant f(3) \leqslant 20$.　　(D) $-\frac{28}{3} \leqslant f(3) \leqslant \frac{35}{3}$.

(中国高中数学联赛,1983 年)

[解 1] 由题设有 $-4 \leqslant a-c \leqslant -1$,且 $-1 \leqslant 4a-c \leqslant 5$.

以 a,c 为横纵轴建立坐标系,作直线 $c=a+1$, $c=a+4$,以及 $c=4a-5$, $c=4a+1$,这四条直线围成的区域满足题设条件.

再作平行线族 $c=9a-k$(因 $f(3)=9a-c$),则此直线族在区域的顶点 $A(0,1)$,$C(3,7)$ 处得到 k 的最值.



由此可得 $\quad -1 \leqslant k = 9a-c \leqslant 20,$

即 $$-1 \leqslant f(3) \leqslant 20.$$

故选(C).

[解 2] 由题设 $f(x)=ax^2-c$,则

$$\begin{cases} f(1)=a-c, \\ f(2)=4a-c, \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} a=\dfrac{f(2)-f(1)}{3}, \\ b=\dfrac{f(2)-4f(1)}{3}. \end{cases}$$

因此 $$f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1).$$

又 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$, $-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$,则

$$-1 \leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1) \leqslant 20,$$

即 $$-1 \leqslant f(3) \leqslant 20.$$

故选(C).

27·11 在一个空间(三维)直角坐标系中,通过四个不同的形如 (i,j,k) 的点的直线的条数为(i,j,k 都是不超过 4 的正整数.)

(A)60.　(B)64.　(C)72.　(D)76.　(E)100.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] 考虑空间(三维)直角坐标系中,包含所有 (i,j,k) 格点的小正方体,其中 $1 \leqslant i,j,k \leqslant 4$.

那么,它的 4 条主对角线全都经过满足条件的四个不同的点;还有 24 条平行于坐标平面的对角线,也具有这种性质;

另外有 48 条平行于一条轴的直线,也经过四个这样的点(每一轴的方向上有 16 条).

所以共有 $4 + 24 + 48 = 76$ 条,通过满足条件的四个不同点的直线.

故选(D).

27·12 在长方形房间的两个角落里放有两只不同大小的圆球,每一只球与两垛墙壁及地板接触.若在两只球上各有那么一点,从两垛墙(与这只球有接触的墙)到那点的距离是 5 英寸,从地板到那点是 10 英寸,那么两只球的直径之和是

(A)20 英寸. (B)30 英寸. (C)40 英寸.

(D)60 英寸. (E) 按已知条件无确定的值.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 在以房间的角落作为空间直角坐标系的第一卦限,半径为 a 的球相切于所有三个坐标平面,这样有

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2.$$

若点(5,5,10)在这样一个球上,那么有

$$2(5-a)^2+(10-a)^2=a^2,$$

即
$$2a^2-40a+150=0,$$

或
$$2(a-15)(a-5)=0.$$

解得 $a=5$ 或 15.

所以球的半径是 5 和 15,直径之和是 40.

故选(C).

数 论 篇

第二十八章　算　术

28·1　在右边的一排方格中,每个方格中除9、7外其余字母各表示一个数,已知其中任何3个连续方格中的数之和为19.则 $A+H+M+O$ 等于

A	9	H	M	O	X	7

(A)21.　　(B)23.　　(C)25.　　(D)26.

(中国安徽省初中数学竞赛,1997年)

[解]　由题设易知 $A+H=10$.

$\because\quad M+O+X=O+X+7,\quad\therefore\quad M=7;$

同理　$O=9.$

$\therefore\quad A+H+M+O=26.$

故选(D).

28·2　下式中不同的字母代表不同的数字,则 C 为

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B \\ +\quad\ \ A \\ \hline 3\ 0\ 0 \end{array}$$

(A) 1.　　(B) 3.　　(C) 5.　　(D) 7.　　(E) 9.

(第7届美国初中数学考试,1991年)

[解 1]　从算式可以看到 $A=3$ 或 2(如果进位的话最多进 1).

$\because$　$B+A$ 加上 $A+B+C$ 进位数字(最多是 2) 和末位数是 0.则它将进位,故 $A=2$.

而由 $A=2$,知 $A+B+C\leqslant 20$,其进位不超过2,则由 $B+A$ 末位是0知 $8\leqslant A+B\leqslant 10$.

$\because\quad B+A+C$ 末位数是0,且 $8\leqslant A+B\leqslant 10$,

$\therefore\qquad A=2,\quad B=7,\quad C=1.$

故选(A).

[**解2**]　题设式子可写成　$111A+11B+C=300$,

$\because\quad 0<11B+C<11\cdot 9+9=108$,

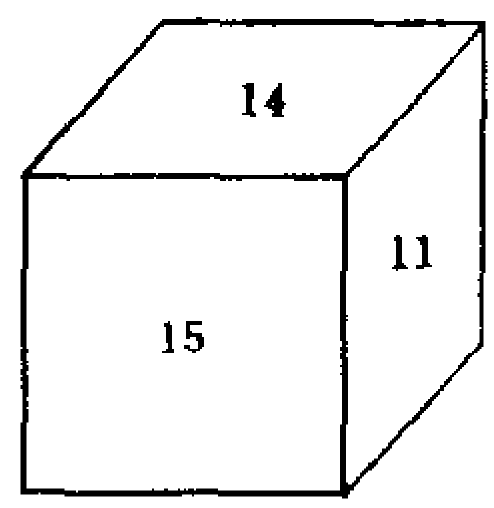
$\therefore\quad A=2$,　于是　$11B+C=78$.

由　$0\leqslant C\leqslant 9$,　则　$69\leqslant 11B\leqslant 78$.

故　$B=7$,　从而　$C=1$.

故选(A).

28·3　立方体各面上的数字是连续的整数(如图).如果每对对面上的两个数的和相等,那么,这三对数的和是



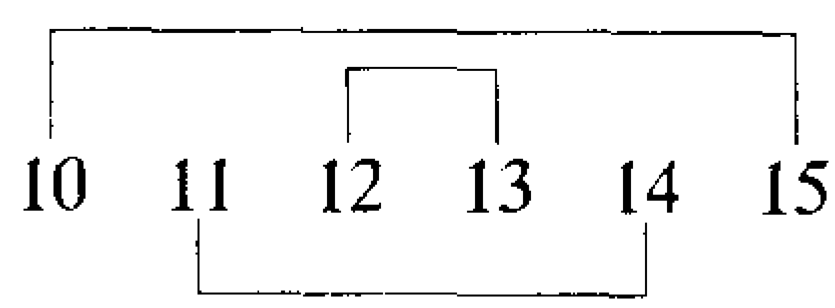
(A) 75. (B) 76. (C) 78. (D)80. (E) 81.

(第6届美国初中数学考试,1990年)

[**解**]　由题设知这六个连续整数可能是

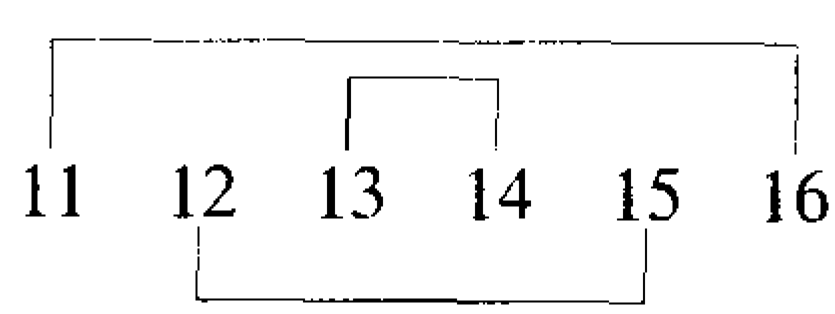
10,11,12,13,14,15,　或　11,12,13,14,15,16.

若要两两和相等,对于第一组应如:



因11与14不是对面,应否之.

对于第二组应如:



符合要求,则此时三对数和为81.

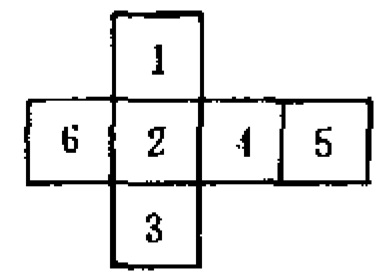
故选(E).

28·4　下页图图可以沿线折成一个带数字的立方体,每三个带数字的面交于立方体的一个顶点.问能交于一个顶点的三个面数字之和最大值是

(A) 11.　　(B) 12.　　(C) 13.　　(D) 14.　　(E) 15.

（第 5 届美国初中数学考试,1989 年）

[解]　容易想像,折成立方体后,标有数码 6,5,3 的三个面交于一个顶点,其和为所求最大值,即 14.



故选(D).

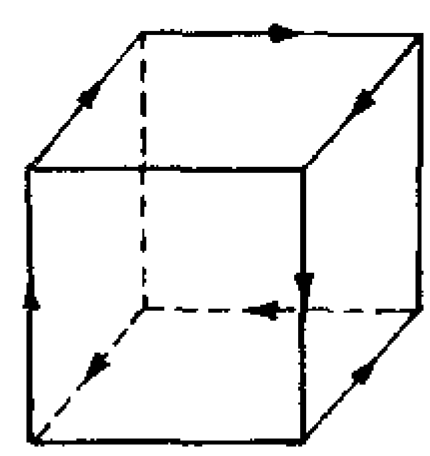
28·5　由 12 条 3 英寸长的铁丝焊成一立方体,一只苍蝇先停在一顶点上,然后沿铁丝爬行,若不回头也没有走重复路,爬回到原落脚处所走的最大距离是

(A) 24 英寸.　　(B) 12 英寸.　　(C) 30 英寸.

(D) 18 英寸.　　(E) 36 英寸.

（第 8 届美国高中数学考试,1957 年）

[解]　如图,苍蝇最多可经过八条棱,故其所爬行最大距离为 $3\cdot 8=24$(英寸).

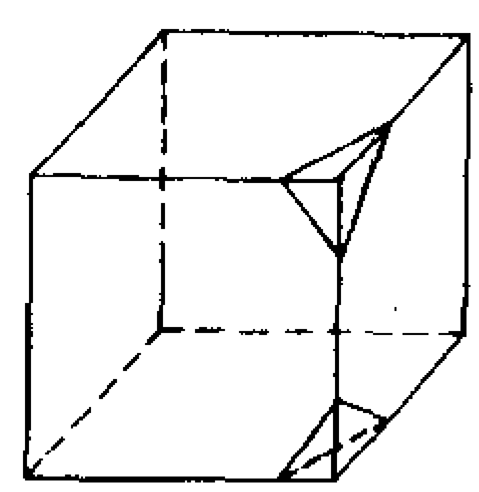


否则,若苍蝇可爬行八条以上的棱,则因每条棱有两个端点,则其端点多于 16 个.

而立方体有 8 个顶点,且每个立方体的顶点处交汇三条棱,则必有一个顶点,由它引出的三条棱苍蝇俱爬过,这是不可能的.

故选(A).

28·6　如图,立方体的每个角都被切下去(图中仅画了两个).问所得的几何体的棱数为



(A) 24.　　(B) 30.　　(C) 36.

(D) 42.　　(E) 48.

（第 6 届美国初中数学考试,1990 年）

[解]　原立方体有 12 条棱,去一个角后增加 3 条棱.

因此　每个角都切去后,增加 $3\cdot 8=24$ 条棱,总计 36 条棱.

故选(C).

28·7　分式 $\dfrac{(487000)(12027300)+(9621001)(487000)}{(19367)(0.05)}$ 的值最接近于

(A) 10000000.　　(B) 100000000.　　(C) 1000000000.

(D) 10000000000.　　(E) 100000000000.

（第7届美国初中数学考试，1991年）

[解]　先看分母：$19367 \cdot 0.05 \approx 1000$，

而　　$分子 = 487000 \cdot (12027300 + 9621001)$

$\approx 487 \cdot 1000 \cdot 21600000$，

∴　　$原式 \approx 487 \cdot 21600000 \approx 10000000000$.

故选(D).

28·8　$16 \div (0.40 + 0.41 + 0.42 + \cdots + 0.59)$的值的整数部分是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

（第2届"五羊杯"初中数学竞赛，1990年）

[解]　$原式 > 16 \div (0.6 \cdot 20) = 16 \div 12 > 1$，

且　　$原式 < 16 \div (0.4 \cdot 20) = 16 \div 8 = 2$.

则原式整数部分的值是1.

故选(A).

28·9　若a,b,c都是n位正整数，则正整数abc的位数是

(A) $3n$.　　(B) $3n-1$.

(C) $3n-2$.　　(D) 以上都不对.

（第2届"五羊杯"初中数学竞赛，1990年）

[解]　abc可能是$3n$位，也可能为$3n-1$或$3n-2$位正整数.比如$n=1$时，

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,\quad 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,\quad 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120,$$

即它们分别为　$3n-2$，　$3n-1$和$3n$位.

故选(D).

28·10　设$P = 3659893456789325678$和342973489379256的乘积，则P中数字的位数是

(A) 36.　　(B) 35.　　(C) 34.　　(D) 33.　　(E) 32.

（第20届美国高中数学考试，1969年）

[解]　设乘数与被乘数分别为x,y，则

$$3.6 \cdot 10^{18} < x < 3.7 \cdot 10^{18},$$

$$3.4 \cdot 10^{14} < y < 3.5 \cdot 10^{14}.$$

因而　　$3.4 \cdot 3.6 \cdot 10^{32} < xy < 3.5 \cdot 3.7 \cdot 10^{32}$，

即 $$1\cdot 224\cdot 10^{33} < xy < 1\cdot 295\cdot 10^{33}.$$

知 $P = xy$ 是一个34位数.

故选(C).

28·11 1980年美国的人口是226504825,它的面积是3615122平方英里,每平方英里是$(5280)^2$平方尺,每人平均平方英尺数是最好的近似值为

(A) 5000. (B) 10000. (C) 50000.

(D) 100000. (E) 500000.

(第37届美国高中数学考试,1986年)

[解] 设 $P = \dfrac{3615122\cdot 5280^2}{226504825} = \dfrac{3615122\cdot 5280\cdot 5280}{226504825}$, 则

$$\frac{2.5\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^3}{2.5\cdot 10^8} < P < \frac{4\cdot 10^6\cdot 6\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^3}{2\cdot 10^8}$$

即 $$250000 < P < 720000.$$

故选(E).

28·12 李明和王宁同做 $a\cdot b$(a,b 都是正整数)的乘法习题.李明把 a 的个位数字7误看成1,得乘积255.王宁却把 a 的十位数字5误看成6,得乘积335.则正确的乘积应为

(A) 285. (B) 305. (C) 375. (D) 380.

(第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年)

[解1] a 的末两位数字应为57.

李明把7误看成1,乘得积为255,则 $a = 57$,且 $b = 255\div 51 = 5$.

王宁把5误看成6,乘得积为335,则 $a = 57, b = 335\div 67 = 5$.

∴ 正确乘积为 $57\cdot 5 = 285$.

故选(A).

[解2] a 的末两位数字应为57,下面求 b.

显然,b 是255和335的一个公约数,而它们的最大公约数为5,则 $b = 5$ 或1.

由题设知 $b \neq 1$,则 $b = 5$.

又 a 只能是两位数,即57,所以正确的乘积应为 $57\cdot 5 = 285$.

故选(A).

28·13 在一个实验中,测得某常数 c 为2.43865,误差范围为

± 0.00312. 实验者想公布 c 的值,它的每个数字都是有效数字,也就是说不管 c 是多大,宣布的 c 值(n 位数字)与 c 的真实值的前 n 位必须相同,那么这个实验者所能宣布的 c 的最精确值为

(A) 2.　(B) 2.4.　(C) 2.43.　(D) 2.44.　(E) 2.439.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解]　由题设知

$$2.43865 - 0.00312 \leqslant c \leqslant 2.43865 + 0.00312,$$

即

$$2.43553 \leqslant c \leqslant 2.44177,$$

这样精确到一位有效数字时，　$c = 2$,

精确到两位有效数字时，　$c = 2.4$,

精确到三位有效数字时，　$c = 2.44$,

精确到四位有效数字时，　c 在 2.436 与 2.442 之间的某个数字.

则实验者能宣布的最精确值为 2.44.

故选(D).

28·14　若任意正数分别四舍五入到小数点后二,三,四位所得的数为 a,b,c,则

(A) $a \geqslant b \geqslant c$.　　(B) $a \leqslant b \leqslant c$.

(C) $a \geqslant b \geqslant c$ 或 $a \leqslant b \leqslant c$.　　(D) 以上结论都不对.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解]　考虑数 0.01949,其四舍五入到小数点后二,三,四位所得分别是

$$a = 0.02,\quad b = 0.019,\quad c = 0.0195.$$

显然(A),(B),(C) 都不对.

故选(D).

28·15　一学生对一组测量值记录了其精确的百分频数分布如下表所示:

测量值	0	1	2	3	4
百分频数	12.5%	0%	50%	25%	12.5%

但他忘记了标出这组测量的总次数 N,则 N 的最小可能值是

(A) 5. (B) 8. (C) 16. (D) 25. (E) 50.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解] 由 $12.5=\frac{1}{8},\quad 50=\frac{4}{8},\quad 25=\frac{2}{8},$ 而

$$\frac{1}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=100\%,$$

则· N 的最小可能值是 8.

故选(B).

28·16 一个人有一分,五分,一角,四分之一元和半元的硬币 2.73 美元.若他每一种的硬币数目相等,那么他所有的硬币总数是

(A) 3. (B) 5. (C) 9. (D) 10. (E) 15.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 若 n 是这个人所有的每种硬币的数目,那么

$$(1+5+10+25+50)n=273,$$

解得 $n=3$.

五种硬币的每一种有 3 个,共有硬币 15 个.

故选(E).

28·17 若甲,乙,丙班学生平均年龄分别是 14,13,12 岁,三个班学生总平均年龄是 13 岁.则甲,乙,丙班人数 a,b,c 满足

(A) $a=c$. (B) $a+c=2b$.

(C) $a\cdot c=b^2$. (D) $a>b>c$.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解] 依题设有 $\frac{14a+13b+12c}{a+b+c}=13,$ 则 $a=c$.

故选(A).

28·18 一次考试共有 5 道题,考后成绩统计如下:有 81% 的同学做对第 1 题;91% 的同学做对第 2 题;85% 的同学做对第 3 题;79% 的同学做对第 4 题;74% 的同学做对第 5 题.

若做对三道以上(含三道)题目的同学为合格,那么这次考试的合格率至少为

(A)70%. (B)74%. (C)81%. (D)73%.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛,1993 年)

[解] 不妨设考试人数为 100,这样共有

$$19 + 9 + 15 + 21 + 26 = 90$$

(人题)做错.

每人错三道题为不合格,而 $90 \div 3 = 30$,这档至多有 30 人不合格.

另一方面,做错的题目集中于 30 人每人恰好错 3 题是可能的,比如:

6 人错 1,4,5 题;9 人错 1,2,5 题;4 人错 1,3,4 题;11 人错 3,4,5 题.

这样考试合格率至少可为 70%.

故选(*A*).

28·19　若 $\frac{2+3+4}{3} = \frac{1990+1991+1992}{N}$, 则 N 等于

(A) 3.　(B) 6.　(C) 1990.　(D) 1991.　(E) 1992.

(第 7 届美国初中数学考试,1991 年)

[解]　式左 $= 3$,而式右 $= \frac{3 \cdot 1991}{N} = 3$ 时,$N = 1991$.

故选(*D*).

28·20　1000 个家庭的年收入为 8200 美元到 98000 美元. 由于失误,把一个最大的收入记为 980000 美元输入计算机. 问输入的错误数据的平均值与准确数据的平均值相差

(A) 882.　(B) 980.　(C) 1078.　(D) 482000.　(E) 882000.

(第 6 届美国初中数学考试,1990 年)

[解]　显然输入数据时多算了

$$980000 - 98000 = 882000(\text{美元}),$$

这对 1000 个家庭来讲平均每户多算了

$$882000 \div 1000 = 882(\text{美元}).$$

故选(*A*).

28·21　有 50 个数的集合,这 50 个数的算术平均为 38,若将此集合的两数 45 与 55 去掉,则剩余数所成的集合的算术平均值为

(A) 38.5.　(B) 37.5.　(C) 37.　(D) 36.5.　(E) 36.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解]　由题设知该集合的数和为 $38 \cdot 50 = 1900$.

当去掉两数 45 和 55 后,余下 48 个数和为 1800. 则它们的算术平均值为

$$\frac{1800}{48} = 37.5.$$

故选(B).

28·22　设 N 是一个位于 9 和 17 之间的数,则 6,10 和 N 的平均值若是偶数,则它只能是

(A) 8.　　(B) 10.　　(C) 12.　　(D) 14.　　(E) 16.

（第 5 届美国初中数学考试,1989 年）

［解］　依题设显然有(设 $\overline{x}$ 为三数平均值)

$$\frac{9+6+10}{3}<\overline{x}<\frac{17+6+10}{3},$$

即
$$8\frac{1}{3}<\overline{x}<11.$$

得　$\overline{x}=10$.

故选(B).

28·23　一个包括 5 个正整数的样本,其算术平均值为 10,中位数为 12,则其中最大的数与最小的数之差最小为

(A)2.　　(B)3.　　(C)5.　　(D)7.　　(E)10.

（第 45 届美国高中数学考试,1994 年）

［解］　设这五个数分别为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$,由题设 $c=12$,且

$$a+b+c+d+e=10\times5=50.$$

又 $d\geqslant12$, $e\geqslant12$, 知 $c+d+e\geqslant3c=36$,

$\therefore$　$2a\leqslant a+b\leqslant50-36=14$, 即 $a\leqslant7$.

这样　$e-a\geqslant5$,等号仅当 $a=b=7,c=d=e=12$ 时取得.

故选(C).

28·24　一列整数的众数为 32,平均值为 22,最小的数是 10,中位数为 m,若用 $m+10$ 换 m,则新数列平均值为 24,中位数为 $m+10$;若 $m-8$ 换 m,则新数列中位数为 $m-4$,则 m 的值是

(A)16.　　(B)17.　　(C)18.　　(D)19.　　(E)20.

（第 48 届美国高中数学考试,1997 年）

［解］　由设当 $m+10$ 换 m 时,平均值增加 2,则知该数列有 $10\div2=5$ 项.又 $m-8$ 换 m,中位数为 $m-4$.

由小到大排列其前三项应为: $10,m-4,m$.

因 32 是众数,显然至少有两项是 32,显然 $m\neq32$,否则数列平均值大于 22,设五数为 10, $m-4$, m, 32, 32,则有

$$10+(m-4)+m+32+32=22\times 5,$$

解得 $m=20$.

故选(E).

28·25　十个不同的正整数的算术平均值是10. 则这十个数的最大数的最大值是

(A) 10.　(B) 50.　(C) 55.　(D) 90.　(E) 91.

(第7届美国初中数学考试,1991年)

[解]　由设这十个数均系正整数,考虑极端的情形:其中九个数为1,2,…,9,另一个数为55,它们的平均值是10.

故选(C).

28·26　右表是同一个月的日历的一部分. 如果其中一个字母表示的日期与 C 表示的日期相加恰好等于 A 和 B 所表示的日期的和,那么,这个字母是

	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	
			C	A		
			Q			
	S	B	P	T	R	

(A) P.　(B) Q.　(C) R.　(D) S.　(E) T.

(第6届美国初中数学考试,1990年)

[解]　显然　$A=C+1$,　则

$$A+B=C+1+B=C+(B+1)=C+P.$$

故选(A).

28·27　排成一行的十棵树,邻棵相隔10米. 第一棵处有个水井,小张从水井打水,挑担淋树,每棵需淋一桶水. 则他淋完十棵树,至少要走的路程米数为

(A) 410.　(B) 490.　(C) 500.　(D) 510.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解]　淋完第一、二棵树需走20米;淋完第三、四棵需走 $20+40=60$ 米;淋完第五、六棵需走 $40+60=100$ 米;淋完第七、八棵需走 $60+80=140$ 米.

最后,淋完第九、十棵需再走90米(无须再回井边).

综上,他淋完十棵树至少要走

$$20+60+100+140+90=410 \text{米}.$$

故选(A).

28·28　杰克和吉尔从同一起点出发跑10km，前5km跑上一座小山山顶，后5km沿原路返回起点.杰克提前10分钟出发，上山的速度是15km/时，下山的速度为20km/时.吉尔上山与下山的速度分别是16km/时和22km/时，那么两人相向会面时的地点与山顶距离为

(A) $\frac{5}{4}$km.　(B) $\frac{35}{27}$km.　(C) $\frac{27}{20}$km.　(D) $\frac{7}{3}$km.　(E) $\frac{28}{9}$km.

（第42届美国高中数学考试，1991年）

[解]　杰克从出发跑到山顶的时间为$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$(时)，即20分钟.

杰克到山顶时，吉尔距杰克(山顶)的距离(杰克提前10分钟出发)为

$$5-\frac{16}{60}\cdot(20-10)=\frac{7}{3}(\mathrm{km}).$$

则两人相会时距山顶距离为

$$20\cdot\frac{\frac{7}{3}}{16+20}=\frac{35}{27}(\mathrm{km}).$$

故选(B).

28·29　去年一辆自行车价格为160元，一顶骑自行车用的头盔价格为40元，今年自行车价格上涨5%，头盔价格上涨10%，自行车与头盔合起来的价格上涨了

(A) 6%.　(B) 7%.　(C) 7.5%.　(D) 8%.　(E) 15%.

（第44届美国高中数学考试，1993年）

[解]　去年自行车和头盔共值$160+40=200$元，今年自行车涨了$0.05\cdot160=8$元，头盔涨了$0.10\cdot40=4$元.

所以今年自行车和头盔共涨了12元，增长率为　$\frac{12}{200}=6\%$.

故选(A).

28·30　把12,30,42,44,57,91,95,143这8个数分为两组，使每组的数之乘积相等.则分组正确的是

(A) 12,42,57,143和30,44,91,95.

(B) 12,30,95,143和42,44,57,91.

(C) 12,42,95,143和30,44,57,91.

(D) 12,44,95,143 和 30,42,57,91.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解] 由 $12 = 2^2 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$,

$44 = 2^2 \cdot 11$, $57 = 3 \cdot 19$, $91 = 7 \cdot 13$,

$95 = 5 \cdot 19$, $143 = 11 \cdot 13$,

我们可列出下面因子表

	2	3	5	7	11	13	19
12	√√	√					
30	√	√	√				
42	√	√		√			
44	√√				√		
57		√					√
91				√		√	
95			√				√
143					√	√	

从表中可看出:对于乘积相同的分组,则95,57应分在不同的组,同理91,143;44,143;42,91;30,95等均应在不同的组,这样可分12,42,95,143和30,44,57,91两组.

故选(C).

28·31　用1,2,3,4,5,6,7,8这八个数字组成两个四位数,要使这两个四位数乘积最大,则它们中较大的一个是

(A) 8765.　(B) 8642.　(C) 8531.　(D) 8672.

(中国浙江省宁波市初中数学竞赛,1985年)

[解] 先证明下面事实:

若 $a > b$, $c > d(a,b,c,d \in N)$, 则 $\overline{ad} \cdot \overline{bc} > \overline{ac} \cdot \overline{bd}$.

注意到 $\overline{ad} \cdot \overline{bc} - \overline{ac} \cdot \overline{bd}$

$$= (10a + d)(10b + c) - (10a + c)(10b + d)$$

$$= 10(a - b)(c - d) > 0$$

即可.

这样将 $1 \sim 8$ 分成两组时,8,7分别作首位;6,5放置时应以85,76

搭配;再放 4,3 时,可以 853,764 搭配;最后分组是 8531 和 7642.

故选(C).

28·32　从和式

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

中删去某些项,使保留下来的项数之和等于 1,问删去的项为

(A) $\frac{1}{4}$ 与$\frac{1}{8}$.　　(B) $\frac{1}{4}$ 与$\frac{1}{12}$.　　(C) $\frac{1}{8}$ 与$\frac{1}{12}$.

(D) $\frac{1}{6}$ 与$\frac{1}{10}$.　　(E) $\frac{1}{8}$ 与$\frac{1}{10}$.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[**解**]　因　$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,　又　$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$,

则
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1.$$

故选(E).

28·33　有九个分数的和为 1,它们的分子都是 1,其中的五个是:$\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\frac{1}{33}$,又其余四个分数的分母个位数均为 5.则这些分数的分母分别是

(A) 5,15,35,105.　　(B) 5,25,35,135.

(C) 5,15,45,385.　　(D) 5,25,105,385.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛,1990 年)

[**解**]　设其余四个分数和为 S,则

$$S=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}\right),$$

∵ 其余四个分数分母个位数字均为 5,则它们皆为 5 的倍数,这样

$$S=\frac{5}{5}\left[(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33})\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left[5-\frac{5}{3}-\frac{5}{7}-\frac{5}{9}-\frac{5}{11}-\frac{5}{33}\right].$$

由估算有
$$\frac{2}{12}<\frac{1}{7}+\frac{1}{33}=\frac{40}{231}<\frac{2}{9},$$

从而　$2>\frac{5}{3}>5(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{33})>\frac{10}{9}>1,$

这样,括号内若视为四个分数和,定有其一是 1,另三个小于 1,因

此有

$$S=\frac{1}{5}\left[1+(2-\frac{5}{3})+(1-\frac{5}{9})+(1-\frac{5}{7}-\frac{5}{11}-\frac{5}{33})\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\left(\frac{2}{7}-\frac{5}{11}-\frac{5}{33}\right)\right],$$

上式中$\frac{4}{9}$分子不是1,不妥,将其改写为$\frac{1}{9}+\frac{3}{9}$,这时

$$S=\frac{1}{5}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{7}-\frac{5}{11}+\frac{3}{9}-\frac{5}{33}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{5}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{77})$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}.$$

故选(C).

注1 分子为1的分数又称"单位分数"或"埃及分数",1表单位分数(不同的单位分数)和的问题有下面一些结论:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ \text{(项数最少)}$$
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12},$$
………………

又1表分母为奇数的单位分数和最少九项,比如:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231},$$

此外还有四组解,它们前六项与上相同,后三项分母分别为(21,135,10395),(33,45,385),(21,165,693),(21,231,315).

若使和中最简分数的最大分母最小的表示为

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{77}+\frac{1}{105}.$$

注2 若知道下面结论,解答此例将较容易.

把1分解成为某些单位分数和,即

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},\qquad ㊟$$

若存在素数p和正整数k,使$p^{k+1}\nmid a_i(1\leqslant i\leqslant n)$,但有某一个$i_0$,使$p^k\mid a_{i_0}$,则必有另一个$j\neq i_0$, $1\leqslant j\leqslant n$,使$p^k\mid a_j$.

证 若命题不成立,则$p^k\nmid a_j$,对任意$j\neq i_0$成立,则在㊟式中左右两边同

时乘以 p^{k-1} 的一个适当倍数，可使㊉的右边除 $\frac{1}{a_{i_0}}$ 项外均为整数，而式左为整数，这不可能.

故命题成立.

由上命题，考虑素数 $p=5$， $k=2$ 时，可排除(B)，(D)；考虑素数 $p=3$，$k=2$ 时，可排除(A).

故选(C).

28·34　整数 a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 满足

$$\frac{5}{7}=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}$$

对于 $i=2,3,\cdots,7$，这里 $0\leqslant a_i<i$. 则 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ 的值等于

(A)8.　　(B)9.　　(C)10.　　(D)11.　　(E)12.

(第 50 届美国高中数学考试，1999 年)

[解]　显然 a_2 只能为 0 或 1，但若 $a_2=0$，

$\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\cdots+\frac{a_7}{7!}$ 的最大值小于 $\frac{5}{7}$，不妥，知 $a_2=1$.

a_3 可为 0,1,2，注意到 $\frac{2}{3!}>\frac{5}{7}-\frac{1}{2}$，

及 $\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}$ 的最大值小于 $\frac{5}{7}-\frac{1}{2}$，知 $a_3=1$，同理可推得 $a_4=1$.

这样 $\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}=\frac{5}{7}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{1}{168}$，

而 $\frac{1}{5!}>\frac{1}{168}$，知 $a_5=0$，

由 $\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!}=\frac{1}{168}$，知 $7a_6+a_7=30$，

得 $a_6=4$，$a_7=2$.

则 $$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=9.$$

故选(B).

28·35　连分式 $\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}$ 的值是

(A) $\frac{3}{4}$.　(B) $\frac{4}{5}$.　(C) $\frac{5}{6}$.　(D) $\frac{6}{7}$.　(E) $\frac{6}{5}$.

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解] $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{2}{3}}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{4}{5}.$

故选(B).

第二十九章　整　除

第1节　数的整除与同余

29·1　若六位数是由某一个三位数重复而得，如 256256 或 678678 等等，此型的任何数常恰可被某些数整除，这些数是

(A) 只有 7.　　(B) 只有 11.　　(C) 只有 13.

(D) 101.　　(E) 7,11,13.

（第 2 届美国高中数学考试，1951 年）

[解]　设六位数中重复的三位数为 μ，则六位数可表示为

$$1000\mu+\mu=\mu(1000+1)=1001\mu.$$

而　$$1001=7\cdot 11\cdot 13.$$

故选 (E).

29·2　由两个不同数字组成的所有两位数中，每个两位数被其两个数位上的数字之和除时，所得的商最小值是

(A) 1.5.　　(B) 1.9.　　(C) 3.25.　　(D) 4.

（中国江苏省初中数学竞赛，1986 年）

[解 1]　设两位数为 $10x+y$（$x=1,2,\cdots,9$；$y=0,1,2,\cdots,9$，且 $x\neq y$）.

则　$\dfrac{10x+y}{x+y}=1+\dfrac{9x}{x+y}$，　令　$u=\dfrac{9x}{x+y}$，

有　$\dfrac{9-u}{u}=\dfrac{y}{x}$，　而　$0\leqslant\dfrac{y}{x}\leqslant 9$，

则 $0\leqslant\frac{9-u}{u}\leqslant 9$, 有 $0\leqslant\frac{9}{u}-1\leqslant 9$, 即 $\frac{9}{10}\leqslant u\leqslant 9$.

故 $u_{\min}=\frac{9}{10}$, 则 $\frac{10x+y}{x+y}$ 的最小值为 1.9.

故选(B).

[**解 2**] 由上解知 $\frac{10x+y}{x+y}=1+\frac{9x}{x+y}=1+\frac{9}{1+\frac{y}{x}}$.

当 $1+\frac{y}{x}$ 最大时,上式值最小.但 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=9$,则

$$\left(\frac{10x+y}{x+y}\right)_{\min}=1+\frac{9}{1+9}=1.9.$$

故选(B).

29·3 以三个不同的非零数字(十进位)组成的三位数,除以这三个数字之和,所得商的最小值是

(A) 9.7. (B) 10.1. (C) 10.5. (D) 10.9. (E) 20.5.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[**解**] 设个位,十位和百位数字分别为 U,T 和 H,所以商的最小值是

$$\frac{U+10T+100H}{U+T+H}=1+\frac{9(T+11H)}{U+T+H}.$$

不论 T,H 为何值,当 $U=9$ 时,上式最小.

这样

$$\frac{T+11H}{T+H+9}=1+\frac{10H-9}{T+H+9}.$$

由于 $T\neq 9$,则当 $T=8,H=1$ 时其值最小.

因此这个数是 189,商的最小值为 $\frac{189}{18}=10.5$.

故选(C).

29·4 某商店用元和分标价某一货物,当4% 销售税加上去后,因为结果正好是 n 元故不需四舍五入(亦即 n 是正整数). n 的最小值是

(A) 1. (B) 13. (C) 25. (D) 26. (E) 100.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[**解**] 设 m 是该项目按分计算的价格,那么 $1.04m=100n$.

这样 $8\cdot 13m=100^2n$, 所以 $m=2\cdot 5^4\cdot\frac{n}{13}$.

因而 m 是整数的充要条件是 $13 \mid n$.

故选(B).

29·5 由从 19 到 92 的相继两位整数顺序排列组成整数 $N = 19202122\cdots909192$. 如果 3^k 是 N 的因数中 3 的最高次方,则 k 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 大于 3.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 自然数 n 被 3 或 9 整除 $\Longleftrightarrow$ 其各位数字和被 3 或 9 整除.

考虑 $1+9+2+0+2+1+\cdots+9+1+9+2$

$= 1+9+(2+3+4+5+6+7+8)\cdot 10+(1+2$
$+3+\cdots+7+8+9)\cdot 7+9+0+9+1+9+2$

$= 3\cdot 235,$

因为 $3 \mid 3\cdot 235$, 而且 $9 \nmid 3\cdot 235$, 所以 $k=1$.

故选(B).

29·6 一数被 10 除,余 9;被 9 除,余 8;被 8 除,余 7;等等直至被 2 除,余 1,此数可能为

(A) 59. (B) 419. (C) 1259.

(D) 2519. (E) 非上述的答案.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解] 设此数为 N,则 $N+1$ 为 $10,9,8,\cdots,2$ 的倍数,故可取它们的最小公倍数:

$$[10,9,8,\cdots,2] = 2^3\cdot 5\cdot 3^2\cdot 7 = 2520,$$

从而 $N = 2520-1 = 2519$.

故选(D).

29·7 已知 m 是被 3 除余 1,被 7 除余 5,被 11 除余 4 的最小自然数. 则 m 被 4 除的余数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 设 $m = 3a+1 = 7b+5 = 11c+4$,其中 a,b,c 均为非负整数. 这样

$$a = \frac{2c}{3}+3c+1 \qquad ①$$

$$b = \frac{4c-1}{7}+c \qquad ②$$

现求最小的 c 使 a,b 均为非负整数:

由①,②知 $3 \mid c$, 且 $7 \mid (4c-1)$,则 $c=9$, 从而

$$m = 11 \cdot 9 + 4 = 103.$$

而 $$103 \div 4 = 25 \cdots\cdots 3,$$

故选(D).

29·8 在$\{1,2,3,\cdots,99,100\}$中满足 n^2 的十位数字为奇数的 n 的个数是

(A)10. (B)20. (C)30. (D)40. (E)50.

(第45届美国高中数学考试,1994年)

[解] 完全平方数的末两位数字仅有下面几种可能:

$$-00,\quad -25,\quad -奇6,\quad -偶1,\quad -偶4,\quad -偶9$$

若 n^2 的十位数字是奇数仅末位数为6的一种,即 n 的个位数是4或6.

在 $1 \sim 100$ 中这样的 n 共有20个.

故选(B).

29·9 n 为正整数,若$2n$有28个正因子,$3n$有30个正因子,则$6n$的因子个数为

(A)32. (B)34. (C)35. (D)36. (E)38.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解] 设 $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot m$,且$2 \nmid m$,同时$3 \nmid m$,又设 m 有k个正约数,$\alpha,\beta \in N$.由题设

$$\begin{cases}(\alpha+2)(\beta+1)k = 28 & ①\\(\alpha+1)(\beta+2)k = 30 & ②\end{cases}$$

由(1)知 $5 \nmid k$, 且 $3 \nmid k$, 由(2)知 $7 \nmid k$,

$\therefore$ $k \mid 2$, k 只能是1或2,

i)$k=1$时,上面两式化为

$$\begin{cases}(\alpha+2)(\beta+1) = 28,\\(\alpha+1)(\beta+2) = 30.\end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases}\alpha = 5,\\\beta = 3.\end{cases}$$

此时 $6n$ 的约数为$(\alpha+2)(\beta+2) = 35$.

ii)$k=2$时,上面两式化为

$$\begin{cases}(\alpha+2)(\beta+1)=14,\\(\alpha+1)(\beta+2)=15.\end{cases}$$ 其无整数解.

综上 $6n$ 有因子 35 个.

故选(C).

29·10　两个或两个以上的整数除以 N(N 为整数,$N>1$),如果所得的余数相同且都是非负数,则数学上定义这两个或两个以上的整数为同余.若 69,90 和 125 对于某个 N 是同余的,那么对于同样的 N,81 同余于

(A) 3.　　(B) 4.　　(C) 5.　　(D) 7.　　(E) 8.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解]　任何两个同余整数的差必定可以被 N 除尽.

因为 $90-69=21$ 和 $125-90=35$,　故 $N=7$.

又因为　$81\div 7=11\cdots\cdots 4$,　因而知 81 与 4 同余.

故选(B).

29·11　数 1059,1417 和 2312 每个数各除以 d,若余数都是 r,其中 d 是大于 1 的整数,那么 $d-r$ 等于

(A) 1.　(B) 15.　(C) 179.　(D) $d-15$.　(E) $d-1$.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解]　因为 d 可整除 $2312-1417=5\cdot 179$,又可整除 $1417-1059=2\cdot 179$,而 179 是素数,即知 $d=179$, $r=164$,故 $d-r=15$.

故选(B).

29·12　设三位数 $\overline{2a3}$ 加上 326 得另一个三位数 $\overline{5b9}$,若 $\overline{5b9}$ 能被 9 整除,则 $a+b$ 等于

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.　　(E) 9.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　由设 $\overline{5b9}$ 可被 9 整除($0\leqslant b\leqslant 9$),则

$$\frac{\overline{5b9}}{9}=10\cdot\frac{50+b}{9}+1$$

是整数.

即　$50+b$ 可被 9 整除,又 $0\leqslant b\leqslant 9$,则 $b=4$.

又　$\overline{2a3}=\overline{5b9}-326=549-326=223$,

因而　$a=2$,　且　$a+b=6$.

故选(C).

29·13　有不止一个大于1的正整数,当它除以任何整数 $k(2 \leqslant k \leqslant 11)$ 时有余数1.两个最小的这样的整数之差是

(A) 2310.　　(B) 2311.　　(C) 27720.

(D) 27721.　　(E) 这些都不是.

(第29届美国高中数学考试,1978年)

[解]　若一个正整数除以从2到11中任何一个整数时,余数皆是1,则该整数为 $mt+1$ 的形式,其中 t 是非负整数,$m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$ 即 $2,3,\cdots,11$ 的最小公倍数.

所以具有所求性质两个最小整数之差是27720.

故选(C).

29·14　在除13511,13903,14589时,能有相同余数的最大除数是

(A) 28.　　(B) 49.　　(C) 98.

(D) 大于49的一个7的奇倍数.

(E) 大于98的一个7的偶倍数.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解]　若 a,b,c 被 d 除后均余 r,即

$$a = \alpha d + r,\quad b = \beta d + r,\quad c = \gamma d + r.$$

显然 $a-b,\ b-c,\ a-c$ 均可被 d 整除.

又　$(a-b)-(a-c)+(b-c)=0$,即任意两对数差的公因子亦为第三对数差的公因子,故对最大公因子而言亦然.

由　$13903 - 13511 = 7^2 \cdot 2^3$,且 $14589 - 13903 = 7^3 \cdot 2$

而　$(7^2 \cdot 2^3, 7^3 \cdot 2) = 7^2 \cdot 2$,这里 (m,n) 表示 m,n 的最大公因子(公约数).

故选(C).

29·15　已知 $2^{96}-1$ 可以被在60至70之间的两个整数整除,这两个数是

(A) 61,63.　　(B) 61,65.　　(C) 63,65.　　(D) 63,67.

(第2届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1987年)

[解]　由 $2^{96}-1 = 2^{6\cdot16}-1 = (2^{6\cdot8})^2 - 1$

$$= (2^{6\cdot8}-1)(2^{6\cdot8}+1)$$
$$= (2^{6\cdot4}-1)(2^{6\cdot4}+1)(2^{6\cdot8}+1)$$
$$= (2^{6}-1)(2^{6}+1)(2^{6\cdot2}+1)(2^{6\cdot4}+1)(2^{6\cdot8}+1),$$

而 $\quad 2^6-1=63,\quad 2^6+1=65.$

故选(C).

29·16 9^{1990} 被 11 除得的余数是

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

(中国山西省太原市高中数学竞赛,1990 年)

[解 1] $9^{1990}-1=9^{5\cdot398}-1=(9^5-1)[(9^5)^{397}+\cdots+1],$

而
$$\begin{aligned}9^5-1&=9^2\cdot9^2\cdot9-1\\&=[(7\cdot11+4)(7\cdot11+4)\cdot9]-1\\&=[11M+16\cdot9]-1\\&=[11M'+5\cdot9]-1\\&=11M'+44,\end{aligned}$$

即 $\quad 11\mid(9^5-1),\quad$ 则 $\quad 11\mid(9^{1990}-1).$

因此 9^{1990} 除以 11 余 1.

故选(A).

[解 2] $9^{1990}=(11-2)^{1990}=11\cdot M+2^{1990}=11M+32^{398}$
$$=11M+(33-1)^{398}=11\cdot N+1^{398}$$
$$=11N+1,$$

因此 9^{1990} 除以 11 余 1.

故选(A).

29·17 1997^{2000} 被 7 除的余数是

(A)1. (B)2. (C)4. (D)6.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1997 年)

[解] 由 1997 可写成 $7n+2$ 形式,这样

$$1997^2=7h+4 \text{ 且 } 1997^3=(7n+2)^3=7m+1,$$

因而 1997^{1998} 可写成 $7k+1$ 形式.

从而 $1997^{2000}=1997^2\cdot(7k+1)=(7h+4)(7k+1)$,这里 $m,n,k,h\in J$.

知 1997^{2000} 被 7 除的余数是 4.

故选(C).

29·18　2^{1000} 除以 13,余数是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 7.　(E) 11.

(第 23 届美国高中数学考试,1972 年)

[解]　注意到下面的事实:

若　$N_1 = Q_1D + R_1$,　$N_2 = Q_2D + R_2$, 则

$$N_1N_2 = (Q_1Q_2D + Q_1R_2 + Q_2R_1)D + R_1R_2.$$

即若 N_1, N_2 被 D 除后余数为 R_1, R_2,则 N_1N_2 被 D 除后余数为 R_1R_2.

因为 $2^6 = 64$ 除以 13 余数是 -1,则 2^{12} 除以 13,余数是 1.

又　$2^{1000} = 2^{996} \cdot 2^4 = (2^{12})^{83} \cdot 16$,当除以 13 时,留下的余数是

$$1^{83} \cdot 3 = 3.$$

故选(C).

29·19　有 10 个数:$1983^3 + 3 \cdot 1983^2 + 2 \cdot 1983$, $1984^3 + 3 \cdot 1984^2 + 2 \cdot 1984$, …, $1991^3 + 3 \cdot 1991^2 + 2 \cdot 1991$, $1992^3 + 3 \cdot 1992^2 + 2 \cdot 1992$,下列的整数中,能整除上述 10 个数中的每一个数的最大整数是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 6.　(D) 12.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1992 年)

[解]　由 $a^3 + 3a^2 + 2a = a(a^2 + 3a + 2) = a(a+1)(a+2)$,则知　$2 \mid (a^3 + 3a^2 + 2a)$,　且　$3 \mid (a^3 + 3a^2 + 2a)$, 即

$$6 \mid (a^3 + 3a^2 + 2a).$$

又　$12 \nmid 1985 \cdot 1986 \cdot 1987$,即

$$12 \nmid (1985^3 + 3 \cdot 1985^2 + 2 \cdot 1985).$$

则能整除十个数中每个数的最大整数是 6.

故选(C).

29·20　不论 n 的整数值如何,可整除式 $n^3 - n$ 的最大数是

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5.　(E) 6.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解]　由 $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$,此即为三个连续整数之积,其中必含一个偶数和一个 3 的倍数,则它可被 6 整除.

又当 $n = 2$ 时, $n^3 - n = 6$.

从而对任意整数 n 而言，n^3-n 的最大约数为 6.

故选(E).

29·21　若 n 为任何整数，$n^2(n^2-1)$ 可被 x 整除，则 x 等于

(A) 12.　(B) 24.　(C) 12 的任何倍数.

(D) $12-n$.　(E) 12 与 24.

（第 7 届美国高中数学考试，1956 年）

[解]　当 $n=2$ 时，$n^2(n^2-1)=12$，故(B)，(C)，(D)，(E)不真.

故选(A).

29·22　设 p 是任意三个相邻正奇数的乘积，则能整除所有这样的 p 的最大整数是

(A) 15.　(B) 6.　(C) 5.　(D) 3.　(E) 1.

（第 19 届美国高中数学考试，1968 年）

[解]　设三正奇数分别为 $2k-1$，$2k+1$，$2k+3$. 由题设

$$p=(2k-1)(2k+1)(2k+3),\ k\text{ 为正整数}.$$

(1) 若 $3\mid k$，即 $k=3m$ 时，$2k+3$ 为 3 的倍数；

(2) 若 $k=3m+1$ 时，$2k+1=2(3m+1)+1=6m+3$，即 $2k+1$ 为 3 的倍数；

(3) 若 $k=3m+2$ 时，$2k-1=2(3m+2)-1=6m+3$，即 $2k-1$ 为 3 的倍数.

综上，p 总有因子 3. 此外 p 无其它公因子，这只须注意到：

$$p_1=1\cdot3\cdot5,\qquad p_2=7\cdot9\cdot11$$

它们的最大公约数为 3.

故选(D).

29·23　数列 $1^5-1, 2^5-2, 3^5-3, \cdots, n^5-n, \cdots$. 下列整数中能整除这个数列中每一项的最大者为

(A) 1.　(B) 60.　(C) 15.　(D) 120.　(E) 30.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

[解]　由 $n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$，注意到 $n-1, n, n+1$ 三个连续整数中必有一个偶数，一个 3 的倍数，故它们之积能被 6 整除.

下面证明 n^5-n 中含有 5 的因子.

若 n 被 5 除余 0,1,4 时;$n-1,n,n+1$ 中必有其一为 5 的倍数;

若 n 被 5 除余 2,3 时,即 $n=5m\pm2$(m 为整数)时,则由

$$n^2+1=(5m\pm2)^2+1=25m^2\pm20m+5$$

知 n^2+1 中含 5 的因子.

综上 n^5-n 可被 30 整除. 又 $2^5-2=30$.

故选(E).

29·24 设 $b=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots-1988^2+1989^2$. 以 1991 除 b,所得的余数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1991 年)

[**解 1**] 注意到下面变换:

$$\begin{aligned}&1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+1987^2-1988^2+1989^2\\&=1+(1989^2-2^2)-(1988^2-3^2)+\cdots-(996^2-995^2)\\&=1+1991\cdot1987-1991\cdot1985+\cdots-1991\cdot1\\&=1+1991\cdot(1987-1985+\cdots+3-1).\end{aligned}$$

则 1991 除 b 余 1.

故选(B).

[**解 2**]
$$\begin{aligned}b&=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(1987^2-1988^2)\\&\quad+1989^2\\&=-3-7-11-\cdots-3975+1989^2\\&=-\frac{(3+3975)\cdot994}{2}+1989^2\\&=1989\cdot995=(1991-2)\cdot995\\&=1991\cdot995-1990=1991\cdot995-1991+1.\end{aligned}$$

则 1991 除 b 余 1.

故选(B).

29·25 确定 1005! 可被 10^n 整除的最大正整数 n 为

(A) 102. (B) 112. (C) 249.

(D) 502. (E) 这些都不对.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[**解**] 若 $2^k3^l5^m\cdots$ 是 1005!化为不同的素数的幂的因子分解式,那么 $n=\min\{k,m\}$.

现在5与1005之间有201个整数可被5整除;这些201个整数中有40个可被5^2整除;这些40个整数中有8个可被5^3整除;这些8个整数中有1个可被5^4整除.

因而 $m=201+40+8+1=250.$

又 $$k>\left[\frac{1005}{2}\right]=502,$$

因而 $$n=\min\{k,m\}=250.$$

故选(E).

29·26 $(2^{48}-1)$可以被在60和70之间的两个数所整除,这两个数是

(A) 61,63. (B) 61,65. (C) 63,65.

(D) 63,67. (E) 67,69.

(第22届美国高中数学考试,1971年)

[解] 注意到下面代数式的变换:

$$\begin{aligned}2^{48}-1&=(2^{24}-1)(2^{24}+1)\\&=(2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\&=(2^{6}-1)(2^{6}+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\&=63\cdot 65\cdot(2^{12}+1)(2^{24}+1).\end{aligned}$$

故选(C).

29·27 对于每一个奇数$p>1$,我们有

(A) $(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$被$p-2$整除.

(B) $(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$被$p$整除.

(C) $(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$被p整除.

(D) $(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$被$p+1$整除.

(E) $(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$被$p-1$整除.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解] 由设$p>1$为奇数,则$p-1$为偶数,且$\frac{1}{2}(p-1)=n$为正整数.因而

$$(p-1)^{\frac{p-1}{2}}-1=(2n)^n-1$$

$$= (2n-1)[(2n)^{n-1}+(2n)^{n-2}+\cdots+1]$$

知其含因子 $2n-1=p-2$.　知(A)正确.

又当 $p=5$ 时,(B),(C),(D),(E) 皆不成立.

故选(A).

29·28　当 P 除以 D 时,商为 Q,余数为 R,当 Q 除以 D' 时,商为 Q',余数为 R',则当 P 除以 DD' 时,其余数为

(A) $R+R'D$.　(B) $R'+RD$.　(C) RR'.　(D) R.　(E) R'.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　由设则有 $P=QD+R$,且 $Q=Q'D'+R'$.将后式代入前一式有

$$P=(Q'D'+R')D+R=Q'(DD')+(R'D+R).$$

由于　$R\leqslant D-1$,　且　$R'\leqslant D'-1$,故

$$R+R'D\leqslant(D-1)+(D'-1)D=DD'-1<DD',$$

则 $R+R'D$ 为余数.

故选(A).

29·29　当自然数 P 和 P'(其中 $P>P'$),被自然数 D 除时,余数分别为 R 和 R'.当 PP' 和 RR' 被 D 除时,余数分别为 r 和 r'.那么

(A) r 永远大于 r'.　　(B) r 永远小于 r'.

(C) r 有时大于 r',有时小于 r'.　(D) r 有时大于 r',有时等于 r'.

(E) r 恒等于 r'.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　设 Q,Q',Q'' 分别为 P,P',RR' 被 D 除时的商,于是

$$P=QD+R,\quad P'=Q'D+R',\quad RR'=Q''D+r'.$$

因而

$$\begin{aligned}PP'&=(QD+R)(Q'D+R')\\&=(QQ'D+QR'+Q'R)D+RR'\\&=(QQ'D+QR'+Q'R+Q'')D+r',\end{aligned}$$

由于 $r'<D$,上述除法结果是惟一的.

因而 PP' 被 D 除时余数 $r=r'$.

故选(E).

29·30　设 a,b 为正整数$(a>b)$,p 是 a,b 的最大公约数,q 是 a,b 的最小公倍数.则 p,q,a,b 的大小关系是

(A) $p\geqslant q\geqslant a>b$.　　(B) $q\geqslant a>b\geqslant p$.

(C) $q \geqslant p \geqslant a > b$.　　　　(D) $p \geqslant a > b \geqslant q$.

（第2届"希望杯"全国数学邀请赛,1991年）

[解]　由题设知,$p \leqslant \min\{a,b\}$,且 $q \geqslant \max\{a,b\}$,这样

$$p \leqslant b < a \leqslant q.$$

故选(B).

29·31　已知三正整数 a,b,c,它们的最大公约数是 D,最小公倍数是 M,下列的叙述中,是真的为

(1) 积 MD 不小于 abc.

(2) 积 MD 不大于 abc.

(3) 当且仅当 a,b,c 为素数时,$MD = abc$.

(4) 当且仅当 a,b,c 两两互素时,$MD = abc$.

(A) 1,2.　(B) 1,3.　(C) 1,4.　(D) 2,3.　(E) 2,4.

（第10届美国高中数学考试,1959年）

[解]　将 a,b,c 表示成素因数乘积的形式时:

D 为各因数中幂次最低的因数之积;

M 为各因数中幂次最高的因数之积.

故 abc 因数的次数不小于MD中相同因数的次数,且 MD 中有的因子 abc 中必有,因而　$MD \leqslant abc$.

但当 a,b,c 互素时,　$MD = abc$.

故选(E).

29·32　已知一个整系数多项式,某同学求得的结果是 $f(-2) = -56$, $f(1) = -2$, $f(3) = 53$, $f(6) = 528$.则他计算错误的是

(A) $f(-2)$.　　(B) $f(1)$.　　(C) $f(3)$.　　(D) $f(6)$.

（中国安徽省芜湖市数学竞赛,1993年）

[解]　设整系数多项式为 $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.显然有$(m-t) \mid [p(m) - p(t)]$,其中 m 和t 都是整数.

由此结论一一验证,可知 $f(3) = 53$ 计算有误.

又 $[1-(-2)] \mid [-2-(-56)]$,

但　$(3-1) \nmid [53-(-2)]$,$(3-(-2)) \nmid (53-(-56))$,

故选(C).

第二十九章　整除

选择题卷

第2节　式的整除与分解

29·33　在1和100之间有多少个整数 n 能够使 x^2+x-n 分解为两个整系数的一次因式的乘积

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 9.　　(E) 10.

（第40届美国高中数学考试，1989年）

[解]　设　$x^2+x+n=(x-a)(x-b)$，

则　$a+b=-1$，　且　$ab=-n$.

即 a,b 绝对值相差1，且负整数绝对值较大，同时 $ab=-n$，n 介于 $1\sim100$ 之间，于是有表

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
n	2	6	12	20	30	42	56	72	90

则有9个 n 满足题设.

故选(D).

29·34　要使多项式 x^2-2x-n 能分解为两个整系数一次多项式之积，则不大于100的自然数 n 的个数为

(A) 8.　　(B) 9.　　(C) 10.　　(D) 11.

（第1届"五羊杯"初中数学竞赛，1989年）

[解]　设 $x^2-2x-n=(x-a)(x-b)$，则 a,b 异号(积为 $-n$)，不妨设 $a>0$, $b<0$.

由　$a+b=2$, $ab=-n$，则 $n=a(a-2)=(a-1)^2-1$.

令 $a-1=c$，则 n 可写成 c^2-1 的形式，其中 c 为非负整数.

在不大于100的自然数中，完全平方数有1,4,9,…,81,100，共10个，则 n 可取3,8,…,80,99这9个自然数.

故选(B).

29·35　设 a 是正整数，$a<100$，并且 a^3+23 能被24整除，那么，这样的 a 的个数为

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 9.　　(D) 10.

（中国高中数学联赛，1991年）

[解]　只要考虑 $24 \mid (a^3-1)$,我们有

$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)=(a-1)[a(a+1)+1]$.

因 $a(a+1)+1$ 是奇数,若要 $24 \mid (a^3-1)$,必有 $2^3 \mid (a-1)$.

若 $a-1$ 不能被 3 整除,则 $3 \mid a(a+1)$,从而 $a(a+1)+1$ 不能被 3 整除.

因此,若要 $24 \mid (a^3-1)$,必有 $3 \mid (a-1)$.这样就有

$$24 \mid (a-1),\quad 即\quad a=24k+1\quad (k \in Z).$$

由 $24k+1<100$,k 可能取的一切值为 0,1,2,3,4,也就是这样的 a 有 1,25,49,73,97 五个.

故选(B).

29·36　使得代数式

$$(x^2-4)(x^2-1)=(x^2+3x+2)(x^2-8x+7)$$

成立的 x 值的个数为

(A) 4.　　(B) 3.　　(C) 2.　　(D) 1.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解]　原式移项因式分解得

$$5(x+2)(x+1)(x-1)=0,$$

解得　$x=\pm 1,-2$.

故选(B).

29·37　x^4+2x^2+9 的一因式为

(A) x^2+3.　　(B) $x+1$.　　(C) x^2-3.

(D) x^2-2x-3.　　(E) 非上述答案.

(第 6 届美国高中数学考试,1955 年)

[解]　由 $x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$

$$=(x^2+3)^2-4x^2$$

$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3).$$

故选(E).

29·38　设 $m=n^4+x$,其中 n 为自然数,x 为二位正整数,那么使 m 为合数的 x 值可能为

(A) 16.　　(B) 61.　　(C) 81.　　(D) 64.

(第 1 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1987 年)

[解]　由 $n^4+64=n^4+16n^2+64-16n^2$

选择题卷

$$= (n^2+8)^2-(4n)^2$$
$$= (n^2+4n+8)(n^2-4n+8),$$

知 $x=64$ 时，m 为合数.

故选(D).

29·39　x^4+4 的因式之一为

(A) x^2+2.　　(B) $x+1$.　　(C) x^2-2x+2.

(D) x^2-4.　　(E) 非上述答案.

(第 4 届美国高中数学考试,1953 年)

[解]　$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

故选(C).

29·40　x^4+64 的因式为

(A) $(x^2+8)^2$.

(B) $(x^2+8)(x^2-8)$.

(C) $(x^2+2x+4)(x^2-8x+16)$.

(D) $(x^2-4x+8)(x^2-4x-8)$.

(E) $(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解]　$x^4+64=x^4+8^2=x^4+16x^2+8^2-16x^2$
$$=(x^2+8)^2-16x^2$$
$$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8).$$

故选(E).

29·41　若$3x^3-9x^2+kx-12$可被 $x-3$ 整除,则还可被下面式子整除的是

(A) $3x^2-x+4$.　　(B) $3x^2-4$.　　(C) $3x^2+4$.

(D) $3x-4$.　　(E) $3x+4$.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解]　由设 $f(x)=3x^3-9x^2+kx-12$　可被 $x-3$　整除,则 $f(3)=0$,　即　$3\cdot3^3-9\cdot3^2+3k-12=0$,　得　$k=4$.

此时　　$(3x^3-9x^2+4x-12)\div(x-3)=3x^2+4$.

故选(C).

29·42　y^2+my+2除以 $y-1$ 得商 $f(y)$,余式为 R_1,y^2+my+

2 除以 $y+1$ 得商 $g(y)$,余式为 R_2,若 $R_1=R_2$,则 m 等于

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) -1.　(E) 一不定数.

（第 16 届美国高中数学考试,1965 年）

[解] 由设 $y^2+my+2=(y-1)f(y)+R_1$, ①

且 $y^2+my+2=(y+1)g(y)+R_2$. ②

在 ① 中令 $y=1$, 得 $R_1=3+m$.

在 ② 中令 $y=-1$, 得 $R_2=3-m$.

由设 $R_1=R_2$, 故 $3+m=3-m$, 得 $m=0$.

故选(A).

29·43　如果 a,b 是整数,且 x^2-x-1 是 ax^3+bx^2+1 的一个因式,那么 b 等于

(A) -2.　(B) -1.　(C) 0.　(D) 1.　(E) 2.

（第 39 届美国高中数学考试,1988 年）

[解] 用综合除法有

$$
\begin{array}{r|llll}
 & ax+(a+b) & & & \\
\hline
x^2-x-1 & ax^3+bx^2 & & & +1 \\
 & ax^3-ax^2 & -ax & & \\
\hline
 & (b+a)x^2 & +ax & & +1 \\
 & (a+b)x^2-(a+b)x & & & -(a+b) \\
\hline
 & & (2a+b)x+1 & & +(a+b)
\end{array}
$$

$\because$ $(x^2-x-1)\mid(ax^3+bx^2+1)$,

$\therefore$ $\begin{cases}1+(a+b)=0,\\2a+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

故选(A).

29·44　式 $21x^2+ax+21$ 可分解成两个一次因式,其中 a 为正整数.则 a 是

(A) 任何奇数.　(B) 某奇数.　(C) 任何偶数.

(D) 某偶数.　(E) 零.

（中国广东省深圳市初中数学竞赛,1988 年）

[解] 设 $21x^2+ax+21=(mx+n)(px+q)$,则

$$21x^2+ax+21=mpx^2+(mq+np)x+nq,$$

所以 $\begin{cases}mp=21 & ①\\mq+np=a & ②\\nq=21 & ③\end{cases}$

从上面①,③两式知 m,n,p,q 均为奇数.

则 $mq+np$ 必为偶数,即 a 为某偶数.

故选(D).

29·45 若 x^2+2x+5 是 x^4+px^2+q 的一个因式,则 p 与 q 的值应为

(A) $-2,5$. (B) $5,25$. (C) $10,20$.

(D) $6,25$. (E) $14,25$.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 利用综合除法 x^4+px^2+q 除以 x^2+2x+5 商 $x^2-2x+p-1$,且余 $(12-2p)x+q-5p+5$.

由题设知 $(12-2p)x+q-5p+5=0$,

即 $12-2p=0$ 且 $q-5p+5=0$.

解得 $p=6,\ q=25$.

故选(D).

29·46 若 $f(x)=x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ 恰可被 $g(x)=x^3+3x^2+9x+3$ 除尽,则 $(p+q)r$ 的值为

(A) -18. (B) 12. (C) 15. (D) 27. (E) 45.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解] 设 $f(x)=(x+a)g(x)$,则有

$$x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$$
$$=x^4+(a+3)x^3+(3a+9)x^2+(9a+3)x+3a,$$

比较两边系数有 $a=1,\ p=2,\ q=3,\ r=3$.

故 $(p+q)r=15$.

故选(C).

29·47 多项式 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除,则 $\frac{a}{b}$ 的值是

(A) -2. (B) -12. (C) 6. (D) 4. (E) 3.

(中国北京市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 设 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$

$$\equiv(x^2+x-2)(2x^2+mx+n)$$

通过比较系数得 $a=-12,\quad b=6$.

因此 $$\frac{a}{b}=-2.$$

故选(A).

29·48　设 $p(x)=x^2+bx+c$,其中 b 和c 是整数,若 $p(x)$ 同时是 x^4+6x^2+25 和 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的因式,则 $p(1)$ 是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 4.　(E) 8.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解]　由 $$\begin{aligned}x^4+6x^2+25&=(x^4+10x^2+25)-4x^2\\&=(x^2+5)^2-(2x)^2\\&=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5),\end{aligned}$$

又　$3x^4+4x^2+28x+5=(x^2-2x+5)(3x^2+6x+1)$,

则 $$p(x)=x^2-2x+5,\quad 且\quad p(1)=4.$$

故选(D).

29·49　对某些实数 r,多项式$8x^3-4x^2-42x+45$可被$(x-r)^2$整除,下列最接近于 r 的数是

(A) 1.22.　(B) 1.32.　(C) 1.42.　(D) 1.52.　(E) 1.62.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解]　因为已知多项式可被$(x-r)^2$整除,所以它除以$(x-r)$和$(x-r)^2$的余式必须是零.用综合除法有

$$\begin{aligned}&8x^3-4x^2-42x+45\\&=(x-r)[8x^2+(8r-4)x+(8r^2-4r-42)]+8r^3-4r^2\\&\quad-42r+45,\end{aligned}$$

余式$8r^3-4r^2-42r+45=0$,又$(x-r)^2$可整除原多项式,则 $x-r$ 可整除上面的商,即

$$\begin{aligned}&8x^2+(8r-4)x+(8r^2-4r-42)\\&=(x-r)(8x+16r-4)+24r^2-8r-42.\end{aligned}$$

所以 $$24r^2-8r-42=0.$$

解得 $$r=\frac{3}{2}\quad 或\quad -\frac{7}{6}.$$

因为 $r=-\dfrac{7}{6}$ 不能使前面一个余式为零,所以 $r=\dfrac{3}{2}=1.5$.

故选(D).

29·50　若 $x^2+3xy+x+my-m$ 有两个关于x,y 的整系数一

次因式,则 m 之值所成的集合为

(A) $\{0,12,-12\}$.　　(B) $\{0,12\}$.　　(C) $\{12,-12\}$.

(D) $\{12\}$.　　(E) $\{0\}$.

（第 15 届美国高中数学考试,1964 年）

[解]　设原二次式有因式 $(x+ay+b)$ 和 $(x+cy+d)$,将其积展开与题设式系数比较可有

$$\begin{cases} a+c=3, & ① \\ b+d=1, & ② \\ ad+bc=m, & ③ \\ bd=-m, & ④ \\ ac=0. & ⑤ \end{cases}$$

由 ①,⑤ 可得 $c=0,\ a=3$ 或 $a=0,\ c=3$.

将 $c=0,\ a=3$ 代入 ③ 得 $3d=m$,　⑥

将 ⑥ 代入 ④ 得　$3d=-bd$.　⑦

若　$d=0$,　则　$m=0$;

若　$d\neq 0$,　由 ⑦ 有　$b=-3$.

再由 ② 有　$d=4$,代入 ④ 得　$m=12$.

由对称性,将 $a=0,\ c=3$ 代入结果同上.

综上　　$m=0$ 或 12.

故选(B).

29·51　式子 $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$

(A) 没有整系数和整指数的一次因式.

(B) 有因式 $-x+y+z$.

(C) 有因式 $x-y-z+1$.

(D) 有因式 $x+y-z+1$.

(E) 有因式 $x-y+z+1$.

（第 14 届美国高中数学考试,1963 年）

[解]　原式 $=x^2-(y^2-2yz+z^2)+x+y-z$

$$=x^2-(y-z)^2+x+y-z$$

$$=(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)$$

$$=(x+y-z)(x-y+z+1).$$

故选(E).

29·52 $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是

(A) $(y-z)\cdot(x+y)\cdot(x-z)$.

(B) $(y-z)\cdot(x-y)\cdot(x+z)$.

(C) $(y+z)\cdot(x-y)\cdot(x+z)$.

(D) $(y+z)\cdot(x+y)\cdot(x-z)$.

(中国上海市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 原式 $=(x^2y-x^2z)+(z^2y-y^2z)+(y^2x-2xyz+z^2x)$

$$\begin{aligned}&=x^2(y-z)+yz(z-y)+x(y-z)^2\\&=(y-z)[x^2-yz+x(y-z)]\\&=(y-z)(x^2-yz+xy-xz)\\&=(y-z)[x(x-z)+y(x-z)]\\&=(y-z)(x-z)(x+y).\end{aligned}$$

故选(A).

29·53 两奇数平方差可被 8 除尽.若 $a>b$,且 $2a+1$ 与 $2b+1$ 为两奇数,欲证前叙述,我们给与平方数之差为

(A) $(2a+1)^2-(2b+1)^2$. (B) $4a^2-4b^2+4a-4b$.

(C) $4[a(a+1)-b(b+1)]$. (D) $4(a-b)(a+b+1)$.

(E) $4(a^2+a-b^2-b)$.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解] 由题设注意到 $a>b$ 有

$$\begin{aligned}&(2a+1)^2-(2b+1)^2\\&=4a^2+4a+1-4b^2-4b-1\\&=4[a(a+1)-b(b+1)],\end{aligned}$$

$a(a+1)$,$b(b+1)$ 为两连续整数,必含 2 的因子,其差仍为偶数.故选(C).

29·54 若 a,b 都是自然数,且 a 除以 7 余 2,b 除以 7 余 5. 当 $a^2>3b$ 时,a^2-3b 除以 7 的余数是

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1989 年)

[解] 设 $a=7m+2,b=7n+5\ (m,n\in N)$,

则 $a^2-3b=(7m+2)^2-3(7n+5)$

$$= 7(7m^2 + 4m - 3n) - 11$$
$$= 7(7m^2 + 4m - 3n) - 14 + 3,$$

知 $a^2 - 3b$ 除以 7 余 3.

故选(B).

29·55　当 $x^{13} + 1$ 除以 $x - 1$ 时,其余数为

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) 0.

(D) 2.　　(E) 以上答案都不正确.

(第 1 届美国高中数学考试,1950 年)

[解]　$x - a$ 除整系数多项式 $f(x)$ 时,余项为 $f(a)$,所以 $x^{13} + 1$ 除以 $x - 1$ 时,余数是 $1^{13} + 1 = 2$.

故选(D).

29·56　多项式 $x^{12} - x^6 + 1$ 除以 $x^2 - 1$ 的余式是

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) $x - 1$.　　(D) $x + 1$.

(中国初中数学联赛,1993 年)

[解]　由
$$x^{12} - x^6 + 1 = x^6(x^6 - 1) + 1$$
$$= x^6[(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)] + 1,$$

知 $x^{12} - x^6 + 1$ 除以 $x^2 - 1$ 余式是 1.

故选(A).

29·57　当 $x^{51} + 51$ 除以 $x + 1$ 时,余数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 49.　　(D) 50.　　(E) 51.

(第 25 届美国高中数学考试,1974 年)

[解]　由余数定理 $f(x) = x^{51} + 51$ 除以 $x + 1$ 的余数是
$$f(-1) = (-1)^{51} + 51 = 50.$$

故选(D).

29·58　以 $x^2 - 3x + 2$ 去除 x^{100} 所得的余式 R 是一个次数低于 2 的多项式,那么 R 可以写成

(A) $2^{100} - 1$.　　(B) $2^{100}(x - 1) - (x - 2)$.

(C) $2^{100}(x - 3)$.　　(D) $x(2^{100} - 1) + 2(2^{99} - 1)$.

(E) $2^{100}(x + 1) - (x + 2)$.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解]　设 $x^{100} = Q(x)(x^2 - 3x + 2) + R(x)$,这里 $Q(x)$ 是一个 98 次的多项式,且 $R(x)$ 的次数小于 2,令 $R(x) = ax + b$.则

$$x^{100} = Q(x)(x-2)(x-1)+(ax+b)$$

令 $x=1,2$ 可得　$1=a+b$，　$2^{100}=2a+b$.

因而　$a=2^{100}-1$，　$b=1-a=2-2^{100}$.

因此　　　$R(x)=2^{100}(x-1)-(x-2)$.

故选(B).

29·59　设 $P(x)$ 是一个多项式，当 $P(x)$ 被 $x-19$ 除时余 99，当 $P(x)$ 被 $x-99$ 除时余 19. 当 $P(x)$ 被$(x-19)(x-99)$除时余式为

(A) $-x+80$.　　(B) $x+80$.　　(C) $-x+118$.

(D) $x+118$.　　(E) 0.

（第 50 届美国高中数学考试，1999 年）

［解］　设 $p(x)=(x-19)(x-99)Q(x)+ax+b$，这里 $Q(x)$ 为次数较 $p(x)$ 次数低 2 次的多项式，a,b 为待定常数.

由设 $p(19)=99$，$p(99)=19$，知

$$\begin{cases}19a+b=99,\\ 99a+b=19.\end{cases}$$

解得　$a=-1$，$b=118$.

这样　$-x+118$ 即为 $p(x)$ 除以$(x-19)(x-99)$时的余式.

故选(C).

29·60　设 $g(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. 当多项式 $g(x^{12})$ 除以多项式 $g(x)$ 时，余式是

(A) 6.　　(B) $5-x$.

(C) $4-x+x^2$.　　(D) $3-x+x^2-x^3$.

(E) $2-x+x^2-x^3+x^4$.

（第 28 届美国高中数学考试，1977 年）

［解］　等式$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)=x^{n+1}-1$中以 x^6 代替 x 得到

$$(x^6-1)(x^{6n}+x^{6(n-1)}+\cdots+1)=x^{6(n+1)}-1,$$

则

$$\begin{aligned}g(x^{12}) &= x^{60}+\cdots+x^{12}+1\\ &= (x^{60}-1)+\cdots+(x^{12}-1)+6\\ &= (x^6-1)(x^{54}+\cdots)+\cdots+(x^6-1)(x^6+1)+6\\ &= g(x)(x-1)[(x^{54}+\cdots)+\cdots+(x^6+1)]+6,\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{g(x^{12})}{g(x)} = (x-1)[(x^{54}+\cdots)+\cdots+(x^6-1)]+\frac{6}{g(x)},$$

因而当 $g(x)$ 除 $g(x^{12})$ 时余式是 6.

故选(A).

29·61 多项式 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ 不能被 x^2+x+1 整除的条件是,若 n 等于

(A) 17. (B) 20. (C) 21. (D) 64. (E) 65.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解] 设 $f(x)=x^2+x+1$,且设 $g_n(x)=x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$.

又 $$f(x)=(x-r)(x-r'),$$

其中 $r=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 和 $r'=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 是 $f(x)=0$ 的两个根.

这样当且仅当 $x-r$ 和 $x-r'$ 都能整除 $g_n(x)$ 即 $g_n(r)=g_n(r')=0$ 时 $f(x)$ 能整除 $g_n(x)$.

因为 r 和 r' 是共轭复数,只须确定 $g_n(r)=0$ 中的 n 就可以了.注意到

$$g_n(x)=[x^2]^n+[(x+1)^2]^n+1,$$

且注意到 r 和 $r+1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 都是 1 的 6 次根(这很容易由复平面单位圆看出来).

这样 r^2 和 $(r+1)^2$ 都是 1 的立方根.

于是 $g_n(r)$ 的值只取决于 n 被 3 除时所得的余数.直接计算(也可由复平面单位圆)得到

$$g_0(r)=3,\quad g_1(r)=0,\quad g_2(r)=0.$$

即 当 $3\mid n$ 时, $f(x)\nmid g_n(x)$.

故选(C).

29·62 当多项式 x^8 被 $x+\dfrac{1}{2}$ 所除时,用 $q_1(x)$ 和 r_1 分别表示商式和余式,当 $q_1(x)$ 再被 $x+\dfrac{1}{2}$ 所除时,再用 $q_2(x)$ 和 r_2 分别表示商式和余式,那么 r_2 等于

(A) $\dfrac{1}{256}$. (B) $-\dfrac{1}{16}$. (C) 1. (D) -16. (E) 256.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解]　设 $a=-\frac{1}{2}$,运用余数定理得 $r_1=a^8$.又由等式

$$x^8=(x-a)q_1(x)+r_1=(x-a)q_1(x)+a^8,$$

得
$$q_1(x)=\frac{x^8-a^8}{x-a}=x^7+ax^6+\cdots+a^7,$$

或
$$q_1(x)=(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a).$$

所以　当 $q_1(x)$ 除以 $x-a$ 时,运用余数定理有

$$r_2=q_1(a)=8a^7=-\frac{1}{16}.$$

故选(B).

29·63　设 n^3+p 能被 $n+q$ 整除(n,p,q 都是正整数).当 n 最大时,相应的 p 和 q 的值是

(A) $p=100,q=10$.　　(B) $p=5000,q=20$.

(C) $p=50,q=12$.　　(D) $p=300,q=15$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1986 年)

[解]　由　$\frac{n^3+p}{n+q}=n^2-qn+q^2+\frac{p-q^3}{n+q}$,

若 $(n+q)\mid(n^3+p)$,则 $(n+q)\mid(p-q^3)$.

对于(A),(B),(C),(D)中的 p,q 来讲,$p-q^3<0$,且

(p,q)	(100,10)	(5000,20)	(50,12)	(300,15)
$p-q^3$	−900	−3000	−1678	−3075

显然,$n=3060$ 时,　$\frac{-3075}{3060+15}=-1$,　且 n 最大.

故选(D).

29·64　若 p 为正整数,则 $\frac{3p+25}{2p-5}$ 可能为正整数,当且仅当 p 为

(A) 不小于 3.　(B) 不小于 3 且不大于 35.　(C) 不大于 35.

(D) 等于 35.　(E) 等于 3 或 35.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)

[解]　设 $\frac{3p+25}{2p-5}=n$,　n 为正整数.

显然,若 $2p-5=k$,则 $3p+25=nk$.

消去 p 有　$k(2n-3)=65=1\cdot65=5\cdot13$,所以

$$\begin{cases} k = 1,65,5,13; \\ 2n - 3 = 65,1,13,5. \end{cases}$$

则 $p = 3,\ 35,\ 5,\ 9.$

故选(B).

29·65 求出使$\dfrac{n-13}{5n+6}$是非零可约分式的最小的正数 n 的值

(A) 45. (B) 68. (C) 155.

(D) 226. (E) 以上结论都不对.

（第 36 届美国高中数学考试,1985 年）

[解 1] 由题设知,若 $n-13$ 与 $5n+6$ 有约数,则它们均为某正数 $k(k\neq 1)$ 的倍数.

$\therefore$ 它们的差亦应为 k 的倍数,又 $5\nmid(5n+6)$,则

$$(5n+6)-5(n-13)$$

亦应为 k 的倍数.

而 $5n+6-5(n-13)=71$,且 71 是素数,则 $k=71$.

又 $$71\mid(n-13),$$

因而 $n=71m+13,\quad m=0,\ 1,\ 2,\cdots$

$\because$ $\dfrac{n-13}{5n+6}$ 非 0, $\therefore$ $m=1$ 时 $n=84$ 为所求.

故选(E).

[解 2] 设 $n-13=ms,\quad 5n+6=mt$ ($m\neq 1$, s,t 为整数).

解得 $$m=\frac{71}{t-5s},\quad n=\frac{13t+6s}{t-5s}.$$

$\because$ 71 是素数,且 m 是正整数,则 $m=71$.

$\therefore$ $n=71s+13$, s 为正整数.

$s=1$ 时, $n=84$.

故选(E).

第三十章 整 数

第1节 奇数和偶数

30·1 设 p,q 是自然数,条件甲:p^3-q^3 是偶数;条件乙:$p+q$ 是偶数.那么

(A) 甲是乙的充分而非必要条件.

(B) 甲是乙的必要而非充分条件.

(C) 甲是乙的充要条件.

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件.

(中国高中数学联赛,1983年)

[解] p^3-q^3 是偶数 $\Longleftrightarrow p,q$ 有相同的奇偶性 $\Longleftrightarrow p+q$ 是偶数.故选(C).

30·2 若正整数 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$,且 a 为素数,那么 b,c 两数

(A) 同为奇数. (B) 同为偶数.

(C) 一奇一偶. (D) 同为合数.

(第1届"五羊杯"初中数学竞赛,1989年)

[解] 因 $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$,

又因 a 是素数, 且 $c+b>c-b$,则

$$c-b=1, \quad 且\ c+b=a^2.$$

又　$c-b$ 为奇数,则 c 与 b 必为一奇一偶.

故选(C).

30·3　若 n 是大于 1 的整数,则代数式

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$

的值

(A) 一定是偶数.　　(B) 一定是奇数.

(C) 是偶数但不是 2.　　(D) 可是偶数也可以是奇数.

(中国初中数学联赛,1985 年)

[解]　当 n 为偶数时, $\frac{1-(-1)^n}{2}=0$, $p=n+1$ 是奇数;

当 n 为奇数时, $\frac{1-(-1)^n}{2}=1$, 且 n^2-1 为偶数,

知　$p=n+(n^2-1)$ 为奇数.

故选(B).

30·4　有 99 个大于 1 的自然数,它们的和为 300.若把其中 9 个数各减去 2,其余 90 个数各加上 1.则所得的 99 个数的乘积必为

(A) 奇数.　(B) 偶数.　(C) 质数.　(D) 完全平方数.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　由题设 9 个数各减去 2,则共减去 18.

又 90 个数各加 1,则共加上 90.

这样新的 99 个数总和为　$300+90-18=372$.

因而这 99(奇数) 个新数和为偶数,则其中必至少有一个为偶数.

∴　这 99 个新数之积定为偶数.

故选(B).

30·5　一个两位数,用它的个位,十位上的两个数之和的 3 倍减去 -2,仍得原数.这个两位数是

(A) 26.　(B) 28.　(C) 36.　(D) 38.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　设这个两位数为 $\overline{ab}$,由题设则有

$3(a+b)+2=10a+b$,　即　$7a=2b+2=2(b+1)$

显然由上式知 a 是偶数,且 $b+1$ 是 7 的倍数.

故选(A).

30·6　如果一个数等于某个自然数的平方，就称它为完全平方数.已知 a 和 b 是两个完全平方数，a 的个位数字为 1，十位数字为 x；b 的个位数字为 6，十位数字为 y.则

(A) x,y 都是奇数.　　(B) x,y 都是偶数.

(C) x 为奇数，y 为偶数.　　(D) x 为偶数，y 为奇数.

（第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛，1990 年）

[解 1]　因 $9^2=81$，又 $6^2=36$，若令 $a=81$，$b=36$，则知(A)，(B)，(C) 不真.

故选(D).

[解 2]　因为 a 的个位数字为 1，且 $a=m^2$，则 m 的个位数字只能是 1，9. 而 m 的百位数字不影响 a 的十位数字，设 m 的十位数字为 c，则 a 的十位数字为 $2c$ 的个位数字，或 $18c+8$ 的个位数字，它们都是偶数.

又 b 的个位数字是 6，又 $b=n^2$，则 n 的个位数字是 4 或 6. 而 n 的十位数字设为 c，则 b 的十位数字等于 $8c+1$ 的个位数字，或 $12c+3$ 的个位数字，它们都是奇数.

故选(D).

30·7　设 $M^2=a^2+b^2+c^2$，其中 a,b 是相邻的整数，且 $c=ab$，则 M

(A) 总是偶数.　　(B) 有时是奇数.　　(C) 总是奇数.

(D) 有时是有理数.　　(E) 总是无理数.

（第 18 届美国高中数学考试，1967 年）

[解 1]　设 $a=n$，　则　$b=n+1$，　$c=n(n+1)$.

由题设有

$$\begin{aligned}M^2&=n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2\\&=n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^2)^2+n^2+1^2+2n^2\cdot n+2n^2+2\cdot n\\&=(n^2+n+1)^2,\end{aligned}$$

所以　$M=n^2+n+1$.

又　n^2 与 $n+1$ 必为一奇一偶，其和必为奇数.

故选(C).

[**解 2**] $M = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(a-b)^2+2ab+(ab)^2}$

由 a,b 是相邻整数,则$(a-b)^2=1$,且 ab 为偶数.所以

$$M=\sqrt{1+2ab+(ab)^2}=ab+1,$$

则 M 是奇数.

故选(C).

30·8 如果 a,b,c 是正整数,且 a,b 是奇数,那么 $3^a+(b-1)^2c$ 是

(A) 奇数. (B) 偶数.

(C) 当 c 为偶数时,是奇数; c 为奇数时,是偶数.

(D) 当 c 为奇数时,是奇数; c 为偶数时,是偶数.

(E) 如果 c 不是 3 的倍数,为奇数;如果 c 是 3 的倍数,为偶数.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[**解**] 由 3^a 是奇数;又 b 是奇数,则 $b-1$ 是偶数,从而$(b-1)^2$ 是偶数,进而$(b-1)^2c$ 是偶数.因此 $3^a+(b-1)^2c$ 是奇数.

故选(A).

30·9 有 18 支代表队参加比赛开幕式.进场时,第 1 支代表队有 27 人,第 2 支代表队有 26 人,…,第 18 支代表队有 10 人.如果他们都是按一路纵队进场,并且按进场先后次序把 18 支代表队的所有代表编上 1,2,…,333 号.则最后一名代表编号为奇数的代表队的支数是

(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[**解**] 第 1 支队的最后一名代表编号为 27,

第 2 支队的最后一名编号为 $27+26=53$,

第 3 支队的最后一名编号为 $27+26+25=78$,

第 4 支队的最后一名编号为 $27+26+25+24=102$,

…………

这样各代表队的编号按奇奇偶偶奇奇 …… 规律循环变化.

又共有 18 支代表队,则有 10 支代表队最后一名代表编号为奇数.

故选(C).

第2节　素　数

30·10　著名的哥德巴赫猜想指出，任何大于7的偶整数可以恰好写为两个不同素数之和，用这种方法表示偶数126，两个素数之间最大的差是

(A) 112.　(B) 100.　(C) 92.　(D) 88.　(E) 80.

（第24届美国高中数学考试，1973年）

[解]　$p = 13$是使$126 - p$也是素数的最小的素数.那么最大的差是$113 - 13 = 100$.

故选(B).

注　126表示成两个素数之和共有十种方法：

$13 + 113$，　$17 + 109$，　$19 + 107$，　$23 + 103$，　$29 + 97$，　$37 + 89$，
$43 + 83$，　$47 + 79$，　$53 + 73$，　$59 + 67$.

30·11　47表示成两个素数和的方法种类数是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　(E) 多于3.

（第5届美国初中数学考试，1989年）

[解]　47是奇数，而素数除2之外全为奇数.

这样由“奇数 + 奇数 = 偶数”和“偶数 + 奇数 = 奇数”知：

47表示成两素数和时，其中必有一个为2，这样另一个是45，它不是素数.

因而47无法表示成两个素数和.

故选(A).

30·12　三个素数p,q,r，满足$p + q = r$且$1 < p < q$，那么p等于

(A) 2.　(B) 3.　(C) 7.　(D) 13.　(E) 17.

（第34届美国高中数学考试，1983年）

[解]　由设$p + q = r$，且p,q,r均为素数.

又素数中除2之外，其余皆为奇数.

显然$r \neq 2$，因此r是奇数，则p,q一奇一偶.

又 $p<q$， 则 $p=2$.

故选(A).

注 这个命题可推广、引伸为：

求满足等式 $p^q+q^p=r$ 的素数 p,q,r.

（第53届莫斯科数学竞赛，1990年）

[解] 若 $p<q$，则仅有一组解 $p=2$， $q=3$， $r=17$.

因 r 是素数，则 p,q 之一为偶数，则 $p=2$. 又当 q 为不小于5的素数时，有

$$2^q+q^2=(2^q+1)+(q^2-1)$$
$$=3(2^{q-1}-2^{q-2}+\cdots+1)+(q-1)(q+1),$$

又 $3\mid(q-1)(q+1)$， 则 $3\mid(2^q+q^2)$，与 r 是素数矛盾！

30·13 从1,2,3,4,5,6,7,8,9中任取五个数. 则

(1) 其中必有两数互素；

(2) 其中必有一数是另一数的倍数；

(3) 其中必有一数的两倍是另一数的倍数.

以上结论中，正确的个数为

(A) 0个. (B) 1个. (C) 2个. (D) 3个.

（中国江苏省初中数学竞赛，1988年）

[解] 因为从 $1\sim9$ 这九个连续自然数中取五个，其中必有两个正整数相邻，否则将包含1. 而相邻正整数必互素，又1与任何自然数互素，故(1)成立.

选5,6,7,8,9可否定(2).

把这九个自然数分成三组：(1,2,4,8)，(3,6,9)和(5,7).

在前两组中，任意从每组中挑两个数，总有一数的两倍是另一数的倍数.

这样五个数皆取出前两组，结论(3)显然成立；

而五个数中的四个或三个取自前两组，必会在其中一组至少取两个数，因而结论(3)成立.

故选(C).

30·14 如果 n 是大于1的最小非素数，并且它没有小于10的素因数，那么

(A) $100<n\leqslant110$. (B) $110<n\leqslant120$.

(C) $120<n\leqslant130$. (D) $130<n\leqslant140$.

(E) $140 < n \leqslant 150$.

（第35届美国高中数学考试,1984年）

[解] 数 n 一定是两个或两个以上大于10的素数的积(它们不一定不同),满足这个条件的最小素数是11.

所以它们的最小的积是 $11 \cdot 11 = 121$.

故选(C).

30·15 设 a,b 都是整数,组出四个命题:

(1) 若 $a+5b$ 是偶数,则 $a-3b$ 也是偶数.

(2) 若 $a+b$ 能被3整除,则 a,b 都能被3整除.

(3) 若 $a+b$ 是素数,则 $a-b$ 一定不是素数.

(4) 若 $c=a+b\neq 0$,则 $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+c^3}=\dfrac{a-b}{a+c}$.

上述命题中是正确命题的个数是

(A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.

（中国"祖冲之杯"初中数学邀请赛,1989年）

[解] 设 $a+5b=2n(n=1,2,3,\cdots)$ 则 $a=2n-5b$.

得 $a-3b=2n-8b=2(n-4b)$. 故(1)成立.

设 $a+b=3n(n=1,2,3,\cdots)$, 则有 $n=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{3}$.

当 $n=1$ 时, 则 $\dfrac{a}{3}<1$, $\dfrac{b}{3}<1$. 故(2)不成立.

若 $a+b$ 为素数,$a-b$ 也可能为素数,如 $14+3=17$,$14-3=11$ 均为素数.故(3)不成立.

因为 $c=a+b\neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{a^3-b^3}{a^3+c^3}&=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}\\&=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ab-a^2+a^2+2ab+b^2)}\\&=\frac{a-b}{a+c},\end{aligned}$$

则(4)成立.

故选(B).

30·16 若 $n=20\cdot 30\cdot 40\cdot 50\cdot 60\cdot 70\cdot 80\cdot 90\cdot 100\cdot 110\cdot 120\cdot 130$,则不是 n 的因数的最小素数是

(A) 19.　　(B) 17.　　(C) 13.　　(D) 非上述答案.

（中国上海市初中数学竞赛,1987年）

[解]　由于 $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10^{12}$

$= 2^{22} \cdot 3^5 \cdot 5^{14} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13,$

显然,不是 n 的因数的最小素数是 17.

故选(B).

30·17　可除尽 $3^{11} + 5^{13}$ 的最小素数是

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 5.

(D) $3^{11} + 5^{13}$.　　(E) 这些都不对.

（第25届美国高中数学考试,1974年）

[解]　因为 3^{11} 和 5^{13} 都是奇数,它们的和必定是偶数.

又2是最小的素数.

故选(A).

30·18　两个素数 p, q 恰是整系数方程 $x^2 - 99x + m = 0$ 的两个根,则 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ 的值是

(A) 9413.　　(B) $\frac{9413}{194}$.　　(C) $\frac{9413}{99}$.

(D) $\frac{9413}{97}$.　　(E) 以上答案都不对.

（中国北京市初中数学竞赛,1983年）

[解]　两素数 p, q 是整系数方程 $x^2 - 99x + m = 0$ 的两个根.所以 $p + q = 99$.易知 p, q 分别为2和97.则

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{97}{2} + \frac{2}{97} = \frac{9413}{194}.$$

故选(B).

30·19　若 p, q 都是自然数,方程

$$px^2 - qx + 1985 = 0$$

的两个根都是素数,则 $12p^2 + q$ 的值等于

(A) 404.　　(B) 1998.　　(C) 414.　　(D) 1996.

（中国北京市初中数学竞赛,1985年）

[解]　设 $px^2 - qx + 1985 = 0$ 的二根为 x_1, x_2,则

$$x_1 x_2 = \frac{1985}{p} = \frac{5 \cdot 397}{p}.$$

由于 x_1, x_2 均为素数，所以 $p=1$，且两根 x_1, x_2 分别为5与397.

由 $\quad x_1+x_2=\frac{q}{p}, \quad q=x_1+x_2=5+397=402,$

故
$$12p^2+q=12+402=414.$$

故选(C).

30·20　若 p 为素数，且方程 $x^2+px-444p=0$ 的两根均为整数，则

(A) $1<p\leqslant 11$.　　(B) $11<p\leqslant 21$.　　(C) $21<p\leqslant 31$.

(D) $31<p\leqslant 41$.　　(E) $41<p\leqslant 51$.

（第38届美国高中数学考试，1987年）

[解]　由题设及韦达定理有(设方程两根为 x_1, x_2)：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=-444p=-4\cdot 3\cdot 37p. \end{cases}$$

因为 $\quad p>1$,

所以 $x_1=37p, \quad x_2=-12$ 不可能，这只须注意到 $37p-12\neq -p$ 即可.

又 $\quad x_1=\pm 12p, \quad x_2=\mp 37$ 时，由 $12p-37\neq -p, \quad 37-12p\neq -p,$ 　故亦不可能.

而 $\quad x_1=\pm 3p, \quad x_2=\mp 4\cdot 37$ 时，

由 $\quad 4\cdot 37-3p=-p$，即 $4\cdot 37=2p$，　知 p 为合数，不妥；

而 $\quad 3p-4\cdot 37=-p$，即 $4p=4\cdot 37$，　知 $p=37$.

又 $\quad x_1=\pm 4p, \quad x_2=\mp 3\cdot 37$ 时，

由 $\quad 4p-3\cdot 37=-p$，　即　$5p=3\cdot 37$ 不可能成立；

而 $\quad 3\cdot 37-4p=-p$，　即　$3p=3\cdot 37$，　得 $p=37$.

而 $\quad x_1=\pm p, \quad x_2=\mp 444$ 时，

由 $\quad p-444=-p$　知　$p=222$ 为合数不妥，

而 $\quad 444-p=-p$，　矛盾!

综上 $\quad p=37$.

故选(D).

30·21　设 p 是素数，如果方程 $x^2-px-580p=0$ 的两个根均为整数，则

(A) $0<p<10$.　　　　(B) $10<p<20$.

(C) $20 < p < 30$. (D) $30 < p < 40$.

(中国江苏省初中数学竞赛,1987年)

[解] 由设方程的根为

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4 \cdot 580p}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{p(p + 4 \cdot 580)}}{2},$$

因其为整数,则 $p(p + 4 \cdot 580)$ 为完全平方数. 又 p 是素数.

则 $p + 4 \cdot 580 = p \cdot m^2 \quad (m \in N)$,

即 $(m^2 - 1)p = 4 \cdot 580 = 4^2 \cdot 5 \cdot 29$, ⊛

又 $x_1 + x_2 = p$, $x_1x_2 = -580p$,知 x_1, x_2 中必有一偶数,且 p 为奇数. 又 p 为素数,则由⊛有

$$p = 5 \text{ 或 } 29.$$

若 $p = 5$, 则 $m^2 - 1 = 4 \cdot 4 \cdot 29$,不成立;

若 $p = 29$, 此时有 $m^2 - 1 = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$,得 $m = 9$.

故选(C).

30·22 如果 $p \geqslant 5$ 是一个素数,那么 24 整除 $p^2 - 1$

(A) 不可能. (B) 只是有时可能. (C) 总是可能.

(D) 只是当 $p = 5$ 时可能. (E) 这些都不对.

(第24届美国高中数学考试,1973年)

[解1] 因 $p \geqslant 5$ 的素数,设 $p = 3k + 1$ 或 $3k + 2$.

若 $p = 3k + 1$ 时, $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = 3k \cdot (3k + 2)$

若 $p = 3k + 2$ 时, $p^2 - 1 = (3k + 2)(3k + 3)$,

显然 $3 \mid (p^2 - 1)$.

同理仿上设 $p = 8t + r$, $r = 1,3,5,7$(注意 p 是素数),可证

$$8 \mid (p^2 - 1).$$

又 3,8 互质,从而 $24 \mid (p^2 - 1)$.

故选(C).

[解2] 设 $p = 6k \pm 1$(注意到 p 是不小于 5 的素数).

则 $p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k = 12k(3k \pm 1)$,

又 $k(3k \pm 1)$ 是偶数, 则 $24 \mid (p^2 - 1)$.

故选(C).

30·23 已知一数列有 58 项,每项都具有 $p + n$ 型,其中 p 代表小于或等于 61 的所有素数 $2,3,5,\cdots,61$ 之积,而 n 依次取 $2,3,4,\cdots,59$

之值,设 N 为此数列中出现素数的数目时,则 N 为

(A) 0.　(B) 16.　(C) 17.　(D) 57.　(E) 58.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解]　注意到下面诸式

$$2\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot61+2=2(3\cdot5\cdot\cdots\cdot61+1),$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot61+3=3(2\cdot5\cdot\cdots\cdot61+1),$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot61+4=2(3\cdot5\cdot\cdots\cdot61+2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即 n 取 $2,3,4,\cdots,59$ 时,$p+n$ 均有素因子,故 $p+n$ 总为合数,或 $N=0$.

故选(A).

30·24　设 $a_n=4^{2n+1}+3^{n+2}(n=1,2,3,\cdots)$,$p$ 是能整除 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 中无穷多项的最小素数,q 是能整除 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 中每一项的最小素数,则 $p\cdot q$ 是

(A) $5\cdot7$.　(B) $7\cdot13$.

(C) $13\cdot13$.　(D) 以上答案都不是.

(中国山西省太原市高中数学竞赛,1993 年)

[解]　显然 p 不等于 2 和 3. 令 $n+2=4k(k\in N)$,则

$$\begin{aligned}a_n&=4\cdot16^n+3^{n+2}\equiv4+3^{4k}\\&\equiv4+9^{2k}\equiv4+(-1)^{2k}\equiv0(\mathrm{mod}5).\end{aligned}$$

故 $p=5$. 由此即可排除掉(B)和(C).

因为　$a_1=7\cdot13$, 又

$$a_2=4^5+3^4=4\cdot16^2+9^2\equiv4\cdot2^2+2^2\equiv20\not\equiv0(\mathrm{mod}7),$$

所以　$q\neq7$,　排除(A).

故选(D).

30·25　八个连续自然数中有 k 个数两两互素,则 k 的最大值是

(A) 3.　(B) 4.　(C) 5.　(D) 6.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年)

[解]　设这八个自然数分别为:

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,$$

且 a_1 是 $3k+1$ 型偶数,且 $4\mid a_1$.

考虑托氏筛法，隔一数划去一个，则 a_3,a_5,a_7 被划去.

因 a_1 是 $3k+1$ 型， a_3 为 $3k$ 型，但其已被划去，a_6 可作为 $3k$ 型数.

且 a_1 是偶数，且 $4\mid a_1$，则 $4\mid a_5$，但 a_5 已被划去.

a_2 是 $5r$ 型数，这样至多有 a_1,a_2,a_4,a_6,a_8 这五个数两两互素.

注意到 a_1 不是 $3k+1$ 型偶数时，用筛法划去的数多于 5 个.

请看 4,5,6,7,8,9,10,11 中 4,5,7,9,11 即两两互素.

故选(C).

第 3 节　完全平方数

30·26　设 $w=7321\cdot7322\cdot7323\cdot7324+1$，则

(A) w 是一个平方数.　　(B) w 是一个素数.

(C) w 是一个立方数.　　(D) w 是一个偶数.

(第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛，1988 年)

[解]　先考虑一般的情形：

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\=&(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\=&(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\=&(n^2+3n+1)^2,\end{aligned}$$

这样 $w=(7321^2+3\cdot7321+1)^2$ 为一完全平方数.

故选(A).

30·27　一个整数的平方称为完全平方数. 若 x 是一个完全平方数，那么它的下一个完全平方数是

(A) $x+1$.　　(B) x^2+1.　　(C) x^2+2x+1.

(D) x^2+x.　　(E) $x+2\sqrt{x}+1$.

(第 30 届美国高中数学考试，1979 年)

[解]　设 $x=n^2(n\geqslant0)$ 为某完全平方数，则下一个完全平方数为

$$(n+1)^2=n^2+2n+1=x+2\sqrt{x}+1.$$

故选(E).

30·28　若 x 是自然数，设 $y=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$，则

(A) y 一定是完全平方数.

(B) 存在有限个 x,使 y 是完全平方数.

(C) y 一定不是完全平方数.

(D) 存在无限多个 x,使 y 是完全平方数.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1990 年)

[**解**] 由设 $y = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x)$

$$= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)^2,$$

$\because$ $(x + 1)^2$ 是完全平方数,但 $x^2 + 1$ 不是完全平方数,

则 $(x^2 + 1)(x + 1)^2$ 不是完全平方数.

故选(C).

30·29 下列数一定不是某个自然数的平方(其中 n 为自然数)的是

(A) $3n^2 - 3n + 3$. (B) $4n^2 + 4n + 4$. (C) $5n^2 - 5n - 5$.

(D) $7n^2 - 7n + 7$. (E) $11n^2 + 11n - 11$.

(天津市初中数学竞赛;中国初中数学联赛,1984 年)

[**解 1**] $\because$ $3n^2 - 3n + 3 = 3(n^2 - n + 1)$,

$\therefore$ 若令 $n^2 - n + 1 = 3$, 即当 $n = 2$ 时, $3n^2 - 3n + 3$ 是 3 的平方.

同理 当 $n = 3$ 时, $5n^2 - 5n - 5$ 是 5 的平方.

当 $n = 3$ 时, $7n^2 - 7n + 7$ 是 7 的平方.

当 $n = 3$ 时, $11n^2 + 11n - 11$ 是 11 的平方.

由此可否定(A),(C),(D),(E).

故选(B).

[**解 2**] $\because$ $4n^2 + 4n + 4 = 2^2(n^2 + n + 1)$,

而 $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$,

知 $n^2 + n + 1$ 不是完全平方数.

$\therefore$ $4n^2 + 4n + 4$ 不是完全平方数.

故选(B).

30·30 恰有 35 个连续自然数的算术平方根的整数部分相同,

那么这个相同整数是

(A) 17. (B) 18. (C) 35. (D) 36.

(中国初中数学联赛,1990年)

[解] 设这35个连续自然数最小的是 n^2,最大的是 $(n+1)^2-1$. 因为 $(n+1)^2-n^2=35$. 即 $2n+1=35$. 得 $n=17$. 故选(A).

30·31 使 n^5-5n^3+4n+7 成为完全平方数的自然数 n 的取值

(A) 有且只有一个. (B) 有有限多个,但多于一个.

(C) 有无穷多个. (D) 不存在.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1990年)

[解] 由

$$\begin{aligned} & n^5-5n^3+4n+7 \\ =\ & n^3(n^2-1)-4n(n^2-1)+7 \\ =\ & n(n^2-1)(n^2-4)+7 \\ =\ & (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+7, \end{aligned}$$

$\because$ $10\mid(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$,

$\therefore$ 无论 n 取何自然数,n^5-5n^3+4n+7 的个位数是7,它不是完全平方数.

故选(D).

30·32 已知数 $x=1\overbrace{00\cdots0}^{n\text{个}0}1\overbrace{00\cdots0}^{(n+1)\text{个}0}50$. 则

(A) x 是完全平方数. (B) $(x-50)$ 是完全平方数.

(C) $(x-25)$ 是完全平方数. (D) $(x+50)$ 是完全平方数.

(第1届"希望杯"全国数学邀请赛,1990年)

[解] 由题设 x 可写成 $x=10^{2n+4}+10^{n+3}+50$. 则

$$x-25=10^{2(n+2)}+10\cdot10^{n+2}+5^2=(10^{n+2}+5)^2,$$

知它是一个完全平方数.

故选(C).

30·33 五个自然数,每个都没有大于3的素因数.则其中必有二个自然数为完全平方数的

(A) 和. (B) 差. (C) 积. (D) 商.

(第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年)

[解]　由题设这五个自然数可表示为

$a_k = 2^{m_k} \cdot 3^{n_k}$,　$k = 1,2,3,4,5$,其中 m_k, n_k 均为非负整数.

由(m_k, n_k)有(奇,奇),(奇,偶),(偶,奇),(偶,偶)四种可能,则上述五个自然数中必有两个幂指数奇偶性一样,无妨设 m_1, m_2 和 n_1, n_2 分别同奇偶.

这样　$a_1a_2 = 2^{m_1+m_2} \cdot 3^{n_1+n_2}$,而 $m_1 + m_2$,　$n_1 + n_2$ 皆为偶数,则 a_1a_2 为完全平方数.

故选(C).

30·34　设 S 为所有三个连续整数的平方和所组成的集,那么

(A) S 中没有一个元素可以被 2 除尽.

(B) S 中没有一个元素可以被 3 除尽,但有些元素可以被 11 除尽.

(C) S 中没有一个元素可以被 3 或 5 除尽.

(D) S 中没有一个元素可以被 3 或 7 除尽.

(E) 并非上述中的任何一个.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解]　设三个连续整数分别为 $n-1, n, n+1$.故 S 中每一个元素皆可表为

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2.$$

当 n 为偶数时,它为偶数,故(A)不真.

另外,S 中无一个元素可被 3 整除(每一个元素除以 3 后余 2).

若 $n = 5m + 1$,则 $3n^2 + 2 = 5(15m^2 + 6m + 1)$ 可被 5 整除,则(C)不真.

若 $n = 7m + 2$,则 $3n^2 + 2 = 7(21m^2 + 12m + 2)$ 可被 7 整除,则(D)不真.

又若 $n = 11m + 5$,则 $3n^2 + 2 = 11(33m^2 + 30m + 7)$ 可被 11 整除.则(B)成立.

故选(B).

30·35　六个奇数,它们的和是 42,它们的平方和只可能是

(A) 280.　　(B) 368.　　(C) 382.　　(D) 423.

(中国江西省南昌市初中数学竞赛,1990 年)

[解]　六个奇数平方和肯定为偶数,故排除(D).

设这六个奇数为 $2k_1 + 1$, $2k_2 + 1$, $\cdots$ $2k_6 + 1$, 注意到

$$(2k_1+1)^2+(2k_2+1)^2+\cdots+(2k_6+1)^2$$
$$=4(k_1{}^2+k_2{}^2+\cdots+k_6{}^2)+4(k_1+k_2+\cdots+k_6)+6.$$

故这个数减去6后一定能被4整除,而280,368,382三个数中减去6后能被4整除的只有382.

故选(C).

30·36　若一个两位数的平方减去其数字位置互换后所得数的平方,其差常不能整除的数是

(A) 9.　(B) 该两数字的乘积.　(C) 该两数字的和.
(D) 该两数字的差.　(E) 11.

(第8届美国高中数学考试,1957年)

[解]　设此两位数为 $10m+n$,注意到

$$(10m+n)^2-(10n+m)^2$$
$$=[(10m+n)+(10n+m)][(10m+n)-(10n+m)]$$
$$=99(m+n)(m-n).$$

故选(B).

30·37　满足 $n^{200}<5^{300}$ 的最大整数 n 是

(A) 8.　(B) 9.　(C) 10.　(D) 11.　(E) 12.

(第35届美国高中数学考试,1984年)

[解]　这里要找的是满足条件的最大整数 n,故只须考虑正整数情形.

由不等式的性质,

$$n^{200}<5^{300}\Longleftrightarrow n^2<5^3=125,$$

因此小于125的最大的平方数是 $121=11^2$.

故选(D).

30·38　若 $4^{27}+4^{500}+4^n$ 是完全平方数,则最大的整数 n 是

(A) 1000.　(B) 900.　(C) 972.　(D) 不存在.

(第1届"希望杯"全国数学邀请赛,1990年)

[解1]　因为　$4^{27}+4^{500}+4^n=2^{54}(2^{2n-54}+2^{946}+1)$,且

$$2^{2n-54}+2^{946}+1=2^{n-27}(2^{n-27}+2^{946-(n-27)})+1,$$

注意到　$(a-1)(a+1)+1=a^2$,视 2^{n-27} 为 $a-1$,则

$$2^{946-(n-27)}=2,或\ 946-(n-27)=1$$

时,上式是完全平方数,得　$n_{\max}=972$.

故选(C).

[**解 2**]　无妨设 $n\geqslant 27$,由

$$4^{27}+4^{500}+4^{n}=2^{54}(2^{2n-54}+2^{946}+1),$$

若式左为完全平方数,则 $2^{2n-54}+2^{946}+1$ 为完全平方数.

而当 $n=972$ 时我们有

$$2^{2\cdot 972-54}+2^{946}+1=(2^{945})^{2}+2\cdot 2^{945}+1=(2^{945}+1)^{2},$$

但当 $n>972$ 时,因为

$$(2^{n-27})^{2}<2^{2n-54}+2^{946}+1<(2^{n-27}+1)^{2},$$

知 $2^{2n-54}+2^{946}+1$ 不是完全平方数.

则所求的最大的 n 为 972.

故选(C).

30·39　十进制中,六位数能够满足下列条件就叫做"特殊平方数":

(i) 它的数字都不为零;

(ii) 它是一个完全平方;

(iii) 这个数的前两位数字,中间两位数字和后两位数字都是完全平方(当看做两位数时).

问特殊平方数的个数是

(A) 0.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 8.　　(E) 9.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[**解**]　若 N 是特殊平方数,由题设知存在六个一位的正整数 A, B,C,a,b,c 满足

$$N=10^{4}A^{2}+10^{2}B^{2}+C^{2}=(10^{2}a+10b+c)^{2}.$$

设 $d=10b+c$,则 $d\leqslant 99$.这样必然有 $A=a$,

不然的话,若 $a<A$,

$$\begin{aligned}N&=(10^{2}a+d)^{2}\leqslant 10^{4}a^{2}+2(100)99a+(99)^{2}\\&<10^{4}a^{2}+2(10)^{4}a+10^{4}=10^{4}(a+1)^{2}\leqslant N,\end{aligned}$$

显然矛盾!

又 N 中间两位数和右边两位数均为完全平方数,而其最大者为 8181,所以

$$8181\geqslant 10^{2},$$

则
$$B^{2}+C^{2}=(10^{2}a+10b+c)^{2}-10^{4}a^{2}$$

$$=10^3(2ab)+10^2(b^2+2ac)+10(2bc)+c^2.$$

因而可看到,$2ab \leqslant 8$.因为 N 的数字无零,则 $a \geqslant 4$.

这样不是 $b=0$ 就是 $a=4, b=1$.在后一情况中,

$$N=(410+c)^2=168100+820c+c^2.$$

因为 N 的数字无零,知 $c \geqslant 1$.但这样一来不是中间两位数字就是最左边的两位数字不是平方数.

因而后一种情况是不可能的,因而 $b=0$.

所以 $\quad N=(10^2a+c)^2=10^4a^2+10^2(2ac)+c^2$.

同理 $\quad a \geqslant 4, \quad c \geqslant 4$ 且 $2ac$ 是偶两位完全平方数.

容易验算,$a=8, \quad c=4, \quad N=646416$; 或 $a=4, \quad c=8, \quad N=166464$,满足题设.

故选(B).

30·40 设 N 为一整数,使 $1260x=N^3$ 的最小正整数 x 为

(A) 1050. (B) 1260. (C) 1260^2. (D) 7350. (E) 44100.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解] 由 $1260x=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x$,

故若 $1260x=N^3$,只须上面不同质因子指数皆为 3 时,便为一立方数.

因此最小的 x 是 $\quad x=2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2=7350$.

故选(D).

30·41 如果 x 是某正整数的立方,而 d 表示 x 的正整数约数的个数.则 d 有可能是

(A) 200. (B) 201. (C) 202. (D) 203. (E) 204.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解] 由设 x 是完全立方数,则 x 可表为

$x=p_1^{3\alpha_1}p_2^{3\alpha_2}\cdots p_k^{3\alpha_k}$,这里 p_i 为素数,α_i 为非负整数$(1 \leqslant i \leqslant k)$.

故其因子个数为$(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\cdots(3\alpha_k+1)$,其为 $3m+1$ 型整数.

显然,由 $2+0+2=4 \equiv 1 \pmod 3$, 知 $202 \equiv 1 \pmod 3$.

故选(C).

30·42 设 p, q 与 r 是各不相同的素数,这里我们不认为 1 是素数.下列数中包含因子 $n=pq^2r^4$ 的最小的正的完全立方数的数是

(A) $p^8q^8r^8$.　　(B) $(pq^2r^2)^3$.　　(C) $(p^2q^2r^2)^3$.

(D) $(pqr^2)^3$.　　(E) $4p^3q^3r^3$.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

[解]　因 $p^8q^8r^8$ 不是完全立方数，故否 (A)；

又 4 不是完全立方数，故否 (E)；

同时
$$p^3q^3r^6 < p^3q^6r^6 < p^6q^6r^6,$$
即
$$(pqr^2)^3 < (pq^2r^2)^3 < (p^2q^2r^2)^3,$$
故选 (D).

30·43　某两位数 N 减去其数字互换位置之数，其结果为完全立方数，则

(A) N 不能以 5 结尾.　　(B) 除 5 外，N 可为任何数字结尾.

(C) N 不存在.　　(D) N 恰有 7 个值.

(E) N 恰有 10 个值.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

[解]　设该两位数为 $10m+n$，则
$$10m+n-(10n+m)=9(m-n).$$
而　$m-n<9$，　所以　$9(m-n)<81$.

因此这些完全立方数只能是 1,8,27,64，但其中仅有 27 为 9 的倍数.

则　$9(m-n)=27$.　即　$m=3+n$.

又　$0<m\leqslant 9$，　则　$0\leqslant n\leqslant 6$.

当 $n=0,1,2,3,4,5,6$ 时得该两位数分别为
$$30,\ 41,\ 52,\ 63,\ 74,\ 85,\ 96.$$
故选 (D).

30·44　对任意给定的自然数 n，若 n^6+3a 为正整数的立方，其中 a 为正整数，则

(A) 这样的 a 有无穷多个.

(B) 这样的 a 存在，但只有有限个.

(C) 这样的 a 不存在.

(D) 以上 (A)，(B)，(C) 的结论都不正确.

（中国高中数学联赛，1987 年）

选择题卷

[解]　取 $a=\frac{1}{3}[(3k)^3+3(3k)^2n^2+3(3k)n^4]$,其中 $k=1,2,\cdots$

则 a 显然是正整数,且有无穷多个,并且

$$n^6+3a=(3k+n^2)^3$$

是一个正整数的立方.

故选(A).

第三十一章　不定方程与不定方程组

31·1　一商人以 d 元买入 n 部收音机，d 为正整数．其中两部他以成本之半售给一义卖市场，余下的收音机每部盈利 8 元，如果总利润是 72 元，则 n 的最小可能的值是

(A)18.　(B)16.　(C)15.　(D)12.　(E)11.

（第 18 届美国高中数学考试，1967 年）

[解]　由设知收音机每部成本为 $\frac{d}{n}$ 元，依题设有

$$(n-2)\left(\frac{d}{n}+8\right)+2\cdot\frac{d}{2n}=d+72,$$

方程可化为　$n(n-11)=\frac{d}{8}$，　其中 n,d 为正整数．

若 $n\leqslant 11$，则 $n(n-11)\leqslant 0$，不妥；

若 $n=12$，则 $d=8n(n-11)=96$，　显然 12 为最小的 n．

故选(D)．

31·2　某商店甲，乙，丙三种商品每件单价分别为 2 元，3 元，5 元．某人买这三种商品若干件，共付钱 20 元，此人发现其中有种商品买多了，退还两件这种商品，但营业员只有 10 元一张的钱，没有零钱退，此人只得将其他两种商品购买的数量作了调整（且每种商品都至少买了一件），使总价格保持不变．这时，此人所购的三种物品中，乙种商品的件数是

(A)1.　(B)2.　(C)3.　(D)4.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛，1990 年）

[解] 不可能退还两件丙种商品,因为找10元钱是可以的,也不可能退还两件甲种商品,因为2件甲种商品价值4元钱,无法用其他商品替换找钱.故只可退还两件乙种商品.用3件甲种商品替换找钱即可.

设某人开始购买甲,乙,丙三种商品各 x,y,z 件,则有方程

$$2x+3y+5z=20 \quad (y\geqslant 3). \qquad ⊛$$

其可能的正整数解为 $x=3,\quad y=3,\quad z=1.$

则 $y-2=1,$

故选(A).

注 原题中无调整后“每种商品至少买一件”的要求,这样 $x=2,\quad y=2,\quad z=2$ 亦适合方程⊛,如是,调换后乙商品件数为0.

31·3 若正整数 k 使关于 x 的方程 $kx-12=3k$ 有整数解,则 k 的个数是

(A)3. (B)4. (C)5. (D)6. (E)7.

(第43届美国高中数学考试,1992年)

[解] 由题设有 $x=\dfrac{3k+12}{k}=3+\dfrac{12}{k}$,

而12的正约数有1,2,3,4,6,12等6个,从而使方程有整数解的 k 有6个.

故选(D).

31·4 下列各组数中,不满足方程 $85x-324y=101$ 的一组解是

(A) $x=5,\ y=1.$ (B) $x=329,\ y=86.$

(C) $x=653,\ y=171.$ (D) $x=978,\ y=256.$

(E) $x=1301,\ y=341.$

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1985年)

[解] 由奇,偶数加减乘运算性质知道:

当 x,y 均为偶数时,$85x-324y$ 必为偶数.

则它不能等于101(奇数).

故选(D).

31·5 满足等式 $1983=1982x-1981y$ 的一组自然数是

(A) $x=12785,\ y=12768.$ (B) $x=12784,\ y=12770.$

(C) $x=11888$, $y=11893$. (D) $x=1947$, $y=1945$.

（中国福建省初中数学竞赛，1983 年）

[解] 由数的奇偶性性质及 1983 是奇数，而 1982 为偶数，它与任何整数之积仍为偶数．则 $1981y$ 应为奇数，即 y 应为奇数．可否(A)，(B)．

再考察(C)，(D) 两组 x,y 的尾数：

$$\langle 1982\cdot 11888-1981\cdot 11893\rangle=3,$$

$$\langle 1982\cdot 1947-1981\cdot 1945\rangle=9,$$

这里$\langle a\rangle$表示 a 的末位数字．

故选(C)．

31·6　方程 $1990x-1989y=1991$ 的一组正整数解是

(A) $x=12785$, $y=12768$. (B) $x=12785$, $y=12770$.

(C) $x=11936$, $y=11941$. (D) $x=13827$, $y=12623$.

（中国江苏省初中数学竞赛，1990 年）

[解] 因 1991 的末位数是 1，能使 $1990x-1989y=1991$ 的 x,y，只有 $x=11936$, $y=11941$.

故选(C)．

31·7　方程$5x+3y=71$ 的非负整数解为

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1,\\ y_1=\beta_1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\alpha_2,\\ y_2=\beta_2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\alpha_3,\\ y_3=\beta_3;\end{cases}\quad\cdots\quad\begin{cases}x_k=\alpha_k,\\ y_k=\beta_k.\end{cases}$$

则

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_k$ 是此方程非负整数解的样本．

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_k$ 是此方程正整数解的全体．

(C) 分别以 α_i, β_i, $\alpha_i+\beta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为三边可作三角形．

(D) 当 k 取不大于 4 的非负整数时，$\begin{cases}x=13-3k,\\ y=5k+2,\end{cases}$是方程的非负整数解．

（中国山西省初中数学竞赛，1990 年）

[解] 将 $\begin{cases}x=13-3k,\\ y=5x+2,\end{cases}$ 代入 $5x+3y=71$ 有

$$65-15k+15k+6=71,$$

因此当 $k\leqslant 4$，且 k 为非负整数时，$x=13-3k$, $y=5k+2$ 是方程的非负整数解．

故选(D).

31·8　方程$3x+5y=501$的正整数解组的数目为

(A) 33.　(B)34.　(C)35.　(D)100.　(E) 以上都不是.

(第18届美国高中数学考试,1967年)

[解]　由题设有$y=\dfrac{3(167-x)}{5}$,因y是正整数,则$167-x$是5的倍数,这样　$x=5k+2,\ k=0,1,2,\cdots,32$.

故选(A).

31·9　方程$2x+3y=763$的正整数解的组数为

(A) 255.　(B) 254.　(C) 128.　(D) 127.　(E) 0.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解]　由设有$x=\dfrac{763-3y}{2}$,既然x为正整数,则$763-3y$必为偶数.

因而,y必须是正奇数,且$3y\leqslant 763$.

满足不等式的y有254个,其中半数为奇数,即127个.

故选(D).

31·10　方程$4x+5y=98$的正整数解的个数是

(A) 4.　(B) 5.　(C) 6.　(D) 无穷多.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987年)

[解]　由于$4x+5y=98$,则y为偶数,且$y\leqslant 19$.于是y的可能值为

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 10,\quad 12,\quad 14,\quad 16,\quad 18.$$

又因为当y是4的倍数时,等式左边是4的倍数,而等式右边98不是4的倍数,所以y是$4k+2$型的偶数,此时

$$y=2,\quad 6,\quad 10,\quad 14,\quad 18.$$

逐一检验,对应的x都是正整数,因此方程$4x+5y=98$的正整数解有5组.

故选(B).

31·11　一个两位数,交换它的十位数字与个位数字所得的两位

数是原来数的$\frac{7}{4}$倍,则这样的两位数有

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 4 个.
(D) 无数多个. (E) 0 个.

(中国天津市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 设这个两位数是 $10a+b$,依题设有

$$10b+a=\frac{7}{4}(10a+b),$$

即 $66a-33b=0$, 或 $2a-b=0$.

因为 a,b 皆一位数,则 $\begin{cases}a=1,2,3,4,\\ b=2,4,6,8.\end{cases}$

故选(C).

31·12 如果 a,b 为不超过10的自然数,那么能使方程 $ax=b$ 的解小于$\frac{1}{2}$而大于$\frac{1}{3}$的 a,b 有

(A) 五组. (B) 四组. (C) 三组. (D) 二组.

(中国上海市初中数学竞赛,1983 年)

[解] 由设有 $x=\frac{b}{a}$,再依题意有

$$\frac{1}{3}<\frac{b}{a}<\frac{1}{2},\quad 1\leqslant a,\quad b\leqslant 10,\quad 且\ a,b\in N.$$

解得 $\begin{cases}a=10,\\ b=4;\end{cases}$ $\begin{cases}a=9,\\ b=4;\end{cases}$ $\begin{cases}a=8,\\ b=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a=7,\\ b=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a=5,\\ b=2.\end{cases}$

故选(A).

31·13 n 是一个正整数.关于 x,y,z 的方程 $2x+2y+z=n$ 有 28 组正整数解,那么 n 是

(A) 14 或 15. (B) 15 或 16. (C) 16 或 17.
(D) 17 或 18. (E) 18 或 19.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 题设方程可化为 $2(x+y)+z=n$.

又 x,y,z 均为正整数,这样 $x+y$ 可取 $2,3,4,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$($n$ 是奇数)或$\left[\frac{n}{2}\right]-1$($n$ 是偶数).

而对于每个 $x+y=k$ 来讲,(x,y) 可有 $k-1$ 种不同的形式

$(1, k-1)$, $(2, k-2)$, $\cdots$, $(k-2, 2)$, $(k-1, 1)$.

注意到 $1+2+3+4+5+6+7=28$,

这样 $x+y=8$, 即 $\left[\frac{n}{2}\right]=8$ 或 $\left[\frac{n}{2}\right]-1=8$,

所以 $n=17$ 或 18.

故选(D).

31·14 设 a, b 为不超过 10 的自然数,那么,使方程 $ax=b$ 的解大于$\frac{1}{4}$且小于$\frac{1}{3}$的 a, b 的组数是

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解] 由题设有 $x=\frac{b}{a}$,则 $\frac{1}{4}<\frac{b}{a}<\frac{1}{3}$,即 $3b<a<4b$.

又 a, b 为不超过 10 的自然数,则 $3b<10$,故 $b\leqslant 3$.

若 $b=1$, 则 a 无解;

若 $b=2$, 则 $6<a<8$, 得 $a=7$;

若 $b=3$, 则 $9<a<12$, 有 $a=10$.

综上 $(a, b)=(7, 2)$ 或 $(10, 3)$.

故选(A).

31·15 方程 $|x|+|y|-3=0$ 不同的整数解的组数为

(A) 16. (B) 14. (C) 12. (D) 10.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解] 由设有 $|x|+|y|=3$,则其整数解有

$(\pm 3,0)$, $(\pm 2,1)$, $(\pm 2,-1)$,

$(\pm 1,2)$, $(\pm 1,-2)$, $(0,\pm 3)$.

共 12 组.

故选(C).

31·16 当 $a\in Z$ 时,关于 x 的方程$ax^2+6=0$的整数解的个数是

(A) 0 或 2. (B) 0 或 1 或 2. (C) 2. (D) 1 或 2.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 当 $a=-6$ 时,原方程为 $x^2-1=0$,得 $x=\pm 1$.

当 $a\neq -6$,且 $a\in Z$ 时,原方程无整数根.

故选(A).

31·17　整数(m,n)满足方程 $m+n=mn$ 的对数是

(A) 1.　(B)2.　(C)3.　(D)4.　(E) 比 4 大.

（第 28 届美国高中数学考试,1977 年）

［解］　若　$m+n=mn$,　那么　$m+n-mn=0$,

即
$$m+n(1-m)=0,$$

得
$$n=\frac{m}{m-1}\quad (m\neq 1).$$

当 $m=1$ 时无解;仅当 $m=0$ 或 2 时,解$\left[m,\frac{m}{m-1}\right]$是整数对,即有两组解(0,0) 和(2,2).

故选(B).

31·18　一个年龄在 13 至 19 岁之间的孩子把他自己的年龄写在他父亲年龄的后面.从这个新的四位数中,减去他们年龄差的绝对值得到 4289.他们年龄的和是

(A) 48.　(B) 52.　(C) 56.　(D) 59.　(E) 64.

（第 22 届美国高中数学考试,1971 年）

［解］　用 b 和 f 分别表示孩子和父亲的年龄.那么 $13\leqslant b\leqslant 19$,同时 $100f+b-(f-b)=99f+2b=4289$.即

$$99f=(99\cdot 43+32)-2b,\quad 或\quad f-43=\frac{32-2b}{99},$$

若 $f=43$,　则 $32=2b$,即 $b=16$;

若 $f\geqslant 44$,　则 $b<0$,不妥;

若 $f\leqslant 42$,　则 $b>65$,不妥.

综上　$f=43$, $b=16$, 且 $f+b=59$.

故选(D).

31·19　方程 $x^2-y^2=12$ 的整数解的组数是

(A) 2 组.　(B) 4 组.　(C) 8 组.　(D) 12 组.

（第 3 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1986 年）

［解］　由题设有$(x+y)(x-y)=1\cdot 12=3\cdot 4=2\cdot 6$,

又　$x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶,因而有

$$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=6;\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x+y=-2,\\x-y=-6;\end{cases}$$

或 $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=2; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=-6, \\ x-y=-2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=4, \\ y_3=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-4, \\ y_4=-2. \end{cases}$

共 4 组解.

故选(B).

31·20 设方程 $x^2-y^2=1988$ 共有 n 组整数解.则 n 等于

(A) 4. (B) 6. (C) 8. (D) 12.

(中国江苏省初中数学竞赛,1988 年)

[解] 由设有 $(x-y)(x+y)=2^2\cdot7\cdot71$,

当 x,y 同为奇数或偶数时,$x+y$, $x-y$ 皆为偶数;当 x,y 为一奇一偶时,$x+y$, $x-y$ 皆为奇数.

又 1988 是偶数,$x+y$ 和 $x-y$ 只能都是偶数.这样

$\begin{cases} x+y=\pm2\cdot7, \\ x-y=\pm2\cdot71; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\pm2\cdot71, \\ x-y=\pm2\cdot7; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=\pm2, \\ x-y=\pm2\cdot7\cdot71; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\pm2\cdot7\cdot71, \\ x-y=\pm2. \end{cases}$

这里 $x+y,x-y$ 皆同取 + 或同取 −.

即原方程有 8 组整数解.

故选(C).

31·21 方程 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的整数解的组数有

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 无数.

(中国北京市初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由题设知 $0\leqslant x+1\leqslant1$,且 $0\leqslant y-2\leqslant1$.

又方程有整数解,则有

$\begin{cases} x+1=0, \\ y-2=\pm1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+1=\pm1, \\ y-2=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2\pm1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1\pm1, \\ y=2. \end{cases}$

故选(C).

31·22 方 程 $2x^2+xy-y^2=14$ 的整数解共有

(A) 2 组. (B) 4 组. (C) 8 组. (D) 16 组.

(中国辽宁省沈阳市"育才杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解]　由　$2x^2+xy-y^2=(2x-y)(x+y)$,又

$$14=(\pm 1)\cdot(\pm 14)=(\pm 2)\cdot(\pm 7),$$

则
$$\begin{cases}2x-y=1,14,-1,-14,2,7,-2,-7,\\x+y=14,1,-14,-1,7,2,-7,-2.\end{cases}$$

共可得8组解.

故选(*C*).

31·23　若$x=9$, $y=-4$是二元二次方程$2x^2+5xy+3y^2=30$的一组整数解,这个方程的不同的整数解共有

(A) 2组.　(B) 6组.　(C) 12组.　(D) 16组.

(第1届"希望杯"全国数学邀请赛,1990年)

[解]　由题设可有$(2x+3y)(x+y)=30$,这样

$$\begin{cases}x+y=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5;\pm 30,\pm 15,\pm 10,\pm 6;\\2x+3y=\pm 30,\pm 15,\pm 10,\pm 6;\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5.\end{cases}$$

共可解得16组(注意方程组右端取同号)不同的整数解.

故选(*D*).

31·24　满足方程 $x^2+y^2=x^3$ 的正整数对(x,y)的个数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.

(D) 无限多.　(E) 非以上这些情形.

(第33届美国高中数学考试,1982年)

[解]　将原方程变形为　$y^2=x^3-x^2$,则

$$y^2=x^2(x-1).$$

由后一方程可以看到,只要 $x-1$ 是一个完全平方数即可,也就是说,如果 k 是一个整数,且满足$(x-1)=k^2$,则 $x=1+k^2$,那么就存在一个 y 满足$x^2+y^2=x^3$.

因此方程有无数多组解.

故选(*D*).

31·25　设 a 为任一给定的正整数,则关于 x 与y 的方程

$$x^2-y^2=a^3$$

(A) 没有正整数解.　(B) 只有正整数解.

(C) 仅当 a 为偶数时才有正整数解.　(D) 总有整数解.

(中国江苏省初中数学竞赛,1987年)

[解]　由 $x^2-y^2=a^3$,　有 $(x-y)(x+y)=a^3$.

若令 $\begin{cases}x+y=a^2,\\ x-y=a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{a^2+a}{2},\\ y=\dfrac{a^2-a}{2}.\end{cases}$

因为 $a^2\pm a$ 均为偶数,则 x,y 皆是整数,即方程有整数解.

设 $a=3$ 时,有 $x^2-y^2=27$,可得 $x=6,y=3$ 为其一组解,可否定(A),(C).

令 $a=1$ 时,有 $x^2-y^2=1$,可得 $x=-1,y=0$ 为其一组解,可否定(B).

故选(D).

31·26 满足方程 $m^3+6m^2+5m=27n^3+9n^2+9n+1$ 的整数偶(m,n)的数目是

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 9. (E) 无穷多.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 因为 $m^3+6m^2+5m=m(m+1)(m+5)$,对于一切整数 m,它可以被 3 整除,这只须注意到 m 被 3 除之余数为 0,1 或 2 时,$m,m+5$ 或 $m+1$ 相应地可被 3 整除.

但 $27n^3+9n^2+9n+1$ 除以 3 时总余 1.

这样题设方程无整数偶(m,n)满足.

故选(A).

31·27 满足 $mn\geqslant 0$ 且 $m^3+n^3+99mn=33^3$ 的整数对(m,n)的数目等于

(A)2. (B)3. (C)33. (D)35. (E)99.

(第 50 届美国高中数学考试,1999 年)

[解] 由 $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$,

显然 当 $m+n=33$ 时, $m^3+n^3+99mn=33^3$,

又题设 $mn\geqslant 0$,知这样的(m,n)有 34 组:

$(0,33)$, $(1,32)$, $\cdots$, $(32,1)$, $(33,0)$.

此外 $m=-33,n=-33$ 时亦满足题设式子.

综上,满足题设的(m,n)共 35 组.

故选(D).

31·28 满足方程 $x^4y^4-10x^2y^2+9=0$ 的不同数偶(x,y)(其中

x,y 为正整数)的数目是

(A) 0. (B) 3. (C) 4. (D) 12. (E) 无穷.

(第 20 届美国高中数学考试,1969 年)

[解] 题设方程等价于

$$(x^2y^2-1)(x^2y^2-9)=0,$$

故 $$xy=\pm 1 \text{ 或 } \pm 3.$$

因此满足方程的不同正整数偶是(1,1),(1,3)或(3,1).

故选(B).

31·29 使得方程 $a^2+b^2=k\cdot ab$ 有正整数解(a,b)的正整数 k 的个数是

(A) 0 个. (B) 1 个.

(C) 不止 1 个,但只有有限多个. (D) 无穷多个.

(中国安徽省芜湖市数学竞赛,1993 年)

[解 1] 设 a 与 b 的最大公因数为 d,则 $a=d\cdot a_1$, $b=d\cdot b_1$(a_1 与 b_1 互素),代入 $a^2+b^2=k\cdot ab$ 得 $a_1^2+b_1^2=k\cdot a_1b_1$,

故得 $a_1\mid b_1$ 和 $b_1\mid a_1$,从而 $a_1=b_1$,这时 $k=2$. 而当 $k=2$ 时,可取 $a=b$,满足要求.

故选(B).

[解 2] 由 $a^2+b^2=kab$,得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-k\cdot\frac{a}{b}+1=0$,

即 方程 $x^2-kx+1=0$ 有有理数解,

故其判别式 $\Delta=k^2-4$ 应是一个完全平方数.

令 $k^2-4=c^2$(c 为非负整数),则

$$(k-c)(k+c)=4=2\cdot 2=1\cdot 4.$$

故 $k-c=2$, $k+c=2$, 或 $k-c=1$, $k+c=4$.

由此易知 $k=2$.

故选(B).

31·30 方程 $\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}=\frac{115}{116}$ 的正整数解是

(A) 110. (B) 115. (C) 116.

(D) 231. (E) 该方程无正整数解.

(第 30 届美国高中数学考试,1979 年)

[解] 题设式左分子、分母皆为等差数列和,这样

$$\frac{115}{116}=\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}=\frac{n^2}{n(n+1)},$$

即 $$\frac{115}{116}=\frac{n}{n+1},\quad 得\ n=115.$$

故选(B).

31·31 方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$的整数解的个数为

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

(中国吉林省长春市初中数学竞赛,1990年)

[解] 题设方程可化为 $xy-7x-7y=0$,

$\because$ $$xy-7x-7y=(x-7)(y-7)-49,$$

$\therefore$ $xy-7x-7y=0$ 化为

$$(x-7)(y-7)=49=7\cdot 7=1\cdot 49.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x-7=1,\ -1,\ 7,\ -7,\ 49,-49,\\ y-7=49,-49,\ 7,\ -7,\ 1,\ -1.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x=8,\ 6,\ 14,\ 0,\ 56,\ -42,\\ y=56,-42,\ 14,\ 0,\ 8,\ 6.\end{cases}$$

其中 $x=0$, $y=0$ 不妥,舍去,计有五组整数解.

故选(C).

31·32 方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1987}$ 的整数解的个(组)数是

(A)0个. (B) 3个. (C) 5个. (D) 以上结论都不对.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1987年)

[解] 原方程可化为

$$xy-1987x-1987y=0,$$

或 $$(x-1987)(y-1987)=1987^2.$$

$\because$ 1987是质数,

$\therefore$ 上述方程等价于下述6个方程组:

(1) $\begin{cases} x-1987=1,\\ y-1987=1987^2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-1987=1987^2,\\ y-1987=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1987=-1,\\ y-1987=-1987^2;\end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-1987=-1987^2,\\ y-1987=-1;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-1987=1987, \\ y-1987=1987; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x-1987=-1987, \\ y-1987=-1987. \end{cases}$

解得:

$$\begin{cases} x=1988, \\ y=1987\cdot 1988; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1987\cdot 1988, \\ y=1988; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1986, \\ y=-1987\cdot 1986; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1987\cdot 1986, \\ y=1986; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2\cdot 1987, \\ y=2\cdot 1987; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}\text{(舍去)}$$

∴　方程的整数解有 5 个(组).

故选(C).

31·33　正整数的有序对(m,n)是方程$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$的解的个数是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.　(E) 多于 4 个.

(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解]　因为 m 和 n 都是正整数,所以由题设知 $n>2, m>4$.

因为$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$等价于$(m-4)(n-2)=8$,故只需找出 8 表示成为正整数的乘积的所有方式.

即 $1\cdot 8$, $2\cdot 4$, $4\cdot 2$, $8\cdot 1$ 对应着四组解

$(m,n)=(5,10),(6,6),(8,4),(12,3)$.

故选(D).

31·34　满足式 $\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$ 且 $a+b\leqslant 100$ 的正整数对(a,b)的个数是

(A) 1.　(B) 5.　(C) 7.　(D) 9.　(E) 13.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解]　由题设式子可有

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=13,$$

即

$$a^2b+a=13(ab^2+b),$$

或 $$a^2b-13ab^2+a-13b=0.$$

则 $ab(a-13b)+(a-13b)=0$，或 $(a-13b)(ab+1)=0$.

所以 $a=13b$(注意到 $ab+1\neq 0$).

又 $a+b\leqslant 100$,则 $13b+b=14b\leqslant 100$,从而

$$b\leqslant\left[\frac{100}{14}\right]=7.$$

因而 $b=1,2,\cdots,7$; $a=13,26,\cdots,91$,共 7 对 (a,b).

故选(C).

31·35 满足 $0<x<y$ 和 $\sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的不同的整数对 (x,y) 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 4. (E) 7.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解 1] 由 $1984=2^6\cdot 31$. 又 $0<x<y$,所以 $x<1984$. 从原方程解出 y 来:

$$y=(\sqrt{1984}-\sqrt{x})^2=1984+x-2\sqrt{1984x}.$$

因此当且仅当 $1984x$ 是一个完全平方数时,y 是一个整数.

又由 1984 的素因数表达式,这个结论又等价于 x 是 $31t^2$ 的形式,其中 t 是不为零的正整数.

又由 $x<1984$, 有 $31t^2<2^6\cdot 31$,即 $t^2<2^6=64$,所以有 $1\leqslant t\leqslant 7$.

因此对于 $t=1,2,3$,产生了三组(x, y),它们是:(31, 1519),(124, 1116) 和(279, 775).

从中可以发现当 x 增加时,y 就减少,当 $t=4$ 时,$x=y$,这已经不符合 $0<x<y$ 的条件,所以当 $t>4$ 时,$y<x$.

因此原方程仅有三组满足题设条件的解.

故选(C).

[解 2] 由 $1984=2^6\cdot 31$,则

$$\sqrt{1984}=8\sqrt{31}=\sqrt{31}+7\sqrt{31}=2\sqrt{31}+6\sqrt{31}$$
$$=3\sqrt{31}+5\sqrt{31}.$$

$2\sqrt{31}=\sqrt{124}$, $3\sqrt{31}=\sqrt{279}$, $5\sqrt{31}=\sqrt{775}$,
$6\sqrt{31}=\sqrt{1116}$, $7\sqrt{31}=\sqrt{1519}$.

因而方程有三组解.

故选(C).

31·36 满足 $0 \leqslant x \leqslant y$ 及 $\sqrt{1992}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的不同的整数对 (x,y) 的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

(中国浙江省初中数学竞赛,1993年)

[解] 由 $1992=2^2\cdot 498$(498已不是完全平方数).则方程化为

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{498},$$

方程整数解为(1992,0),(0,1992)或(498,498).

又题设要求 $y \geqslant x \geqslant 0$,则仅有两组适合.

故选(C).

31·37 存在整数 n,使 $\sqrt{p+n}+\sqrt{n}$ 是整数的素数 p

(A) 不存在. (B) 只有一个.

(C) 多于一个,但为有限个. (D) 有无穷多个.

(中国高中数学联赛,1996年)

[解] 设 p 为任意奇素数,且 $p=2k+1$.于是令 $n=k^2$ 则有

$$\sqrt{p+n}+\sqrt{n}=\sqrt{2k+1+k^2}+\sqrt{k^2}=2k+1.$$

所以,每个奇素数都有题设的性质.

故选(D).

31·38 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2009}$ 的正整数解 (x,y) 中,$x+y$ 的最大值是

(A) 1189. (B) 1517. (C) 1657. (D) 1749.

(中国陕西省西安市初中数学竞赛,1990年)

[解1] 由 $2009=49\cdot 41$,则 $\sqrt{2009}=7\sqrt{41}$,

$\therefore$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{41}+6\sqrt{41}$ 或 $2\sqrt{41}+5\sqrt{41}$ 或 $3\sqrt{41}+4\sqrt{41}$,

即 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{41}+\sqrt{1476}$ 或 $\sqrt{164}+\sqrt{1025}$ 或 $\sqrt{369}+\sqrt{656}$,

$\therefore$ $(x,y)=(41,1476)$ 或 $(164,1025)$ 或 $(369,656)$.

则 $(x+y)_{\max}=41+1476=1517.$

故选(B).

[解 2] 由 $\sqrt{2009}=7\sqrt{41}$, 则 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7\sqrt{41}$.

$\therefore\quad x+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{xy}=2009-2\sqrt{xy}$,

$\because\quad x,y$ 为正整数,则 $(\sqrt{xy})_{\min}=\sqrt{41}\cdot 6\sqrt{41}=246$.

$\therefore\quad (x+y)_{\max}=2009-2\cdot 246=1517$.

故选(B).

31·39 方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{336}$ 的整数解(x,y) 的组数是

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

(中国北京市初中数学竞赛,1993 年)

[解] 由题设有$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{21}$,因而满足方程的整数$(x,y)$为

x	0	21	$2^2\cdot 21$	$3^2\cdot 21$	$4^2\cdot 21$
y	$4^2\cdot 21$	$3^2\cdot 21$	$2^2\cdot 21$	21	0

共 5 组解.

故选(D).

31·40 方程 $2^{2x}-3^{2y}=55$ 的整数解的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 有限个,但多于 3.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解] 由 $2^{2x}-3^{2y}=(2^x-3^y)(2^x+3^y)$,且

$$55=5\cdot 11=1\cdot 55.$$

则 $(2^x-3^y)(2^x+3^y)=5\cdot 11$, 注意到 $2^x+3^y>2^x-3^y$,

有 $\begin{cases}2^x-3^y=5,\\2^x+3^y=11;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2^x-3^y=1,\\2^x+3^y=55.\end{cases}$

由前一方程组得解 $x=3,y=1$;后一方程组无解.

故选(B).

31·41 设实数 a,b,c 满足$a+b+c=0$, $abc=1$.则 a,b,c 中正数的个数是

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1990 年)

[解] 由题设 $a+b+c=0$,若其中有正数,则必有负数(因为 $abc=1$,故 a,b,c 中无 0).

又 $abc=1>0$, 则负数个数是 0 或 2. 但由上知,负数个数不能

为 0.

从而,正数个数有 1 个.

故选(C).

31·42　方程 $|xyz|=4$ 的整数解的组数是

(A) 64.　　(B) 48.　　(C) 8.　　(D) 6.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛,1989 年）

[解]　由 $4=1\cdot1\cdot4=1\cdot2\cdot2$,由于 x,y,z 不计次序,则方程的正整数解共有 6 组.

又 x,y,z 均可取正、负值,则方程的整数解有 $6\cdot2^3=48$ 组.

故选(B).

31·43　非零实数组成的有序三元数组 (a,b,c) 具有下述性质:每个数是其他两数之积.这样的数组的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.　　(E) 5.

（第 38 届美国高中数学考试,1987 年）

[解]　由设有　$a=bc,\quad b=ac,\quad c=ab,$

$\therefore\quad a=bc=(ac)(ab)=a^2cb,\quad$ 即 $\quad bc=a^2bc,$

$\because\quad b\neq0,\quad c\neq0$,故 $\quad a^2=1,\quad a=\pm1.$

同理　$b=\pm1,\quad c=\pm1$.注意到 $(-1,-1,-1)$ 不合题设.

因而　$(a,b,c)=(1,1,1)$ 或 $(1,-1,-1)$ 或 $(-1,1,-1)$ 或 $(-1,-1,1)$,共四组.

故选(D).

31·44　方程组 $\begin{cases}x+2y=n\\3x-y=m\end{cases}$ (n,m 都是奇数)的解是整数,那么解 $\begin{cases}x=p\\y=q\end{cases}$ 的奇偶情况是

(A) p,q 都是偶数.　　(B) p,q 都是奇数.

(C) p 是偶数,q 是奇数.　　(D) p 是奇数,q 是偶数.

（第 2 届中国天津市“中华少年杯”数学邀请赛,1988 年）

[解]　由题设方程组可解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{2m+n}{7},\\[2mm] y=\dfrac{3n-m}{7}.\end{cases}$$

$\because$ m, n 都是奇数,

$\therefore$ $2m+n$ 是奇数. 又 7 是奇数,且 x 为整数,则 $x=p$ 是奇数.

仿上分析可知 $y=q$ 是偶数.

故选(D).

31·45 已知 n 是偶数, m 是奇数;同时又知道 x, y 的方程组 $\begin{cases} x-1988y=n \\ 11x+27y=m \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ 是整数,那么

(A) p, q 都是偶数. (B) p, q 都是奇数.

(C) p 是偶数, q 是奇数. (D) p 是奇数, q 是偶数.

("祖冲之杯"初中数学邀请赛,1988 年)

[解] 由于 $1988y$ 是偶数,第一个方程式可视为: $x+$偶数$=$偶数,从而知 p 为偶数,于是 $11x$ 亦为偶数.

第二个方程可视为:偶数$+27y=$奇数,可知 $27y$ 为奇数,即知 q 为奇数.

故选(C).

31·46 若方程 Ⅰ: $x+y+z=46$,其中 x, y, z 均为正整数. 方程 Ⅱ: $x+y+z+w=46$. 其中 x, y, z, w 均为正整数,则

(A) Ⅰ可解成连续整数. (B) Ⅰ可解成连续偶数.

(C) Ⅱ可解成连续整数. (D) Ⅱ可解成连续偶数.

(E) Ⅱ可解成连续奇数.

(第 11 届美国高中数学考试,1960 年)

[解] 若设 $x=y-1$, $z=y+1$,则 Ⅰ 变为 $3y=46$, y 不是整数,故(A)不真.

若设 $x=y-2$, $z=y+2$,则 Ⅰ 变为 $3y=46$, y 不是整数,故(B)不真.

若设 $y=x+1$, $z=x+2$, $w=x+3$,则 Ⅱ 变为 $4x+6=46$,得 $x=10$, $y=11$, $z=12$, $w=13$. 合理.

故选(C).

31·47 若 m 为一正整数,且直线 $13x+11y=700$ 及 $y=mx-1$ 相交于一整点,则 m 的值只可以是

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7. (E) 4,5,6,7 中的一个.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[**解**]　将 $y = mx - 1$ 代入 $13x + 11y = 700$,有

$$x = \frac{711}{13 + 11m} = \frac{3^2 \cdot 79}{13 + 11m}.$$

又 x 为整数,则 $13 + 11m$ 为分子的因子,即 $13 + 11m$ 只能是下列诸数之一:

$$1,\quad 3,\quad 3^2,\quad 79,\quad 3 \cdot 79,\quad 3^2 \cdot 79.$$

令　$13 + 11m = d$,有 $m = \frac{d - 13}{11}$.因 $m > 0$,故 $d > 13$,这样只须考虑上面六个数中的后三个.

(1)若 $d = 79$,则 $m = \frac{d - 13}{11} = \frac{66}{11} = 6$;

(2)若 $d = 3 \cdot 79 = 237$,则 $m = \frac{237 - 13}{11}$ 不是整数;

(3)若 $d = 3^2 \cdot 79 = 711$,则 $m = \frac{711 - 13}{11}$ 亦不是整数.

综上仅 $m = 6$ 一解.

故选(C).

31.48　方程组 $\begin{cases} xy + yz = 63, \\ xz + yz = 23 \end{cases}$ 的正整数解的组数是

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(中国初中数学联赛,1995 年)

[**解**]　第 2 个方程即 $(x + y)z = 23$.因 $x + y \geqslant 2$,且 23 为质数,故 $z = 1, x + y = 23$.

因此 $y = 23 - x$,以此代入第 1 个方程,得

$$(23 - x)(x + 1) = 63,$$

即

$$x^2 - 22x + 40 = 0.$$

解得　$x_1 = 2$, $x_2 = 20$, 方程组的两组解为:

$$x_1 = 2,\quad y_1 = 21,\quad z_1 = 1;$$

$$x_2 = 20,\quad y_2 = 3,\quad z_2 = 1;$$

故选(B).

31·49　满足方程组 $\begin{cases} xy + xz = 255 \\ xy + yz = 31 \end{cases}$, 的正整数组 (x, y, z) 的组数是

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1993 年)

[解] 题设方程组可化为

$$\begin{cases} x(y+z)=5\cdot 3\cdot 17, & ① \\ y(x+z)=1\cdot 31. & ② \end{cases}$$

由设方程解为正整数,则 $x+z>1$,由②知 $y=1$,且 $x+z=31$.方程组可化为

$$\begin{cases} x=3, \\ y+z=85, \\ y=1, \\ x+z=31; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5, \\ y+z=51, \\ y=1, \\ x+z=31; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=15, \\ y+z=17, \\ y=1, \\ x+z=31; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=17, \\ y+z=15, \\ y=1, \\ x+z=31. \end{cases}$$

从后两方程组可求得(15,1,16),(17,1,14) 两组解.

故选(B).

31·50 满足方程组 $\begin{cases} ab+bc=44 \\ ac+bc=23 \end{cases}$ 的三元正整数组(a,b,c)的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第 35 届美国高中数学考试,1984 年)

[解] 由题设及要求方程组的正整数解,因此由第二个方程 $ac+bc=23$,有 $c(a+b)=23$.

同时注意到23是素数,所以可以断定式左两因子中必有一个是1,另一个是23.

又因为 a 和 b 都要求的是正整数,故 $a+b>1$,因此必然有 $c=1$ 及 $a+b=23$.

将 $c=1$ 和 $b=23-a$ 代入第一个方程,整理后得到一个一元二次方程:

$$a^2-22a+21=0.$$

它的两根分别是 $a=1$ 和 $a=21$.可得相应的 b 值是22和2.因此原方程组的正整数解(a,b,c)只可能是(1,22,1)和(21,2,1).将它们

代入原方程组检验,均满足.

故选(C).

31·51 满足下面等式

$|a+b|+c=19$ 且 $ab+|c|=97$

的有序整数组的个数为

(A)0. (B)4. (C)6. (D)10. (E)12.

(第48届美国高中数学考试,1997年)

[解] (1)当 $c\geqslant 0$ 时,$|c|=c$,则由题设两式得

$$|a+b|+78-ab=0. \qquad (*)$$

i)若 $a+b\geqslant 0$,$(*)$式化为 $(a-1)(b-1)=79$.

得 $\begin{cases}a=2,\\b=80\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=80,\\b=2.\end{cases}$ 代入题设式与 $c\geqslant 0$ 相悖.

ii)若 $a+b<0$,$(*)$式化为 $(a+1)(b+1)=79$.

得 $\begin{cases}a=0,\\b=78\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=78,\\b=0.\end{cases}$ 代入题设式与 $c\geqslant 0$ 相悖.

(2)$c<0$ 时,$|c|=-c$,则由题设两式得

$$|a+b|+ab-116=0 \qquad (**)$$

i)若 $a+b\geqslant 0$,$(**)$化为 $(a+1)(b+1)=117=9\times 13=3\times 39=1\times 117$.得

$(a,b)=(8,12)$或$(12,8)$或$(2,38)$或$(38,2)$或$(0,116)$或$(116,0)$.

代入题设式可得

$(a,b,c)=(8,12,-1)$或$(12,8,-1)$或$(2,38,-21)$或$(38,2,-21)$或$(0,116,-97)$或$(116,0,-97)$.

ii)若 $a+b<0$,则$(**)$化为 $(a-1)(b-1)=117=(-9)\times(-13)=(-3)\times(-39)=(-1)\times(-117)$.得

$(a,b)=(-8,-12)$ 或 $(-12,-8)$ 或 $(-2,-38)$ 或 $(-38,-2)$ 或 $(0,-116)$ 或 $(-116,0)$

代入题设式可得

$(a,b,c)=(-8,-12,-1)$ 或 $(-12,-8,-1)$ 或 $(-2,-38,-21)$ 或 $(-38,-2,-21)$ 或 $(0,-116,-97)$ 或 $(-116,0,-97)$.

综合(1)(2) 可得共 12 组(a,b,c)适合题设.

故选(E).

31·52 满足方程组

$$\begin{cases}x+2y+4z=12,\\xy+4yz+2xz=22,\\xyz=6.\end{cases}$$

的有序三重数组(x,y,z)的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E) 6.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解] 设 $u=\frac{x}{2}$, $v=y$ 和 $w=2z$,那么题设方程组化为

$$\begin{cases}u+v+w=6,\\uv+vw+uw=11,\\uvw=6.\end{cases}$$

考虑多项式 $p(t)=(t-u)(t-v)(t-w)$, 其中 (u,v,w) 是上述联立方程的一组解. 若 $p(t)=t^3-6t^2+11t-6$, 则 (u,v,w) 是 $p(t)=0$ 的解.

另一方面,若 $p(t)=0$ 的解按任何次序列成三重数组,则这个三重数组是上面联立方程的一组解.

因为 $p(t)=(t-1)(t-2)(t-3)$,所以$(1,2,3)$的六个排列是关于 u,v 和 w 的联立方程的解.因而已知的关于 x,y 和 z 的方程有 6 组解.

故选(E).

31·53 满足方程组

$$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2-z^2=31,\\-x^2+6yz+2z^2=44,\\x^2+xy+8z^2=100.\end{cases}$$

的有序三重数组(x,y,z)的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2.

(D) 一个大于 2 的有限数. (E) 无限多.

(第 31 届美国高中数学考试,1980 年)

[解] 把已知三个方程相加并重新整理可得

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2+6yz+9z^2)=175,$$

或
$$(x-y)^2+(y+3z)^2=175.$$

因为一个完全平方除以4时余数只能是0或1,因而两个完全平方的和除以4时只能有余数0,1或2.

但上面的方程式右 $175\div4=43\cdots\cdots3$,因而方程无解.

故选(A).

第三十二章 数字和与计数

第1节 数与数字和，积

32·1 四个数中，每三个相加得到的和分别为 180，197，208，222. 那么这四个数中最大的是

(A) 77. (B) 83. (C) 89.

(D) 95. (E) 不确定.

（第41届美国高中数学考试，1990年）

[解] 设这四个数分别为 x,y,z,w，依题设有

$$3(x+y+z+w)=180+197+208+222,$$

所以
$$x+y+z+w=269,$$

则最大的数为 $269-180=89$.

故选(C).

32·2 某三位数的数字自左至右依次为 h,t 与 u，而 $h>u$ 当数字次序反过来所成的数被原先的数减时，若个位数字之差为4，则另二位数字自右到左为

(A) 5与9. (B) 9与5. (C) 求不出来.

(D) 5与4. (E) 4与5.

（第6届美国高中数学考试，1955年）

[解] 设原数为 $100h+10t+u$，反序数为 $100u+10t+h$，其差为(注意 $u<h$)：

$$\begin{array}{rrr} 100h & +10t & +u \\ -)\ 100u & +10t & +h \\ \hline 100(h-u-1) & +90 & +(10+u-h) \end{array}$$

由 $10+u-h=4$, 即 $h-u=6$, 知该数为 594.

故选(B).

32·3 若一整数为两位数,等于其数字和的 k 倍,若两数字互换,则此新数为其数字和的

(A) $(9-k)$ 倍. (B) $(10-k)$ 倍. (C) $(11-k)$ 倍.

(D) $(k-1)$ 倍. (E) $(k+1)$ 倍.

(第 3 届美国高中数学考试,1952 年)

[解] 设该整数十位数字为 u,个位数字为 v,依题意有

$$\begin{cases} 10u+v=k(u+v) & ① \\ 10v+u=x(u+v). & ② \end{cases}$$

这里 x 为互换数字后新数为其数字和的倍数.

由上两式可解得 $x=11-k$.

故选(C).

32·4 为了给一本书的各页标上页码,印刷工人用了 3289 个数码,那么这本书的页数是

(A) 1095. (B) 1096. (C) 1097. (D) 非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛,1987 年)

[解] 注意下面的事实:

1 ~ 9 页共用 9 个数码;

10 ~ 99 页共用 $2\cdot 90=180$ 个数码;

100 ~ 999 页共用 $3\cdot 900=2700$ 个数码;

总计 $9+180+2700=2889$ 个数码.

这样,还剩下 $3289-2889=400$ 个数码,它能排出 100 个四位数字,即 1000 ~ 1099.

故选(D).

32·5 N 为 1992 位自然数,其中数字 1,2,3,…,8 在 N 中出现的次数都是 9 的倍数.如果各位数字之和为 N_1,N_1 各位数字之和为 N_2,N_2 各位数字之和为 N_3,则 N_3 的值是

(A) 3.　　(B) 6.　　(C) 9.　　(D) 12.

(中国浙江省初中数学竞赛,1993 年)

[解]　由设知该数中数字 1,2,…,8 出现的次数都是 9 的倍数,又 9 是其自身的倍数,则知 N 的各位数字和是 9 的倍数.

且 N 的各位数字和 N_1 不大于 $1992 \cdot 9 = 17928$, 它是一个可被 9 整除的五位数.

N_1 的各位数字和 N_2 小于 $5 \cdot 9 = 45$, 它是一个可被 9 整除的两位数.

因而 N_2 的各位数字和 N_3 小于 $2 \cdot 9 = 18$, 它又可被 9 整除,则 $N_3 = 9$.

故选(C).

32·6　在 50 和 350 间所有末位是 1 的整数之和是

(A) 5880.　(B) 5539.　(C) 5208.　(D) 4877.　(E) 4566.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解]　首项为 a,公差是 d 的前 n 项和 S_n 和通项 a_n 公式为

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + a_n) \quad 和 \quad a_n = a + (n-1)d,$$

当 $a = 51$, $d = 10$,得到

$$a_n = 341 = 51 + (n-1) \cdot 10, \quad 得 \quad n = 30,$$

$$S_n = 51 + 61 + \cdots + 341 = \frac{1}{2}n(51 + 341) = 196n,$$

$$\therefore \qquad S = 15 \cdot 392 = 5880.$$

故选(A).

32·7　在数列 1,2,3,…,10000 中,其所有数的各位数字的和为

(A) 180001.　(B) 154756.　(C) 45001.

(D) 154755.　(E) 270001.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

[解]　考虑 0,1,2,3,…,9999 每数皆乘以 10^{-4},这样不会改变其数字和.这时这些数变成

$$0.0000,\ 0.0001,\ 0.0002,\ \cdots,\ 0.9999.$$

显然十个数字 0,1,2,…,9 在小数点后不同数位出现的次数都相同,即 1000 次,故每个数字在四位小数中共出现 4000 次.

因而上面小数各位数字和是

$$(1+2+3+\cdots+9)\cdot 4000 = 180000.$$

在考虑的数列中,由于加上了 0 而去掉了 10000,因而原数字和应为

$$180000 + 1 = 180001.$$

故选(A).

32·8　当 n 为正整数时,$(10^{4n^2+8}+1)^2$ 的十进制数字之和是

(A) 4.　(B) $4n$.　(C) $2+2n$.　(D) $4n^2$.　(E) n^2+n+2

(第 26 届美国高中数学考试,1975 年)

[解]　对于 k 是任何正整数时,$10^k+1 = 100\cdots01$,并且

$$\begin{array}{r} 100\cdots01 \\ \times)\quad 100\cdots01 \\ \hline 100\cdots01 \\ +)\quad 100\cdots01 \\ \hline 100\cdots0200\cdots01 \end{array}$$

∴　所求数字之和是 $1+2+1=4$.

故选(A).

32·9　用十进位制表示时,整数 a 由 1985 个 8 组成,而整数 b 由 1985 个 5 组成.问整数 $9ab$ 的十进位表示式中各位数字之和是

(A) 15880.　　(B) 17856.　　(C) 17865.

(D) 17874.　　(E) 19851.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　由设知　$9\mid 9ab$,　又　$1+5+8+8=22$,　$1+9+8+5+1=24$,知(A),(E)不妥.

又　$17856 = 1984\cdot 9$,　$17865 = 1985\cdot 9$,$17874 = 1986\cdot 9$.

又

$$\begin{aligned} 9ab &= 9\cdot \underbrace{88\cdots8}_{1985个}\cdot\underbrace{55\cdots5}_{1985个} \\ &= 9\cdot 8\cdot 5\cdot \underbrace{11\cdots1}_{1985个}\cdot\underbrace{11\cdots1}_{1985个} = \underbrace{44\cdots4}_{1985个}\cdot\underbrace{99\cdots9}_{1985个}\cdot 10 \\ &= \underbrace{44\cdots4}_{1985个}\cdot(10^{1985}-1)\cdot 10 \\ &= (\underbrace{44\cdots4}_{1985个}\cdot 10^{1985} - \underbrace{44\cdots4}_{1985个})\cdot 10 \\ &= \underbrace{44\cdots4}_{1984个}3\underbrace{55\cdots5}_{1984个}60, \end{aligned}$$

因而其数字和为　$4\cdot1984+5\cdot1984+3+6=9\cdot1985$.

故选(C).

32·10　若$1+2+3+\cdots+k$之和为N^2,且$N<100$,则k可能的值为

(A) 1.　　(B) 1和8.　　(C) 8.

(D) 8和49.　　(E) 1,8和49.

(第7届美国高中数学考试,1956年)

[解]　由$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$,由题设

$$\frac{k(k+1)}{2}=N^2,\quad 即\quad k^2+k-2N^2=0.$$

当$k=1$时,　$\frac{1\cdot2}{2}=1=1^2$;

当$k=8$时,　$\frac{8\cdot9}{2}=36=6^2$;

当$k=49$时,　$\frac{49\cdot50}{2}=(7\cdot5)^2=35^2$.

故选(E).

32·11　设$S=2+4+6+\cdots+2N$,其中N是使得$S>10^6$的最小正整数,则N的数字和为

(A) 27.　(B) 12.　(C) 6.　(D) 2.　(E) 1.

(第19届美国高中数学考试,1968年)

[解]　由设　$S=2+4+6+\cdots+2N=N(N+1)$.

当　$N=999$时,　$N(N+1)=999000<10^6$,

当　$N=1000$时,　$N(N+1)=1001000>10^6$.

故　$N=1000$是使$N(N+1)=S>10^6$的最小正整数.

故选(E).

32·12　除以7余5,除以5余2,除以3余1的所有三位数的和是

(A) 2574.　(B) 3681.　(C) 4249.　(D) 4436.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1988年)

[解]　设满足条件"除以7余5,除以5余2,除以3余1"的某数为N,又x,y,z为N分别被7,5,3除得的整数商,则有

$$7x+5=5y+2=3z+1=N,\qquad ①$$

即
$$\begin{cases}5y-7x=3, & ②\\ 3z-5y=1. & ③\end{cases}$$

由②得 $$y=\frac{7x+3}{5}=x+\frac{2x+3}{5}.$$

令 $$\frac{2x+3}{5}=t,\quad 则\quad y=x+t,$$

且 $$x=\frac{5t-3}{2}=2t-1+\frac{t-1}{2}.$$

令 $$\frac{t-1}{2}=n,\quad 则\quad t=2n+1.$$

又 $x=2t-1+n=5n+1,\quad y=x+t=7n+2,$

由③有 $$z=\frac{5y+1}{3}=\frac{35n+11}{3}=11n+4+\frac{2n-1}{3}.$$

为使 z 为整数,取 $n=2$,得 $z=27$.代入①,得 $N=82$.

因为7,5,3的最小公倍数是105,所以满足题目的数可用 $82+105k$(k 是整数)形式表示.

实际上当 $k=1,2,3,4,5,6,7,8$ 时,$82+105k$ 为三位数.于是得所求的和为

$82\cdot8+105\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=4436.$

故选(D).

注 我国古代算书《孙子算经》曾载有问题:"今有物不知数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二.问物几何?"解这类"物不知数"的问题,明朝数学家程大位在《算法统宗》中介绍了一首歌诀:

三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,

七子团圆正半月,除百零五便得知.

用这首歌诀来求本题中的 n,有

$$n=5\cdot15+2\cdot21+1\cdot70=187.$$

其一般表示法是 $187+105m$(m 为整数).

32·13 三个连续自然数的平方和比它们的和的8倍还多2.则此三个自然数的平方和为

(A) 77. (B) 149. (C) 194. (D) 245.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解] 设此三个连续自然数分别为 $x-1,x,x+1$,依题意有

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=8[(x-1)+x+(x+1)]+2,$$

即 $$3x^2+2=24x+2,\quad 或\quad x^2-8x=0.$$

得　$x = 8$ 或 0(舍去).

则三数平方和为　$7^2 + 8^2 + 9^2 = 194$.

故选(C).

32·14　若一列数除了首末两数外,每个数都等于它两旁紧邻的两数之和,则称之为具有"波动性质".例如2,3,1,-2,-3便行,因$3 = 2 + 1$,　$1 = 3 - 2$,　$-2 = 1 - 3$.已知下式中每个 * 都代表一个数,并且满足"波动性质".

1* * * * * * * * * * * * * * * * * * 1

则这 18 个 * 所代表的数的和为

(A) -64.　　(B) 64.　　(C) 18.　　(D) 0.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解]　设左起第一个 * 代表的数为 x,则易推得顺次前 6 个 * 分别为　x,　$x - 1$,　-1,　$-x$,　$1 - x$,　1.

第 7 个 * 又为 x,这样第 7 ~ 12;第 13 ~ 18 个 * 重复上述六个数字.

因此,该 18 个 * 代表的数之和为

$$3[x + (x - 1) - 1 - x + (1 - x) + 1] = 0.$$

故选(D).

32·15　在下列方程中,每个字母代表在十进位制中一个不同的数字,$(YE) \cdot (ME) = TTT$,在左面的乘积中 YE 比 ME 小.那么 $E + M + T + Y$ 的和等于

(A) 19.　(B) 20.　(C) 21.　(D) 22.　(E) 24.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解]　由设 $TTT = T \cdot (111) = T \cdot 3 \cdot 37$,并且 T 等于E^2 的最末位数字.今 $ME > YE$,知 ME 必须包含因子 37,则它可能是 37 或 74.

后面这个数的可能性被排除掉,因为这时最小可能的 $YE = 14$,得到 $14 \cdot 74 = 1036$,超过 $999 = TTT$.

则 $ME = 37$,并且由 $YE = Y7$ 可被 3 整除,故它是 27.

于是　$27 \cdot 37 = 999$.

故所求的和为　$E + M + T + Y = 7 + 3 + 9 + 2 = 21$.

故选(C).

32·16　数 $N=2^{12}\cdot5^{8}$ 的数字位数是

(A) 9.　　(B) 10.　　(C) 11.　　(D) 12.　　(E) 20.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解]　重新整理因式

$$N=2^{4}(2^{8}\cdot5^{8})=16\cdot10^{8}=1600000000,$$

它是一个十位数.

故选(B).

第 2 节　计　数

32·17　在整数 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 中,设素数的个数为 x,偶数的个数为 y,完全平方数的个数为 z,合数的个数为 u.则 $x+y+z+u$ 的值为

(A) 17.　　(B) 15.　　(C) 13.　　(D) 11.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　在题设整数中,素数有 2,3,5,7 共 4 个;偶数有 0,2,4,6,8 共 5 个;完全平方数有 0,1,4,9 共 4 个;合数有 4,6,8,9 共 4 个.

总计　$4+5+4+4=17.$

故选(A).

32·18　形如 34689 这样的正整数称为"位升数",即每位上的数码皆比其相邻的左边位上的数码大.现有 $C_9^5\binom{9}{5}=126$ 个五位的"位升数",今将它们从小到大排列,则其中第 97 个"位升数"中不会含有的数字是

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 6.　　(D) 7.　　(E) 8.

(第 48 届美国高中数学考试,1997 年)

[解]　以 1,2 打头的五位"位升数"情况如下:

1 * * * * 型 有 $C_8^4=70$ 个;

2 3 * * * 型 有 $C_6^3=20$ 个;

2 4 5 * * 型 有 $C_4^2=6$ 个.

共计　$70+20+6=96$ 个.这样第 97 个"位升数"是 24678,即不

含 5.

故选(B).

32·19　在所有六位数中,各位数字之和等于 52,这样的六位数有

(A) 2 个.　　(B) 12 个.　　(C) 21 个.　　(D) 31 个.

(中国浙江省初中数学竞赛,1991 年)

[解]　六位数中最大的是 999999,其各位数字和为 54.这样数字和为 52 的六位数数字只能有 ①5 个 9 与 1 个 7,②4 个 9 与 2 个 8 两种.

而 9,9,9,9,9,7 可组成 6 个不同的六位数;

又 9,9,9,9,8,8 可组成 15 个不同的六位数(两个 8 在一起的情况有 5 个,两个 8 之间夹两个 9 的情况有 3 个,两个 8 之间夹一个或三个 9 的情况有 6 个,两个 8 之间夹四个 9 的情况有 1 个)

此外,六个数字和为 52 再无其他情形.

因而所求六位数有　$6+15=21$ 个.

故选(C).

32·20　在十进制数中,小于 100 且个位数字是 7 的素数的个数为

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 6.　　(D) 7.　　(E) 8.

(第 38 届美国高中数学考试,1987 年)

[解]　以 7 结尾小于 100 的素数有

$$7,\ 17,\ 37,\ 47,\ 67,\ 97.$$

共 6 个.

故选(C).

32·21　在小于 50 的正整数中,含有奇数个正整数因子的整数个数是

(A) 3.　　(B) 5.　　(C) 7.　　(D) 9.　　(E) 11.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解 1]　由爱拉斯托色筛法知小于 50 的正整数的素因子,最大不超过$\sqrt{50}$.

这样,这些因子是 1,2,3,5,7.

而具有奇数个正整数因子的数应为除因子 1 之外,包括其本身还须有偶数个因子.因而这样的整数应是上述素数的偶次幂,即

$2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 2^2\cdot 3^2,\ 2^4$;

此外还有 1,　共计 7 个.

故选(C).

[**解 2**] 有奇数个正整数因子的自然数必为完全平方数.

小于 50 的正整数中,共有 7 个完全平方数($\sqrt{50}\approx 7$).

故选(C).

32·22 满足不等式 $10^4 \leqslant A \leqslant 10^5$ 的整数 A 的个数是 $x \cdot 10^4 + 1$,则 x 的值是

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

(中国上海市初中数学竞赛,1986 年)

[**解**] 由 $10^5 - 10^4 = 9 \cdot 10^4$,则

$10^4 \leqslant A \leqslant 10^5$ 的整数 A 的个数是 $9 \cdot 10^4 + 1$, 即 $x = 9$.

故选(A).

32·23 在前 100 个正整数中,可以被 2,3,4,5 都整除的数的个数有

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[**解 1**] 不超过 100,可被 5 整除的正整数是 5,10,15,…100.其中只有 20,40,60,80 可被 4 整除.

这其中仅有 60 可被 3 整除.60 可被 4 整除自然可被 2 整除.

所以满足此条件的数仅有一个.

故选(B).

[**解 2**] 2,3,4,5 的最小公倍数是 60.所以可被 2,3,4,5 整除的数只能都是 60 的倍数.

因而在 $1 \sim 100$ 中只有 60 满足题目要求.

故选(B).

32·24 从 1 到 1992 的自然数中是 3 的倍数,但不是 2 或 5 的倍数的数的个数有

(A) 664. (B) 465. (C) 266. (D) 200.

(第 9 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1992 年)

[**解**] 在 $1 \sim 1992$ 的自然数中,能被 3 整除者有 $\left[\frac{1992}{3}\right] = 664$ 个,能被 3 和 2 整除者有 $\left[\frac{1992}{3 \cdot 2}\right] = 332$ 个;能被 3 和 5 整除者有 $\left[\frac{1992}{3 \cdot 5}\right]$

$=132$ 个;能被 3,2 和 5 同时整除者有 $\left[\frac{1992}{5\cdot3\cdot2}\right]=66$ 个.这里$[a]$表示不超过 x 的最大整数.

故 1 ~ 1992 中是 3 的倍数,但不是 2 或 5 的倍数者有

$$664-332-132+66=266(\text{个}).$$

故选(C).

32·25 在 1,2,3,…,101 这 101 个整数中能同时被 3 与 5 除都余 1 的数共有

(A) 6 个. (B) 7 个. (C) 8 个. (D) 9 个.

(第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年)

[解] 显然,能同时被 3 和 5 除后余 1 的数(注意 3,5 都是素数)可表为

$$3\cdot5k+1=15k+1\quad(k=0,1,2\cdots),$$

则在前 101 个自然数中有 1,16,31,46,61,76,91 等共 7 个数符合题设.

故选(B).

32·26 设 n 是 100 到 200 之间的自然数,则满足 $7n+2$ 是 5 的倍数的 n 的个数为

(A) 10. (B) 11. (C) 20. (D) 21.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 若 $7n+2$ 是 5 的倍数,则其个位数字只能是 0 或 5,从而知 $7n$ 的个位数字必为 8 或 3,这样 n 的个位数字只能是 4 或 9.

亦即 n 只能是 104, 109, 114, 119, …, 194, 199 共 20 个.

故选(D).

32·27 所有 4 位数中,能同时被 2,3,5,7 和 11 整除的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 因 2,3,5,7,11 两两互素,则同时能被它们整除者必能被 $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310$ 整除.

在 4 位数中能被 2310 整除者有 2310, 4620, 6930, 9240 这 4 个数.

故选(D).

32·28 小于 1000 而不能被 5 和 7 整除的正整数的个数为

(A) 688. (B) 686. (C) 684. (D) 658. (E) 630.

(第 17 届美国高中数学考试,1966 年)

[解] 若$[x]$表示不超过 x 的最大整数,注意到:

小于 n(自然数)的正整数有 $n-1$ 个;

小于 n 且被 d 整除的正整数个数不超过 $\left[\frac{n-1}{d}\right]$.

这样小于1000的999个正整数中,不能被5和7整除的正整数个数为

$$999-\left[\frac{999}{5}\right]-\left[\frac{999}{7}\right]+\left[\frac{999}{5\cdot7}\right]=999-199-142+28=686.$$

注意能被 $5\cdot7$ 整除的正整数被重复减去两次.

故选(B).

32·29　从 1 到 1000 这 1000 个自然数中,既不能被 4 也不能被 6 整除的自然数个数为

(A) 416.　　(B) 584.　　(C) 625.　　(D) 667.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解]　由 $\left[\frac{1000}{4}\right]=250$,　$\left[\frac{1000}{6}\right]=166$.

则 $1\sim1000$ 中有 250 个自然数可被 4 整除,且有 166 个可被 6 整除.

而 4,6 的最小公倍数为 12,且 $\left[\frac{1000}{12}\right]=83$,则 $1\sim1000$ 中有 83 个自然数可同时被 4,6 整除.

这样所求自然数的个数为

$$1000-166-250+83=667.$$

故选(D).

32·30　大于 10,小于 100 的整数,写成十进位制时,它们的数字交换后,比原数增加 9 的个数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 8.　　(D) 9.　　(E) 10.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解]　设 t 和 u 分别为这种数的十位和个位数字.由设当它的数字交换后比原数增加 9,亦即

$$9=(10u+t)-(10t+u)=9(u-t),$$

即　$u=t+1$.

又　$0\leqslant t\leqslant9$,　$1\leqslant u\leqslant9$,　则得到 8 个解依次是

$$\{12,\ 23,\ \cdots,\ 89\}.$$

故选(C).

32·31　在 1000 和 9999 之间,四位不同数字组成的整数,其第一位数字与最后一位数字差的绝对值是 2 的个数为

(A) 672.　(B) 784.　(C) 840.　(D) 896.　(E) 1008.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解]　先考虑数集{0,1,…,9}中有多少对数的差为 ±2.

显然共 16 对:(0,2),(2,0),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),…,(7,9),(9,7).其中除了(0,2)之外,都可以用来构成所需的数.

又因为要求组成的四位数的各位数字均不相同,所以中间两位数可能出现的情形共有　$8 \cdot 7 = 56$ 种.

因而题中所要求的数共有　$15 \cdot 56 = 840$ 个.

故选(C).

32·32　一个两位自然数中间插入一个一位数(包括0)则变成一个三位数.有些两位数中间插入一个一位数后所变成的三位数恰好是原来两位数的 9 倍.这样的两位数的个数有

(A) 1.　(B) 4.　(C) 10.　(D) 超过 10.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1993 年)

[解]　由设若“三位数”是“两位数”的9倍,则这样的“三位数”与“两位数”之和应是“两位数”的 10 倍.

因而这样的“两位数”个位数码只是 0 和 5.

又因插入的一位数应小于“两位数”的个位数码,这样“两位数”的个位数码只能是 5,而插入的个位数只能是 0,1,2,3,4.

而“三位数”是一个 9 的倍数 $\Longleftrightarrow$ 它的各位数字和可被 9 整除.

这样插入的数只能是 0,1,2,3,而对应的“两位数”是 45,35,25 和 15 四个.

故选(B).

32·33　一个六位数$\overline{a1988b}$能被 12 整除,这样的六位数的个数是

(A) 9.　(B) 12.　(C) 15.　(D) 20.

(中国湖北省武汉市初中数学竞赛,1988 年)

[解]　由 $12 = 3 \cdot 4$,则$\overline{a1988b}$可被 3 和 4 整除.这样

$$3 \mid (a + 1 + 9 + 8 + 8 + b),$$

即　$$3 \mid (26 + a + b),\ 或\ 3 \mid (27 + a + b - 1),$$

因而　$$3 \mid (a + b - 1).$$

又　$4 \mid \overline{8b}$,则 $b = 0,4$ 或 8.这样可有下表

b	0	4	8
a	1,或 4,或 7	3,或 6,或 9	2,或 5,或 8

即有 9 个这样的六位数.

故选(A).

32·34 一个六位数$\overline{a1991b}$能被 12 整除,这样的六位数共有

(A) 4 个. (B) 6 个. (C) 8 个. (D) 12 个.

(浙江省初中数学竞赛,1992 年)

[解] 令 $k=\overline{a1991b}$, 由设 $12\mid k$, 则$3\mid k$, 且$4\mid k$.

$4\mid k$, 则k的末两位$\overline{1b}$能被k整除, 知 $b=2$或6.

$3\mid k$, 则$k\mid(a+1+9+9+1+b)$, 即 $k\mid(a+b+20)$,

若 $b=2$, 则a可为 2,5,8;

若$b=6$, 则a可为 1,4,7.

综上,这类数共 6 个.

故选(B).

32·35 一个两位数,交换它的十位数字与个位数字所得的两位数是原来数的$\frac{7}{4}$倍,则这样的两位数有

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 4 个. (D) 无数多个. (E) 0 个.

(中国初中数学联赛,1984 年)

[解] 设原数的十位数字为a,个位数字为b,由题设有$\frac{7}{4}(10a+b)=10b+a$, 即 $2a\doteq b$.

$\because$ $1\leqslant a$, $b\leqslant 9$,

$\therefore$ $a=1,2,3,4$, 则 $b=2,4,6,8$.

符合条件的数是:12,24,36,48 共四个.

故选(C).

32·36 任意调换五位数 12345 各数位上的数字位置, 所得的五位数中素数个数有

(A) 4. (B) 8. (C) 12. (D) 0.

(中国江苏省初中数学竞赛,1986 年)

[解] 注意到 $1+2+3+4+5=15$,其可被 3 整除.则不论这些数字位置如何,它们组成的五位数皆为 3 的倍数,即无素数.

故选(D).

32·37 一个分数的分子与分母都是正整数,且分子比分母小1.若分子和分母都减去1,则所得分数为小于$\frac{6}{7}$的正数.则满足上述条件的分数共有

(A) 5个. (B) 6个. (C) 7个. (D) 8个.

(第2届"希望杯"全国数学邀请赛,1991年)

[解] 设a为正整数,则该分数可表为$\frac{a}{a+1}$.

依题意 $0<\frac{a-1}{a}<\frac{6}{7}$, 即 $1<a<7$,

故 $a=2,3,4,5,6$,这样符合题设的分数有

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{6}{7}.$$

故选(A).

32·38 1至1990中使得$\frac{N^2+7}{N+4}$不是既约分数的数的个数有

(A) 0. (B) 86. (C) 90. (D) 104. (E) 105.

(第41届美国高中数学考试,1990年)

[解] 由 $\frac{N^2+7}{N+4}=\frac{N^2-16+23}{N+4}=N-4+\frac{23}{N+4}$,

$\because$ 23是素数,若$\frac{N^2+7}{N+4}$不是既约分数,则$23\mid(N+4)$.

而当 $1\leqslant N\leqslant 1990$ 或 $5\leqslant N+4\leqslant 1994$时,能满足$23\mid(N+4)$者有

$$\left[\frac{1994}{23}\right]-\left[\frac{5}{23}\right]=86(\text{个}).$$

故选(B).

32·39 符号R_k代表一个整数,它的十进位制表示是一列k个1,例如,$R_3=111$, $R_5=11111$,等等,以R_4除R_{24},商$Q=\frac{R_{24}}{R_4}$是一个整数,它的十进位制表示中只含数字1和0,Q中零的个数是

(A) 10. (B) 11. (C) 12. (D) 13. (E) 15.

(第44届美国高中数学考试,1993年)

[解] $\frac{R_{24}}{R_4}=\frac{9R_{24}}{9R_4}=\frac{10^{24}-1}{10^4-1}=\frac{(10^4)^6-1}{10^4-1}$

$=10^{20}+10^{16}+10^{12}+10^8+10^4+1$

$=100010001000100010001.$

故选(E).

32·40　分子为1,分母为大于1的自然数的分数叫单位分数.若将$\frac{1}{8}$表示成不同的两个单位分数之和,则所有可能的表示组数有

(A) 1组.　　(B) 2组.　　(C) 3组.　　(D) 4组.

(安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1990年)

[解1]　显然若$\frac{1}{8}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,　则　$x>8$,　$y>8$.

令 $x=8+m$,　$y=8+n$,　$m\neq n$,　$m,n\in N$.

即　$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+m}+\frac{1}{8+n}$,　或　$\frac{1}{8}=\frac{16+m+n}{(8+m)(8+n)}$,

化简上式有　$mn=64=1\cdot 64=2\cdot 32=4\cdot 16$,

即　$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+1}+\frac{1}{8+64}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72},$$

且　$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+2}+\frac{1}{8+32}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}.$$

又　$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+4}+\frac{1}{8+16}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}.$$

共三种不同表示.

故选(C).

[解2]设 $\frac{1}{8}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,且$x\neq y$,这里$x,y\in N$,及$x>1$,$y>1$.

不妨设 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$,且 $\frac{1}{x}$,$\frac{1}{y}$ 必有其一大于$\frac{1}{16}$,则有

$$8<y<16,\quad x>16.$$

上述方程可化为　$x=\frac{8y}{y-8}$,　将 $y=9,10,11,\cdots,15$ 依次代入,得三组整数解

$$(x,y)=(72,9)\text{ 或 }(40,10)\text{ 或 }(24,12).$$

故选(C).

32·41　30^4 的相异正整数因子，除去 1 和 30^4 以外还有

(A) 100 个.　　(B) 125 个.　　(C) 123 个.

(D) 30 个.　　(E) 这些都不对.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

[解]　把 30 写成一个素数因子的乘积，$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$，我们得到

$$30^4 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4.$$

30^4 的因子恰好是 $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ 形式的数，其中 i,j,k 是满足 $0 \leqslant i,j,k \leqslant 4$ 的整数.

所以 30^4 的相异的因子有 $5^3 = 125$ 个，除去 1 和 30^4 以外有 123 个.

故选(C).

32·42　设某个 n 位正整数的 n 个数字是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列，如果它的前 k 个数字所组成的整数能被 k 整除，其中 $k = 1,2,\cdots,n$，那么就称这个 n 位数为一个“好数”. 例如，321 就是一个三位“好数”. 因为 1 整除 3，2 整除 32，3 整除 321. 六位“好数”的个数是

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　(E) 4.

（第 42 届美国高中数学考试，1991 年）

[解]　设六位数为$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$，其中 $a_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$，$i = 1,2,3,4,5,6$.

依题意有

$1 \mid a_1$，$2 \mid \overline{a_1a_2}$，$3 \mid \overline{a_1a_2a_3}$，$4 \mid \overline{a_1a_2a_3a_4}$，

$5 \mid \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$，$6 \mid \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

显然，a_2,a_4,a_6 为偶数，且 a_5 为 5，这样 a_1,a_3 只能为 1 或 3.

又由　$3 \mid \overline{a_1a_2a_3}$ 知 $3 \mid (a_1 + a_2 + a_3) = 4 + a_2$，

故　$a_2 = 2$.

此数可能为　$\overline{123a_45a_6}$　或　$\overline{321a_45a_6}$.

即　123456，　123654，　321456，　321654.

经验证 123654 和 321654 合题意.

故选(C).

32·43　一个七位电话号码 $d_1d_2d_3—d_4d_5d_6d_7$，如果前面的数码 $d_1d_2d_3$ 顺序与 $d_4d_5d_6$ 或 $d_5d_6d_7$ 相同（可能三者都一样）则称之为“可记忆的”. 假如 d_i 可取数码 0,1,2,3,…,8,9 中的一个，则不同的“可记忆的”号码个数是

(A) 19810. (B) 19910. (C) 19990. (D) 20000. (E) 20100.

(第 49 届美国高中数学考试,1998 年)

[**解**] $d_1d_2d_3$ 形式的号码有 $10^3 = 1000$ 种.

$d_1d_2d_3$ 与 $d_4d_5d_6$ 相同时,d_7 可有 10 种不同的形式;

$d_1d_2d_3$ 与 $d_5d_6d_7$ 相同时,d_4 可有 10 种不同的形式;

而 $d_1d_2d_3$ 与 $d_4d_5d_6$、$d_5d_6d_7$ 相同时,显然有

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7,$$

此时亦有 10 种不同形式.

由容斥定理知,所求号码个数是

$1000 \times 10 + 1000 \times 10 - 10 = 19990.$

故选(C).

32·44 对于正整数 N,如果把它的数从右向左排列所得到的数恰好等于 N,那么就称 N 为一个回文数. 1991 年是本世纪中惟一具备以下两个性质的年份:

(a) 它是一个回文数;

(b) 它可以分解为一个二位回文质数和一个三位回文质数的乘积.

从 1000 年到 2000 年这 1000 年中年数具有性质(a) 和(b)(包括 1991 年) 的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[**解**] 由题设具有性质(a) 的回文数年份有:

1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991.

又 $1001 = 11 \cdot 91,\quad 1111 = 11 \cdot 101,\quad 1221 = 11 \cdot 111,$

$1331 = 11 \cdot 121,\quad 1441 = 11 \cdot 131,\quad 1551 = 11 \cdot 141,$

$1661 = 11 \cdot 151,\quad 1771 = 11 \cdot 161,\quad 1881 = 11 \cdot 171,$

$1991 = 11 \cdot 181.$

注意到 $3 \mid 111,\quad 3 \mid 141,\quad 3 \mid 171,\quad$ 且 $11 \mid 121,\quad 7 \mid 161,$

同时,101,131,151,181 为素数.

则具备性质(a) 和(b) 的年份数共 4 个.

故选(D).

选择题卷

32·45　对于任意大于1的整数，大于 $n!+1$ 而小于 $n!+n$ 的质数的数目为

(A) 0.　(B) 1.　(C) $\frac{n}{2}$，当 n 是偶数时，$\frac{n+1}{2}$，当 n 是奇数时.

(D) $n-1$.　　(E) n.

（第20届美国高中数学考试，1969年）

[解]　由 $k \mid (n!+k)$，　$k=2,3,\cdots,n-1$.

故在 $n!+1$ 与 $n!+n$ 之间的全部整数（不含端点）皆为合数.

故选(A).

32·46　若设

$$N = 69^5 + 5 \cdot 69^4 + 10 \cdot 69^3 + 10 \cdot 69^2 + 5 \cdot 69 + 1.$$

正整数是 N 的因数的个数是

(A) 3.　　(B) 5.　　(C) 69.　　(D) 125.　　(E) 216.

（第37届美国高中数学考试，1986年）

[解]　注意到$(a+b)^5$ 展开式系数为1,5,10,10,5,1，则

$$N = (69+1)^5 = 70^5 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5.$$

从而 N 的正整数因子个数为

$$(5+1)(5+1)(5+1) = 6^3 = 216(\text{个}).$$

故选(E).

32·47　设 $f(x)=x^2+3x+2$，又设 $S=\{0,1,2,\cdots,25\}$. 若 $s \in S$，且 $f(s)$ 是6的倍数，这样 s 的个数有

(A) 25.　　(B) 22.　　(C) 21.　　(D) 18.　　(E) 17.

（第15届美国高中数学考试，1964年）

[解]　由 $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$，则因在 S 中使 $s+2$ 为6的倍数者有

$$s = 4+6k \quad (k=0,1,2,3).$$

又在 S 中使 $s+1$ 为6的倍数者有

$$s = 5+6k \quad (k=0,1,2,3).$$

此外 S 中使 $s+2$ 为3的倍数，$s+1$ 为偶数或 $s+2$ 为偶数，$s+1$ 为3的倍数者有

前者　$s=1+6k$　$(k=0,1,2,3,4)$.

后者　$s=2+6k$　$(k=0,1,2,3)$.

综上 S 中有下面 17 个元素可使 $f(s)$ 是 6 的倍数:

$$4, 10, 16, 22;\quad 5, 11, 17, 23;$$
$$2, 8, 14, 20;\quad 1, 7, 13, 19, 25.$$

故选(E).

32·48 在 1 到 1990 之间的整数 n,能使 x^2+x-3n 可分解为两个整系数的一次因式的乘积.这样的 n 的个数为

(A) 1990.　　(B) 75.　　(C) 50.　　(D) 44.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛,1990 年)

[解] 设 $x^2+x-3n=(x+a)(x+b)$,其中 a,b 为整数.

于是 $$a+b=1,\quad ab=-3n.$$

则 a,b 异号,不妨设 $a>0$.

又 $n=-\frac{ab}{3}=\frac{a(a-1)}{3}$, 则在 $1\leqslant n\leqslant 1990$ 中,a 可取

$$3, 4; 6, 7; 9, 10; \cdots; 72, 73; 75, 76.$$

共 50 种取法.

故选(C).

32·49 设一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根为 98,99.在二次函数 $y=x^2+bx+c$ 中,若 x 取 0,1,2,3…,100,则 y 的值能被 6 整除的个数是

(A) 33.　　(B) 34.　　(C) 65.　　(D) 67.

(中国四川省初中数学竞赛,1991 年)

[解] 由设知 $y=(x-98)(x-99)$,要使$6\mid y$,只有下面两种情形:

(1)$x-98=3k$, 且 $x-99=3k-1\quad(k\in Z)$.

由 $$0\leqslant x\leqslant 100,$$

有 $$-98\leqslant 3k\leqslant 2,$$

即 $$-32\leqslant k\leqslant \frac{2}{3},$$

故 k 可取的值有 33 个.

(2)$x-99=3k$, 且 $x-98=3k+1\quad(k\in Z)$.

由 $$0\leqslant x\leqslant 100,$$

有 $$-99\leqslant 3k\leqslant 1,$$

即 $$-33 \leqslant k \leqslant \frac{1}{3},$$

故 k 可取的值有 34 个.

综上,k 可取的值共 $33+34=67$ 个.

故选(D).

32·50 设 b 取 $1\sim 11$ 之间的偶数,c 取任意自然数,则可以组成有两个不等实根的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的个数是

(A) 50 个. (B) 55 个. (C) 57 个. (D) 58 个.

(中国北京市初中数学竞赛,1992 年)

[解] $1\sim 11$ 之间的偶数有 2,4,6,8,10 五个.

又 方程判别式 $\Delta=b^2-4c>0$,若设 $b=2k$,则

$4k^2-4c>0$,即 $k^2>c$ $(k=1,2,3,4,5)$.

这样可有下表,即满足 $k^2>c$ 的 c 的个数表:

k 值	1	2	3	4	5
c 的个数	0	3	8	15	24

则总共有 $$0+3+8+15+24=50(\text{个}).$$

故选(A).

32·51 关于 x 的方程 $6x^2=(2m-1)x+m+1$ 有一根 α,满足不等式:$-1988\leqslant\alpha\leqslant 1988$,且使得 $\frac{3}{5}\alpha$ 为整数,则 m 取值个数为

(A) 6627. (B) 3977. (C) 2385. (D) 1989.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年)

[解] 原方程可变形为 $(3x-m-1)(2x+1)=0$.

故 $$\alpha=\frac{1}{3}(m+1).$$

代入 $-1988\leqslant\alpha\leqslant 1988$,且注意 $\frac{3}{5}\alpha$ 为整数有

$$-1192\frac{4}{5}\leqslant\frac{3}{5}\alpha=\frac{1}{5}(m+1)\leqslant 1192\frac{4}{5},$$

则 $\frac{3}{5}\alpha$ 可取 $-1192\sim 1192$ 之间 2385 个值,从而 m 也可取 2385 个值.

故选(C).

32·52 已知多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

其中 n 为非负整数，a_0 为正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为整数，且满足 $n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = 3$. 则这样的多项式个数有

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 6.　　(D) 不存在.

（中国四川省高中数学竞赛，1993 年）

[解]　由于 a_0 是正整数，$n, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|$ 是非负整数，则 $n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 3$ 有如下的 5 组解：

$$\begin{cases} n = 0, \\ a_0 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 1, \\ a_0 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 1, \\ a_0 = a_1 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 1, \\ a_0 = 1, \\ a_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 2, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

即所求多项式为　$3x^0$，$2x$，$x + 1$，$x - 1$，x^2 共 5 个.

故选(B).

第 3 节　整边三角形

32·53　已知 x, y 都是正整数. 那么，三边是 x, y 和 10 的三角形有

(A) 3 个.　　(B) 4 个.　　(C) 5 个.　　(D) 无数多个.

（第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年）

[解]　对于 $x = y > 5$ 的任何正整数，均可与 10 一起构成三角形的三边.

故选(D).

32·54　能使 $2m - 1, 4m + 5, 20 - m$ 这三个数作三角形三边的整数 m 共有

(A) 2 个.　　(B) 6 个.　　(C) 12 个.　　(D) 18 个.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛，1990 年）

[解]　由三角形边的不等式有

$$\begin{cases} (2m - 1) + (20 - m) > 4m + 5, \\ (2m - 1) + (4m + 5) > 20 - m. \end{cases}$$

化简后可得 $m < \frac{14}{3}$ 和 $m > \frac{16}{7}$,则$\frac{16}{7} < m < \frac{14}{3}$,满足这两个不等式的 m 的值只能是 3 或者 4.

故选(A).

32·55 设不等边三角形(各边皆彼此不等)的各边之长都是整数,周长小于 13.那么,这种三角形的个数共有

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(中国北京市初中数学竞赛,1991 年)

[解] 设三角形三边分别为 a,b,c,且 $a < b < c$,由题设有

$a + b + c < 13$, 且 $a,b,c \in N$, 这样

当 $a + b + c = 12$ 时, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$;

当 $a + b + c = 11$ 时, $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$;

当 $a + b + c = 10$ 时, 无解适合题设;

当 $a + b + c = 9$ 时, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

当 $a + b + c \leqslant 8$ 时, 无解适合题设.

故选(C).

32·56 三角形的三边分别为正整数 a,b,c, 且 $a \leqslant b \leqslant c$.若已知 $c = 6$,那么满足上述条件的以 a,b,c 为三边所能构成的三角形个数是

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12.

(中国湖北省武汉市初中数学竞赛,1988 年)

[解] 由设 $c = 6$,且 $a \leqslant b \leqslant c$,又 $a + b > c$. 则有下表

a	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6
b	6	5	6	4	5	6	4	5	6	5	6	6
c	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

共 12 组.

故选(D).

32·57 三角形三边 a,b,c 的长都是整数,且 $a \leqslant b \leqslant c$.若 $b = 10$,那么这样的三角形共有

(A) 10 个. (B) 55 个. (C) 10^2 个. (D) 无数个.

(中国江苏省苏州市高中数学竞赛,1990 年)

[解] 考虑一般的情形,即 $b=n$ 时,则 $a=k\ (1\leqslant k\leqslant n)$, 且 $b\leqslant c<a+b$,

则 $n\leqslant c<n+k$, 此时 c 的值恰有 k 个, 即 $c=n,n+1,\cdots,n+k-1$,于是可有

a	b	c	三角形个数
1	n	n	1
2	n	$n,\ n+1$	2
3	n	$n,\ n+1,\ n+2$	3
⋮	⋮	⋮	⋮
k	n	$n,\ n+1,\cdots,\ n+k-1$	k
⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	$n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n-1$	n

即此时三角形总数为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

当 $b=10$ 时,三角形个数为 $\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(10+1)=55$ 个,

故选(B).

32·58 在锐角 $\triangle ABC$ 中,三个内角的度数都是素数,则这样的三角形

(A) 只有一个,且为等腰三角形.

(B) 至少有二个,且都为等腰三角形.

(C) 只有一个,但不是等腰三角形.

(D) 至少有一个,其中有非等腰三角形.

(第 2 届中国天津市"中华少年杯" 数学邀请赛,1987 年)

[解] 设 $\triangle ABC$ 三个内角度数分别为 x,y,z,因而

$$x+y+z=180,$$

又 x,y,z 全为素数,则除素数 2 外其余素数全为奇数,三个奇数和为偶数是不可能的.

故 x,y,z 中有一个为 2. 不妨设为 x.

于是 $y+z=178$,又 y,z 为小于 90 的素数,故仅有 $y=z=89$ 满足上设.

又若 y,z 其一小于 89. 则另一个不小于 90,这不合题意.

因而,仅(2, 89, 89)一组数适合.

故选(A).

32·59　一个直角三角形三边的长度都是整数,且构成一个等差数列.那么其中一边的长度可能是

(A) 22.　(B) 58.　(C) 81.　(D) 91.　(E) 361.

(第32届美国高中数学考试,1981年)

[解]　设此直角三角形三边长为 $s-d$, s, $s+d$.由勾股定理

$$(s-d)^2+s^2=(s+d)^2,$$

即　$$s(s-4d)=0.$$

因为 $s\neq 0$,　所以 $s-4d=0$.　即 $s=4d$.

因而它三边的长为 $3d,4d,5d$,即这些边长必须能被3,或4,或5整除.

满足上述要求者仅81(可被3整除).

故选(C).

32·60　不等边 $\triangle ABC$ 的两条高长度是4和12.若它的第三条高的长度也是整数,则它最大可是

(A) 4.　(B) 5.　(C) 6.　(D) 7.　(E) 不是以上各数.

(第37届美国高中数学考试,1986年)

[解1]　设 $AB=c$,由三角形面积公式有

$12c=4\cdot AC$,　即 $AC=3c$.

$\because$ $AC-AB<BC<AC+AB$,



即　$2c<BC<4c$,

又　$S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot c=\frac{1}{2}BC\cdot h$,

则　$\frac{12c}{4c}<h<\frac{12c}{2c}$,　即 $3<h<6$,

$\therefore$ $h=4$ 或 5,

但 $h\neq 4$(题设三角形不等边),则 $h=5$.

故选(B).

[解2]　设 h_a,h_b,h_c 为 $\triangle ABC$ 三边 a,b,c 上的高,则以 h_a,h_b,h_c 为高的三角形存在 $\Longleftrightarrow \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}$(这里 $h_a\geqslant h_b\geqslant h_c>0$).

这样有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{h},\\[2mm] \dfrac{1}{h} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12},\end{cases}$$

解得　$3 < h < 6$，　又 h 为整数,则　$h_{\max} = 5$.

故选(B).

[解3]　设BC长为a,且其边上的高为h,$\triangle ABC$面积为s.由题设有　$AB = \dfrac{4}{\sin A}$，　$AC = \dfrac{12}{\sin A}$，

再由余弦定理有

$$a^2 = \frac{16}{\sin^2 A} + \frac{144}{\sin^2 A} - \frac{96\cos A}{\sin^2 A} = \frac{160 - 96\cos A}{\sin^2 A}.$$

$\because$
$$2s = \frac{48}{\sin A} = ah.$$

$\therefore$　$h^2 = \dfrac{48^2}{a^2\sin^2 A} = \dfrac{48^2}{160 - 96\cos A} = \dfrac{72}{5 - 3\cos A} < \dfrac{72}{5 - 3} = 36$,

则　$h < 6$,　且　$h \neq 4$(题设不等边),

$\therefore$　　$h = 5$.

故选(B).

32·61　直角三角形有一条直角边的长是11,另外两边的长也是自然数,那么它的周长是

(A) 132.　　(B) 121.　　(C) 120.　　(D) 非上述答案.

(中国上海市初中数学竞赛,1984年)

[解]　设直角三角形两直角边分别是11和b,且斜边长为c,由勾股定理有

$$11^2 + b^2 = c^2,\quad \text{即}\quad (c + b)(c - b) = 121.$$

$\because$　$c - b < c + b$,且121只有两种分解$1 \cdot 121$和$11 \cdot 11$.

$\therefore$　$\begin{cases}c + b = 121,\\ c - b = 1,\end{cases}$　解得　$\begin{cases}c = 61,\\ b = 60.\end{cases}$

则该三角形周长为　$11 + 60 + 61 = 132$.

故选(A).

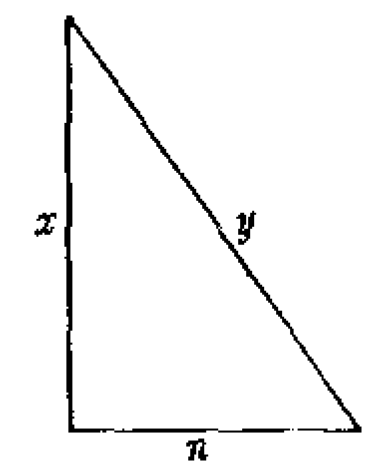
32·62　直角三角形有一条直角边的长是素数n,另外两边长是某两个自然数,那么它的周长是

(A)　$n^2 + 1$.　　　　　(B)　$n^2 - 1$.

(C) n^2+n.　　　　　(D) 以上答案都不对.

(第 2 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1985 年)

[解]　设该直角三角形另一直角边和斜边长分别为 x 和 y,由勾股定理有



$$y^2-x^2=n^2,\quad 即\quad (y-x)(y+x)=n^2.$$

因为 n 是素数,则有 $\begin{cases} y-x=1, \\ y+x=n^2. \end{cases}$

解得　$x=\dfrac{n^2-1}{2},\quad y=\dfrac{n^2+1}{2}.$

此时该三角形周长为　$n+\dfrac{n^2-1}{2}+\dfrac{n^2+1}{2}=n+n^2.$

故选(C).

32·63　直角三角形的斜边 c 和直角边 a 是连续整数,则另一直角边的平方为

(A) ca.　(B) $\dfrac{c}{a}$.　(C) $c+a$.　(D) $c=a$.　(E) 非上述答案.

(第 7 届美国高中数学考试,1956 年)

[解]　设 $a=n,\quad c=n+1$,则有

$(n+1)^2-n^2=2n+1=(n+1)+n=a+c.$

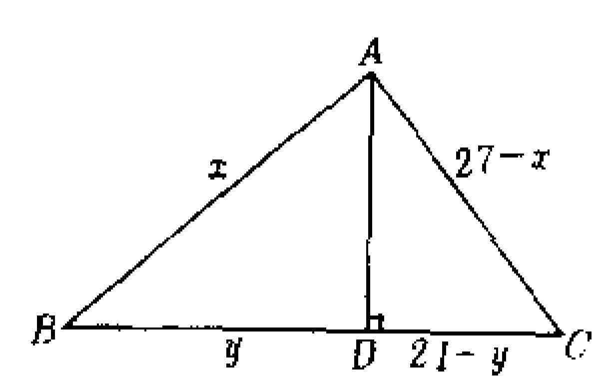
故选(C).

32·64　一个三角形的边长和面积都是整数,一边长为 21,周长为 48,则最短边长为

(A) 8.　　(B) 10 .　　(C) 12.　　(D) 14.　　(E) 16.

(第 14 届美国高中数学考试,1963 年)

[解]　设三角形三顶点为 A,B,C,且设 BC 边长为 21(如图),又设其三边长分别为



$$21,x,48-21-x=27-x.$$

作 BC 边上的高 AD,且令 $BD=y$,则

$$AD^2=x^2-y^2=(27-x)^2-(21-y)^2,$$

化简得　$48-9x+7y=0$,　则　$x=5+\dfrac{3+7y}{9}.$

能使 x 为整数的最小整数 $y=6$,且相应的 $x=10$.

此外,当 $y=15$ 时,$x=17$,且 $AC=27-x=10$.

当 $y>15$ 且使 x 为整数的 y 值,不合题意(求出相应值后,不能为三角形的三边).

故选(B).

32·65　两个相似三角形的面积差为 18 平方英尺, 较大三角形与较小三角形面积的比是一整数的平方.较小三角形的面积(按平方英尺计)是一整数,且一边为 3 英尺,则较大三角形的对应边长的英尺数为

(A) 12.　　(B) 9.　　(C) $6\sqrt{2}$.　　(D) 6.　　(E) $3\sqrt{2}$.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　设两三角形面积分别为 S 和 $S+18$,且较大三角形对应边长为 x.由设及相似形性质有

$$\frac{S+18}{S}=\frac{x^2}{3^2}=\left(\frac{x}{3}\right)^2,$$

解得

$$S=\frac{18}{\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2-1\right]}.$$

由设 $\frac{x}{3}$ 是整数,则 x 为 3 的倍数;

又 S 是整数,则 $\left(\frac{x}{3}\right)^2-1$ 是 18 的一个因子.

故 $\left(\frac{x}{3}\right)^2$ 只能是 2,3,4,7,10,19.其中仅有 4 为完全平方数,

因而 $\left(\frac{x}{3}\right)^2=4$, 即 $\frac{x}{3}=2$(已舍负值), 亦即 $x=6$.

故选(D).

32·66　直角三角形一条直角边为 7, 另两条边长都是整数.则它的面积可能是

(A) 165.　　(B) 84.　　(C) 108.　　(D) 不能确定.

(“智慧杯”初中数学竞赛,1991 年)

[解]　若直角三角形两直角边长分别为 a, b,又斜边长为 c,则其面积

$$S=\frac{1}{2}ab,$$

$\because$　$a=7$,又在(A),(B),(C) 中可被 7 整除者惟有 84.

若令 $a=7$，则由 $84=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot b$，得 $b=24$.

又　$a^2+b^2=7^2+24^2=625=25^2$，　$\therefore$　$c=25$.

故选(B).

32·67　直角 $\triangle ABC$ 的三边长都是正整数，且其中一条直角边的长是方程 $2x^2-23x+11=0$ 的根.这个三角形的面积是

(A) $\frac{121}{2}$.　　(B) 121.　　(C) 330 .　　(D) 660.

（中国江苏省初中数学竞赛，1986 年）

[解]　解 $2x^2-23x+11=0$ 得 $x_1=\frac{1}{2}$(舍之)，$x_2=11$.

设 $\triangle ABC$ 另一直角边长为 a，斜边长为 c，由勾股定理有

$c^2-a^2=11^2$，　即　$(c-a)(c+a)=121$.

$\because$　$c-a\neq c+a$，　且　$c-a<c+a$，

则　$\begin{cases}c+a=121,\\ c-a=1,\end{cases}$　解得　$\begin{cases}c=61,\\ a=60.\end{cases}$

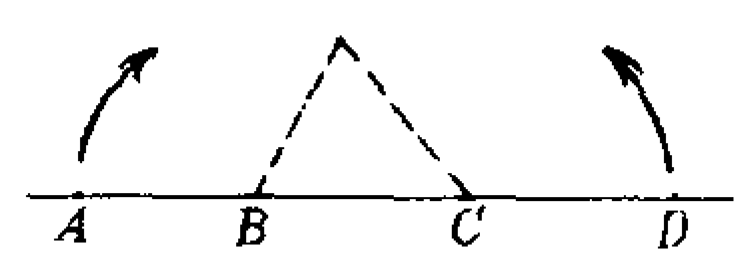
$\therefore$　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 60\cdot 11=330$.

故选(C).

32·68　点 A,B,C,D 按所给次序位于一条直线上且没有重合点.线段 AB,AC 和 AD 的长分别为 x,y 和 z.若线段 AB,CD 可以分别围绕 B,C 点旋转，直到点 A 和 D 重合，形成一个有确定面积的三角形，那么以下三个不等式中：

Ⅰ. $x<\frac{z}{2}$；　Ⅱ. $y<x+\frac{z}{2}$；

Ⅲ. $y<\frac{z}{2}$，



必须被满足的是

(A) 仅 Ⅰ.　　(B) 仅 Ⅱ.　　(C) 仅 Ⅰ 与 Ⅱ.

(D) 仅 Ⅱ 与 Ⅲ.　　(E) Ⅰ，Ⅱ 与 Ⅲ.

（第 30 届美国高中数学考试，1979 年）

[解]　因为三角形的一边小于其他两边和，则有

$$x < y - x + z - y = z - x, \quad \text{即} \quad x < \frac{z}{2};$$

$$y - x < x + z - y, \quad \text{即} \quad y < x + \frac{z}{2};$$

$$z - y < x + y - x, \quad \text{即} \quad y > \frac{z}{2}.$$

所以只有 Ⅰ 和 Ⅱ 两个不等式正确.

故选(C).

32·69　若六边形的周长等于 20, 各边长都是整数,且以它的任意三条边为边都不能构成三角形,那么,这样的六边形

(A) 不存在.　　(B) 只有一个.

(C) 有限个,但不只一个.　　(D) 有无穷多个.

(中国初中数学联赛,1990 年)

[解]　若能找到 6 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_6$,使满足:

① $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 20$;

② $a_1 \leqslant a_2$, $a_1 + a_2 \leqslant a_3$, $a_2 + a_3 \leqslant a_4$, $a_3 + a_4 \leqslant a_5$, $a_4 + a_5 \leqslant a_6$;

③ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6$.

则以 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 为边长的 6 边形,即可符合要求.

事实上,对任选三整数 $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$ 必有 $a_i + a_j \leqslant a_k$,可见此 6 边形的任三边不能构成一三角形.

现取 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$. 则 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 满足全部条件.

故这样的六边形至少存在一个,又由 n 边形($n \leqslant 4$) 的不稳定性,即知这样的六边形有无穷多个.

故选(D).

第三十三章 高斯函数与进制

第1节 整数的尾(个位)数$\langle x \rangle$

33·1 数2137^{753}的个位数字为

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7. (E) 9.

(第12届美国高中数学考试,1961年)

[解] 令$\langle a\rangle$表示整数a的个位数字.显然若a的个位数字为b,则$\langle a\rangle=\langle b\rangle$,且$\langle a^n\rangle=\langle b^n\rangle$,($n$为自然数).

又 $\langle 7^0\rangle=1$, $\langle 7^1\rangle=7$, $\langle 7^2\rangle=9$, $\langle 7^3\rangle=3$.

易证明 $\langle 7^{4n+r}\rangle=\langle 7^r\rangle$,即7方幂尾数以指数周期为4循环.

从而 $\langle 2137^{753}\rangle=\langle 2137^{4\times188+1}\rangle=\langle 2137^1\rangle=7$.

故选(D).

注 关于自然数a^n的尾数(个位数)随n的变化有如下结论:

(1) 若a的个位数字为b,则$\langle a^n\rangle=\langle b^n\rangle$;

(2) 以0,1,5,6结尾的自然数的任何次方,尾数仍为0,1,5,6;

(3) 2,3,4,7,8,9的n次方尾数如下表:

a^n的尾数表

n \ a	2	3	4	7	8	9
$4k+1$	2	3	4	7	8	9
$4k+2$	4	9	6	9	4	1
$4k+3$	8	7	4	3	2	9
$4k$	6	1	6	1	6	1

33·2　$19^{89}+89^{19}$ 的个位数字是

(A) 0.　　(B) 2.　　(C) 8.　　(D) 9.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解]　n 为奇数时,9^n 的末位数字是 9,记作 $\langle 9^n \rangle = 9$.

这样　$\langle 19^{89}+89^{19}\rangle = \langle 19^{89}\rangle + \langle 89^{19}\rangle = \langle 9+9\rangle = 8$.

故选(C).

33·3　差 $1984^{1984}-1$ 的个位上的数字是

(A) 3.　　(B) 4.　　(C) 5.　　(D) 6.

(中国吉林省七市、地初中数学竞赛,1984 年)

[解]　注意到若设 $\langle a\rangle$ 表示自然数 a 的个位数,则

$$\langle 1984^{1984}\rangle = \langle 4^{1984}\rangle.$$

而　$\langle 4^1\rangle = 4,\ \langle 4^2\rangle = 6,\ \langle 4^3\rangle = 4,\ \langle 4^4\rangle = 6,\cdots$

即　n 为奇数时,$\langle 4^n\rangle = 4$;n 为偶数时,$\langle 4^n\rangle = 6$.

从而　$$\langle 4^{1984}\rangle = 6.$$

故　$\langle 1984^{1984}\rangle = \langle 4^{1984}\rangle = 6$.　即 $1984^{1984}-1$ 的个位数为 5.

故选(C).

33·4　和 $1988^{1989}+1989^{1988}$ 的个位数字是

(A) 9.　　(B) 7.　　(C) 5.　　(D) 3.

(中国江苏省初中数学竞赛,1989 年)

[解]　记 $\langle a\rangle$ 为 a 的个位数字.

则　$\langle 1988^{1989}\rangle = \langle 8^{1989}\rangle = \langle 8^{4\cdot 497+1}\rangle = \langle 8^1\rangle = 8$.

又 $\langle 1989^{1988}\rangle = \langle 9^{1988}\rangle = \langle 9^{4\cdot 497}\rangle = \langle 9^4\rangle = 1$,

则　$\langle 1988^{1989}+1989^{1988}\rangle = \langle 1988^{1989}\rangle + \langle 1989^{1988}\rangle = 8+1=9$.

故选(A).

33·5　和 $3^{1991}+1991^3$ 的值用十进制表示时,末位数字是

(A) 8.　　(B) 4.　　(C) 2.　　(D) 0.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解]　$3^{1991} = 3^{4\cdot 497+3} = 81^{497}\cdot 3^3$,其个位数字为 7.

又 1991^3 个位数字为 1,则 $3^{1991}+1991^3$ 的末位数字是 8.

故选(A).

33·6　若 n 是自然数,则 $n^{9999}-n^{5555}$ 的末位数字

(A) 恒为 0.　　(B) 有时为 0,有时非 0.

(C) 与 n 的末位数字相同.　　(D) 无法确定.

（第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年）

[解] 设$\langle n\rangle$表示 n 的末位数字,则

$$\langle a-b\rangle=\begin{cases}\langle a\rangle-\langle b\rangle, & 若\langle a\rangle>\langle b\rangle;\\ 10+\langle a\rangle-\langle b\rangle, & 若\langle a\rangle<\langle b\rangle.\end{cases}$$

又 $$\langle a^{4k+r}\rangle=\langle a^r\rangle,$$

从而由 $9999=4\cdot1111+5555$,

则 $$\langle n^{9999}\rangle=\langle n^{5555}\rangle,$$

即该数末位数字为0.

故选(A).

33·7 $2^{2^{1989}}+1$ 末位数是

(A) 3.　　(B) 5.　　(C) 7.　　(D) 9.

（中国湖北省黄冈地区高中数学竞赛,1989年）

[解] 由 $2^{1989}=2^3\cdot2^{1986}=8k=4k_1+4$,

而 2^n 的末位数以2,4,8,6为周期循环,

$\therefore\ 2^{2^{1989}}+1$ 末位数字是7.

故选(C).

33·8 $3^{1001}7^{1002}13^{1003}$ 的个位数字是

(A) 1.　　(B) 3.　　(C) 5.　　(D) 7.　　(E) 9.

（第34届美国高中数学考试,1983年）

[解1] 考虑3,7,13的前 n 次幂的个位数字出现的规律如下表:

a	3	7	13
a^2	9	49	169
a^3	27	343	…7
a^4	81	…1	…1
a^5	243	…7	…3

从中不难看出它们的个位数字的变化规律,即都是以周期4循环出现.

设$\langle n\rangle$为 n 的个位数字,因为4整除100,所以

$$\langle3^{1001}\rangle=\langle3^1\rangle=3,\quad\langle7^{1002}\rangle=\langle7^2\rangle=9,$$

因而 $$\langle13^{1003}\rangle=\langle13^3\rangle=7.$$

所以 $$\langle3^{1001}7^{1002}13^{1003}\rangle=\langle3\cdot9\cdot7\rangle=9.$$

故选(E).

[解 2] 可以看到 $7\cdot 13=91$ 及 $3^4=81$,所以它们的任何次幂的个位数字都是 1.

这样 $$3^{1001}7^{1002}13^{1003}=3\cdot 13\cdot 81^{250}\cdot(7\cdot 13)^{1002}$$
$$=3\cdot 13\cdot 81^{250}\cdot 91^{1002},$$

显然它的个位数字是 9.

故选(E).

33·9 2025^{1989} 的末两位数字是

(A) 15. (B) 25. (C) 45. (D) 55.

(第 1 届"五羊杯"初中数学竞赛,1989 年)

[解] 以 25 结尾的整数的任何次方幂末两位数字皆为 25.

故选(B).

33·10 数 2^{1984} 具有下列性质中的

(A) 是 597 位数. (B) 可被 1984 整除. (C) 个位数字是 4.

(D) 个位数字是 6. (E) 小于 3^{1200}.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 由 $\lg 2^{1984}=1984\lg 2=1984\cdot 0.3010=597.184$,

则 2^{1984} 是 598 位数,知(A)不真.

又 $1984=2^6\cdot 31$,而 2^{1984} 中无 31 的因子,故(B)不真.

注意到 $2^{1984}=2^{496\cdot 4}=16^{496}$,其个位数字是 6.

故选(D).

33·11 已知 a 是方程 $x^2-5x+1=0$ 的一个根,那么 a^4+a^{-4} 的末位数字是

(A) 3. (B) 5. (C) 7. (D) 9.

(第 6 届"缙云杯"初中数学邀请赛,1989 年)

[解] 由设 α 为方程的根有 $\alpha^2-5\alpha+1=0$.

即 $\alpha^2+1=5\alpha$, 或 $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}=5$.

又 $$\alpha^4+\alpha^{-4}=(\alpha^2+\alpha^{-2})^2-2$$
$$=[(\alpha+\alpha^{-1})^2-2]^2-2$$
$$=\left[\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)^2-2\right]^2-2$$

$$=(25-2)^2-2=23^2-2,$$

其末位数字是 7.

故选(C).

33·12 若 $x^2-13x+1=0$,则 x^4+x^{-4} 的个位数字是

(A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

(中国初中数学联赛,1992 年)

[解] 由 $x^2-13x+1=0$,知 $x\neq 0$,且其两根积为 1,即互为倒数,因而有 $$x+x^{-1}=13.$$

因此 $$x^2+x^{-2}=167.$$

于是 $$x^4+x^{-4}=167^2-2.$$

所以 x^4+x^{-4} 的个位数字为 7.

故选(D).

33·13 若 $N=\dfrac{1987^{4(\sqrt{3}+2)^{1987}+1988}}{1987^{(\sqrt{3}+2)^{1988}+(\sqrt{3}+2)^{1986}}}$,那么 N 的末位数字是

(A) 1. (B) 3. (C) 7. (D) 9.

(中国四川省初中数学竞赛,1988 年)

[解] 由指数运算性质又有:

$$\begin{aligned}N&=1987^{4(\sqrt{3}+2)^{1987}+1988-(\sqrt{3}+2)^{1988}-(\sqrt{3}+2)^{1986}}\\&=1987^{(\sqrt{3}+2)^{1986}[4(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}+2)^2-1]+1988}\\&=1987^{1988}=1987^{497\cdot 4},\end{aligned}$$

则 N 的末位数字为 1(7^k 末位数字依 7,9,3,1 为周期循环).

故选(A).

33·14 在实数范围内,设 x 为

$$\left(\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\dfrac{1}{1-a}}+\frac{5a+1}{1-a}\right)^{1988},$$

则 x 的个位数字是

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

(中国初中数学联赛,1988 年)

[解] 要使两个根式都有意义,必须

$(a-2)(|a|-1)\geqslant 0$, 且 $(a-2)(1-|a|)\geqslant 0$.

但 $$(a-2)(1-|a|)=-(a-2)(|a|-1),$$
所以 $$(a-2)(|a|-1)=0,$$
解得 $a_1=2,\quad a_2=1,\quad a_3=-1.$

若 $a_1=2$，则 $1+\frac{1}{1-a}=0$；

若 $a_2=1$，则 $1-a=0$，均使分母为零.

因而仅有 $a_3=-1$ 适用.此时，

$$\begin{aligned}x&=\left[\frac{5\cdot(-1)+1}{1-(-1)}\right]^{1988}\\&=(-2)^{1988}\\&=2^{4\cdot497}=16^{497}.\end{aligned}$$

所以 x 的个位数是6(或由 2^n 的末位数字依4为周期随 n 的变化而变化求得).

故选(D).

33·15 对 $n>1$，$x_n=\frac{2^n}{x_{n-1}}$. 则积 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{200}$ 的末位数字是

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

(第8届"缙云杯"初中数学邀请赛,1991年)

[解] 由题设有 $x_n\cdot x_{n-1}=2^n$,或 $x_{n-1}x_n=2^n$.则

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{200}&=(x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{199}x_{200})\\&=2^2\cdot2^4\cdot\cdots\cdot2^{200}\\&=2^{2+4+\cdots+200}=2^{10100}\\&=4^{5050},\end{aligned}$$

∵ 4的方幂的尾数依4,6,4,6,… 周期地变化.

∴ 4^{5050} 尾数(末位数字)为6.

故选(C).

33·16 设 $S=1!+2!+3!+\cdots+99!$,则 S 的个位数是

(A) 9.　　(B) 8.　　(C) 5.　　(D) 3.　　(E) 0.

(第19届美国高中数学考试,1968年)

[解] 注意到 $k!$ 当 $k\geqslant5$ 时皆有2,5的因子,故它们乘积为10的倍数.

这样 S 的个位数与 $1!+2!+3!+4!$ 的个位数相同,即$(1+2+6$

$+24)$ 的个位数，它为 3.

故选(D).

33·17　已知下面四组 x 和 y 的值中，有且只有一组 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是整数.这组 x 和 y 的值是

(A) $x=88209$, $y=90288$.　　(B) $x=82098$, $y=89028$.

(C) $x=28098$, $y=89082$.　　(D) $x=90882$, $y=28809$.

（中国江苏省初中数学竞赛，1991 年）

[解]　完全平方数的尾数只能是 1,4,5,6,9,0 .

这样可排除(B),(C).

又以 5 结尾的完全平方数末两位数应为 25.

考察(A),(D) 组中两数末两位平方和，知(A) 为所求.

故选(A).

33·18　如果 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为正整数.则下面的四组数值中，x 和 y 只能取

(A)$x=25530$, $y=29464$.　　(B)$x=37615$, $y=26855$.

(C)$x=15123$, $y=32477$.　　(D)$x=28326$, $y=28614$.

（中国北京市初中数学竞赛，1990 年）

[解]　由设知 x^2+y^2 应为完全平方数，因而其个位数只能是 0, 1,4,5,6,9 之一.

这样，首先可排除(C),(D).

又若(B)真，因 x^2+y^2 的末两位数是 50，亦不能为完全平方数.不妥.

故选(A).

33·19　已知 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，能使 z 取正整数值的数组(x,y) 是

(A) (15213, 32477).　　(B) (37615, 26855).

(C) (28326, 28614).　　(D) (25530, 29464).

（中国北京市高中数学竞赛，1990 年）

[解]　考察(A),(B),(C),(D) 四组数平方后的尾数分别为:

$$(9,9),(5,5),(6,6),(0,6),$$

则它们和的尾数分别为 8,0,2,6，因完全平方数的尾数只能是 0,1,4,

5,6,9,故可排除(A),(C).

再考察(B)组中两数各位数字和分别为:

$$3+7+6+1+5=21,\quad 2+6+8+5+5=26,$$

它们分别是$3k+1$和$3k+2$型的数,平方后变为$3k+1$和$3k+1$型的数,则它们的和是$3k+2$型数.

而$3k+2$型数不是完全平方数,则否(B).

故选(D).

33·20 n为某一自然数,代入代数式n^3-n中计算其值时,四个同学算出如下四个结果,其中正确的结果只能是

(A) 388944. (B) 388945. (C) 388954. (D) 388948.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1991年)

[解1] 只须考虑计算结果的个位数字(前五位除(C)外均相同),即考虑n的个位数字对结果的影响:

n的个位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3的个位	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
n^3-n的个位	0	0	6	4	0	0	0	6	4	0

以上表可见,n^3-n尾数只能是 0, 4, 6.

显然正确的只有(A)或(C).

再由$n^3-n=(n-1)n(n+1)$知其可被3整除.又可被3整除的数的各位数字和是3的倍数.

注意到 $3+8+8+9+4+4=36$, 而

$$3+8+8+9+5+4=37.$$

故选(A).

[解2] 由$n^3-n=(n-1)n(n+1)$, 则 $6\mid(n^3-n)$.

而 $6\mid 388944$,

又 $388954=388944+10$, 且 $388948=388944+4$,

知 $6\nmid 388954$, $6\nmid 388944$.

同时 388945为奇数, 故 $6\nmid 388945$.

综上,正确结果只能是388944.

故选(A).

第2节　高斯函数$[x]$

33·21　设$[x]$表示不超过x的最大整数.对任意实数x,下面式子中正确的是

(A) $[x]=|x|$.　　(B) $[x]\geqslant\sqrt{x^2}$.

(C) $[x]>-x$　　(D) $[x]>x-1$.

(中国北京市初中数学竞赛,1985年)

[解]　$[x]$的值域取全体整数.$[-2]=-2$,而$|-2|=2$,$\sqrt{(-2)^2}=2$.可排除(A),(B),

又$-(-2)=2$,有$[-2]<-(-2)$,可排除(C).

故选(D).

33·22　$[x]$,$[y]$,$[z]$分别表示不超过x,y,z的最大整数.若设$[x]=5$,$[y]=-3$,$[z]=-1$,则$[x-y-z]$可以取值的个数是

(A) 3个.　　(B) 4个.　　(C) 5个.　　(D) 6个.

(中国山西省太原市初中数学竞赛,1993年)

[解]　$\because\ 5\leqslant x<6,\ -3\leqslant y<-2,\ -1\leqslant z<0,$

有　$2<-y\leqslant 3,\ 0<-z\leqslant 1.$

$\therefore\ 7<x-y-z<10.$

于是$[x-y-z]$可取的值为7,8,9.

故选(A).

33·23　以$[x]$表示不大于x的最大整数.已知$\left[\dfrac{\left[\frac{91}{n}\right]}{n}\right]=1$,$n$是正整数.则$n$为

(A) 7, 8, 9.　(B) 7, 8, 9, 10.　(C) 6, 7, 8, 9.　(D) 7, 8.

(第3届"五羊杯"初中数学竞赛,1991年)

[解]　当n是正整数时,$x=\left[\dfrac{\left[\frac{91}{n}\right]}{n}\right]$随$n$的增大而不增(减少或不变).

又 $\left[\dfrac{\frac{91}{n}}{n}\right] \leqslant \left[\dfrac{\frac{91}{n}}{n}\right] = \left[\dfrac{91}{n^2}\right]$.

若 $\left[\dfrac{91}{n^2}\right] \geqslant 1$,则 n 最大为 9.

易算得 $n = 9, 8, 7, 6$ 时, $x = 1, 1, 1, 2$.

则 $n = 7, 8, 9$ 时为所求.

故选(A).

33·24 若$[a]$表示实数 a 的整数部分,则$\left[\dfrac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}\right]$等于

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(中国陕西省初中数学竞赛,1997 年)

[解] $\because$ $16 - 6\sqrt{7} = 9 + 7 - 2\sqrt{63} = (\sqrt{9} - \sqrt{7})^2$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{7}} = \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

而 $2 < \sqrt{7} < 3$,

$\therefore$ $\dfrac{5}{2} < \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} < 3$.

可见 $\left[\dfrac{1}{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}\right] = 2$.

故选(B).

33·25 对于每一个实数 x,设$[x]$是不超过 x 的最大整数(这就是整数 n 使$n \leqslant x < n+1$)有下列说法:

Ⅰ.$[x+1] = [x] + 1$,对所有 x.

Ⅱ.$[x+y] = [x] + [y]$,对所有 x 和y.

Ⅲ.$[xy] = [x][y]$,对所有 x 和y.

以上说法中正确的是

(A) 无. (B) 仅 Ⅰ. (C) 仅 Ⅰ 和 Ⅱ. (D) 仅 Ⅲ. (E) 全部.

(第 28 届美国高中数学考试,1977 年)

[解] 若 $n \leqslant x < n+1$, 那么 $n+1 \leqslant x+1 < n+2$.

这样$[x] = n$,$[x+1] = n+1$,则$[x+1] = [x]+1$.

再选择 $x = y = 2.5$,可验算得结论 Ⅱ 和 Ⅲ 是不成立的.

故选(B).

33·26　设$[t]$表示不超过t的最大整数,其中$t\geqslant 0$且

$$S=\{(x,y):(x-T)^2+y^2\leqslant T^2 \text{ 其中 } T=t-[t]\}.$$

那么我们有

(A) 对于任何t,点$(0,0)$不属于S.

(B) S的面积界于0和π之间.

(C) 对于所有的$t\geqslant 5$,S被包含在第一象限内.

(D) 对于任何t,S的圆心在直线$y=x$上.

(E) 另外的说法没有一个是正确的.

(第24届美国高中数学考试,1973年)

[解]　当$t\geqslant 0$时,$0\leqslant t-[t]\leqslant 1$.即当$t\geqslant 0$,均有$0\leqslant T<1$.因此$S$是圆心为$(T,0)$,半径为$T$的圆,其面积为$\pi T^2(0\leqslant T<1)$,即界于0和$\pi$之间.

故选(B).

33·27　对于每一个实数x,记$[x]$为不超过x的最大整数.如果头等邮件是每安士(或其一部分)6仙,那么一封重W安士的信的头等邮费以仙计算的公式为

(A) $6W$.　　(B) $6[W]$.　　(C) $6([W]-1)$.

(D) $6([W]+1)$.　　(E) $-6[-W]$.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解]　邮费计算涉及另一函数$L(x)$,表示不小于x的最小整数.今证　$L(x)=-[-x]$.

若设　$x=n+\alpha$,　n为整数,　$0\leqslant\alpha<1$.　则

$$[x]=n,\quad \text{而}\quad L(x)=\begin{cases}n, & \text{若 } \alpha=0;\\ n+1, & \text{若 } \alpha\neq 0.\end{cases}$$

当$-x=-n-\alpha$时,

$$[-x]=\begin{cases}-n, & \text{若 } \alpha=0;\\ -n-1, & \text{若 } \alpha\neq 0.\end{cases}$$

即

$$-[-x]=\begin{cases}n, & \text{若 } \alpha=0;\\ n+1, & \text{若 } \alpha\neq 0.\end{cases}$$

因而　$6L(W)=-6[-W]$.

故选(E).

33·28　$[x]$表示不超过x的最大整数部分,例如$\left[\frac{15}{4}\right]=3$,若

$$y = 4\left(\frac{x+[u]}{4} - \left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right),$$

且当 $x = 1,\ 8,\ 11,\ 14$ 时，$y = 1$；

$x = 2,\ 5,\ 12,\ 15$ 时，$y = 2$；

$x = 3,\ 6,\ 9,\ 16$ 时，$y = 3$；

$x = 4,\ 7,\ 10,\ 13$ 时，$y = 0$，

则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4}$.　　(B) $\frac{x+1}{4}$.　　(C) $\frac{x}{4}$.　　(D) $\frac{x-1}{4}$.

（中国初中数学联赛,1985 年）

[解] 若 $u = \frac{x+2}{4}$，则当 $x = 2$ 时，$u = 1$，$[u] = 1$，因而 $y = 4\left(\frac{3}{4} - \left[\frac{3}{4}\right]\right) = 3$,与题设 $x = 2$ 时,$y = 2$ 相违.故(A)错.

同样,令 $x = 3$,可断定(B)错;令 $x = 4$,可断定(C)错.

故选(D).

33·29　记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数(例如$[\sqrt{5}] = 2$).设 n 是自然数，且

$I = (n+1)^2 + n - [\sqrt{(n+1)^2+n+1}\ ]^2$,那么

(A) $I > 0$.　　(B) $I < 0$.　　(C) $I = 0$.

(D) 当 n 取不同的值时,以上三种情况,都可能出现.

（中国初中数学联赛,1985 年）

[解] 因为 n 是正整数,因而下面等式成立:

$[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}\ ]^2 = [\sqrt{(n+1)(n+2)}\ ]^2 = (n+1)^2$,

这只须注意到 $(n+1)^2 < (n+1)(n+2) < (n+2)^2$,

且 $[\sqrt{(n+1)(n+2)}] = n+1$ 即可.

故有 $I = (n+1)^2 + n - (n+1)^2 = n > 0$.

故选(A).

33·30　设 m 为给定的自然数,满足$[a - \sqrt{a}] = m$ 的整数a 的个数是(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数)

(A) 恰有一个.　　(B) 恰有两个.

(C) 不少于两个.　　　　　　　(D) 不多于两个.

（中国江西省南昌市初中数学竞赛,1991 年）

[解 1]　由题设$[a-\sqrt{a}]=m$,

设 $m=1$,可推出 $a=3$.

设 $m=2$,可推出 $a=4,5$.

由此即可排除$(A),(B),(C)$.

故选(D).

[解 2]　若a为完全平方数,则满足$[a-\sqrt{a}]=m$的a只有一个.

否则,　设　$a-\sqrt{a}=m+r$,　其中$0\leqslant r<1$,

即　　　　$a-\sqrt{a}-(m+r)=0$.

视其为$\sqrt{a}$ 的二次三项式,其判别式

$$\Delta=1+4(m+r)\geqslant 0,$$

则至多有两个 a 满足题设.又若 $m>0$,则 $\Delta>0$,可排除(A).

故选(D).

33·31　设$[x]$表示不超过 x 的最大整数.若 $M=\sqrt{[\sqrt{x}]}$.且 $N=[\sqrt{\sqrt{x}}]$　(其中 $x\geqslant 1$).则一定有

(A) $M>N$.　(B) $M=N$.　(C) $M<N$.　(D) 非以上答案.

（中国北京市高中数学竞赛,1985 年）

[解]　令 $x=1$,　则 $M=1$,　$N=1$,　得 $M=N$.

因此排除(A),(C).

令 $x=4$,　得 $M=\sqrt{2}$,　$N=[\sqrt{2}]=1$,$M>N$.故排除(B).

又对任何 $x\geqslant 1$,都存在自然数 a,使得 $a^4\leqslant x<(a+1)^4$.因此,

$$a^2\leqslant\sqrt{x}<(a+1)^2,$$

由上式,一方面可得 $a\leqslant\sqrt{\sqrt{x}}<a+1$,因此 $N=[\sqrt{\sqrt{x}}]=a$;另一方面 $a^2\leqslant[\sqrt{x}]<(a+1)^2$,所以 $a\leqslant\sqrt{[\sqrt{x}]}<a+1$.

可见$[M]=[\sqrt{[x]}]=a$,　即 $[M]=N$,　所以 $M\geqslant N$.

故选(D).

33·32　小于或等于 x 的最大整数与大于或等于 x 的最小整数的和是 5,则 x 的解集是

(A) $\{5/2\}$.　　　　　　　　(B) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$.

(C) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$.　　　　(D) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$.

(E) $\{x \mid 2 < x < 3\}$.

（第 37 届美国高中数学考试,1986 年）

[解] 设$[x]$为不超过 x 的最大整数,$\{x\}$ 为不小于 x 的最小整数.

显然 $[x] \leqslant x < [x] + 1$,

且 $\{x\} - 1 < x \leqslant \{x\}$,

上两式相加有 $[x] + \{x\} - 1 < 2x < [x] + \{x\} + 1$,

又由题设 $[x] + \{x\} = 5$,则

$$4 < 2x < 6, \quad 或 \quad 2 < x < 3.$$

故选(E).

33·33 $[x]$表示不超过 x 的最大整数,则满足

$$[-77.66x] = [-77.66]x + 1$$

的整数 x 的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

（中国江苏省初中数学竞赛,1987 年）

[解] 题设方程即为 $[-77.66x] = -78x + 1$,

或 $[(-78 + 0.34)x] = -78x + 1$.

又 x 是整数,则 $-78x + [0.34x] = -78x + 1$, 即$[0.34x] = 1$.

因而 $1 \leqslant 0.34x \leqslant 2$, 即 $3 \leqslant x \leqslant 5$.

$\therefore \quad x = 3, 4, 5$.

故选(C).

33·34 以$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则满足二元方程 $[1.9x] + [8.8y] = 36$ 的正整数解的个数为

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1988 年）

[解] 因 x, y 为正整数,则首先 $y \geqslant 1$.

又 $[8.8y] < 36$, 知 $y \leqslant 4$. 即 $1 \leqslant y \leqslant 4$.

利用 $y = 1,2,3,4$ 代入方程知 $(15,1),(10,2),(1,4)$ 为其解.

故选(C).

33·35 设$[Z]$表示不超过 Z 的最大整数,x 和 y 满足方程组

$$\begin{cases} y = 2[x] + 3, \\ y = 3[x - 2] + 5. \end{cases}$$

如果 x 不是个整数，则 $x+y$ 是

(A) 一个整数. (B) 在 4 与 5 之间. (C) 在 -4 与 4 之间.

(D) 在 15 与 16 之间. (E) 16.5.

(第 33 届美国高中数学考试,1982 年)

[解 1] 解联立方程,有

$$2[x]+3=3[x-2]+5,$$

即
$$2[x]+3=3([x]-2)+5,$$

得
$$[x]=4.$$

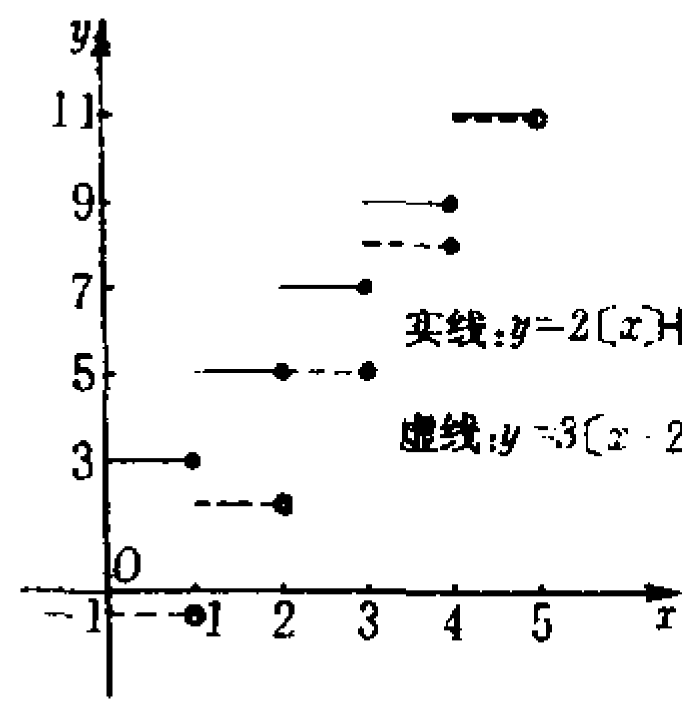
因为 x 不是一个整数，所以 $4<x<5$,

且
$$y=2[x]+3=11.$$

$\therefore$
$$15<x+y<16.$$

故选(D).

[解 2] 在平面直角坐标系中作 $y=2[x]+3$ 和 $y=3[x-2]+5$ 的图像(见右图),从中可以看到在 $4<x<5$ 处,两个函数的图像是重合的.



代入题设式中可求得

$$15<x+y<16.$$

故选(D).

33·36 如果用 $\{a\}$ 表示大于 a 的最小整数,如 $\{2.5\}=3$, $\{4\}=5$, $\{-1.5\}=-1$;用 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数,如 $[2.5]=2$, $[4]=4$, $[-1.5]=-2$.那么,方程组

$$\begin{cases}3[x]+2\{y\}=18,\\3\{x\}-[y]=4.\end{cases}$$

的解是

(A) $\begin{cases}2<x\leqslant 3,\\5\leqslant y<6.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2\leqslant x<3,\\5<y\leqslant 6.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2\leqslant x<3,\\5\leqslant y<6.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2<x\leqslant 3,\\5<y\leqslant 6.\end{cases}$

(第 8 届“缙云杯”初中数学邀请赛,1991 年)

[解] 由题设知$\{x\}=[x]+1$,且$\{y\}=[y]+1$.则题设方程组可化为

$$\begin{cases}3[x]+2[y]=16,\\3[x]-[y]=1.\end{cases}$$

解得 $[x]=2,\quad [y]=5,$

$\therefore\quad 2\leqslant x<3,\quad$ 且 $\quad 5\leqslant y<6.$

故选(C).

33·37 $\{x\}$表示不小于x的最小整数,$[x]$表示不大于x的最大整数.如$\{\pi\}=4,[\pi]=3$,则方程$\{x\}^2+4([x]+1)+4=0$的解为

(A) $x=-2$. (B) $x<-2$.

(C) $x>-3$. (D) $-3<x<-2$.

(第6届"缙云杯"初中数学邀请赛,1989年)

[解] $x=-2$不适合题设方程.又由题设若x不是整数时则有$\{x\}=[x]+1$,这样题设方程可化为

$\{x\}^2+4\{x\}+4=0,\quad$ 即 $(\{x\}+2)^2=0,$

得 $\{x\}=-2,\quad$ 因而 $\quad -3<x<-2.$

故选(D).

33·38 设$[x]$是小于或等于x的最大整数,则方程$4x^2-40\cdot[x]+51=0$的实数解的个数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第36届美国高中数学考试,1985年)

[解1] 令$x=[x]+\alpha$,其中$0\leqslant\alpha<1$,则方程化为:

$$4([x]+\alpha)^2-40[x]+51=0,$$

即
$$4\alpha^2+8\alpha[x]+4[x]^2-40[x]+51=0,$$

则
$$\alpha=\frac{-2[x]\pm\sqrt{40[x]-51}}{2},$$

为求实数解,则 $40[x]-51>0,\quad$ 即$[x]>\dfrac{51}{40}>0.$

故舍去 $\dfrac{-2[x]-\sqrt{40[x]-51}}{2},\quad$ 因而有

$$0\leqslant\frac{-2[x]+\sqrt{40[x]-51}}{2}<1,$$

即 $2[x]\leqslant\sqrt{40[x]-51}<2+2[x]$.

这样 $4[x]^2\leqslant 40[x]-51<4+8[x]+4[x]^2$,

则 $$\begin{cases}4[x]^2-40[x]+51\leqslant 0, & ①\\ 4[x]^2-32[x]+55>0. & ②\end{cases}$$

解①得 $\frac{3}{2}\leqslant[x]<\frac{17}{2}$,

则 $[x]=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$;

解②得 $[x]>\frac{11}{2}$ 或 $[x]<\frac{5}{2}$,…

则 $[x]=6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ 或 $[x]=2,\ 1,\ 0,\ \cdots$

由上可有 $[x]=2,\ 6,\ 7,\ 8$. 且可求得

$[x]$	2	6	7	8
x	$\frac{\sqrt{29}}{2}$	$\frac{3\sqrt{21}}{2}$	$\frac{\sqrt{229}}{2}$	$\frac{\sqrt{269}}{2}$

即原方程有四个实根.

故选(E).

[解 2] 由观察法知 x 不可能为负数或0,即 $x>0$.

设$[x]=t(t\in N)$,代入原方程有

$4x^2-40t+51=0$, 得 $x=\sqrt{\frac{40t-51}{4}}$.

$\because\ 0\leqslant x-[x]<1$, $\therefore\ 0\leqslant\sqrt{\frac{40t-51}{4}}-t<1$.

即 $\frac{3}{2}\leqslant t<\frac{5}{2}$, 或 $\frac{11}{2}\leqslant t<\frac{17}{2}$,

$\because$ t 为正整数, $\therefore$ $t=2,6,7,8$.

当 $[x]=2,6,7,8$ 时,代入原方程分别有

$x_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{189}$,

$x_3=\pm\frac{1}{2}\sqrt{229}$, $x_4=\pm\frac{1}{2}\sqrt{269}$,

$\because$ $x>0$,

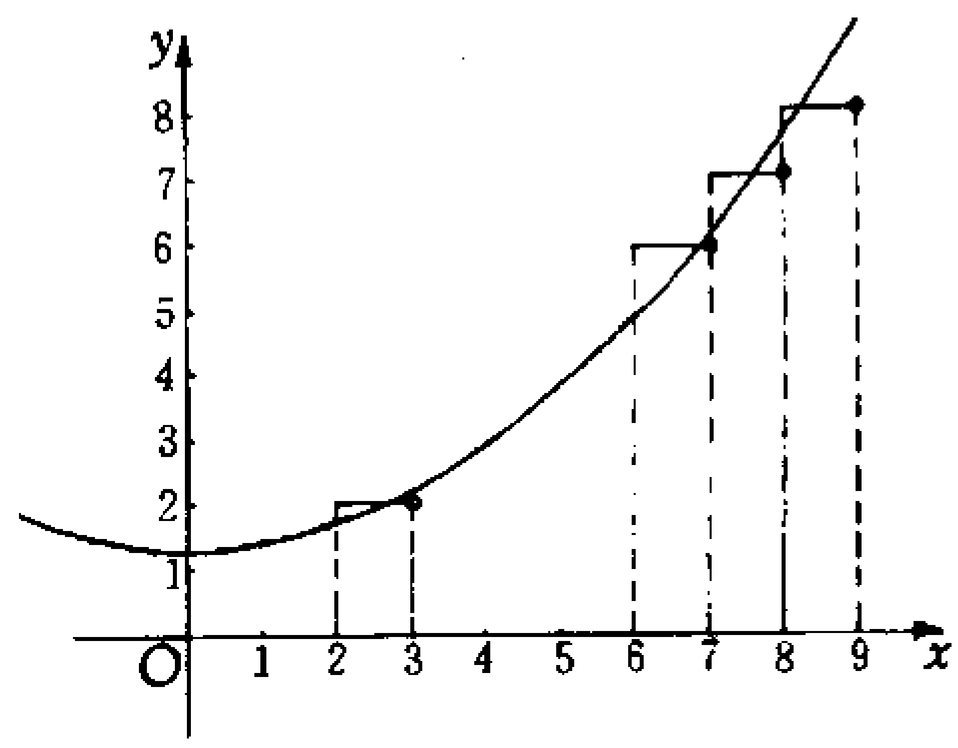
则 $x=\frac{1}{2}\sqrt{29}$, 或 $\frac{1}{2}\sqrt{189}$, 或 $\frac{1}{2}\sqrt{229}$, 或 $\frac{1}{2}\sqrt{269}$.

即原方程有四个实根.

故选(E).

[解 3] 将方程化为 $\frac{1}{10}x^2+\frac{51}{40}=[x]$,

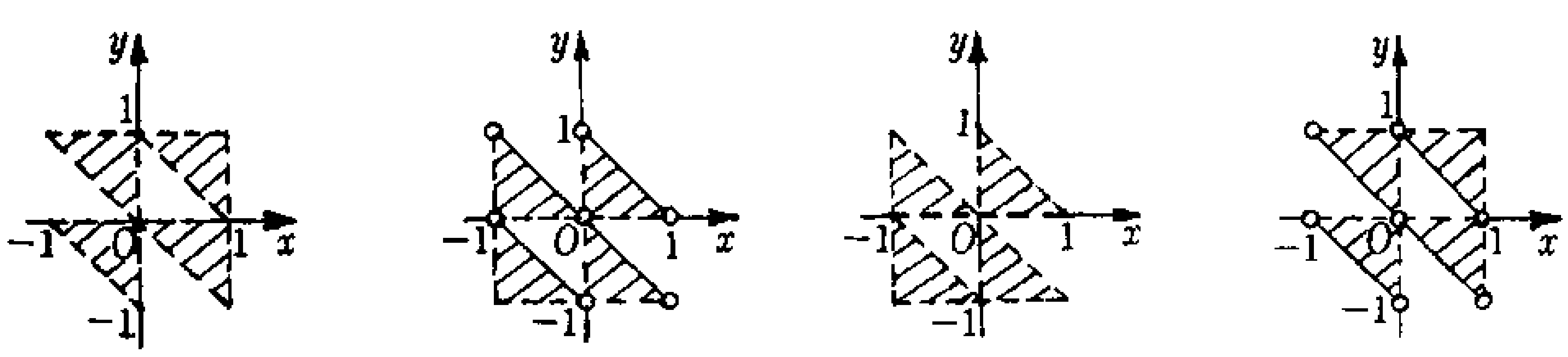
作函数 $y=\frac{1}{10}x^2+\frac{51}{40}$ 和 $y=[x]$ 的图像:



从图像可看出两函数图像仅在$[x]=2,6,7,8$各有一个交点,即原方程有四个根.

故选(E).

33·39 设 x, $y\in R$, $|x|<1$, $|y|<1$, $xy\neq 0$. 记 $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数,则不等式$[x+y]\leqslant[x]+[y]$的解集区域图(如图)是



(A) (B) (C) (D)

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解] 取 $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$,则$[x+y]=1$,且$[x]=[y]=0$,这时$[x+y]>[x]+[y]$,与$[x+y]\leqslant[x]+[y]$相抵,但$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$在图$(B)$,$(D)$所示区间,故$(B)$,$(D)$不妥.

取 $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$,则$[x+y]=-1$,且$[x]=-1$,$[y]=0$,这时$[x+y]=[x]+[y]$,即适合题设不等式.

但$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$不在图(A)所示区间,则可否(A).

故选(C).

33·40 已知 $a_0=\sin x$, $a_n=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sqrt{1-a_{n-1}^2}$,这里 $n\in N$,且$\left[\frac{n}{2}\right]$为$\frac{n}{2}$的整数部分.则 a_{1989} 等于

(A) $\sin x$. (B) $-\cos x$. (C) $-\sin x$. (D) $\cos x$.

(中国四川省高中数学竞赛,1989年)

[解] 由题设不难看出:

$$a_n=\begin{cases}\sin x, & n=4k\text{ 时};\\ \cos x, & n=4k+1\text{ 时};\\ -\sin x, & n=4k+2\text{ 时};\\ -\cos x, & n=4k+3\text{ 时}.\end{cases}$$

而 $1989=497\cdot 4+1$,则 $a_{1989}=\cos x$.

故选(D).

33·41 在非减奇数列

$$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}=\{1,3,3,3,5,5,5,5,5,\cdots\}$$

中,每个正奇数 k 出现k次.已知有整数 b,c 和d 存在,对于所有正整数 n 满足 $a_n=b[\sqrt{n+c}]+d$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.则 $b+c+d$ 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第31届美国高中数学考试,1980年)

[解] 在已知通项公式中设 $n=1,2,3,4,5$ 得

$$1=b[\sqrt{1+c}]+d \quad ①$$
$$3=b[\sqrt{2+c}]+d \quad ②$$
$$3=b[\sqrt{3+c}]+d \quad ③$$
$$3=b[\sqrt{4+c}]+d \quad ④$$
$$5=b[\sqrt{5+c}]+d \quad ⑤$$

由②-①有 $2=b([\sqrt{2+c}]-[\sqrt{1+c}])$.

因为 $0<[\sqrt{2+c}]-[\sqrt{1+c}]<2$,则

$[\sqrt{2+c}]-[\sqrt{1+c}]=1$, 且 $b=2$.

由③-②, ④-③, ⑤-④有

$$1+[\sqrt{1+c}]=[\sqrt{2+c}]=[\sqrt{3+c}]=[\sqrt{4+c}]$$
$$=[\sqrt{5+c}]-1.$$

由此知,存在某些整数 m 和 k 使 $2+c=k^2$, $5+c=m^2$.因为相差 3 的完全平方只有 1 和 4,故 $k=1$,且 $m=2$.

所以 $c=-1$, $d=1$.

反之,将 $b=2$, $c=-1$, $d=1$ 代入原通项公式同样成立.

故选(C).

33·42 若$[x]$是小于或等于 x 的最大整数,则 $\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]$ 等于

(A) 8192. (B) 8204. (C) 9218.

(D) $[\log_2(1024!)]$. (E) 不在以上各数之中.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解] 若设 $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$, 则 $[\log_2 m]=k$.

又在区间$[2^k,2^{k+1})$ 有 2^k 个整数.

$$\therefore \quad \sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]=\sum_{N=1}^{2^{10}}[\log_2 N]$$
$$=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+9\cdot 2^9+10$$

令上式右端和为 s,考虑

$$2s-s=10+9\cdot 2^{10}-2^9-2^8-\cdots-2^1$$
$$=10+9\cdot 2^{10}-(2^{10}-2),$$

即
$$s=8204.$$

故选(B).

33·43 若 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot 100=12^n\cdot M$, 其中 M 为自然数,n 为使得等式成立的最大的自然数.则 M

(A) 能被 2 整除,但不能被 3 整除.

(B) 能被 3 整除,但不能被 2 整除.

(C) 能被 4 整除,但不能被 3 整除.

(D) 不能被 3 整除,也不能被 2 整除.

(中国初中数学联赛,1991 年)

[解] 在 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdot 99\cdot 100$ 的素因数分解中,2 的因子个数为

$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]+\left[\frac{100}{2^7}\right]+\cdots$

$=50+25+12+6+3+1=97.$

3 的因子个数为

$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]+\left[\frac{100}{3^5}\right]+\left[\frac{100}{3^6}\right]+\cdots$

$=33+11+3+1=48.$

所以 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot99\cdot100=2^{97}\cdot3^{48}\cdot P=12^{48}(2P)$,其中 P 不能整除 2 和 3.

所以 $M=2P.$

故选(A).

33·44 1898 年 6 月 9 日英国强迫清政府签约将香港 975.1 平方公里土地租借给英国 99 年. 1997 年 7 月 1 日香港回归祖国,中国人民终于洗刷了百年耻辱. 已知 1997 年 7 月 1 日是星期二. 那么,1898 年 6 月 9 日是星期

(A)二. (B)三. (C)四. (D)五.

(**题注** 公历纪年,凡年份为 4 的倍数但不是 100 的倍数的那年为闰年,年份为 400 的倍数的那年也为闰年,闰年的二月有 29 天,平年二月有 28 天.)

(中国陕西省初中数学竞赛,1997 年)

[解 1] $\because$ $365\equiv1(\bmod 7)$,

$\therefore$ 若令 S 表示从某年元旦到所求日的总天数,x 表某年份,y 表该年第几天,则有

$$S\equiv(x-1)+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+y(\bmod 7).$$

当 $x=1898,\ y=31\times3+30+28+9=160$ 时,

$$\begin{aligned}S&\equiv1897+\left[\frac{1897}{4}\right]-\left[\frac{1897}{100}\right]+\left[\frac{1897}{400}\right]+160\\&\equiv1897+474-18+4+160\\&\equiv2517\equiv4\ (\bmod 7).\end{aligned}$$

故选(C).

[解 2] 已知 1997 年 7 月 1 日是星期二,则易推知 1997 年 6 月 9 日是星期一.

而 1898-06-09 ~ 1997-06-09 共 99 年,其中闰年 24 次.

故知 $99\times 365+24\equiv 99+24\equiv 4\pmod 7$.

$1-4\equiv -3\equiv 4\pmod 7$.

故选(C).

第3节　实数的小数部分$\{x\}$

33·45　设$\sqrt{5}$的整数部分为m,小数部分为n,则$m\left(m-\frac{1}{n}\right)^3$的值为

(A) 128.　(B) -128.　(C) $10\sqrt{5}$.　(D) $-10\sqrt{5}$.

（中国陕西省咸阳市初中数学竞赛,1990年）

[解]　$\because\ 2<\sqrt{5}<3$,　则　$m=2$,　$n=\sqrt{5}-2$.

$$\therefore\ m\left(m-\frac{1}{n}\right)^3=2\left(2-\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^3=2\left[2-\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2}\right]^3$$

$$=2\cdot(-\sqrt{5})^3=-10\sqrt{5}.$$

故选(D).

33·46　设a为$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$的小数部分,$b$为$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$的小数部分,则$\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$的值为

(A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}+1$.　(B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$.

(C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-1$.　(D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$.

（中国浙江省初中数学竞赛,1991年）

[解]　由$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=2$,

有　$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$,　则　$a=\sqrt{2}-1$,

同理　$\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)^2=6$,　可有　$b=\sqrt{6}-2$.

$$\therefore\ \frac{2}{b}-\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{6}-\sqrt{2}+1.$$

故选(A).

33·47　已知$y=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$,x表示y的小数部分.则x^2+2y的值为

(A) 7.　(B) 8.　(C) 9.　(D) 10.

（中国四川省初中数学竞赛,1991年）

[解]　由$y=\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+6\sqrt{2}+2}$

$$= 3+\sqrt{2},$$

$\because$ $$1<\sqrt{2}<2,$$

则 $$x=(3+\sqrt{2})-(3+1)=\sqrt{2}-1,$$

于是 $$x^2+2y=(\sqrt{2}-1)^2+2(3+\sqrt{2})=9.$$

故选(C).

33·48 若 $5-\sqrt{3}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y，则 $2x^3-\left(y^3+\dfrac{1}{y^3}\right)$的值为

(A) 2. (B) -2. (C) $\sqrt{3}+2$.

(D) $2+3\sqrt{3}$. (E) $2-6\sqrt{3}$.

(中国四川省重庆市初中数学竞赛,1983 年)

[解] 由题设知 $x=3$, $y=2-\sqrt{3}$,这样

$$2x^3-\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=2\cdot 3^3-\left[(2-\sqrt{3})^3+\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3}\right]=2.$$

故选(A).

33·49 设 x,y 为正整数,其中 y 不是完全平方数,且 $y<x$.今分别以 a,b 表示 $x+\sqrt{y}$, $x-\sqrt{y}$ 的小数部分,则 $a+b$ 的值为

(A) 无理数. (B) 真分数. (C) 1. (D) 不确定.

(中国安徽省合肥市初中数学竞赛,1985 年)

[解] 由设 $y<x$,则 $\alpha<\sqrt{y}<\alpha+1\leqslant x$，其中 α 为正整数.

于是 $x+\sqrt{y}=x+\alpha+(\sqrt{y}-\alpha)$，其中 $0<\sqrt{y}-\alpha<1$,

则知 $a=\sqrt{y}-\alpha$.

又 $x-\sqrt{y}=x-(\alpha+1)+[(\alpha+1)-\sqrt{y}]$，其中 $0<\alpha+1-\sqrt{y}<1$,

知 $$b=\alpha+1-\sqrt{y}.$$

$\therefore$ $$a+b=(\sqrt{y}-\alpha)+(\alpha+1-\sqrt{y})=1.$$

故选(C).

33·50 设 a 表示$\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分,则 $\log_2 a(2a+1)$ 等于

(A) -1. (B) -2. (C) 0. (D) $\dfrac{1}{2}$.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1987 年)

[解] 由 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$，又∵ $1<\frac{3+\sqrt{5}}{4}<2$，

∴ $$a=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

则 $$a(2a+1)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{8}=\frac{1}{2}.$$

∴ $\log_2 a(2a+1)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

故选(A).

第4节 循环小数

33·51 分数$\frac{1}{3}$的值

(A) 等于0.33333333.

(B) 小于0.33333333而差为$\frac{1}{3\cdot 10^8}$.

(C) 小于0.33333333而差为$\frac{1}{3\cdot 10^9}$.

(D) 大于0.33333333而差为$\frac{1}{3\cdot 10^8}$.

(E) 大于0.33333333而差为$\frac{1}{3\cdot 10^9}$.

（第5届美国高中数学考试,1954年）

[解] 由 $$\frac{1}{3}-0.33333333$$
$$=0.00000000333\cdots\cdots$$
$$=10^{-8}\cdot 0.333\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{3\cdot 10^8}.$$

故选(D).

33·52 将循环小数0.363636……写成最简分数形式,其分子与分母的和为

(A) 15.　(B) 45.　(C) 114.　(D) 135.　(E) 150.

（第 16 届美国高中数学考试，1965 年）

[解]　由 $0.363636\cdots\cdots = 0.\dot{3}\dot{6} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$.

故选(A).

注　一般地，n 位循环节的循环小数可化为

$$0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{99\cdots9}(\text{分母由 } n \text{ 个 } 9 \text{ 组成}).$$

33·53　数 2.5252525…… 能写成一分数，当化简后，此分数的分子与分母的和为

(A) 7.　(B) 29.　(C) 141.　(D) 349.　(E) 非上述答案.

（第 11 届美国高中数学考试，1960 年）

[解 1]　设　$x = 2.525252\cdots\cdots$,　则　$100x = 252.5252\cdots\cdots$

故　$100x - x = 250$,　得　$x = \frac{250}{99}$,　而　$250 + 99 = 349$.

故选(D).

[解 2]　由 $2.525252\cdots\cdots = 2.\dot{5}\dot{2} = 2\frac{52}{99} = \frac{250}{99}$,

故选(D).

33·54　设 $F = 0.48181\cdots\cdots$ 是无穷循环小数，其中 8 和 1 是重复位数. 当把 F 写成一个化简后的分数时，分母比分子多

(A) 13.　(B) 14.　(C) 29.　(D) 57.　(E) 126.

（第 21 届美国高中数学考试，1970 年）

[解]　$F = 0.4818181\cdots\cdots = 0.4 + 0.0818181\cdots\cdots$

$$= 0.4 + \frac{1}{10}\cdot 0.818181\cdots\cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{81}{99} = \frac{53}{110},$$

由　$110 - 53 = 57$.

故选(D).

33·55　设 D 表示一循环小数，若 P 表示 D 中不重复的 r 位，Q 表示 D 中重复的 s 位时，则不正确的表示为

(A) $D = 0.PQQ\cdots\cdots$.　(B) $10^rD = P.QQQ\cdots\cdots$.

(C) $10^{r+s}D = PQ.QQQ\cdots\cdots$.　(D) $10^r(10^s - 1)D = Q(P - 1)$.

(E) $10^r \cdot 10^{2s}D = PQQ.QQQ\cdots\cdots$.

（第 3 届美国高中数学考试，1952 年）

[解] 易验证(A)，(B)，(C)，(E)均正确. 今考虑(D)式：

$$\begin{aligned}\text{式左} &= 10^r(10^s-1)D = 10^{r+s}D - 10^rD \\ &= PQ.QQ\cdots\cdots - P.QQQ\cdots\cdots \\ &= PQ - P = P(Q-1).\end{aligned}$$

故选(D).

第 5 节　进　制

33·56　在二进制中的前五个正整数是 1_2，10_2，11_2，100_2，101_2，试问，在二进制中的数 10011_2 在十进制中为

(A) 19.　(B) 40.　(C) 10011.　(D) 11.　(E) 7.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

[解] 由二进制性质有

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 19.$$

故选(A).

33·57　如果在二进制中，N 写成 11000_2，那么 N 的前一个整数在二进制中可以写成

(A) 10001_2.　(B) 10010_2.　(C) 10011_2.

(D) 10110_2.　(E) 10111_2.

（第 20 届美国高中数学考试，1969 年）

[解] 由 $N = 11000_2 = 2^4 + 2^3$，

而 $$\begin{aligned}N-1 &= 2^4+2^3-1 = 2^4+(2^3-1) \\ &= 2^4+2^2+2+1 = 10111_2,\end{aligned}$$

这里注意到　$2^3-1=(2-1)(2^2+2+1)$.

故选(E).

33·58　我们的常用数制为十进制，若改为四进制，则成为 1_4，2_4，3_4，10_4，11_4，12_4，13_4，20_4，21_4，22_4，23_4，30_4，$\cdots$. 则第 20 个数是

(A) 20_4.　(B) 38_4.　(C) 44_4.　(D) 104_4.　(E) 110_4.

(第7届美国高中数学考试,1955年)

[解]　由于　$20 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0$,

则第20个四进制数为 110_4.

故选(E).

33·59　数10!(在十进制下)用12进制写出时,结尾刚好有 k 个0.则 k 的值是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.　(E) 5.

(第21届美国高中数学考试,1970年)

[解]　在十进制中

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 12^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

而　$5^2 \cdot 7 = 175 = 1 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 + 7$,

于是　$(5^2 \cdot 7 \cdot 12^4)_{10} = (127 \cdot 10^4)_{12} = 1270000_{12}$.

故选(D).

33·60　记 25_b 表示为 b 进制的二位数,若 52_b 是 25_b 的二倍,则 b 等于

(A) 7.　(B) 8.　(C) 9.　(D) 11.　(E) 12.

(第16届美国高中数学考试,1965年)

[解]　由设知　$25_b = 2b^1 + 5b^0$,　$52_b = 5b^1 + 2b^0$,又由题设 $52_b = 2(25_b)$,　即　$5b + 2 = 2(2b + 5)$,　得 $b = 8$.

故选(B).

33·61　将一数 N 用7进位数表示时是一个三位数,用9进位表示时,其三位数码刚好颠倒过来.则 N 的中间数码是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 3.　(D) 4.　(E) 5.

(第19届美国高中数学考试,1968年)

[解]　设 N 用9进制表示时三位数字分别为 x, y, z,即 $9^2x + 9^1y + z$.又由设其7进制为 $7^2z + 7^1y + x$.

故　$81x + 9y + z = 49z + 7y + x$,或　$y = 8(3z - 5x)$.

由设 y 为 N 的7进制表示时的数字,则 $0 \leqslant y < 7$,

故　整数 $n = 3z - 5x = 0$(否则 $|8n| > 7$).

故 N 的中间数字为0.

又由于 z 也为 N 的7进制表示时的首位数字,故　$0 < z < 7$.

而 $3z=5x$,知 z 可被 5 整除,故 $z=5$,同时 $x=3$.

即　$N=305_9=503_7=248_{10}$.

故选(A).

33·62　本题各数均按 b 进制记数法表示.设乘积(12)(15)(16) = 3146,又设 $s=12+15+16$,则 s 为(b 进位)

(A) 43.　(B) 44.　(C) 45.　(D) 46.　(E) 47.

(第 18 届美国高中数学考试,1967 年)

[解]　在 b 进制中, 12_b, 15_b, 16_b, 3146_b 分别为

$$b^1+2,\ b^1+5,\ b^1+6,\ 3b^3+b^2+4b+6.$$

由设　$(b+2)(b+5)(b+6)=3b^3+b^2+4b+6$,

化简后有

$$b^3-6b^2-24b-27=0.$$

解得　$b=9$ 这惟一实解.

又由　$s=12_b+15_b+16_b=(b+2)+(b+5)+(b+6)$

$$=3b+13=4b+4=44_b.$$

故选(B).

33·63　以 a 进位的数 47 与以 b 进位的数 74 相同,假定 a,b 都是正整数,那么写成罗马数字 $a+b$ 的最小可能值是

(A) XIII.　(B) XV.　(C) XXI.

(D) XXIV.　(E) XVI.

(第 22 届美国高中数学考试,1971 年)

[解]　a 和 b 必须比 7 大,由 $47_a=74_b$,则 $4a+7=7b+4$.

所以

$$7b-4a=3.$$

显然　$(a,b)=(1,1)$ 是其中一组解.且其通解可表示为

$$(a,b)=(1+7t,\quad 1+4t),\quad t\text{ 为整数}.$$

当 $t=2$ 时,得到 a,b 大于 7 的最小解.

即　$(a,b)=(15,9)$.　所以　$a+b=24=$ XXIV.

故选(D).

33·64　若数 15! 以 12 进位表示其大小时,末尾有 k 个 0,以 10 进位表示其大小时,末尾有 h 个 0,则 $k+h$ 等于

(A) 5.　(B) 6.　(C) 7.　(D) 8.　(E) 9.

(第 16 届美国高中数学考试,1965 年)

[解]　$15!=10^3(3\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot3\cdot2\cdot1)$,

且 $$15! = 12^5(15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5).$$

故 $k = 5$, $h = 3$, 则 $k + h = 8$.

故选(D).

33·65 若数 121_b(即 b 进制的数)为一整数的平方,则 b 为

(A) 仅 $b = 10$. (B) 仅 $b = 10$, $b = 5$. (C) $2 \leqslant b \leqslant 10$.

(D) $b > 2$. (E) b 不存在.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解] 由设及 b 进制定义有

$121_b = 1 \cdot b^2 + 2 \cdot b + 1 = (b+1)^2$,系平方数.

但在 b 进制中基的最大数字只能是 $b-1$,因而 b 不能是 1 或 2,即 $b > 2$.

故选(D).

33·66 在某种记数法中,24 的平方是 554,它的进制是

(A) 6. (B) 8. (C) 12. (D) 14. (E) 16.

(第 24 届美国高中数学考试,1973 年)

[解] 设进制是 b,且 $b > 5$.

因为 $$(24_b)^2 = (2b+4)^2 = 4b^2 + 16b + 16$$

且 $$554 = 5b^2 + 5b + 4,$$

我们有 $$5b^2 + 5b + 4 = 4b^2 + 16b + 16.$$

解得 $b = -1$ 或 12, 舍去负值.

故选(C).

33·67 x 的三进制表达式是

$$12112211122211112222_3$$

那么 x 的九进制表达式中,左边的第一个数字是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

(第 32 届美国高中数学考试,1981 年)

[解] x 是一个 20 位的三进制数,其可表示为

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot 3^{19} + 2 \cdot 3^{18} + 1 \cdot 3^{17} + 1 \cdot 3^{16} + \cdots + 2 \cdot 3 + 2 \\ &= (1 \cdot 3^{19} + 2 \cdot 3^{18}) + (1 \cdot 3^{17} + 1 \cdot 3^{16}) + \cdots + (2 \cdot 3 + 2) \\ &= (1 \cdot 3 + 2)(3^2)^9 + (1 \cdot 3 + 1)(3^2)^8 + \cdots + (2 \cdot 3 + 2) \\ &= 54\cdots8_9, \end{aligned}$$

所以 x 的九进制表达式中最左边的那位数字是 5(九进制的 5).

故选(E).

33·68　如果一个完全平方数的8进制表达式是$ab3c$(即 $n^2 = (ab3c)_8 = 8^3a + 8^2b + 8 \cdot 3 + c$),其中$a \neq 0$,那么$c$是

(A) 0.　(B) 1.　(C) 3.　(D) 4.　(E) 不能惟一确定.

(第33届美国高中数学考试,1982年)

[解1]　如果　$n^2 = (ab3c)_8$,　设$n = (de)_8$,　则

$$n^2 = (8d + e)^2 = 64d^2 + 8(2de) + e^2.$$

因此3是e^2的8进制的第二个数字(从右数,下同)与$2de$的第一位数字的和(8进制意义下的和).而后者是一个偶数,而3又是奇数,则e^2的8进制的第二个数字为奇数.

下面我们把8进制下的这个平方表列出:

e	1	2	3	4	5	6	7
e^2	1	4	11	20	31	44	61

其中e^2的第二位数字,仅当e为3或5的时候是偶数的,那么无论哪种情况,e^2的8进制第一位数字都是1,即$c = 1$.

故选(B).

[解2]　由题设有$n^2 = (ab3c)_8 = 8^3a + 8^2b + 8 \cdot 3 + c$(注意这里的$n^2$是10进制数),那么$n^2$被8去除,余数必定为0,或1,或4,这是因为

若$n = 4k$,　　　则　$n^2 = 16k^2$被8除余0;

若$n = 4k + 1$,　则　$n^2 = 16k^2 + 8k + 1$,被8除余1;

若$n = 4k + 2$,　则　$n^2 = 16k^2 + 16k + 4$,被8除余4;

若$n = 4k + 3$,　则　$n^2 = 16k^2 + 24k + 9$,被8除余1.

即　$n^2 \equiv 0,1$或$4 \pmod 8$.

于是　$c = 0$,或$c = 1$,或$c = 4$.

如果$c = 0$,那么$n^2 = 8(8k + 3) = 4(16k + 6)$.而4是一个完全平方数,则$16k + 6$也必是一个完全平方数,但由上面的分析$16k + 6$被8除余6,这是不可能的,因此$c \neq 0$.

如果$c = 4$,那么,$n^2 = 4(8l + 7)$,同理$8l + 7$被8除余7,所以$8l + 7$也不可能是一个完全平方数,因此$c \neq 4$.

所以c只能等于1.

选择题卷

故选(B).

33·69　若一个比 8 大的整数 n 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的解，并且在 n 进位制中 a 的表示是 18,那么 b 的 n 进位表示是

(A) 18.　(B) 28.　(C) 80.　(D) 81.　(E) 280.

（第 29 届美国高中数学考试,1978 年）

[解]　由题设

$b=an-n^2=(18)_n n-n^2=(n+8)n-n^2=8n=(80)_n$.

故选(C).

33·70　一密码员设计了以下给自然数编码的方法:首先把此自然数表示成5进制,然后将5进制表示中出现的数字与集合$\{V,W,X,Y,Z\}$的元素建立一个一一对应,按此对应他发现三个递增的相邻的自然数分别被编成 VYZ, VYX, VVW. 则被编成 XYZ 的数的十进制表示是

(A) 48.　(B) 71.　(C) 82.　(D) 108.　(E) 113.

（第 38 届美国高中数学考试,1987 年）

[解]　由题设 VYZ, VYX, VVW 三数递增相邻,则

$$\begin{cases} VYZ+1=VYX, & ① \\ VYX+1=VVW. & ② \end{cases}$$

显然　$Z\neq 1,2$,　否则由 ① 式有　$X=2,3$,

这样 ② 式不成立,因为此时 $X+1=3$ 或 4,不会产生进位问题.

于是　$Z=3$,　$X=4$,　$W=0$.

又 $Y\neq 2$,　否则　$VYX+1=V24+1=V30=V2W$,与题设相抵!则 $Y=1$.

$\therefore$　$X=4$,　$Y=1$,　$Z=3$.　即　$XYZ=(413)_5$.

而　$(413)_5=4\cdot 5^2+1\cdot 5^1+3=108$.

故选(D).

33·71　在 R_1 进制中,F_1 的分数展开式为 $0.373737\cdots$,F_2 的分数展开式为 $0.737373\cdots$,在 R_2 进制中,F_1 的展开式为 $0.252525\cdots$,F_2 的展开式为 $0.525252\cdots$,则 R_1 与 R_2(均用十进制表示)的和为

(A) 24.　(B) 22.　(C) 21.　(D) 20.　(E) 19.

（第 17 届美国高中数学考试,1966 年）

[解] 先将题设分数写成公比为$\frac{1}{R_1}$和$\frac{1}{R_2}$的无穷几何级数：

$$F_1=\frac{3R_1+7}{R_1^2}+\frac{3R_1+7}{R_1^4}+\cdots=\frac{3R_1+7}{R_1^2-1},$$

且
$$F_1=\frac{2R_2+5}{R_2^2}+\frac{2R_2+5}{R_2^4}+\cdots=\frac{2R_2+5}{R_2^2-1},$$

所以
$$F_1=\frac{3R_1+7}{R_1^2-1}=\frac{2R_2+5}{R_2^2-1}.$$

同理
$$F_2=\frac{7R_1+3}{R_1^2-1}=\frac{5R_2+2}{R_2^2-1}.$$

上两式两边相加得

$$F_1+F_2=\frac{10R_1+10}{(R_1+1)(R_1-1)}=\frac{7R_2+7}{(R_2+1)(R_2-1)},$$

即
$$\frac{10}{R_1-1}=\frac{7}{R_2-1}.$$

则
$$\frac{R_1-1}{10}=\frac{R_2-1}{7},$$

即
$$7R_1-10R_2+3=0. \qquad ①$$

同理,上两式相减化简后可有

$$3R_1-4R_2-1=0. \qquad ②$$

解①,②可得 $R_1=11$, $R_2=8$. 则 $R_1+R_2=19$.

故选(E).

33·72 若$D(n)$表示正整数,n表成二进制后含有的相邻不同数字的对数. 例如$D(3)=D(11_2)=0, D(21)=D(10101_2)=4$, $D(97)=D(1100001_2)=2$等. 对于不大于97的正整数n满足$D(n)=2$的个数为

(A) 16. (B) 20. (C) 26. (D) 30. (E) 35.

（第48届美国高中数学考试,1997年）

[解] 考虑到 $97<2^7=128$,显然上述n化成二进制后位数不超过7.

又 $97=2^6+2^5+1=1100001_2$,这样不大于97的n中满足$D(n)=2$者化为二进制后分别为:

7位的:1100001_2, 1011111_2, 1001111_2, 1000111_2, 1000011_2,

1000001_2;

6 位的: 111101_2, 111011_2, 111001_2, 110111_2, 110011_2,

110001_2, 101111_2, 100111_2, 100011_2, 100001_2;

5 位的: 11101_2, 11011_2, 11001_2, 10111_2, 10011_2, 10001_2;

4 位的: 1101_2, 1011_2, 1001_2;

3 位的: 101_2.

综上　共 26 个.

故选(C).

33·73　在十进制中,数 $526 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$,在某王国里,计数以 r 为基,即 r 进制.某人在那里购买一汽车,价格为 440 货币单位(简写为 m.u.),他给售货人 1000m.u.找回 340 m.u.,则 r 为

(A) 2.　　(B) 5.　　(C) 7.　　(D) 8.　　(E) 12.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解]　已知在该国 1000m.u. − 440m.u. = 340m.u.

由 r 进制的定义有

$$1 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r + 0 - (4r^2 + 4r + 0) = 3r^2 + 4r + 0.$$

即　$r^3 - 7r^2 - 8r = 0$　或　$r^2 - 7r - 8 = 0$,

得　$r = 8$ 或 -1(舍去).

故选(D).

组　合　篇

第三十四章　组合数

34·1　对于整数 k 和 n,其中 $1 \leqslant k < n$,设 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,那么 $\left(\frac{n-2k-1}{k+1}\right)C_n^k$ 是一个整数的条件是

(A) 对所有 k 和 n.

(B) 对 k 和 n 的所有偶值,但不是对所有 k 和 n.

(C) 对 k 和 n 的所有奇值,但不是对所有 k 和 n.

(D) 若 $k=1$ 或 $n-1$ 时,但不是对 k 和 n 的所有奇值.

(E) 若 n 可被 k 整除,但不是对 k 和 n 的所有偶值.

(第 27 届美国高中数学考试,1976 年)

[解]　因为 C_n^k 是一个整数,考虑

$$\begin{aligned}\left(\frac{n-2k-1}{k+1}\right)C_n^k &= \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)} - C_n^k \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - C_n^k \\ &= C_n^{k+1} - C_n^k.\end{aligned}$$

亦为整数.

故选(A).

34·2　记 $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$. 于是 $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}$ 的值是

(A) -2^{50}.　(B) -2^{49}.　(C) 0.　(D) 2^{49}.　(E) 2^{50}.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

选择题卷

[**解**] 注意到 $(1+i)^{99}=\sum\limits_{r=0}^{99}1^{99-r}\cdot i^{r}\cdot\binom{99}{r}$，又

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,$$

则其展开式实部即 $\sum\limits_{k=0}^{49}i^{2k}\binom{99}{2k}=\sum\limits_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}$.

而
$$\begin{aligned}(1+i)^{99}&=(1+i)\cdot(1+i)^{98}=(1+i)[(1+i)^2]^{49}\\&=(1+i)(2i)^{49}=2^{49}\cdot i^{49}(1+i)\\&=2^{49}(i-1)=-2^{49}+i\cdot 2^{49},\end{aligned}$$

因此
$$\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}=-2^{49}.$$

故选(B).

34·3 定义 $r!=r\cdot(r-1)\cdots\cdot 1$ 及 $C_j^k=\binom{j}{k}=\dfrac{j!}{k!(j-k)!}$，其中 r,j,k 是正整数，且 $k<j$. 如果当 $n>3$ 时，C_n^1, C_n^2, C_n^3 构成一个等差数列，那么 n 等于

(A) 5. (B) 7. (C) 9. (D) 11. (E) 12.

（第 33 届美国高中数学考试，1982 年）

[**解**] 由题设我们有

$$C_n^1=n,\quad C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\quad C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

并且
$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}.$$

整理后
$$n^3-9n^2+14n=0,$$

即
$$n(n-2)(n-7)=0.$$

又 $n>3$， 故得 $n=7$.

故选(B).

34·4 对于正数 n 和 a，定义 $n_a!$ 是

$$n_a!=n(n-a)(n-2a)(n-3a)\cdots(n-ka),$$

其中 k 是对于 $n>ka$ 的最大整数. 那么 $72_8!\div 18_2!$ 的商等于

(A) 4^5. (B) 4^6. (C) 4^8. (D) 4^9. (E) 4^{12}.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

[**解**] 由
$$\begin{aligned}72_8!&=72\cdot 64\cdot 56\cdot 48\cdot 40\cdot 32\cdot 24\cdot 16\cdot 8\\&=8^9\cdot 9!,\end{aligned}$$

且 $$18_2! = 18\cdot16\cdot14\cdot12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2 = 2^9\cdot9!,$$

则 $$72_8!\div18_2! = 8^9\div2^9 = 4^9.$$

故选(D).

34·5 对任意实数 a 和正整数 k,定义

$$\begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots[a-(k-1)]}{k(k-1)\cdots2\cdot1}.$$

则 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 100 \end{bmatrix}\div\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 100 \end{bmatrix}$ 等于

(A) -199. (B) -197. (C) -1. (D) 197. (E) 199.

(第 39 届美国高中数学考试,1988 年)

[解] 依题设可有

$$原式 = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots[-\frac{1}{2}-(100-1)]\frac{1}{100!}}{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots[\frac{1}{2}-(100-1)]\frac{1}{100!}}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-98)(-\frac{1}{2}-99)}{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-98)(\frac{1}{2}-99)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}-99}{\frac{1}{2}} = -199.$$

故选(A).

34·6 数695 写成一个关于阶乘的多项式:$695 = a_1 + a_2\cdot2! + a_3\cdot3! + \cdots + a_n\cdot n!$,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是整数,并且 $0\leqslant a_k\leqslant k$,则 a_4 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

(第 12 届美国高中数学考试,1961 年)

[解] 由 $6! > 695$ 知可设

$$695 = a_1 + a_2\cdot2! + a_3\cdot3! + a_4\cdot4! + a_5\cdot5!,$$

即 $695 = a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 24a_4 + 120a_5$, 其中 $0\leqslant a_k\leqslant k$.

由上 $a_5 = 5$ (否则和凑不足 695).

又　$a_5=5$时，　$a_4\neq 4$　(注意到$5\cdot 120+4\cdot 24>695$)，

且　$a_4\geqslant 3$(否则$a_4\cdot 4!+3\cdot 6+2\cdot 2+1<95$,若$a_4<3$的话).

故　$a_4=3$.

若　$a_5=5$，　$a_4=3$，　则　$a_3=3$，　$a_2=2$，　$a_1=1$.

故选(D).

34·7　对于每个自然数n设$a_n=\dfrac{(n+9)!}{(n-1)!}$,令$k$表示最小的使$a_k$最右边的非零整数是奇数的自然数,则$a_k$最右边的非零整数是

(A)1.　　(B)3.　　(C)5.　　(D)7.　　(E)9.

(第49届美国高中数学考试,1998年)

[解]　显然,$a_n=(n+9)(n+8)\cdots(n+1)n$.

又a_n中因子2的次数至少有$\left[\dfrac{10}{2}\right]+\left[\dfrac{10}{4}\right]+\left[\dfrac{10}{8}\right]=8$次.

而a_n中恰好有2个5的倍数,这时要使a_n最右边的非0数字是奇数,a_n必有一数在5的7次幂以上.

取$n=5^7-8$,使a_n中5与2的幂次和相等,注意到

$$5^7-8\equiv 5\ (\text{mod}\ 16).$$

下面考察a_n中最右面的非零数字,令$\alpha_k(n\leqslant k\leqslant n+9)$为$k$除去2、5全部幂次后的末位数字.注意到$5^7$末位数字是5.

$\because$　$5^7-8\equiv 5(\text{mod}\ 16)$，又$5\nmid 8$,$\therefore$　$10\nmid 5^7-8$，知$\alpha_n=7$.

又　$5^7-7\equiv 6(\text{mod}\ 16)$，且$5\nmid 7$,

$\therefore$　$2\,\|\,5^7-7$ (这里 $\|$ 表示$2\mid 5^7-7$,但$2^2\nmid 5^7-7$)，

$5\nmid 5^7-8$，知　$\alpha_{m+1}=\dfrac{25-7}{2}=9$

$\because$　$5^7-6\equiv 7(\text{mod}\ 16)$，且$5\nmid 6$,$\therefore$　$10\nmid 5^7-6$，$\therefore$　$\alpha_{m+2}=9$,

$\because$　$5^7-5\equiv 8(\text{mod}\ 16)$，$\therefore$　$5\,\|\,5^7-5$，$2^3\,\|\,5^7-5$,

$\therefore$　$\alpha_{n+3}=3$,

仿上有　$\alpha_{n+4}=1$，$\alpha_{n+5}=1$，$\alpha_{n+6}=3$，$\alpha_{n+7}=1$，$\alpha_{n+8}=1$，$\alpha_{n+9}=3$.

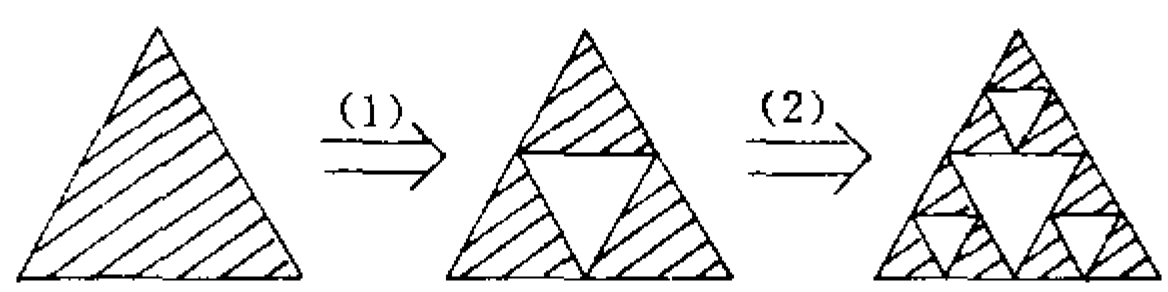
$\because$　$7\times 9\times 9\times\cdots\times 1\times 3$末位数字为9,知$a_k$右边第一个非0奇数是9.

故选(E).

第三十五章　涂色，取物，剖分

第1节　涂色问题

35·1　一个正三角形全涂上黑色，每次做一个变换，即把正黑三角形分成四个全等的小三角形，中间的小正三角形涂上白色(如图). 经过五次变换后，仍是黑色的部分还有



(A)$\frac{1}{1024}$.　(B)$\frac{15}{64}$.　(C)$\frac{243}{1024}$.　(D)$\frac{1}{4}$.　(E)$\frac{81}{256}$.

(第7届美国初中数学考试，1991年)

[解]　第一次"变换"后，黑色部分占全部的$\frac{3}{4}$；

第二次"变换"后，每个小黑三角形中又各有$\frac{1}{4}$被涂白，则所剩黑色部分占整个三角形的$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$；

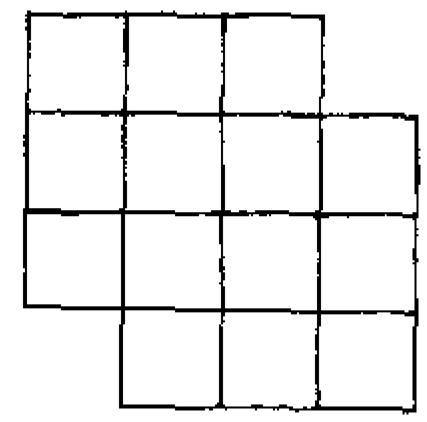
……………………

第五次"变换"后，所剩黑色部分占整个三角形的$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$. 故选(C).

35·2　右下图中所含正方形个数为

(A)14 个.　　(B)16 个.　　(C)23 个.　　(D)30 个.

(中国湖南省长沙市初中数学竞赛,1987 年)



[解] 图中边长为 1 的正方块有 14 个;

边长为 2 的正方块有 7 个(第一、二行有 2 个;第二、三行各有 3 个;第三、四行各有 2 个);

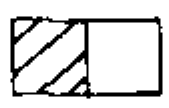
边长为 3 的正方块有 2 个.

总计　$14+7+2=23$ 个.

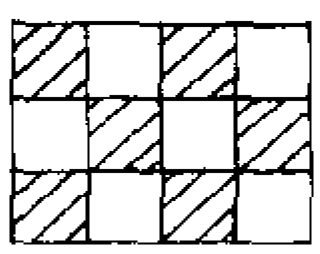
故选(C).

注　对一般 $n\times n$ 方格(不缺角)中各种小正方块的个数为

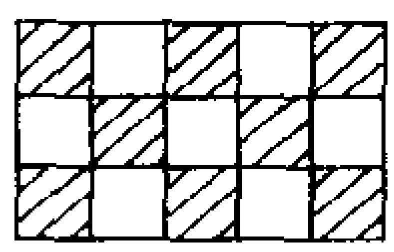
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

35·3　一种骨牌是由形如的一黑一白两个正方形组成,则下面棋盘不能只用这种骨牌不重复地完全覆盖的是

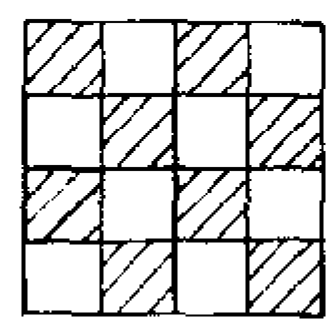
(A) 3×4.



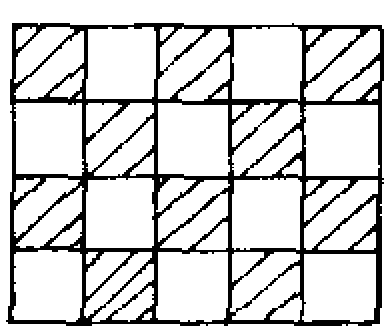
(B) 3×5.



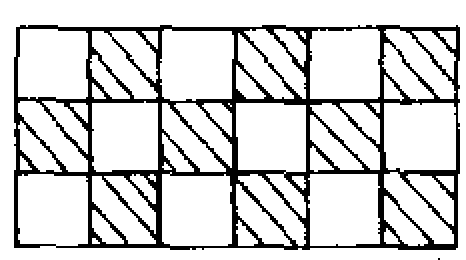
(C) 4×4.



(D) 4×5.



(E) 6×3.



(第 7 届美国初中数学考试,1991 年)

[解] 骨牌系由一白格,一黑格组成,则其能完全覆盖的图形中黑、白格子数应一样.

但(B)中黑、白格子数不一样.

当然,也可从小方格数的奇偶性上考虑,(B)是惟一有奇数个小方格的图形.

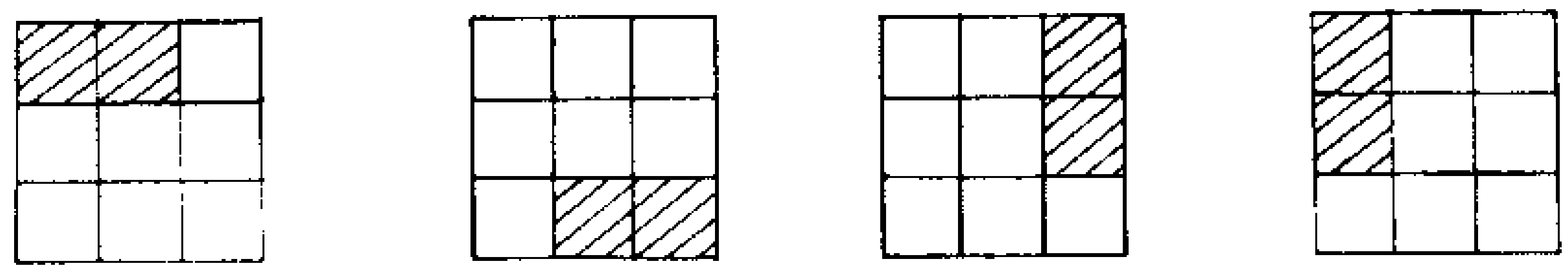
故选(B).

35·4　把图中九个方格中的两块涂黑,不同的涂色法的种类共有

(A) 3.　　(B) 6.　　(C) 8.　　(D) 12.　　(E) 18.

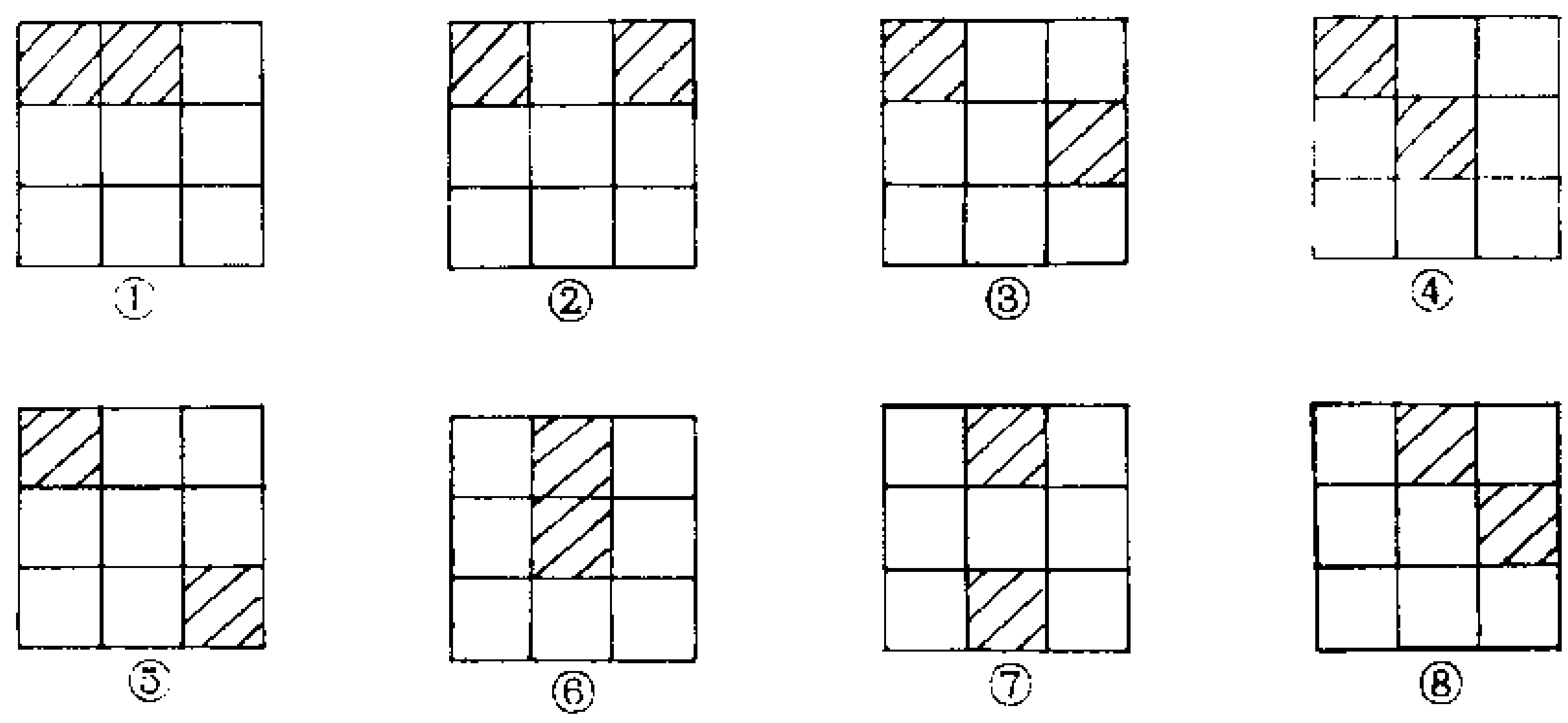
(如果两种涂法能够由翻转,旋转而重合,则把它们看成是一种涂法,如

图中四种涂法被看成是一种）



（第 6 届美国初中数学考试，1990 年）

［解］ 如图所示，计有 8 种不同涂法：

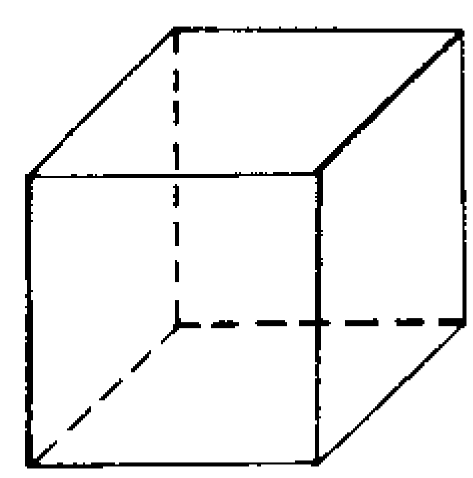


故选（C）.

35·5 正方体的每一条棱或者涂成红色，或者涂成黑色，每个面至少有一条涂成黑色的棱，那么黑色棱的条数最少为

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (E) 6.

（第 41 届美国高中数学考试，1990 年）



［解］ 因正方体有 6 个面，只须在有公共棱的三对面中的公共棱涂黑色（互为异面直线，如图）即可.

故选（B）.

35·6 1000 个单位正方体合在一起成为一个棱长是 10 个单位的大正方体，油漆后再分开为原来的正方体. 这些单位正方体中至少有一面被油漆过的数目是

(A) 600. (B) 520. (C) 488. (D) 480. (E) 400.

（第 24 届美国高中数学考试，1973 年）

［解］ 大正方体内有 $8\cdot8\cdot8=512$ 个内部的单位正方体是所有未油漆过的.

因此有 $10^3-8^3=1000-512=488$ 个正方体至少有一面油漆过.

故选（C）.

35·7　把一个 3·3·3 的正方体的每一个面(共六个面)都等分成大小相同的 9 个小正方形(共 54 个小正方形).现用红,黄,蓝三种颜色去涂这些小正方形,使得有公共边的小正方形不能同色.那么,可以涂成红色的小正方形,最多有

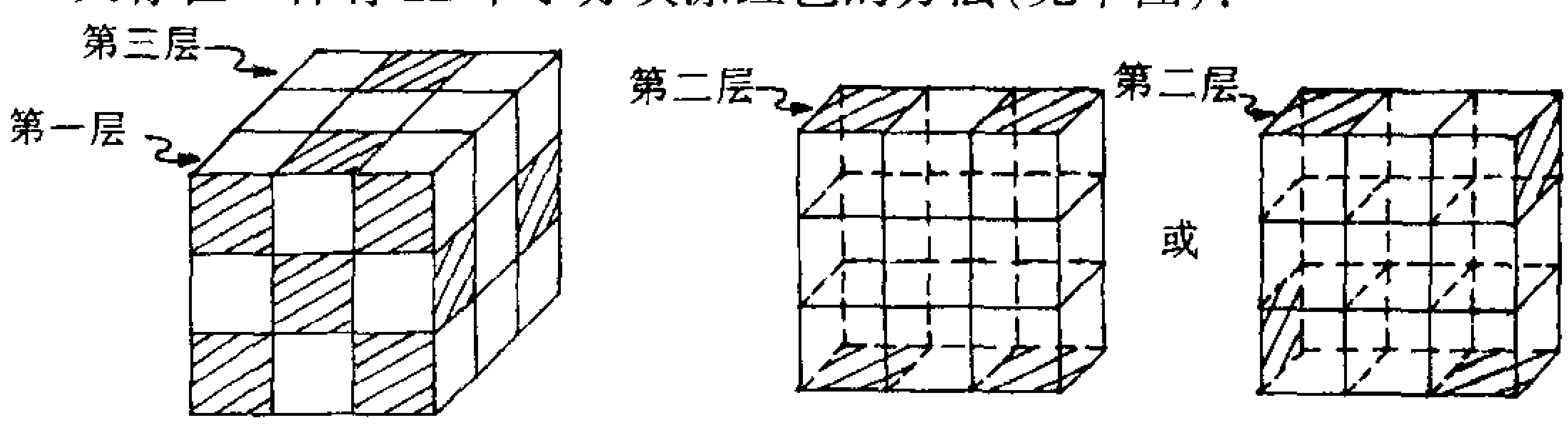
(A) 28 个.　　(B) 27 个.　　(C) 22 个.　　(D) 20 个.

(“祖冲之杯”初中数学邀请赛,1989 年)

[解]　要考虑同一面上有公共边的小正方形不能同色,还要考虑邻面上有公共边(棱)的小正方形不能同色.

因为每个小正方块只能有一面涂成红色,这样总共有 $3^3-1=26$ 个小正方块可涂红色(除去最中间的小正方块).故可否(A),(B).

又存在一种有 22 个小方块涂红色的方法(见下图):



第 1,3 层涂色方法　　　　第 2 层涂色方法

第 1,3 层涂色方法相同,共有 $9\cdot2=18$ 个小正方块可涂红色;第 2 层可有 4 个小正方块涂红色,这样总计有　$18+4=22$ 个.

故选(C).

35·8　一木制正方体的边长为 n 单位(这里 $n>2$ 的整数).将此正方体的表面全部涂上黑色的漆,再用平行于此正方体各个面的平面将正方体切割成 n^3 个边长为 1 单位的小正方体.若恰有一面涂有黑漆的小正方体的个数正好等于六面全无涂漆的小正方体的个数,n 是

(A) 5.　(B) 6.　(C) 7.　(D) 8.　(E)以上结论都不对.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　由题设知恰有一面涂漆的小正方块有 $6\cdot(n-2)^2$ 个,六个面均未涂漆的小正方块有 $(n-2)^3$ 个.依题意有

$$(n-2)^3=6(n-2)^2,$$

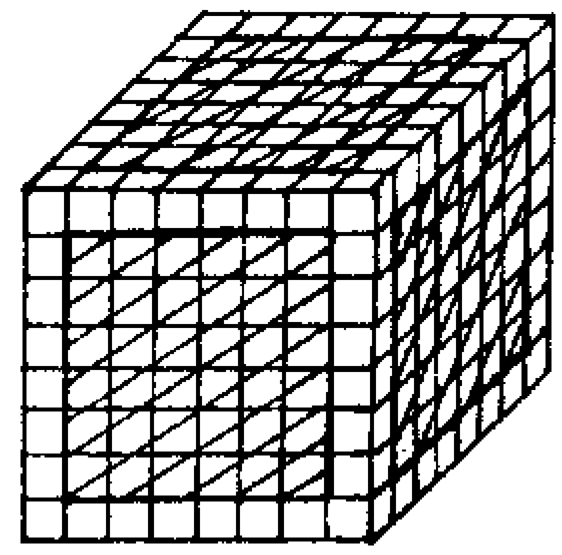
即

$$n-2=6\quad(\because n>2).$$

所以　$n=8$.

故选(D).

35·9　把边长为 $a$cm(a 是大于 2 的自然数)的正方体表面涂上红色,然后切割成体积是 1cm^3 的小正方体.其中一面,两面,三面涂色的小正方体块数依次为



(A) $6(a-2)^2$, $12(a-2)$, 8.

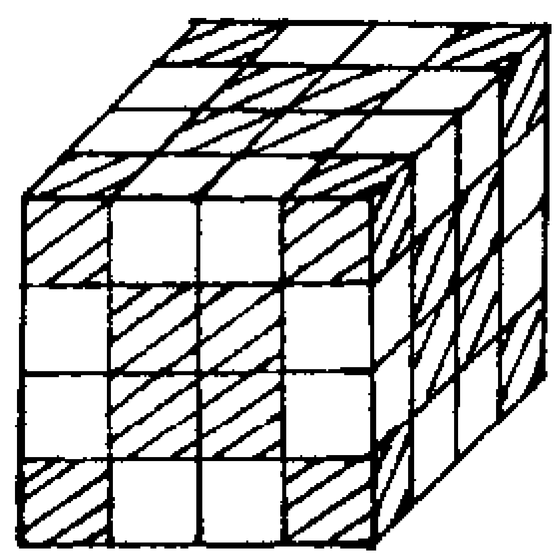
(B) $6(a-2)^2$, $12(a-2)$, 6.

(C) $6(a-2)$, $12(a-2)$, 8.

(D)非上述答案.

("天府杯"初中数学邀请赛,1988 年)

[解]　一面涂色的小正方体的棱不能与原正方体的棱重合,故每面有$(a-2)^2$ 个,共有 $6(a-2)^2$ 个;



两面涂色的小正方体靠在原正方体的棱处,但须将顶点处小正方体除去(它有三面涂色),这样每条棱处有 $a-2$ 个,总计有 $12(a-2)$个;

三面涂色的小正方体在原正方体顶点处,计有 8 个.

综上,故选(A).

35·10　一个 $11\times11\times11$ 的正方体是 11^3个单位正方体贴合而成的,问从一点看上去最多能看见单位正方体的个数是

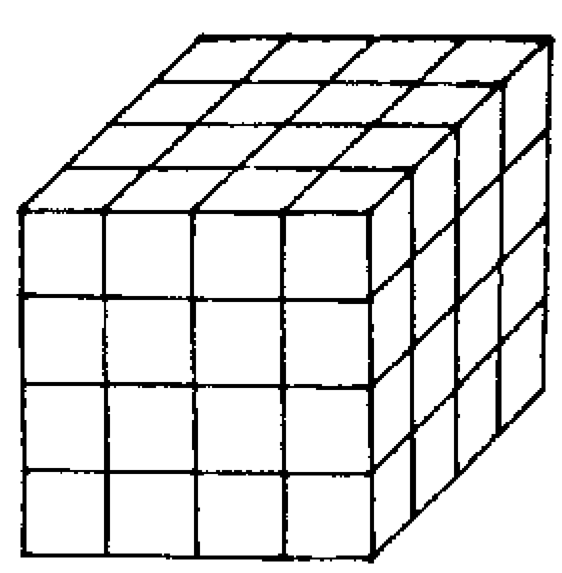
(A) 328.　(B) 329.　(C) 330.　(D) 331.　(E) 332.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解]　从一点看正方体最多能看 3 个面(如图,图中为 $4\times4\times4$ 的正方体).

正前面有 $11\cdot11$ 个单位正方块可见;

侧面因与正前面公共棱处的单位正方块已算过,则还剩下 $11\cdot10$ 个单位正方块可见;

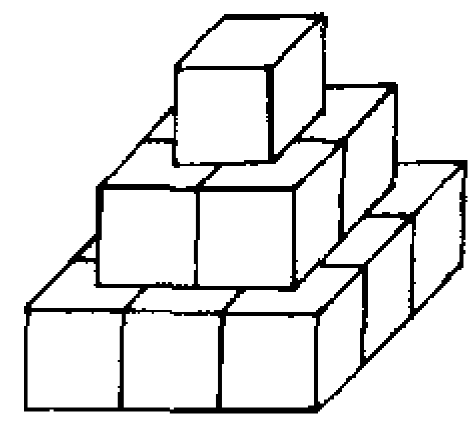


正方体顶(上)面,除去已经算过的外还有 $10\cdot10$ 个单位正方块可见.

总计有　$11\cdot11+11\cdot10+10\cdot10=331$(个).

故选(D).

35·11　一位画家有 14 个棱长 1 米的正方体，她在地面上把它摆成如右图的形式．然后，她将露出的表面都涂上颜色．平方米被她涂上颜色的个数有



(A) 21.　　(B) 24.　　(C) 33.

(D) 37.　　(E) 42.

（第 5 届美国初中数学考试，1989 年）

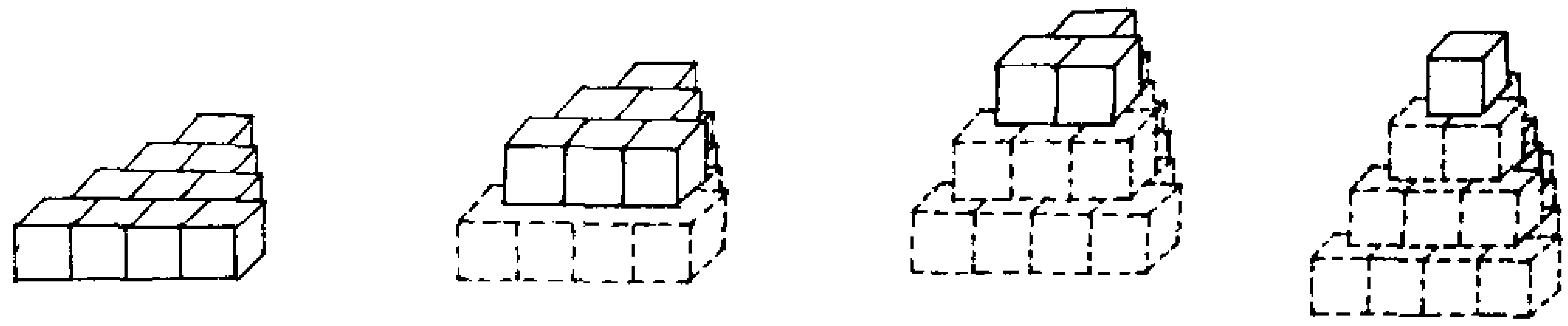
［解］　显然所摆形状上表面被涂色的部分恰好为 $3\cdot3$ 个正方块的上表面，其面积为 $3\cdot3=9$；

侧面被涂色面积分别为 4，　$4\cdot2$，　$4\cdot3$，计 $4(1+2+3)=24$；

总共有　$24+9=33$ 平方米被涂上颜色．

故选(C)．

35·12　20 块正方体积木如图所示被堆放起来．首先，第一层由 10 块排成一个三角形样式；然后第二层是排成一个三角形样式的 6 块放在第一层的中央；第三层是排成一个三角形样式的 3 块放在第二层的中央；最后 1 块积木放在第三层的中央．底层的 10 块积木按某种顺序标上从 1 到 10 的数，标在第二，三，四层的每块积木上的数等于它所依托的下一层的 3 块积木的数之和．



标在最顶上的那块积木的数的最小可能值是

(A) 55.　　(B) 83.　　(C) 114.　　(D) 137.　　(E) 144.

（第 44 届美国高中数学考试，1993 年）

［解］　注意到第一层的中心格子被计算的次数最多，应标记为 1，那些在角上的格子被利用的最少，应标记为 8,9,10．例如，为了得到正确答案，按下图示来标记底层的格子．

$$
\begin{array}{c}
8 \\
2 \quad 3 \\
7 \quad 1 \quad 4 \\
9 \quad 6 \quad 5 \quad 10
\end{array}
$$

更一般地,记底层的格子标记为

$$
\begin{array}{c}
v_1 \\
e_1 \quad e_2 \\
e_3 \quad c \quad e_4 \\
v_2 \quad e_5 \quad e_6 \quad v_3
\end{array}
$$

则第二层格子标数为

$$
\begin{array}{c}
(e_1+e_2+v_1) \\
(c+e_1+e_3) \quad (c+e_2+e_4) \\
(e_3+e_5+v_2) \quad (c+e_5+e_6) \quad (e_4+e_6+v_3)
\end{array}
$$

第三层格子标数为

$$
\begin{array}{c}
(2c+2e_1+2e_2+e_3+e_4+v_1) \\
(2c+e_1+2e_3+2e_5+e_6+v_2) \quad (2c+e_2+2e_4+e_5+2e_6+v_3)
\end{array}
$$

所以 $t=6c+3(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6)+(v_1+v_2+v_3)$是最上面格子的标数.

因此 $c=1$, $\{e_1,e_2,\cdots,e_6\}=\{2,3,\cdots,7\}$,且$\{v_1,v_2,v_3\}=\{8,9,10\}$时,$t$ 取到最小值.所以 t 的最小值为

$$6\cdot 1+3\cdot(2+3+\cdots+7)+(8+9+10)=114.$$

故选(C).

35·13 一个小孩有一套 96 块不同的积木,每块积木的质地或是塑料的或是木头的,型号又有大,中,小三种,颜色染为蓝,绿,红,黄四种中之一色,形状为圆,六边形,正方形,三角形之一种.那么这套积木中与“塑料的,中号的,红色的,圆形积木”有两处不同的积木种数为

(A) 29. (B) 39. (C) 48. (D) 56. (E) 62.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[解] 与题设四类有两处不同的积木数可见下表(注意质地有 2 种,型号有 3 种,颜色有 4 种,形状有 4 种)

不同处	红,圆	中,红	中,圆	塑,中	塑,红	塑,圆
种类数	$C_3^1C_3^1$	$C_2^1C_3^1$	$C_2^1C_3^1$	$C_1^1C_2^1$	$C_1^1C_3^1$	$C_1^1C_3^1$

(这里分别用第一个字代替诸类别)

因此总数有　$3\cdot3+2\cdot3+2\cdot3+2+3+3=29$.

故选(A).

第2节　取物问题

35·14　某校学生100人参加数学竞赛,其中至少有女生9人,又知参赛者中任何10人中至少有男生1人,则参赛男生人数为

(A) 89.　　(B) 91.　　(C) 82.　　(D) 63.

(第1届"五羊杯"初中数学竞赛,1989年)

[解]　若女生有10人,则她们中就无男生,这与题设矛盾.

因而,女生刚好为9人,即男生91人.

故选(B).

35·15　四位同学到商店买毛笔或铅笔,每人只买了1枝笔,而且至少有1人买了铅笔.则可能的买法有

(A) 4种.　　(B) 5种.　　(C) 15种.　　(D) 16种.

(第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年)

[解]　每个人都有买毛笔或铅笔两种可能选择,四个人便有$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$种选择,但其中有一种是大家都买了毛笔不合题意,则应减去.

则总共有$16-1=15$种买法.

故选(C).

35·16　一俱乐部有x个会员,按下列两个规则组成四个委员会

(1)每一会员属于两个且仅属于两个委员会;

(2)每两个委员会共有一个且仅共有一个委员.

则x

(A)不能确定.　　(B)有一值且介于8与16之间.

(C)有二值且介于 8 与 16 之间. (D)有一值且介于 4 与 8 之间.

(E)有二值且介于 4 与 8 之间.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解] 四个委员会任选两个的方式数为 $C_4^2=6$,每两委员会任命一委员,则共 6 人.

此 6 人恰好每人属于且仅属于两个委员会.

故选(D).

35·17 在木箱里装有红色球 3 个,黄色球 5 个,蓝色球 7 个,若蒙眼去取球,为保证取出的球中有两个球的颜色相同,最少要取出球的个数为

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1991 年)

[解] 考虑极端的情形:取出 3 个球不一定能保证有两个同色球,因为 3 个球颜色可以相异.

这时若再取一个球,则能保证取到两个同色球.

故选(B).

35·18 暗室里红,绿,蓝,黄,白五种颜色袜子各若干,为确保从室内取出 10 双袜子(两只袜子颜色相同即一双),应从室内取出袜子的最少只数是

(A) 23.　　(B) 24.　　(C) 25.　　(D) 26.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛,1990 年)

[解] 若取出 23 只袜子时,单只的最多有 5 只(五种颜色),而其余 18 只可配成 9 双袜子.

5 只单只的袜子,再取 1 只便可又配成 1 双.

这样,取出 24 只袜子时,便可保证配成 10 双袜子.

故选(B).

注 此结论可推广为:

m 种不同花色的袜子,要保证配成 n 双,则至少取 $2n+m-1$ 只.

35·19 在黑屋子里的一个抽屉里放了 100 只红袜子,80 只绿袜子,60 只蓝袜子和 40 只黑袜子.一个年轻人每次从抽屉里挑出一只袜子,但是他看不见他拿到的袜子的颜色,保证其中至少有 10 双袜子,那么他最少必须挑出袜子的只数是

（颜色相同的两只袜子是一双.同一只袜子在配对时不能重复计算）

(A) 21.　(B) 23.　(C) 24.　(D) 30.　(E) 50.

（第37届美国高中数学考试,1986年）

[解] 每挑5只袜子可保证至少配成一双袜子,拿出这双袜子后还剩3只.

再从中拿出2只与所剩3只又可配出一双袜子.

如此下去,不难知道,当袜子拿出

$$(3+2)+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{9个}=3+10\cdot2=23$$

只时,可保证配出10双袜子.

故选(B).

35·20 袋中有100个球,其中红球28个,绿球20个,黄球12个,蓝球20个,白球10个,黑球10个,从袋中任意摸出球来,要使一次摸出的球中至少有15个同色球,则需从袋中至少摸出的球数是

(A) 100个.　(B) 75个.　(C) 68个.　(D) 77个.

（中国江苏省苏州市初中数学竞赛,1985年）

[解] 考虑极端的情形,即一次摸出的球中有:

黑球10个,白球10个,黄球12个,红,绿,蓝球各14个(此时黑,白,黄三球已摸尽),计74个球.

这时若再摸出一个球,则可得到至少有15个同色球.

故选(B).

35·21 一个盒子中装有许多木片,分别是红的,白的和蓝的.蓝木片的数目至少是白木片数目的一半,至多是红木片的三分之一.白的与蓝的数目和至少是55.红木片的最小值是

(A) 24.　(B) 33.　(C) 45.　(D) 54.　(E) 57.

（第22届美国高中数学考试,1971年）

[解] 令 w,b 和 r 分别表示白,蓝和红色木片数.那么 $w\leqslant 2b$,且 $3b\leqslant r$.又知 $w+b\geqslant55$,因此 $2b+b=3b\geqslant55$.

b 是整数,则 $b\geqslant19$,

所以 $r\geqslant3b\geqslant57$.红木片的最小值是57.

故选(E).

35·22 某超级市场有128箱苹果.每箱120个到144个不等.装

苹果个数相同的箱子称为一组，问其中最大一组箱子的个数 n 最小是

(A) 4.　　(B) 5.　　(C) 6.　　(D) 24.　　(E) 25.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解]　1 箱中能够装的苹果数有 120，121，…，144 等 25 种不同的方式．如果每种各装 5 箱，那么至多 $25\cdot 5=125$ 箱．

因为现在有 128 箱，所以 $n\geqslant 6$．

因为存在下述装箱可能：装有 k 个苹果（$k=120,121,122$）的箱子各有 6 箱，而装 l 个苹果（$123\leqslant l\leqslant 144$）的箱子各有 5 箱．这样 $n\leqslant 6$．

因而 $n=6$．

故选（C）．

注　若箱子总数为 126 时，系第 2 届天津市“中华少年杯”数学邀请赛（1987 年）试题．

而 126 系保证命题结论成立的最少箱数．

35·23　把一张纸剪成 5 块，从所得纸片中取出若干块，每块剪成 5 块；再从以上所有纸片中取出若干块，每块剪成 5 块；如此继续，至剪完某一次后停止．共得纸片总块数可能是

(A) 1990.　　(B) 1991.　　(C) 1992.　　(D) 1993.

（第 9 届“缙云杯”初中数学邀请赛，1992 年）

[解]　因每张纸片取出后总是一分为五，即增加 4 块，这样取 k 张纸片剪后的纸片总数增加 $4k$．又最初纸片为 $1+4$，这时纸片总数为

$$1+4+4k=1+4(k+1),$$

即纸片剪后总数总保持 $4n+1$ 的形式．

$\because$　$1993\div 4=498\cdots\cdots 1$　或　$1993=4\cdot 498+1$．

故选（D）．

35·24　盒中原有 7 个小球，一位魔术师从中任取几个小球，把每一个小球都变成 7 个小球，将其放回盒中，他又从盒中任取一些小球，把每一个小球又都变成 7 个小球后放回盒中．如此进行，到某一时刻，魔术师停止取球变魔术时，盒中球的总数可能是下面的

(A) 1990 个．　(B) 1991 个．　(C) 1992 个．　(D) 1993 个．

（“祖冲之杯”初中数学邀请赛，1991 年）

[解]　由题设魔术师每次总是把一个小球变成 7 个小球，这就是说不管每次取多少个小球变，变后小球总数增加总是 6 的倍数．

这样不论变换多少次,小球总数被 6 除后的余数不变.

又　$7\div6=1\cdots\cdots1$,即开始时小球数被 6 除后余 1.

而　$1990\div6=331\cdots\cdots4$,　$1991\div6=331\cdots\cdots5$,

　　$1992\div6=332$,　　$1993\div6=332\cdots\cdots1$,

则某个时刻球的总数只能是 1993.

故选(D).

35·25　六个袋内分别装有 18,19,21,23,25 与 34 个玻璃球,其中一个袋内装的球都有裂口,而其余五个袋内都没有这种带裂口的球.今珍妮拿了其中三个袋,乔治拿了另外两个袋,只剩下那个装有带裂口的球的袋.若珍妮得到的球数正好是乔治得到的两倍,带裂口的球的个数是

(A) 18.　　(B) 19.　　(C) 21.　　(D) 23.　　(E) 25.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　由设珍妮的球数为乔治球数的 2 倍,则他们两人球总数应是 3 的倍数.

又　$(18+19+21+23+25+34)\div3=46\cdots\cdots2$,

因而裂口球数应为除 3 余 2 者,题设诸数中仅 23 有此性质.

故选(D).

35·26　最初罐子里有黑,白弹子各 100 个,重复下面的操作:每次从罐子里取出三个弹子,并从另外一堆弹子中拿相应数目的弹子放回罐中,具体数目和颜色是:

取出的弹子	放回的弹子
3 个黑的.	1 个黑的.
2 个黑的,1 个白的.	1 个黑的,1 个白的.
1 个黑的,2 个白的.	2 个白的.
3 个白的.	1 个黑的,1 个白的.

经过一定次数后,最终罐子里所剩的弹子可能的情况是

(A) 2 个黑色弹子.　　(B) 2 个白色弹子.

(C) 1 个黑色弹子.　　(D) 1 个黑色和 1 个白色弹子.

(E) 1 个白色弹子.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[**解**] 从取，放弹子手续可以看出：

无论哪种情况，白色弹子在实施一次取放手续后，数目要么不变，要么减少 2 个. 换句话说：

每一次取，放后，白色弹子数目的减少均为偶数(0 视为偶数).

而开始有白色弹子 100 个，它是偶数，故无论取，放多少次后，其个数仍为偶数. 且白球只有多于 3 个时才减少，因而最后至少剩下 2 个.

故选(B).

35·27 将 10 元纸币兑换成一角硬币和二角五分硬币，则兑换有两种硬币的不同方法总数 n 为

(A) 40. (B) 38. (C) 21. (D) 20. (E) 19.

(第 19 届美国高中数学考试，1968 年)

[**解**] 设 10 元币兑换成一角币，二角五分币的个数分别为 p 和 q，则

$$10p+25q=1000.$$

即

$$2p=5(40-q).$$

上式式左为正偶数，故式右 $40-q$ 必为偶数. 则 $q<40$ 的偶数适合，这种偶数共 19 个.

故选(E).

35·28 一个大袋里装有面值为 1 分，1 角和 2 角 5 分的三种硬币. 其中 1 角硬币的个数是 1 分硬币的个数的二倍，而面值 2 角 5 分的硬币的个数是 1 角硬币的个数的三倍. 在这个袋里，钱(以分为单位)的总数的可能值是

(A) 306. (B) 333. (C) 342. (D) 348. (E) 360.

(第 36 届美国高中数学考试，1985 年)

[**解**] 设 1 分硬币个数为 x，依题 1 角和 2 角 5 分的硬币分别有 $2x$ 和 $6x$ 个. 这样钱币价值为

$$s=x+10\cdot 2x+25\cdot 6x=171x,$$

当 $x=2$ 时， $s=342$.

故选(C).

35·29 利用三种不同重量：1 克，3 克，9 克的砝码，可以称出不同物品的重量，假设要称的物品与已知的重量可以置于天平的两盘之一上，问称出不同重量的物品的种数为

(A) 15. (B) 13. (C) 11. (D) 9. (E) 7.

(第 10 届美国高中数学考试，1959 年)

［解］ 用枚举法.

先考虑砝码只放在天平一端的盘内时：

用一枚砝码可称出 1,3,9 克重的物品；

用两枚砝码可称出 4,10,12 克重的物品；

用三枚砝码可称出 13 克重的物品.

再考虑砝码允许放在天平两端的盘内时：

用两枚砝码能称出 $3-1,9-1,9-3$ 克重的物品；

用三枚砝码能称出 $9-(1+3),(9+1)-3,(9+3)-1$ 克重的物品.

综上,共可称出 13 种不同重量的物品.

故选(B).

35·30 将 1 张唱片标上 1,2 张唱片标上 2,3 张唱片标上 3,……,50 张唱片标上 50,然后将这 $1+2+3+\cdots+50=1275$ 张唱片放进一个盒子里.若每次取一张且不放回,为保证拿出的唱片有 10 张标有相同的数码,则至少应拿出的唱片数为

(A)10. (B)51. (C)415. (D)451. (E)501.

（第 45 届美国高中数学考试,1994 年）

［解］ 考虑极端(最坏的情形)：

取出 1 张标有 1 号的唱片,2 张标有 2 号的唱片,…,8 张标有 8 号的唱片,对标 9～50 的各号唱片各取出 9 张,总计：

$$1+2+3+\cdots+8+9\times(50-8)=414,$$

若再取 1 张唱片,则可保证至少有一种标号的唱片不少于 10 张.

故选(C).

35·31 一个盒子装有红、白、蓝、绿四种颜色玻璃球,每轮拿出四次玻璃球且不放回,并且下列情况均等发生:(a)拿出的是四个红球;(b)拿出的是一个白球、三个红球;(c)拿出一个白球、一个蓝球和两个红球;(d)每种颜色球各一个.则满足要求的球的总数至少为

(A)19. (B)21. (C)46. (D)69. (E)大于 69.

（第 47 届美国高中数学考试,1996 年）

［解］ 设红、白、蓝、绿球分别有 x、y、z、t 个,依题设有

$$C_x^4=C_x^3C_y^1=C_x^2C_y^1C_z^1=C_x^1C_y^1C_z^1C_t^1.$$

即 $$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}=\frac{x(x-1)(x-2)y}{6}$$
$$=\frac{x(x-1)yz}{2}=xyzt.$$

故 $$y=\frac{x-3}{4},\ z=\frac{x-2}{3},\ t=\frac{x-1}{2}. \qquad (*)$$

∴ $x\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$

则 $x\equiv-1(\mathrm{mod}\ 4)\equiv-1(\mathrm{mod}\ 3)=-1(\mathrm{mod}\ 2)$

∴ $x\equiv-1(\mathrm{mod}\ 12)$，知 $x\geqslant11$.

注意到(*)式,从而 $y\geqslant2$，$z\geqslant3$，$t\geqslant5$.

因而 $$x+y+z+t\geqslant21.$$

故选(B).

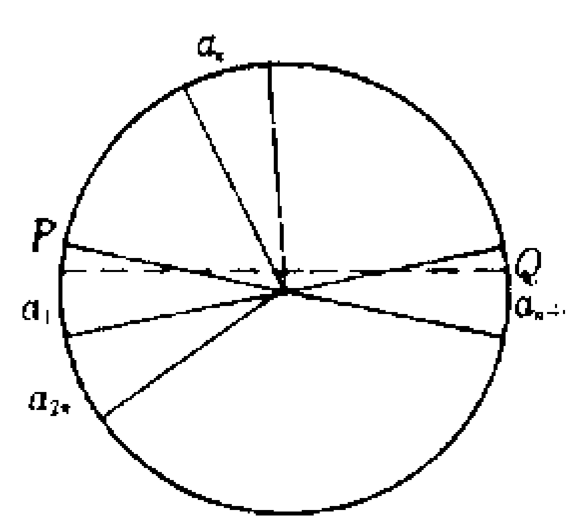
第3节 剖分问题

35·32 一个圆盘被 $2n$ 条相等间隔的半径($n>0$)和一条割线所分割.这个圆盘能够被分成的不交叠区域的最大数目是

(A) $2n+1$. (B) $2n+2$. (C) $3n-1$. (D) $3n$. (E) $3n+1$.

(第22届美国高中数学考试,1971年)

[解] 对于 $2n$ 个相等的扇形 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$,一条割线 PQ 只能够横割$(n+1)$个扇形,并把它们每个分割成两部分.



那么不同区域的总数是
$$2n+(n+1)=3n+1.$$

故选(E).

35·33 六条直线在同一平面内,任何两直线不平行,任何三直线不共点,则这六条直线把平面分成的区域数为

(A) 16. (B) 20. (C) 22. (D) 24. (E) 26.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解] 一条直线可把平面分成2个区域即 $1+1$;

添加一条直线(符合题设时)使平面被分割的区域数为添线前的区域数与添加序数的和,即 n 条直线可将平面最多分割成的区域数为

$$1+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

$n=6$ 时，上式值为 22.

故选(C).

35·34　直线 $L_1,L_2,\cdots,L_{100}$是相异的，且所有的直线 L_{4n}互相平行(n 是正整数)；所有的直线 L_{4n-3}过一已知点 A(n 是正整数). 整个集合$\{L_1,L_2,\cdots,L_{100}\}$中直线交点数目的最大值是

(A) 4350.　(B) 4351.　(C) 4900.　(D) 4901.　(E) 9851.

（第 27 届美国高中数学考试，1976 年）

[解]　100 条直线相交至多有 $C_{100}^2=\frac{100\cdot 99}{2}=4950$ 交点.

但是直线 $L_4,L_8,\cdots,L_{100}$是平行的，因此失去 $C_{25}^2=300$ 个交点.

又直线 $L_1,L_5,\cdots,L_{97}$只相交于 A 点，所以又失去 $C_{25}^2-1=299$ 个交点.

$\therefore$交点数目的最大值是　$4950-300-299=4351$.

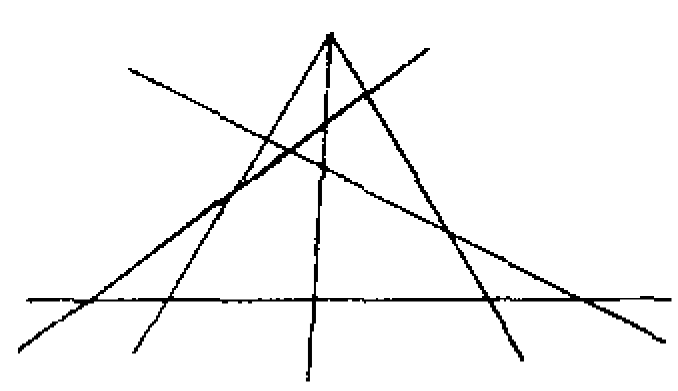
故选(B).

35·35　平面上 6 条直线两两相交，但仅有三条通过同一点，则截得不重叠线段条数为

(A) 24.　(B) 33.　(C) 36.　(D) 21.

（第 1 届“五羊杯”初中数学竞赛，1989 年）

[解]　平面上直线若无三线共点者，则每条直线与其他直线有 5 个交点，截得不重叠线段 4 条.



但题设直线中有三条交于一点，这样所截线段少 3 条，则这些直线截得不重叠线段

$6\cdot 4-3=21$(条).

故选(D).

35·36　在三角形内(不在边上)有 3 个点，连同原三角形的 3 个顶点，共有 6 个点，以这六个点为顶点作出所有不重叠的三角形，如果这 6 个点中没有三点共线，所有三角形的个数为 n_0；如果 6 个点中有三点共线(但无四点共线)，所作三角形的个数为 n_1；如果这 6 个点中有四

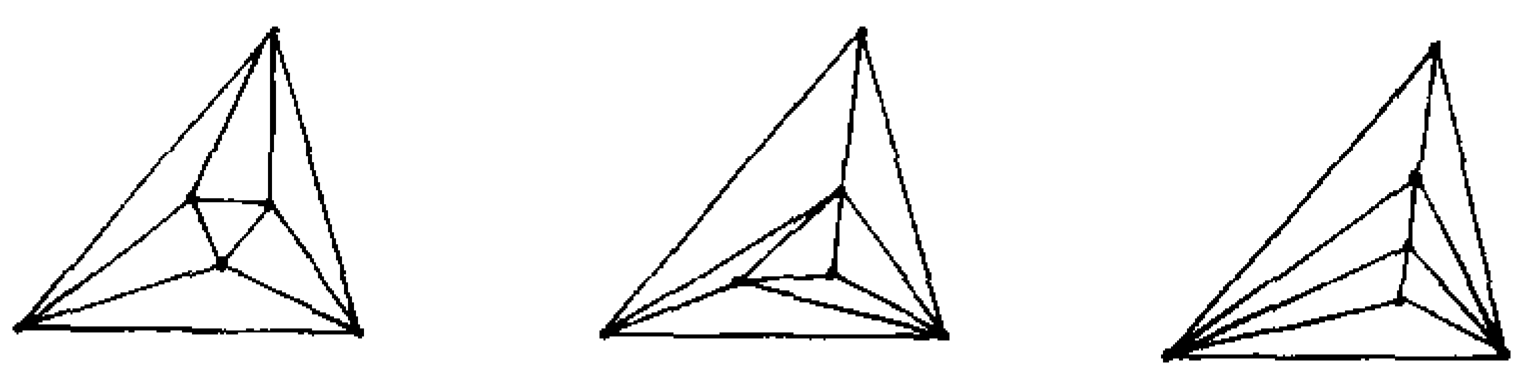
点共线，所作三角形的个数为 n_2，那么

(A) $n_0=n_1=n_2$.　　(B) $n_0>n_1>n_2$.

(C) $n_0>n_1\geqslant n_2$.　　(D) $n_0\geqslant n_1>n_2$.

（中国初中数学联赛，1989 年）

[解] 无论是这三种情况的哪一种，以这 6 个点为顶点作出所有不重叠的三角形的个数都是 7 个，即 $n_0=n_1=n_2=7$(见下图).



$n_0=7$　　$n_1=7$　　$n_2=7$

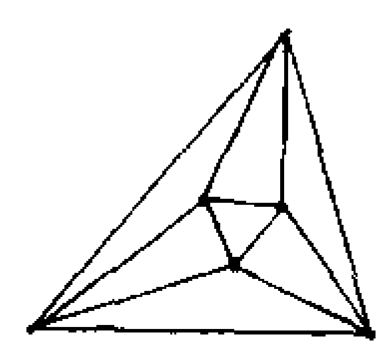
故选(A).

35·37　以三角形的 3 个顶点和它内部的 7 个点(共 10 个点)为顶点，能把原三角形分割成小三角形的个数是

(A) 11.　　(B) 15.　　(C) 19.　　(D)不能确定.

（中国上海市初中数学竞赛，1985 年；
中国江苏省初中数学竞赛，1988 年）

[解 1] 设能把原三角形分割成 m 个小三角形. 考虑其全部内角和：



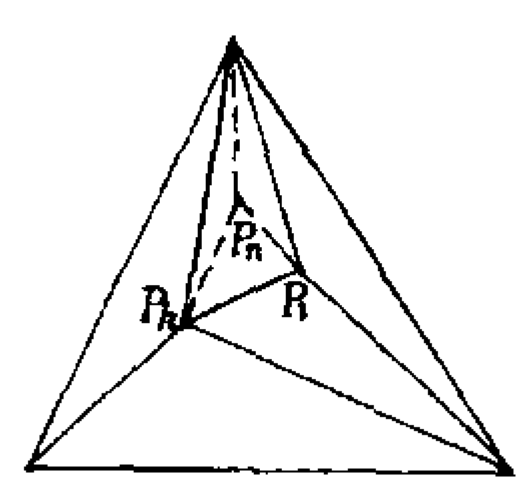
一方面，m 个三角形内角和为 $m180°$；
另一方面，三角形内的点连线后为一周角，则 7 个点处的周角为 $360°\cdot7$，加上原来三角形内角和 $180°$，共计

$$360°\cdot7+180°.$$

这样　$m\cdot180°=360°\cdot7+180°$，解得　$m=15$.

故选(B).

[解 2] 先考察一般的情形：三角形内有 n 个点.



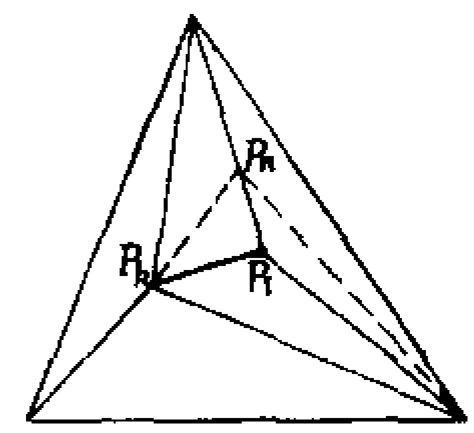
图①

若其内 $n-1$ 个点能把原三角形分割的个数记为 a_{n-1}，我们考察新增第 n 个点 p_n 的情形.

(1)若 p_n 在某个小三角形内(如图①)，p_n 与该小三角形三顶点连线，将其一分为三，即增加 2 个小三角形；

(2)若 p_n 在两个小三角形的公共边上(如图②)，该点与两小三角

形顶点连线,可将其二分为四,亦增加 2 个小三角形.



图②

这样有 $a_n = a_{n-1} + 2$, 且 $a_0 = 1$.

$\therefore \quad a_n = a_{n-1} + 2 = a_{n-2} + 4 = \cdots$

$\quad = a_0 + 2n = 2n + 1$.

当 $n = 7$ 时, $a_7 = 15$.

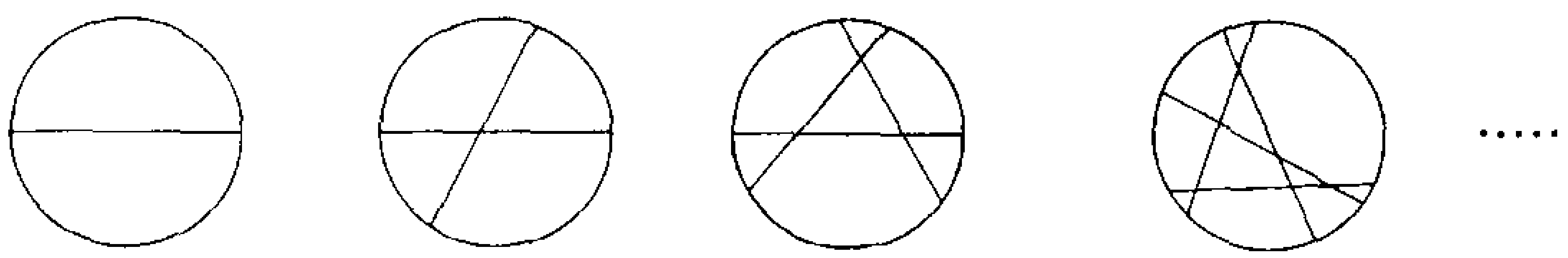
故选(B).

35·38 在一个圆中画6 条弦,把圆面分成n 个平面部分,则 n 的最大值是

(A) 18. (B) 22. (C) 24. (D) 32.

(中国部分省、市初中数学通讯赛,1990 年)

[解] 从下面分法中我们能够发现:



1+1 ($n=1$)　1+1+2 ($n=2$)　1+1+2+3 ($n=3$)　1+1+2+3+4 ($n=4$)　……

第 k 步时增加一条弦,相当把圆又多分了 k 部分,这样 k 条弦最多可把圆分成

$$n = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} + 1(\text{部分}).$$

$k = 6$ 时, 得 $n = 22$.

故选(B).

35·39 一条直线分一张平面为两部分,二条直线最多分一张平面为四部分.设五条直线最多分一张平面为 n 个部分,则 n 等于

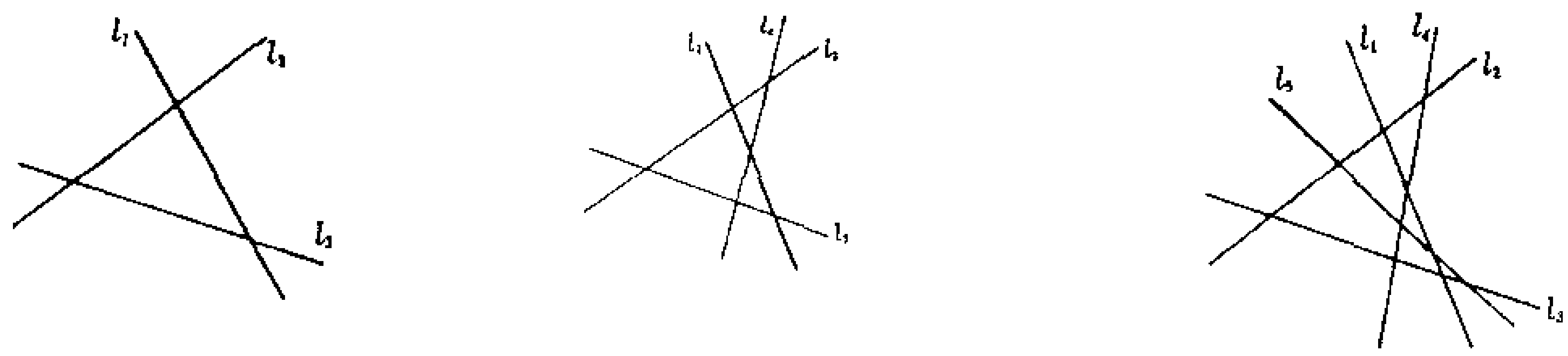
(A) 32. (B) 31. (C) 24. (D) 18. (E) 16.

(中国北京市初中数学竞赛,1984 年)

[解] 只有在任二直线不平行,任何三线不共点时才有可能分平面部分最多.

容易验证,三条直线最多分一张平面为七部分,第四条直线与前三条相交被分为“四段”,因此四条直线分平面部分比三条直线多四部分,

为 7 + 4 = 11 部分.



同理可得:五条直线最多分一张平面为 11 + 5 = 16 部分.

故选(E).

35·40　一张平面把空间分为两部分,两张平面最多把空间分为四部分.设四张平面最多把空间分为 n 部分,则 n 等于

(A) 14.　　(B) 15.　　(C) 16.　　(D) 13.　　(E) 10.

(中国北京市高中数学竞赛,1984 年)

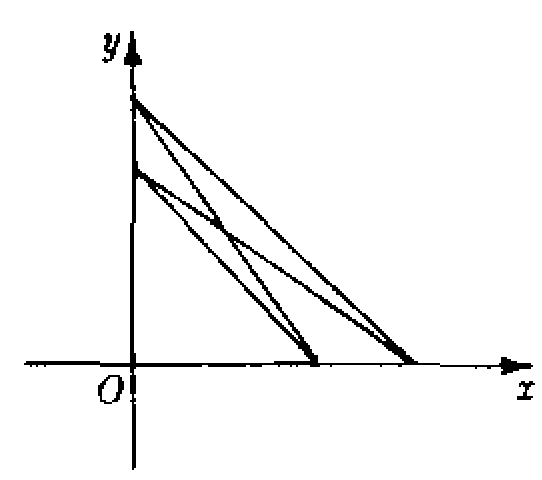
[解]　只有任二平面不平行,任三平面不相交于同一条直线时,才能使所考虑的平面分空间部分数最多.设想一个四面体的各面成无限平面,则这四个平面可作为一个"模型".不难计算出四张平面最多把空间分为 15 个部分.

故选(B).

注　一般地可以推导出:

k 张平面最多可把空间分成 $\frac{k^3+5k+6}{6}$ 部分.

35·41　x 正半轴上有 10 个点,y 正半轴上有 5 个点.x 正半轴上的 10 个点和 y 正半轴上的 5 个点连成 50 条线段,这 50 条线段在第一象限内的交点个数最多是



(A) 250.　　(B) 450.　　(C) 500.

(D) 1250.　　(E) 2500.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

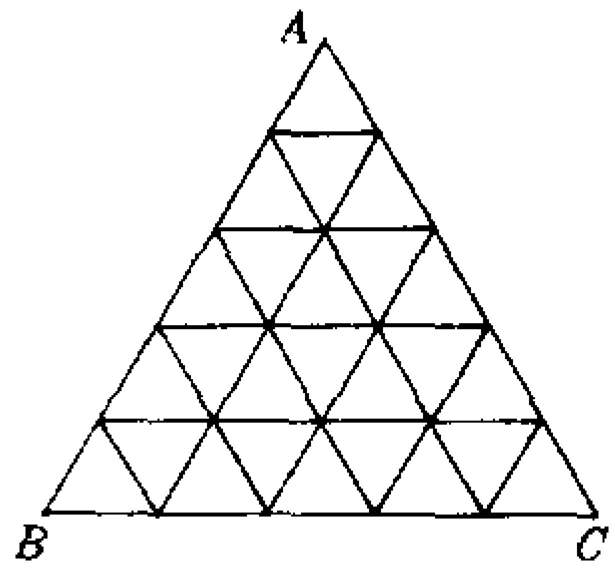
[解]　注意到下面的事实:

x 正半轴上的两点与 y 正半轴上的两点可组成一个凸四边形,它们对角线有一个交点.

这样,这些点的连线最多有 $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 450$ 个交点.

故选(B).

35·42　将正三角形各边五等分，过各分点作另两边的平行线将正三角形分割成小正三角形网.则图中大小不等的正三角形共有



(A) 48 个.　　　(B) 25 个.

(C) 45 个.　　　(D) 55 个.

（中国辽宁省沈阳市“育才杯”初中数学竞赛，1988 年）

[解]　设 $AB=AC=BC=5$，那么图中边长为 1 的正三角形有 $1+3+5+7+9=25$ 个；

边长为 2 的正三角形有 $1+2+3+4+3=13$ 个；

边长为 3 的正三角形有 $1+2+3=6$ 个；

边长为 4 的正三角形有 $1+2=3$ 个；

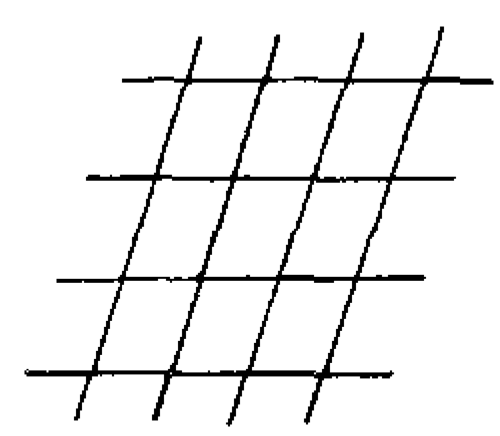
边长为 5 的正三角形有 1 个.

总计有各种正三角形

$$25+13+6+3+1=48 \text{ 个}.$$

故选(A).

35·43　图中的平行四边形个数为



(A) 40.　　　(B) 38.　　　(C) 36.　　　(D) 30.

（第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛，1991 年）

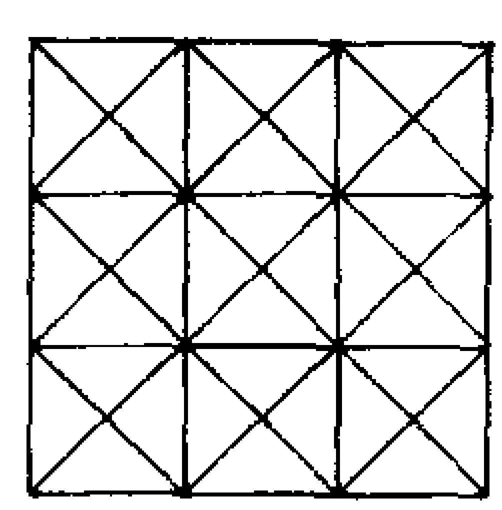
[解]　平行四边形的两条水平边可从 4 条直线中选 2 条，共 6 种选法；

同理，竖直边也有 6 种选法.

则平行四边形个数有　$6\cdot6=36$ 个.

故选(C).

35·44　图中不同的长方形(包括正方形)的个数为



(A) 36.　　　(B) 87.

(C) 72.　　　(D) 102.

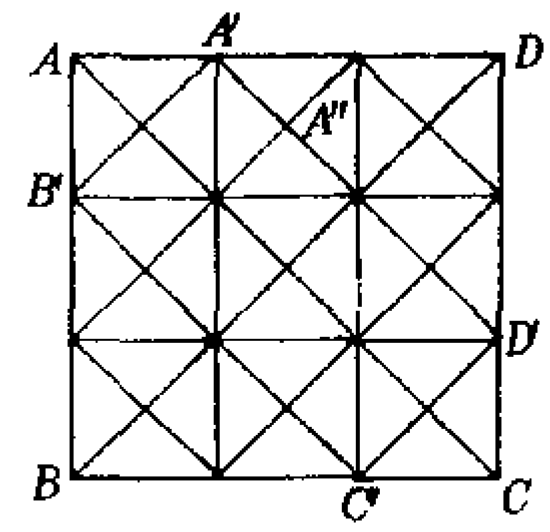
（第 2 届“五羊杯”初中数学竞赛，1990 年）

[解]　如下图，两边分别和AB，BC 平行的长方形有(设$AA'=1$)：

1×1 的 9 个，1×2 的 12 个，2×2 的 4 个，

3×1 的 6 个，3×2 的 4 个，3×3 的 1 个(计 36 个).

又两边分别与 $A'B'$ 和 $C'B'$ 平行的长方形有(设 $A'A''=1$)：



1×1 的 12 个，2×1 的 16 个，2×2 的 5 个，

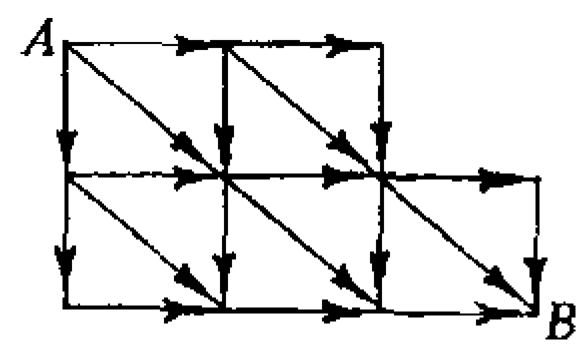
3×1 的 8 个，3×2 的 4 个，4×1 的 4 个，

4×2 的 2 个.(计 51 个)

则长方形总数为　$36+51=87$ 个.

故选(B).

35·45　如图，沿箭头方向前进，从 A 到 B 点不同的路线条数为

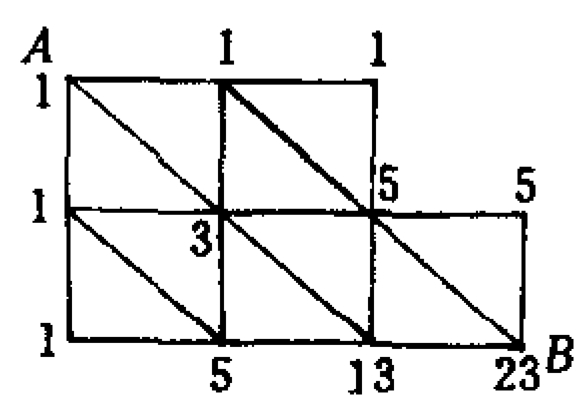


(A) 25.　　　　(B) 24.

(C) 23.　　　　(D) 22.

(第 3 届“五羊杯”初中数学竞赛，1991 年)

[解]　采用逐点推算法：图中结点旁的数字表示从上方(即出发点 A)到该点的道路条数.

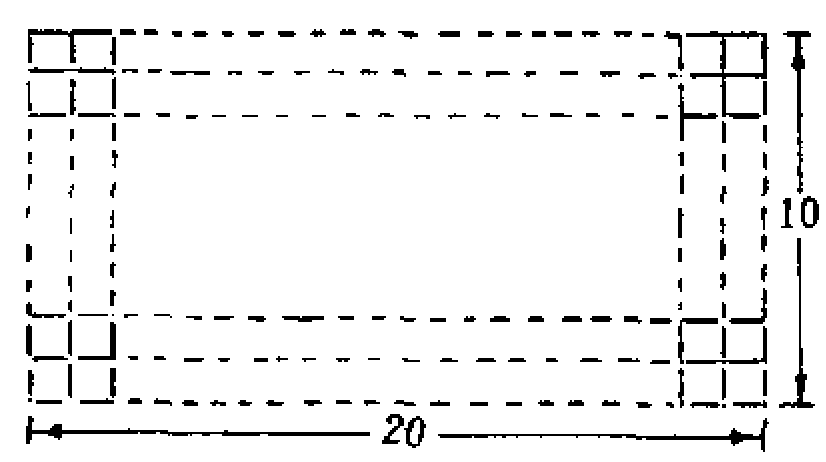


这样，每个结点的数字均为其上，左和左上三结点数字之和.

因而，从 A 推算到 B 共有 23 条通路.

故选(C).

35·46　用等长的牙签摆成如图所示的矩形图，如果矩形图的长是 20 个牙签的长，宽是 10 个牙签的长，那么所用牙签的个数是



(A) 30.　　(B) 200.　　(C) 410.

(D) 420.　　(E) 430.

(第 40 届美国高中数学考试，1989 年)

[解]　先看横向牙签数：它有 11 行，每行 20 个，计有 220 个；再看纵向：它有 21 行，每行 10 个，计有 210 个.

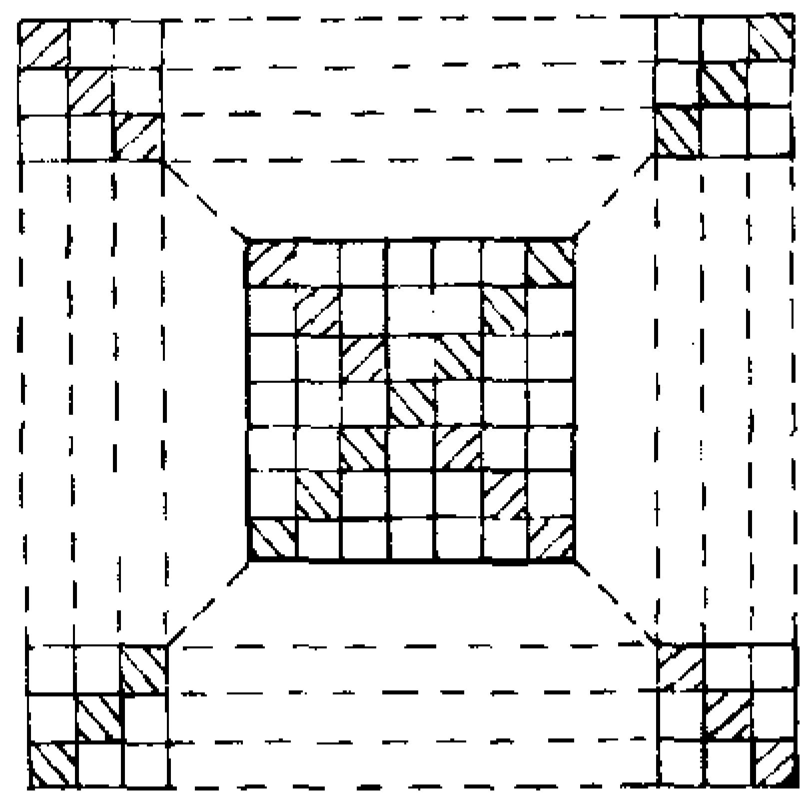
所以总计有牙签

$$220+210=430(\text{个}).$$

故选(E).

35·47　一个正方形的地面用同样大小的正方形瓷砖铺满，两条对角线上铺黑色的，其他地方铺白色的，如图所示. 如果铺满地面共有

101 块黑色的,那么,铺满地面所用瓷砖总块数是



(A) 121. (B) 625. (C) 676.

(D) 2500. (E) 2601.

(第 43 届美国高中数学考试,1992 年)

[解] 只须考虑"\"方向(或"/"方向)上黑砖块数,它为 51 块.

而这恰好为地面方砖的行及列数.

这样,铺满地面所用瓷砖总块数为 $51^2=2601$.

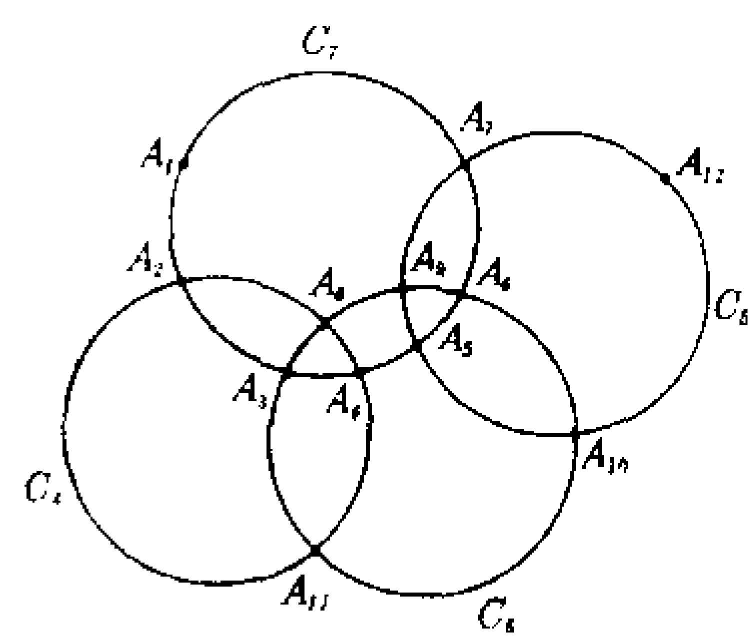
故选(E).

35·48 平面上有一个点集 M 和七个不同的圆 $C_1,C_2,\cdots,C_7$,其中圆 C_7 恰好经过 M 中的 7 个点,圆 C_6 恰好经过 M 中的 6 个点,…,圆 C_1 恰好经过 M 中的 1 个点,那么 M 中的点数最少为

(A) 11. (B) 12. (C) 21. (D) 28.

(中国高中数学联赛,1986 年)

[解] 就圆 C_7 而言,集 M 要有 7 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_7$(见图);



再考虑圆 C_6,M 要增加 4 个点 A_8,A_9,A_{10},A_{11}(另两点为 A_3,A_6);

考虑圆 C_5,M 只要增加一个点 A_{12};考虑圆 C_4,C_3,C_2,C_1 时,M 已不需要增加点.

则 M 中的点数最少为 12.

故选(B).

35·49 把一个棱长为 3cm 的正方体分割成 n 个体积不都相同的小正方体.若小正方体的棱长是整厘米数,则 n 为

(A) 4. (B) 8. (C) 12. (D) 16. (E) 20.

(第 7 届美国初中数学考试,1991 年)

[解] 边长为 3cm 的正方体体积为 27cm^3,又其只能分割出一块棱长为 2cm 的正方体,它的体积为 8cm^3.

这样剩下的 19cm^3 只能分割成棱长为 1cm 的正方体,计 19 块.因而,总共可分割成 20 个不都相同的小正方体.

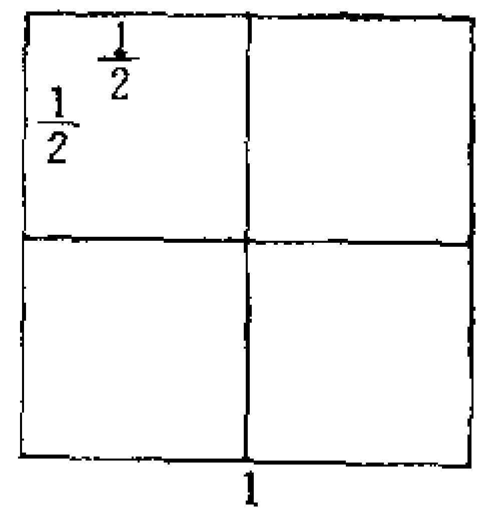
故选(E).

35·50 在边长为 1 的正方形的边上或内部有任意五点，设 a 为具有如下性质的最小数：从这五点中总可以选出一对点使它们的距离不大于 a，则 a 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　(D) 1.　(E) $\sqrt{2}$.

（第 12 届美国高中数学考试，1961 年）

[解] 将单位正方形均分为四(如图). 这样单位正方形内的五个点，必至少有两个点落在同一个小正方形内(由抽屉原理).



落在同一小正方形内的某两点间最大距离不超过小正方形的对角线长即 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选 (B).

35·51 把一个边长为 2 的正方形分割成面积相等的四部分，使得在其中的一部分内存在三个点，以这三个点为顶点可以组成一个边长大于 1 的正三角形，满足上述性质的分割

(A) 是不存在的.　(B) 恰有一种.

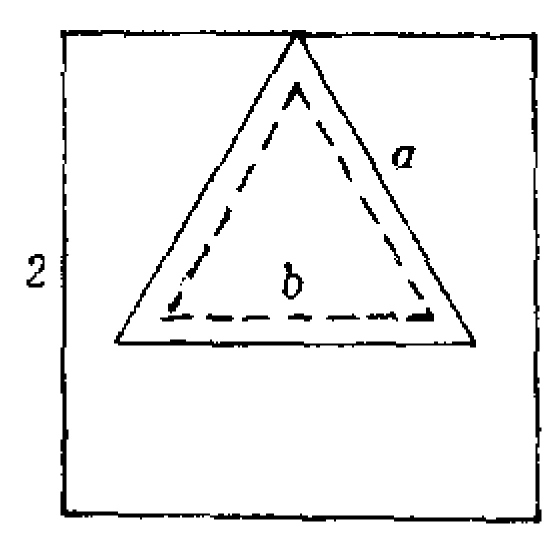
(C) 有有限多种. 但不只是一种.　(D) 有无穷多种.

（第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛，1990 年）

[解] 由正方形边长为 2，其面积为 4.

当将其一分为四时，每部分面积均为 1.

只须将其一部分割成面积是 1，即边长为 $a=2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ 的正三角形即可.

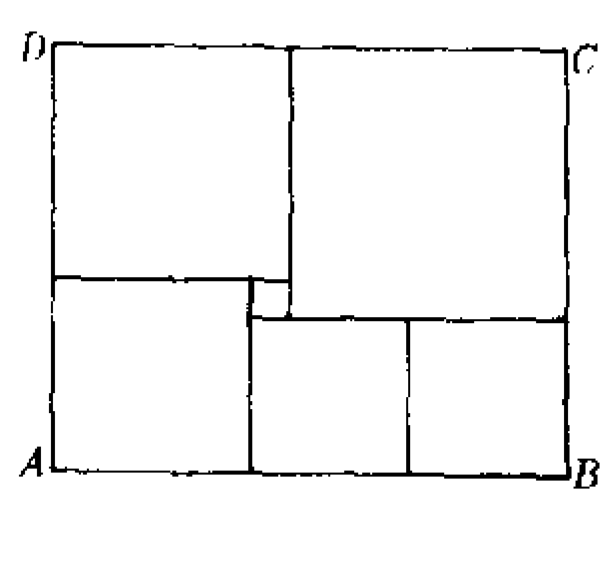


而 $2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}>1$，从而可从中找出一个边长 b 大于 1 的正三角形(图中虚线所示).

又上述面积是 1 的正三角形位置不限，则有无穷多种分法.

故选 (D).

35·52 如图，矩形 $ABCD$ 被分割成六个不等的正方形，其中最小正方形的面积等于 1. 则矩



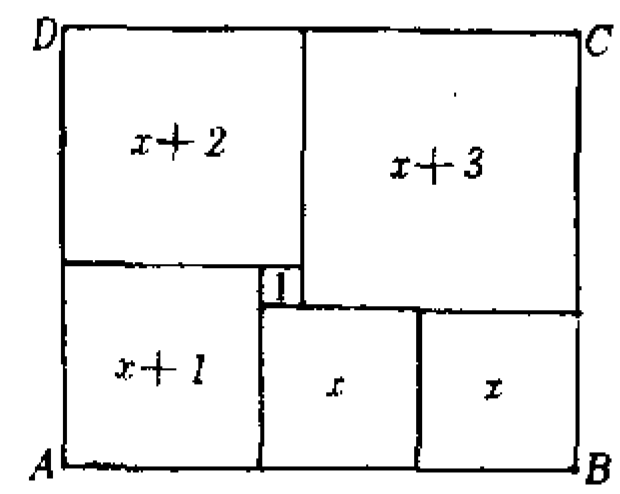
形 $ABCD$ 的面积为

(A) 152. (B) 143.

(C) 132. (D) 108.

(中国安徽省安庆等县市初中数学竞赛,1991 年)

[解] 设右下角正方形边长为 x,则其他正方形边长依次为 $x+1,x+2,x+3$(如图,图中数字表示该正方形边长).



显然 $(x+2)+(x+3)=x+x+(x+1)$,

得 $$x=4.$$

则 $S_{ABCD}=(3x+1)(2x+3)=143.$

故选(B).

第三十六章　规律，运动，博弈

第1节　规　律

36·1　图中所示的 4×4 的正方形内，写着 1，2，3，…，15，16．按下列四步顺序折叠该正方形：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(1) 上半部盖在下半部上．

(2) 下半部盖在上半部上．

(3) 右半部盖在左半部上．

(4) 左半部盖在右半部上．

经过这四次折叠后，最上面的数字是

(A) 1．　(B) 9．　(C) 10．　(D) 14．　(E) 16．

（第7届美国初中数学考试，1991年）

［解］　经过前两步以后，最后一行已叠到最上面；第三行在最下面．

再经(3)，(4) 两步时，只须考虑第三行数折叠的变化．结果是 9 在最上面．

故选(B)．

36·2　一个 3×3 的数阵

$$\begin{pmatrix}4 & 9 & 2\\ 8 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

每行、每列数字和皆相等．为使每行、每列数字和皆不相等，至少要改变

其中的数字个数是

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　(E)5.

（第48届美国高中数学考试,1997年）

[解]　由于每个数字皆在一行,一列中,故只改变一个数字,可改变该数字位于的行和列的数字和,但它们彼此仍相等.

改变两个数字至多可改变4个行、列数和(2行、2列),因而要改变6个行、列和,至少要改变三个数字.

这三个数字可位于同一行(或同一列)、位于不同列的两行(或不同行的两列)、位于不同行、不同列:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ & & \\ & & \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} * & & * \\ * & & \\ & & \end{pmatrix}或\begin{pmatrix} * & * & \\ & & * \\ & & \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

(注意到交换数列两行或两列位置,数和等否无异)

显然上述诸改变仍不能使数阵六个行、列数和皆不相等.改变四个数字是可行的比如:$\begin{pmatrix} * & & * \\ & * & * \\ & & \end{pmatrix}$

故选(D).

36·3　若11个连续奇数的和是1991,把这些数按大小顺序排列起来,第六个数是

(A) 179.　　(B) 181.　　(C) 183.　　(D)185.

（第2届"希望杯"全国数学邀请赛,1991年）

[解]　设这11个连续奇数为$2n+1,2n+3,\cdots,2n+21$,则

$$(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2n+21)=1991,$$

即

$$11(2n+11)=1991.$$

解得

$$n=85.$$

则第六个数是　$2\cdot 85+11=181.$

故选(B).

36·4　设$x=0.1234567891011\cdots998999$,这个小数是从小数点后,以1开头一直写到999而得到的.那么小数点右第1983位的数字是

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 5.　　(D) 7.　　(E) 8.

（第34届美国高中数学考试,1983年）

[解]　观察其前1983位的数字,设 z 表示第1983位上的数字.我们可以把这一串数分成三段:

$$0.\underbrace{123456789}_{A}\ \underbrace{101112\cdots9899}_{B}\ \underbrace{100101\cdots z}_{C}$$

在 A 段中有9个数字,在 B 段中有 $2\cdot90=180$ 个数字.这样在 C 段中就有 $1983-189=1794$ 个数字.

用3去除1794,商为598,所以 C 段中有前598个3位数.

又因为第一个三位数是100,那么第598个三位数就是697,所以 $z=7$.

故选(D).

36·5　把由1开始的自然数依次写下去,直写到第198位为止:

$$\underbrace{123456789101112\cdots}_{198\text{位}}$$

那么这个数用9除的余数是

(A) 4.　　(B) 6.　　(C) 7.　　(D) 非上述答案.

(中国初中数学联赛,1987年)

[解]　容易推算(一位数 $1\sim9$ 计9个,两位数 $10\sim99$ 计90个,已至198位)这个数是

$$1234\cdots9101112\cdots99100101102,$$

因为 $1+2+\cdots+9$ 能被9整除,即

$$1+0+1+1+1+2+\cdots+9+9$$

也能被9整除,

所以这个数被9除的余数是

$$1+0+0+1+0+1+1+0+2=6.$$

顺便指出:$1+2+\cdots+9+1+0+1+1+\cdots+9+9$ 被9除后余数与 $1+2+3+\cdots+9+10+11+\cdots+98+99$ 被9除后余数相同,而后者和为 $\dfrac{99\cdot100}{2}=99\cdot50$,它显然可被9整除.

故选(B).

36·6　比1大的整数像下面那样排成五列:

（在每一行中出现四个连续整数；在第一，第三和其他奇数行中，整数出现在后四个列中，并且数字从左至右增加；在第二、第四和其他偶数行中，整数出现在前四列中并且从右到左增加.）

	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	…	…	…	…

数 1000 将出现在

(A) 第一列.　　(B) 第二列.　　(C) 第三列.

(D) 第四列.　　(E) 第五列.

（第 25 届美国高中数学考试，1974 年）

[解]　由表可以看出：所有 8 的倍数均落在第二列.

而 $8 \mid 1000$，故 1000 亦落在第二列.

故选(B).

36·7　将奇正整数 1,3,5,7,⋯ 依次排成五列，如右图所示. 把最左边的一列叫做第 1 列，

从左到右依次将每列编号. 这样，数“1985”出现在

	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
47	45	43	41	
	49	51	53	55
·	·	·	·	
	·	·	·	·

(A) 第 1 列.　　(B) 第 2 列.

(C) 第 3 列.　　(D) 第 4 列.

(E) 第 5 列.

（第 36 届美国高中数学考试，1985 年）

[解]　显然，表中每行四个数，且单数行与双数行错开，且单数行数码从左向右递增，双数行数码从右向左递增.

注意到　$[(1985+1)\div 2]\div 4 = 248\cdots 1$，知 1985 位于第 249 行第一个数. 即 1985 位于第 2 列.

故选(B).

36·8　设 A 为 n 位正整数，$n \geqslant 2$，B 为 k 位正整数，$k \geqslant 1$. 则可有 $n-1$ 种方法把 B 整个地插入 A 的相邻两位数字之间，得到一个 $n+k$ 位正整数 C. 例如 $A=1991$，$B=35$，则有三种插法：C 为 135991 或 193591 或 199351.

如果对每一个能被 B 整除的 A，把 B 任意插入 A，得到的 C 都能被

B 整除,就称 B 为协调数.则 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,66,90 这 15 个数中,协调数个数共有

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 10.　　(D) 11.

(第 3 届"五羊杯"初中数学竞赛,1991 年)

[解] 逐数检验不难发现:

(1)1 是协调数;

(2) 若 A 被 2 整除,则 A 的末位数是偶数,把 2 任意插入 A 得 C 的末位数仍为偶数,故 C 可被 2 整除,则 2 是协调数;

(3) 注意到:一个自然数能被 3 整除的充要条件是它的各位数字和亦能被 3 整除.易验算得 3 是协调数;

(4) 若 A 能被 11 整除,则 A 的奇位数字与偶位数字差为 11 的倍数.把 11 任意插入 A 得到 C 后,其奇位数字与偶位数字和之差不变,即仍为 11 的倍数,故 C 能被 11 整除.则 11 是协调数;

仿(2) 可证 5,10 为协调数;

仿(3) 可证 9 为协调数;

又由知 2,3 是协调数,可证 6 是协调数;

由 3,5;　2,3,11;　9,10 是协调数,可证 15,66,90 是协调数.

此外,可算得 4,7,8,12 不是协调数.

则上述数中有 11 个协调数.

故选(D).

36·9 将"$CONTEST$"中的这七个字母重新排列,问在所有可能的各种排列中,第一、二两个字母都是元音字母的排列有(例如,$OETCNST$ 就是一个这种排列,而 $OTETSNC$ 则不是)

(A) 60.　　(B) 120.　　(C)240.　　(D) 720.　　(E) 2520.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解] 题设七个字母中仅有两个元音,则第一、二两个字母均为元音的排列数有 $2\cdot5!$ 种,但题设字母中有两个 T,则所求排列总数减半应为

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot5! = 120(\text{种})$$

故选(B).

36·10 Zeta先生与Zeta夫人想给小Zeta起名，如果要求小Zeta的名，教名和姓的第一个字母按字母表顺序排列，且字母不能重复，那么可能的种数是

(A) 276. (B) 300. (C) 552. (D) 600. (E) 15600.

（第40届美国高中数学考试，1989年）

[解] 小Zeta姓Zeta，则其名，教名的第一个字母可分别是

A,B; A,C; A,D; $\cdots$; A,Y; （第二个字母 $B\to Y$）

B,C; B,D; B,E; $\cdots$; B,Y; （第二个字母 $C\to Y$）

……

W,X; W,Y; （第二个字母 $X\to Y$）

X,Y.

计有 $24+23+22+\cdots+2+1=\dfrac{24\cdot 25}{2}=300$ 种可能.

故选(B).

36·11 如下图，用水平的与"/"或竖直的线段连结相邻的字母，循这些线段行走时正好拼出单词CONTEST的路线有

(A) 63. (B) 128. (C) 129. (D) 255. (E) 这些都不对.

（第28届美国高中数学考试，1977年）

[解] 所有可采纳的路线必须结束在图末行中间那个"T"上. 从"T"这点逆推，并且只考虑包括中间这个纵列在内的左半部分的那些路线，可有两种可采纳的路线导致末端是"T"：一是同行左边 $S\to T$，一是上行 T 顶上的 $S\to T$.

类似地分析 $S,E,T,N,\cdots$ 均有两种路线导致连接这些字母. 这样有 2^6 条可采纳的路线.

$$\begin{array}{c}C\\COC\\CONOC\\CONTNOC\\CONTETNOC\\CONTESETNOC\\CONTESTSETNOC\end{array}$$

同样，在包括中间列的右半部分也有 2^6 条可能的路线.

又因为中间列已被计算过两次，因而有 2^6+2^6-1 或 2^7-1

条路线.

故选(E).

36·12 把 $AHSME$ 的 120 种排列的每一个都看做一个通常的五个字母组成的单词按字典顺序排起来. 其中第 86 个词的最后一个字母是

(A) A.　(B) H.　(C) S.　(D) M.　(E) E.

(第 37 届美国高中数学考试,1986 年)

[解] 显然这是相当于求:将数字 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数中,由小到大排列的第 86 个数的末位数字.

由这五个数字组成的五位数中,1,2,3 打头的有

$$C_3^1 \cdot P_4 = 72 \text{ 个}.$$

接下去由 4 打头的五位数中,千位数字是 1,2 的有

$$C_2^1 P_3 = 12 \text{ 个}.$$

这时已有 $72 + 12 = 84$ 个. 接下去应是 4 打头,3 作千位数字的五位数:43125,43152,…

43152 即第 86 个数,其末位数字是 2.

注意对应:$A \leftrightarrow 1$, $E \leftrightarrow 2$, $H \leftrightarrow 3$, $M \leftrightarrow 4$, $S \leftrightarrow 5$.

故选(E).

36·13 字母 A,J,H,S,M,E 和数字 1,9,8,9 分别按下面方式"轮换":

$AJHSME$	1989	
1. $JHSMEA$	9891	(第 1 次轮换)
2. $HSMEAJ$	8919	(第 2 次轮换)
3. $SMEAJH$	9198	(第 3 次轮换)
……		

要使 $AJHSME$1989 重新出现,轮换至少经过的次数是

(A) 6.　(B) 10.　(C) 12.　(D) 18.　(E) 24.

(第 5 届美国初中数学考试,1989 年)

[解] 字母 A,J,H,S,M,E 每"轮换"6 次可复原;

数字 1,9,8,9 每"轮换"4 次复原.

则要使 $AJHSME$1989 复原至少要轮换$[4,6] = 12$ 次,这里$[a,b]$表示整数 a,b 的最小公倍数.

故选(C).

36·14　给出由两个未限定的元素"*pib*"与"*maa*"组成的集 S,以及下面的四条公设： P_1:每个 *pib* 是 *maa* 的集合； P_2:任意两个不同的 *pib* 有且只有一个公共的 *maa*； P_3:每一个 *maa* 仅属于两个 *pib*； P_4:刚好有四个 *pib*.

考虑三条定理: T_1:刚好有6个 *maa*； T_2:每一个 *pib* 刚好有三个 *maa*； T_3:对每一个 *maa* 刚好有与它不在同一个 *pib* 的另一个 *maa*.

能够由公设推演出这些定理的

(A) 只有 T_2.　(B) 只有 T_2 与 T_3.　(C) 只有 T_1 与 T_2.　(D) 只有 T_1 与 T_3.　(E) 全部.

（第 18 届美国高中数学考试,1967 年）

[解]　为方便起见,以数码 1,2,3,4 表示四个不同的 *pib*(公设 P_4);这些都是 *maa* 的集合(公设 P_1).

同时包含在 pib_i 与 pib_j 中的惟一公共的 *maa* 用 ij 或 ji 表示(公设 P_2).

又因为任何一个 *maa* 都可以这样表示(公设 P_3),全部 *maa* 的集合

$$\{12,\ 13,\ 14,\ 23,\ 24,\ 34\}$$

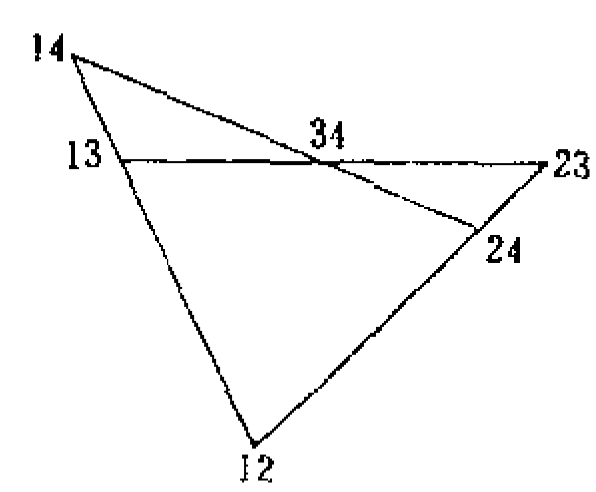
恰好有 $C_4^2=6$ 个元素(定理 T_1).

pib_i 中仅有三个 *maa* 是 $ij(i\neq j)$(定理 T_2). 而恰好有一个 *maa* 既不在 pib_i,也不在 pib_j,因而不会与 ij 落在同一个 *pib* 内(定理 T_3).

综上,推出定理 T_1,T_2,T_3 须用全部四条公设.

故选(E).

注　平面上无三线共点且互不平行的四条直线为我们提供了这个问题的几何模型:



图中六个交点(*maa*)满足公设 P_1,P_2,P_3,P_4,而四条含有三个共线点线段即为四个 *pib*.

在此(有限)几何中:两线(*pib*)必交于惟一的点(*maa*),但两点(*maa*)并不一定确定此系统中的一条线段.

36·15　某办公室 A,B,C,D,E,F 六人轮流值夜班,规定轮班的次序是 $A\to B\to C\to D\to E\to F\to A\to B\cdots$,这样在第一个星期里,星期日由 A 值班,星期一由 B 值班,…,星期五由 F 值班,星期六再由 A 值班,依次轮流下去,那么在第 50 个星期里,A 值班在

(A) 星期六.　(B) 星期五.　(C) 星期四.　(D) 星期三.

（中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛，1992 年）

[解]　第 50 个星期开始这天(星期一)距最初值班 $7 \cdot 49 + 1 = 344$ 天.

当天数 $n \div 6$ 余 0 时为 A 值班;余 1 时为 B 值班;余 2 时为 C 值班;……

而　$344 \div 6 = 57 \cdots 2$，　知这周开始(星期一)由 C 值班.经过 D，E，F，到 A 值班时应为星期五.

故选(B).

36·16　埃尔与鲍伯在同一天开始他们的新工作，埃尔的工作日程表是 3 天工作接着 1 天休息，鲍伯的工作日程表是 7 天工作接着 3 天休息.在前 1000 天中他们共同的休息日的天数有

(A) 48.　(B) 50.　(C) 72.　(D) 75.　(E) 100.

（第 44 届美国高中数学考试，1993 年）

[解 1]　埃尔每 4 天一个循环，鲍伯每 10 天一个循环，4 和 10 的最小公倍数是 20，他们一起有一个 20 天的循环.

1000 天内共有 50 个这样的循环.我们把一个循环的每天标记为 1，2，…，20.

埃尔在第 4，8，12，16，20 天休息，鲍伯在第 8，9，10，18，19，20 天休息，所以在每个循环中他们有 2 天一起休息.

因此，他们在前 1000 天中都休息的天数是 $2 \cdot 50 = 100$.

故选(E).

[解 2]　由题设知埃尔的休息日为第 $4k$ 天，鲍伯的休息日为

$10t + 8$，　$10t + 9$，　$10t + 10$　($1 \leqslant t \leqslant 100$，且 t 为整数).

由　$4k = 10t + 8$，即　$2k = 5t + 4$，知 t 为偶数，因而有 50 个解;

而　$4k = 10t + 9$　无解(式左为偶数，式右为奇数);

再　$4k = 10t + 10$，即　$2k = 5t + 5$，知 t 为奇数，亦有 50 个解.

综上，他们共同休息日为 100 天.

故选(E).

36·17　某一天的不同时刻老板把信交给秘书打字，每次都将信放在秘书信堆的上面，秘书有时间就将信堆最上边的那封信取来打.假定共有 5 封信，且老板是按 1，2，3，4，5 的顺序交来，在下列各顺序中，不

可能是秘书打信的顺序是

(A) 12345.　　(B) 24351.　　(C) 32415.

(D) 45231.　　(E) 54321.

（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）

[解] (A)是可能的：打完 1 来 2，打完 2 来3，…，打完4 来5，最后打5；

(B) 是可能的：打 2 的时候（1 在底下）来 3，4；打完 4 后打 3 时，又来了 5，接下去打 5，1；

(C) 是可能的：从 3，2，1 信顺序开始打，打2 时来 4，打完 4，1 时来5；

(E) 是可能的：五封信来齐后依次打字；

(D) 是不可能的：打完 4，5 之后，应接下来打 3.

故选(D).

36·18　如果甲的身高数或体重数至少有一项比乙大，则称甲不亚于乙. 在 100 个小伙子中，如果某人不亚于其他 99 人，就称他为棒小伙子. 那么，100 个小伙子中的棒小伙子最多可能有

(A)1 个.　　(B)2 个.　　(C)50 个.　　(D)100 个.

（中国高中数学联赛，1995 年）

[解]　取 100 个小伙子为这样一种特殊情况，他们的身高与体重互不相等，并且最高者同时也就是最轻者，次高者同时也就是次轻者，…，第 k 高者同时也就是第k 轻者($k = 1,2,\cdots,100$)，显然，这 100 个小伙子都是棒小伙子.

故选(D).

36·19　在一宴会结束时，总共握了28次手，假设每一位参加宴会的人对其他的与会人士均有一样的礼节，那么与会人士共有

(A) 14 人.　(B) 28 人.　(C) 56 人.　(D) 8 人.　(E) 7 人.

（第 2 届美国高中数学考试，1951 年）

[解]　若与会人数为 n，则握手次数为 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

由
$$\frac{1}{2}n(n-1) = 28,$$
即
$$n^2 - n - 56 = 0.$$
得
$$n = 8 \text{ 或 } -7 (\text{舍去}).$$

故选(D).

36·20　在一次华盛顿的聚会上，每个男人都与除自己配偶外的

所有人握手,但妇女之间彼此不握手,如果 13 对夫妇参加聚会,那么这 26 人之间共握手的次数是

(A) 78. (B) 185. (C) 234. (D) 312. (E) 325.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解] 与会者共26人,因13个男人均与其余24人握手(自己配偶未握),则共握13·24次,其中两个男人彼此间的握手计算了两次,因而应除去.

此外,女人间彼此未握手,则总共握手次数是

$$13 \cdot 24 - C_{13}^{2} = 312 - 78 = 234(\text{次}).$$

故选(C).

36·21 在一间房间里有 N 个人($N>3$),至少有一人没有与房间里每人握手.房间里可能与每人握手的人数的最大值是

(A) 0. (B) 1. (C) $N-1$. (D) N. (E) 这些都不对.

(第 29 届美国高中数学考试,1978 年)

[解] 把这些人编上号且令其为 $A_1, A_2, \cdots, A_N$,并且编号法应使 A_1 和 A_2 两人之间未曾握手.

也许其他每对人均握过手,但至少 A_1 和 A_2 未与所有人握过手.

因而,最多有 $N-2$ 人曾与每人握手.

故选(E).

36·22 一些学生围在圆桌前坐下,他们传递装有 100 块糖的小包,每人接到包后取出一块,然后传给右边相邻的人.如果某个学生拿到第一块,也拿到最后一块,问学生数可能是

(A) 10. (B) 11. (C) 19. (D) 20. (E) 25.

(第 6 届美国初中数学考试,1990 年)

[解] 某学生拿到第一块,也拿到最后一块,则所有的人数应是 99 的约数.

在上述五个数中,仅有 11 适合.

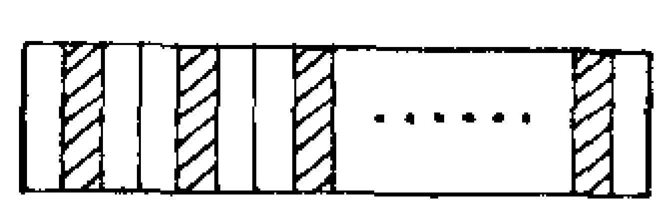
故选(B).

36·23 一排有 120 个座位,其中某些座位已经有人.若新来一个人,他无论坐在何处都与一个人相邻,则原来最少已就座的人数为

(A) 30. (B) 40. (C) 41. (D) 60. (E) 119.

(第 6 届美国初中数学考试,1990 年)

[解] 如图,每 3 张椅子坐 1 人,即坐中间那张椅子(图中阴影所示)即可.



这样至少要坐　$120 \div 3 = 40$ 人.

故选(B).

注　座位为 121 或 122 时,最少就座的人均为 41 人.

36·24　九把椅子排成一排,现有 6 位同学及三位教授(分别是 α、β、γ),三位教授先于学生到达,决定选坐位,以使每位教授均位于两名学生中间.这种排法种类有

(A)12.　(B)36.　(C)60.　(D)80.　(E)630.

(第 45 届美国高中数学考试,1994 年)

[解]　6名学生排成一列共有5个空档,三名教授 α、β、γ 各选其一的排列方法有

$$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{种}).$$

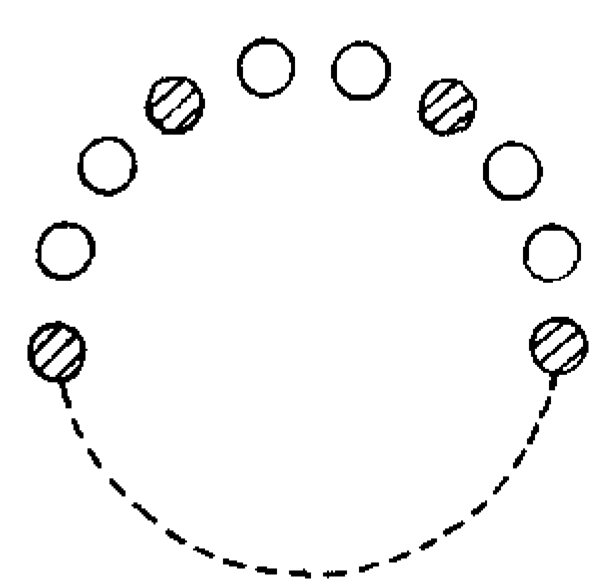
故选(C).

36·25　圆桌周围恰好有60把椅子,有 N 个人按下面的方式在桌边就座:当再有一个人入座时,他必和已就座的某个人相邻.N 能取的最小值是

(A) 15.　(B) 20.　(C)30.　(D) 40.　(E) 58.

(第 42 届美国高中数学考试,1991 年)

[解 1]　可以这样安排这 N 个人:



60 个座位中,每隔两个座位安排一位人,共安排 20 位.

首先,若再有人入座时,他必和其中一位相邻;其次 20 已不能再减少.

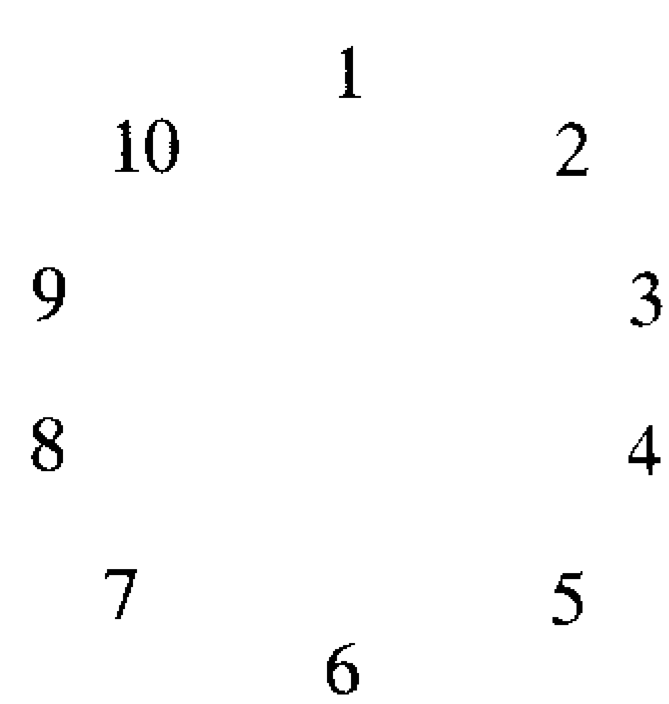
故选(B).

[解 2]　每 3 把椅子分一组,中间坐一人,这样再有人入座必与已坐者相邻.

因而 60 把椅子可分成 20 组,只须 20 人即可.

故选(B).

36·26　10 个人围成一个圆圈,每人选择一个整数并告诉他的两个邻座的人,然后每个人算出并宣布他两个邻座所选数的平均数,宣布的结果如图所示,则宣布 6 的那个人选择的数是



(A) 1.　(B) 5.　(C) 6.　(D) 10.　(E) 不惟一确定.

(第 41 届美国高中数学考试,1990 年)

[解]　设宣布 6 的那个人选择的数是 x,则

宣布 4 的人选择数为　$5\cdot2-x=10-x$,

宣布 2 的人选择数为　$3\cdot2-(10-x)=x-4$,

宣布 10 的人选择数为　$1\cdot2-(x-4)=6-x$,

宣布 8 的人选择数为　$9\cdot2-(6-x)=12+x$,

这样,宣布 6 的人选择数又为　$7\cdot2-(12+x)=2-x$.

所以　$x=2-x$,　得　$x=1$.

故选(A).

36·27　五个人围坐在一圆桌旁,若至少坐在一位女性旁的人数 $f\geqslant0$,至少坐在一位男性旁的人数 $m\geqslant0$,那么所有可能的有序数组 (f,m) 的个数是

(A) 7.　(B) 8.　(C) 9.　(D) 10.　(E) 11.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

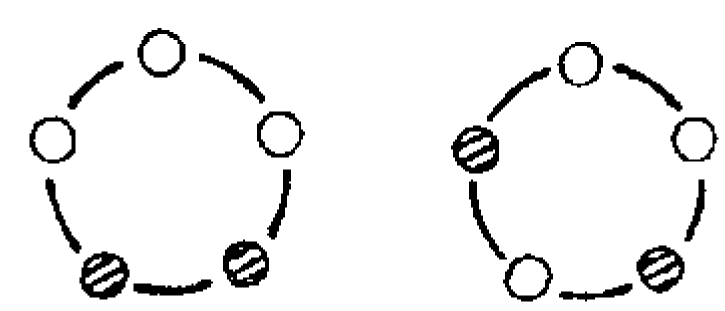
[解]　5 个人中男女性人数有下面 6 种情形:

序　号	①	②	③	④	⑤	⑥
女	0	1	2	3	4	5
男	5	4	3	2	1	0

对于情形 ①　$(f,m)=(0,5)$;

对于情形 ②　$(f,m)=(2,5)$;

对于情形 ③　$(f,m)=(4,5)$ 或 $(3,4)$;(见图中两种情形)



由对称性,④,⑤,⑥ 情形 (f,m) 分别为

$(5,4)$;　$(4,3)$;　$(5,2)$;　$(5,0)$.

综上　(f,m) 共有 8 组.

故选(B).

36·28　有 7 个男孩和 13 个女孩站成一排,设 S 为男女孩彼此相邻的位置数,例如,排列 $GBBGGGBGBGGGBGBGGBGG$ 的 $S=12$,那么 S 的平均值最接近于(这 20 人所有位置都考虑到)

(A) 9.　(B) 10.　(C) 11.　(D) 12.　(E) 13.

(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

[**解**]　显然 $S_{min}=1$，　$S_{max}=14$，它们分别对应

$$BBBBBBBGGGGGGGGGGGGG,$$

$$GBGBGBGBGBGBGBGGGGGG.$$

为方便计，令男孩用"+"表示，女孩用"-"，这时问题化为求7个"+"号13个"-"号排成一排的变号数的平均值.

当 $S=1$ 时，相当于把+、-号各分成一段后排列问题，有"+-"和"-+"两种（这里+，-表示段）即有 $2C_{12}^0C_6^0$ 种，记 $\sigma_1=2C_{12}^0C_6^0$；

当 $S=2$ 时，相当于下面两种情形：

+-+　　或　　-+-　（这里+，-表示段）之一，即把+号分成2组，-号分成一组插入；或-号分成2组，+号分成一组插入.

这时 $\sigma_2=C_{12}^1C_6^0+C_6^1C_{12}^0$，

类似地

$\sigma_3=2C_{12}^1C_6^1$，　$\sigma_4=C_{12}^2C_6^1+C_6^2C_{12}^1$，　$\sigma_5=2C_{12}^2C_6^2$，

$\sigma_6=C_{12}^3C_6^2+C_6^3C_{12}^2$，　$\sigma_7=2C_{12}^3C_6^3$，　$\sigma_8=C_{12}^4C_6^3+C_6^4C_{12}^3$，

$\sigma_9=2C_{12}^4C_6^4$，　$\sigma_{10}=C_{12}^5C_6^4+C_6^5C_{12}^4$，　$\sigma_{11}=2C_{12}^5C_6^5$，

$\sigma_{12}=C_{12}^6C_6^5+C_6^6C_{12}^5$，　$\sigma_{13}=2C_{12}^6C_6^6$，　$\sigma_{14}=C_{12}^7$，

则

$$\overline{S}=\frac{\sum_{k=1}^{14}k\sigma_k}{\sum_{k=1}^{14}\sigma_k}=9.$$

故选(A).

36·29　有50个女孩，她们的肤色是白的或浅黑色的，眼睛则是蓝色的或褐色的.若有14个是蓝眼睛白肤色，31个是浅黑肤色，18个是褐色眼睛，那么褐色眼睛浅黑皮肤的女孩有

(A) 5.　　(B) 7.　　(C) 9.　　(D) 11.　　(E) 13.

（第22届美国高中数学考试，1971年）

[**解**]，白肤色的有 $50-31=19$ 个.

$\therefore 19-14=5$ 是褐眼睛白肤色的.

$\therefore 18-5=13$ 是褐眼睛浅黑肤色的.

故选(E).

36·30　某人上下班可乘火车或汽车.若他早晨上班乘火车则下午乘汽车；又假若他下午回家乘火车则早晨乘汽车.在 x 天中这个人乘

火车 9 次，早晨乘汽车 8 次，下午乘汽车 15 次. x 的值为

(A) 19.　　(B) 18.　　(C) 17.　　(D) 16.

(E) 已知条件不足以解此题.

（第 26 届美国高中数学考试，1975 年）

[解]　依题设，此人乘车的总数是 $2x$，所以 $2x = 9 + (8 + 15)$，解得 $x = 16$.

故选(D).

36·31　某学生在 e 天的假期中观察：

(1) 下七次雨，在上午或下午；

(2) 当下午下雨时，上午是晴天；

(3) 一共有五个下午是晴天；

(4) 一共有六个上午是晴天.

则 e 等于

(A) 7.　　(B) 9.　　(C) 10.　　(D) 11.　　(E) 12.

（第 10 届美国高中数学考试，1959 年）

[解]　设天气情况所对应的天数如表

	上午下雨	上午晴天
下午下雨	a 天	b 天
下午晴天	c 天	d 天

由题设知　$a + b + c = 7$,　$a = 0$,　$c + d = 5$,　$b + d = 6$,

由上可解得　$d = 2$.　因而　$e = a + b + c + d = 9$.

故选(B).

36·32　某学生在暑假期间观察了 x 天的天气情况，其结果是

(1) 共有 7 个上午是晴天；

(2) 共有 5 个下午是晴天；

(3) 共下了 8 次雨；

(4) 下午下雨那天，上午是晴天.

则 x 等于

(A) 8.　　(B) 9.　　(C) 10.　　(D) 11.

（中国江苏省初中数学竞赛，1986 年）

[解]　由(4)知，无上、下午都下雨的天气.因而只能有下面三种情况：

上午晴，　　下午晴；
上午晴，　　下午雨；
上午雨，　　下午晴.

7 个上午晴　5 个下午晴
（共下 8 次雨）

即共记录了　$7+5+8=20$ 次或 20 个半天的天气情况.
则　$x=10$.
故选(C).

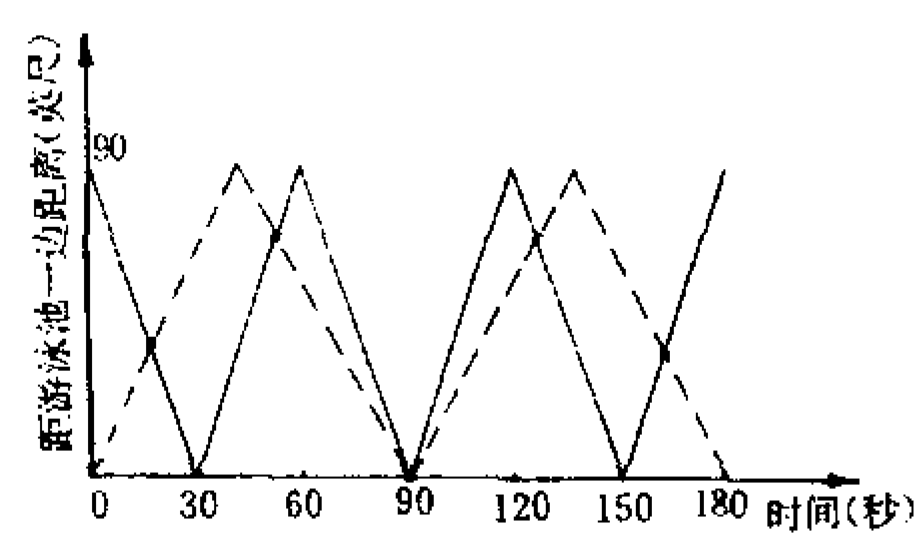
第 2 节　运动问题

36·33　两游泳运动员在长 90 英尺的游泳池的对边上开始游，一人以每秒 3 英尺，另一人以每秒 2 英尺的速度进行，他们来回游 12 分，若不计转方向时的时间，则他们相遇的次数为

(A) 24.　(B) 21.　(C) 20.　(D) 19.　(E) 18.

（第 11 届美国高中数学考试，1960 年）

[解]　用图像法解. 两运动员在三分钟内游泳的状况如下图：



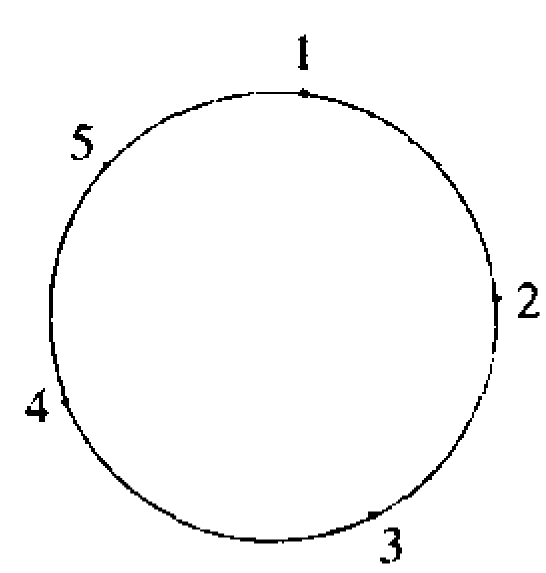
从图中可以看到：三分钟内他们彼此相遇 5 次.

又第一人往返一次需 60 秒，第二人往返一次需 90 秒，显然 180 秒为他们公共往返周期.

因此 12 分钟内两人共相遇 20 次.

故选(C).

36·34　圆周上按顺时针方向标有 1,2,3,4,5 五个点. 一只青蛙按顺时针方向绕圆从一点跳到另一点. 若它停在奇数点上，则下一次只能跳一个点；停在偶数点则可跳两个点，该蛙从 5 这点跳起，经



1995 次跳后它将停在的点是

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　(E)5.

（第 46 届美国高中数学考试,1995 年）

［解］ 青蛙运动路线为

$$⑤ \to 1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 2 \to 4 \to \cdots$$

即从第 2 跳起,每 3 跳一循环.

由于 $1995 - 1 = 1994 \equiv 2 \pmod 3$,

知青蛙经 1995 跳后停在标号为 4 的点上.

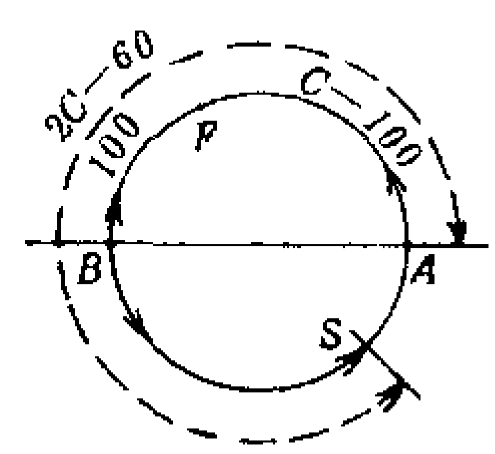
故选(D).

36·35 A 和 B 从直径的两个端点开始匀速向相反方向绕圆形路轨运动.如果他们在同时出发,当 B 走了 100 码后,他们相遇,同时他们又在 A 走完一圈前 60 码相遇,那么路轨的圆周长(以码计)为

(A) 400.　(B) 440.　(C) 480.　(D) 560.　(E) 880.

（第 21 届美国高中数学考试,1970 年）

［解］ 设路轨周长为 $2C$ 码,A,B 为起点,F 和 S 分别为第一次和第二次相遇点.



第一次相遇时,A,B 分别走了$C-100$ 和100 码;

第二次相遇时,A,B 分别走了$2C-60$和 $C+60$码.

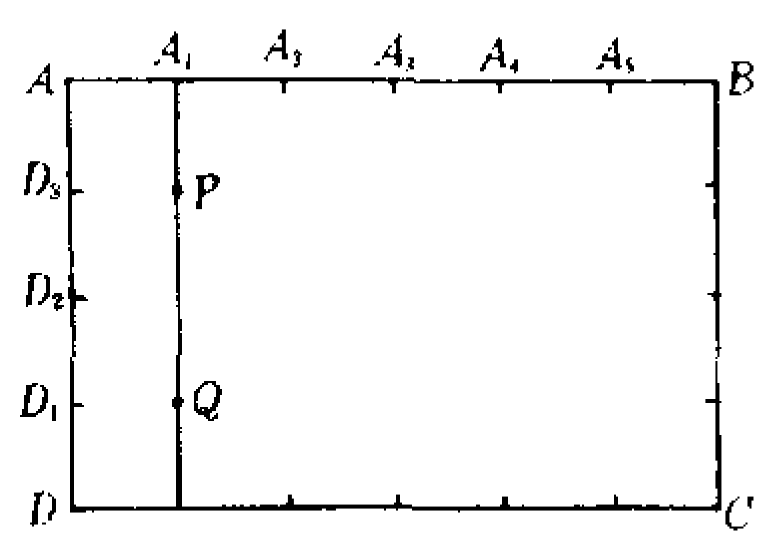
由于 A,B 均为匀速运动,故它们相同时间的路程比不变,即

$$\frac{C-100}{100}=\frac{2C-60}{C+60},$$

解得 $C = 240$,　因而 $2C = 480$.

故选(C).

36·36 如图,在一个 4×6 的球台上,有两个小球 P 和 Q.若小球 P 依次经过球台边 AB,BC,CD 和 DA 反弹后,恰好击中小球 Q.则小球 P 击出时,瞄准应是 AB 边上的(图中 A_k 为 AB 六等分点)

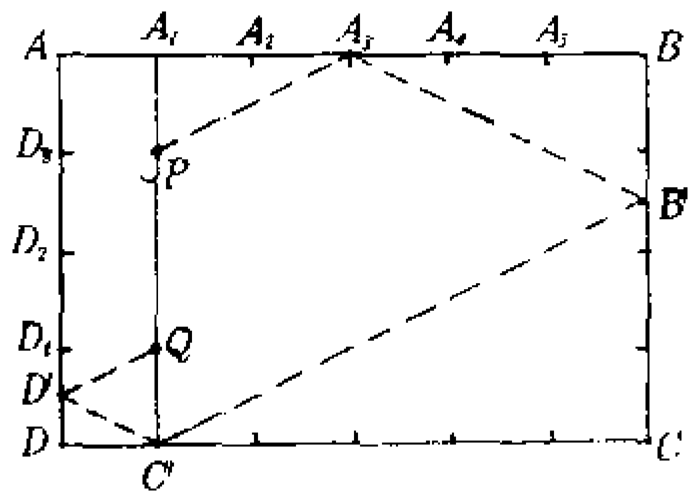


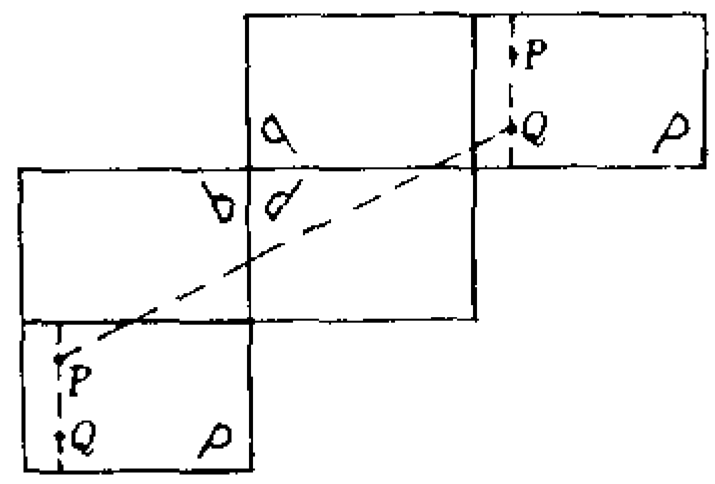
(A) A_2.　　(B) A_3.　　(C) A_4.　　(D) A_5.

（中国江苏省初中数学竞赛,1989 年）

［解 1］ 利用入射角等于反射角的结论,不难推得击球后 P 的路

线(左下图)　$P \to A_3 \to B' \to C' \to D'$.





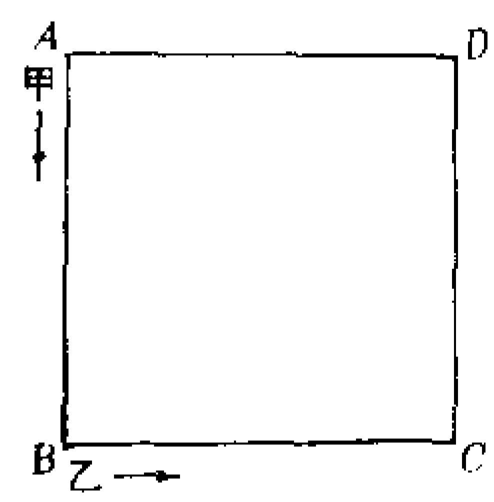
故选(B).

[**解 2**]　若将球台按右上图所示作四次反射,则连接开始及反射后的两球台中的P和Q点(图中虚线所示),其即为球P撞击各球台边后到Q的路径.

同样可求得A_3.

故选(B).

36·37　如图,沿着边长为90米的正方形,按$A \to B \to C \to D \to A \to \cdots$方向,甲从$A$以65米/分的速度,乙从$B$以72米/分的速度行走,当乙第一次追上甲时在正方形的



(A) AB边上.　　(B) BC边上.

(C) CD边上.　　(D) DA边上.

(中国上海市初中数学竞赛,1986年)

[**解**]　由题设知乙每分钟比甲多走$72 - 65 = 7$米.

乙开始时与甲相距$90 \cdot 3 = 270$米.乙第一次追上甲时已走了

$$72 \cdot \frac{270}{7} = \frac{72}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot 360 = \frac{54}{7} \cdot 360 = 7 \cdot 360 + \frac{5}{7} \cdot 360,$$

而
$$\frac{5}{7} \cdot 360 = \frac{1800}{7} \approx 257,$$

即　乙走了7圈又257米,即在DA上第一次追上甲.

故选(D).

36·38　如图,矩形$ABCD$中,$AB = 4\text{cm}$,$AD = 12\text{cm}$.P点在AD边上,以每秒1cm的速度从A向D运动;Q点在BC上,以每秒3cm的速度从C点出发,在CB之间往返运动.二点同时出发,待P点到D点为止.在这段时间内,线段PQ与AB平

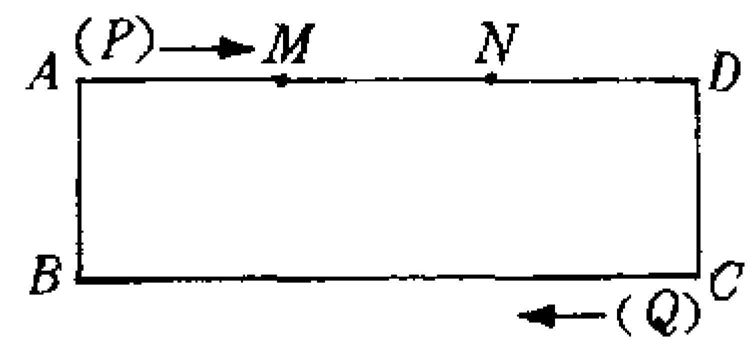


行的次数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(第9届"缙云杯"初中数学邀请赛,1992年)

[解] 设M,N分别为AD的三等分点.



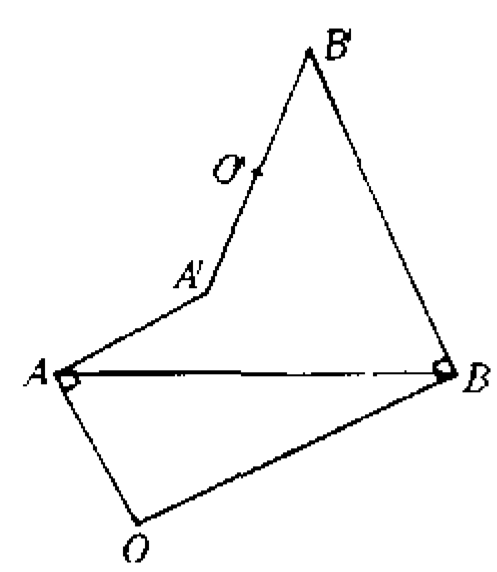
当点P由A到M时,Q点由C到达B点,中途某时刻线段PQ与AB平行一次.

同理,P点由M到N,或由N到D时的中途某时刻,线段PQ与AB各有一次平行的时刻.

所以,P由A到达点D时,PQ有三次与AB平行的机会.

故选(C).

36·39 如图,A,B为定点,O为一动点,在异于点O的一侧取两点A',B',使$\angle OAA' = \angle OBB' = 90°$,且$AA' = OA$, $BB' = OB$.设$A'B'$中点为O',当O在AB一侧移动时,则



(A) O'沿着某一直线运动.

(B) O'沿着某一圆周移动.

(C) O'固定不动. (D) 上述结论全不对.

(中国江苏省苏州市初中数学竞赛,1987年)

[解] 如图,过O,A',O',B'分别作AB的垂线,垂足为C,D,M,E.

易证 $BE = OC = AD$, 且 $B'E = BC$, $A'D = AC$.

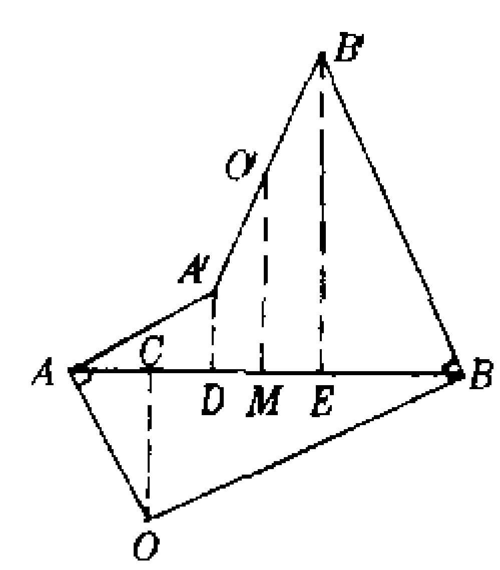
$$\therefore \quad O'M = \frac{A'D + B'E}{2} = \frac{AC + BC}{2} = \frac{AB}{2},$$

又 $O'M \perp AB$, 及

$AM = AD + DM = BE + EM = BM$,

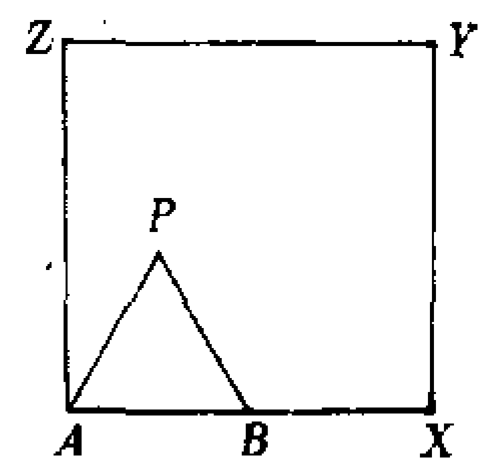
则当O在AB一侧移动时,O'固定不动.

故选(C).



36·40 边长为2英寸的等边三角形ABP(如图)置于边长为4英寸的正方形$AXYZ$内,使点B在边AX上.将三角形先绕点B作顺时针旋转,然后再绕P作顺时针旋转,如此进行使三角形沿着正方形的边.

向前转动，直到 P 回到原来位置. 这时顶点 P 所行路程长度的英寸数是



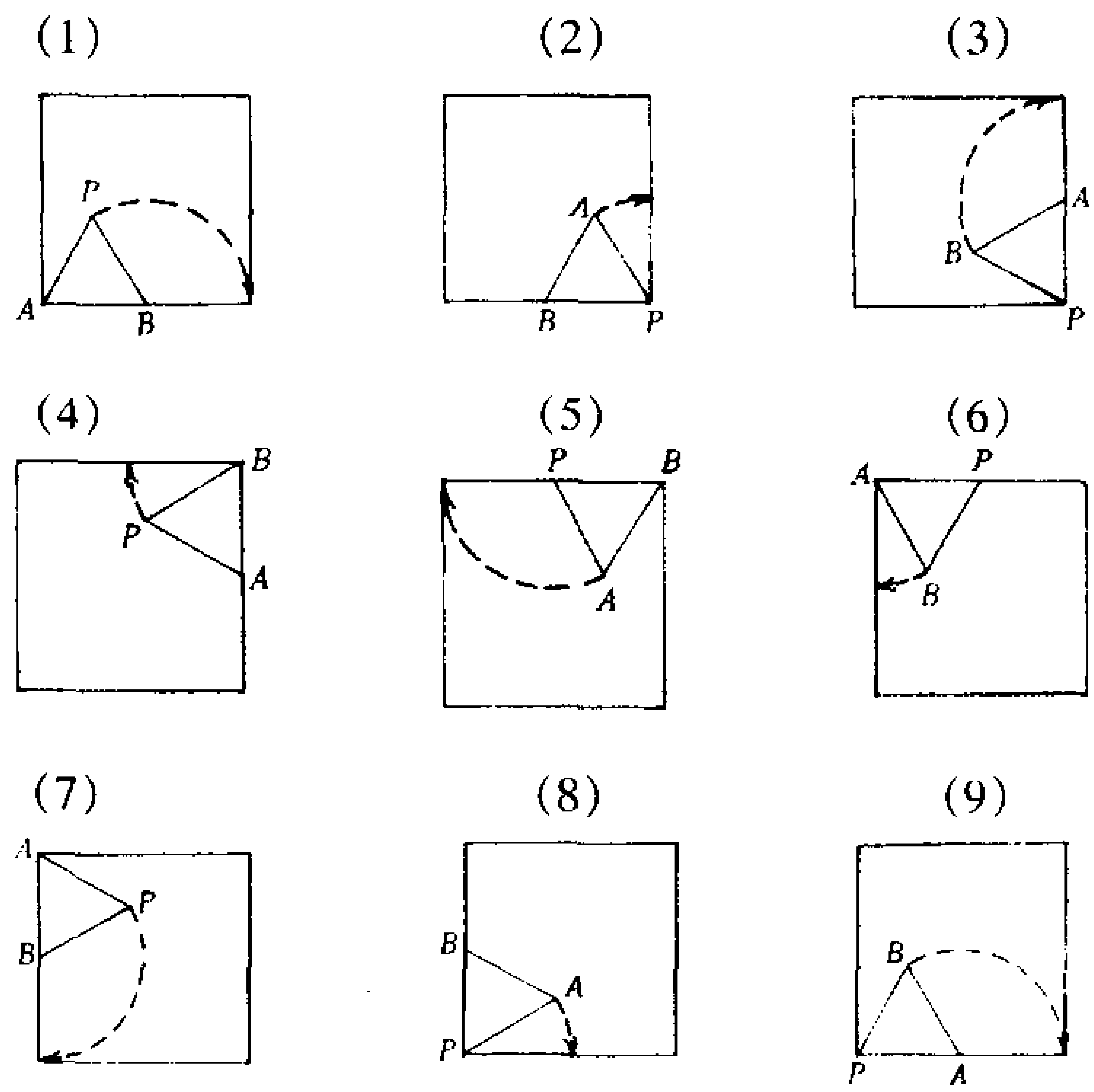
(A) $20\pi/3$.　　(B) $32\pi/3$.　　(C) 12π.

(D) $40\pi/3$.　　(E) 15π.

（第 23 届美国高中数学考试，1972 年）

[解]　易见，三角形转动了 $24 = 8 \cdot 3$ 次以后，点 P 才回复到它原来的位置. 这其中有 8 次转动是绕着顶点 P 的，这时 P 并没有行程.

在其他 16 次转动中，8 次是绕着正方形一边的中点，以到点 P 的长度为半径扫过 $120°$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ 弧度.



P 点移动　　　P 点不动　　　P 点移动

还有 8 次是绕着正方形的一个角，以到点 P 的长度为半径扫过 $30°$ 或 $\frac{1}{6}\pi$ 弧度.

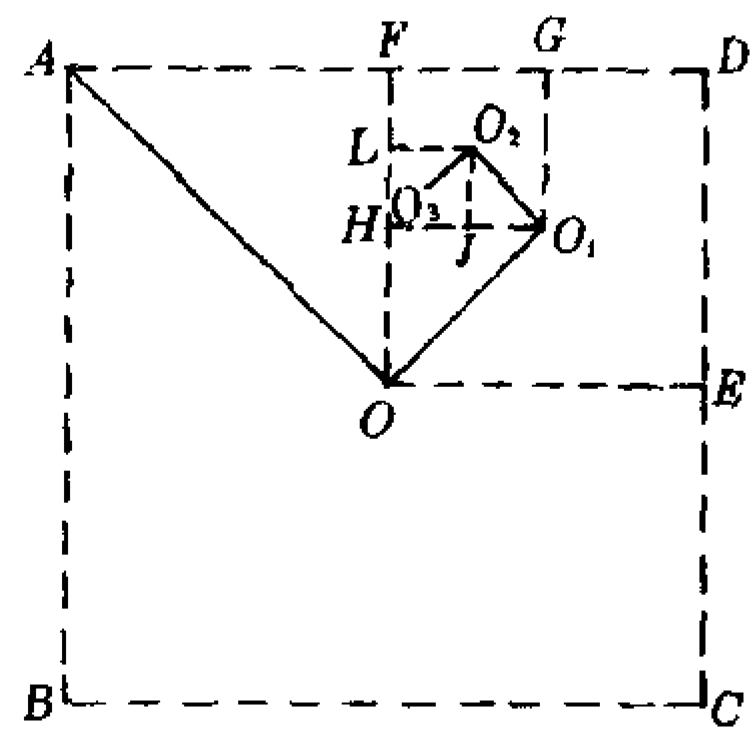
这样，以到点 P 的长度为半径扫过的总角度是

$$8\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{20}{3}\pi \text{ 弧度}.$$

因此点 P 所行路程的长度是 $\frac{40}{3}\pi$ 英寸.

故选(D).

36·41　某人从正方形 $ABCD$ 的顶点 A 走到中心 O（图中实线所示，下同），再从 O 走到正方形 $OEDF$ 的中心 O_1，又从 O_1 走到正方形 O_1GFH 的中心 O_2，接着从 O_2 走到正方形 O_2LHJ 的中心 O_3，此时共走了 $15\sqrt{2}$ 米．则正方形 $ABCD$ 的周长是



(A) 48 米.　　(B) 64 米.

(C) 72 米.　　(D) 80 米.

（中国江苏省南京市初中数学竞赛，1991 年）

[解]　设正方形边长为 a，则其对角线长为 $l=\sqrt{2}a$．易看出

$$AO=\frac{l}{2},\quad OO_1=\frac{l}{4},\quad O_1O_2=\frac{l}{8},\quad O_2O_3=\frac{l}{16}.$$

$\therefore$
$$\frac{l}{2}+\frac{l}{4}+\frac{l}{8}+\frac{l}{16}=15\sqrt{2}.$$

即
$$\frac{15}{16}l=\frac{15}{16}\sqrt{2}a=15\sqrt{2},$$

$\therefore$
$$a=16.$$

则正方形周长为

$$4a=4\cdot 16=64.$$

故选(B).

36·42　一只虫（不计大小）由坐标平面的原点出发．首先它向右移动 1 个单位到$(1,0)$．然后它逆时针旋转 90° 走$\frac{1}{2}$ 个单位到$\left(1,\frac{1}{2}\right)$．若照此继续下去，每次逆时针旋转 90° 并走上次走的一半，下列离虫最近的一点是

(A) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.　　(B) $\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$.　　(C) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right)$.

(D) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.　　(E) $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

（第 31 届美国高中数学考试，1980 年）

[解 1]　若这只虫无限地走下去，它水平方向移动的代数和，即等比级数的极限

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}.$$

类似地，它在垂直方向移动的代数和趋近

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\cdots=\frac{2}{5}.$$

所以这只虫离$\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$最近,

故选(B).

[解 2] 这些线段可以看做首项 $a_1=1$ 和公比 $r=\frac{i}{2}$ 的复等比级数.这样

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{2-i}=\frac{4+2i}{5},$$

在坐标语言中,极限是点$\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$.

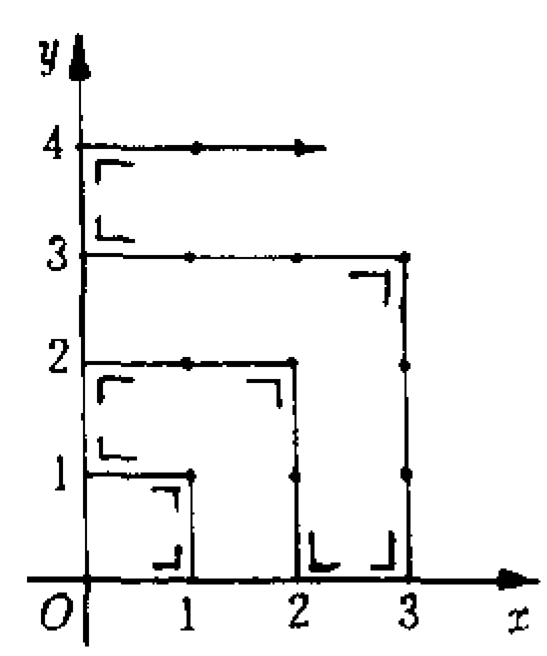
故选(B).

36·43 如图,一个粒子在第一象限运动,在第一分钟内它从原点运动到(1,0),而后它接着按图所示在与 x 轴,y 轴平行的方向上来回运动,且每分钟移动 1 个单位长度.那么,在 1989 分钟后这个粒子所处位置为

(A) (35, 44).　　(B) (36, 45).

(C) (37, 45).　　(D) (44, 35).

(E) (45, 36).



(第 40 届美国高中数学考试,1989 年)

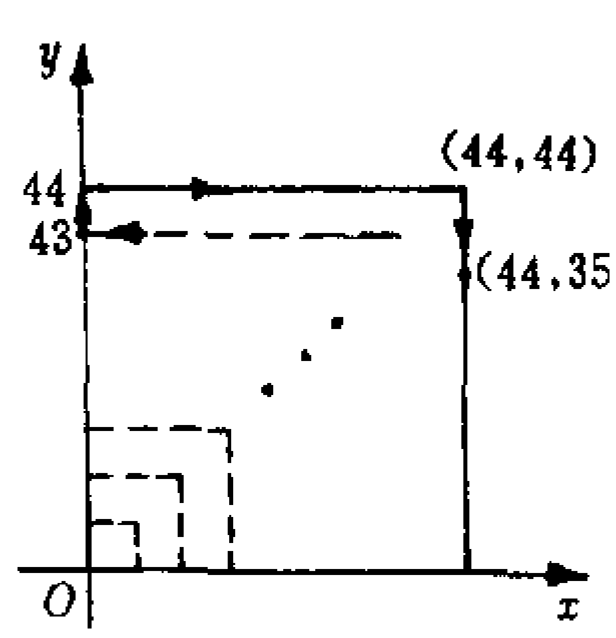
[解] 从题设可以看到,当 n 为奇数时,粒子经历$(n+1)^2-1$分后,到达点$(0,n)$;当 n 为偶数时,粒子经历$(n+1)^2-1$分后,到达点$(n,0)$.

$\because$ $44^2=1936$,则粒子经历 1935 分后到达点(0,43),这样粒子在 1936 分后到达点(0,44).

$1989-1936=53=44+9$,

则粒子在 1980 分后到达点(44,44),再过 9 分即 1989 分后到达点(44,35).

故选(D).

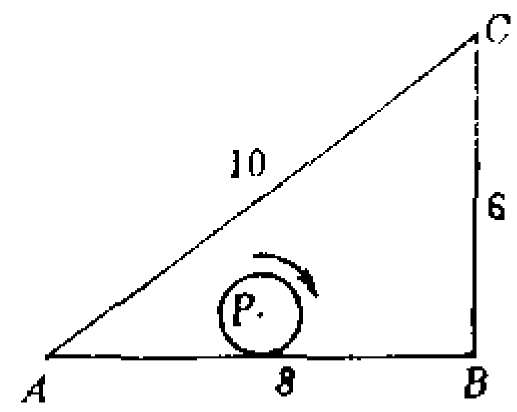


36·44 $\triangle ABC$ 的边长为 6,8,10,圆心为 P,半径为 1 的圆在$\triangle ABC$内滚动,且始终保持至少与一条边相切,当 P 首次返回初始位置时,

P 走过的路程是

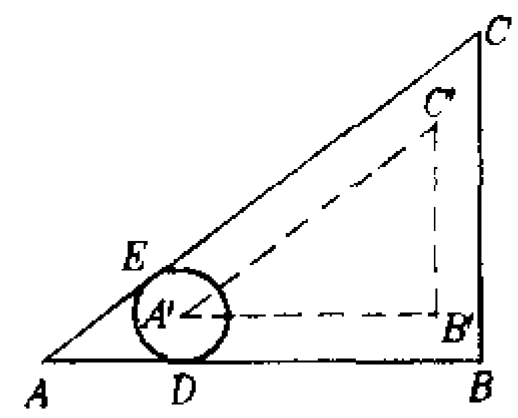
(A) 10. (B) 12. (C) 14. (D) 15.

(E) 17.



(第 44 届美国高中数学考试,1993 年)

[解] 如图,点 P 走过的轨迹是与 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A'B'C'$.



$$\because \quad AD = AE = \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3.$$

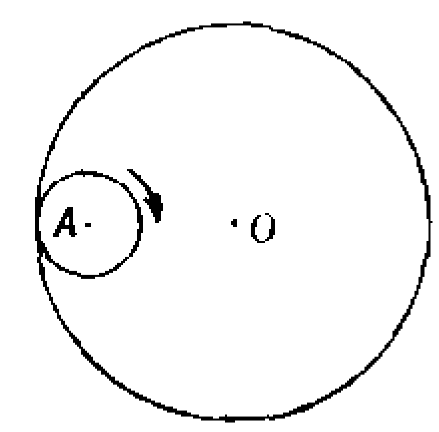
$$\therefore \quad A'B' = AB - \operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \operatorname{ctg}\frac{B}{2} = 4 = \frac{1}{2}AB,$$

即 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是$\frac{1}{2}$.

所以 $\triangle A'B'C'$ 的周长为

$$\frac{8+6+10}{2} = 12.$$

故选(B).

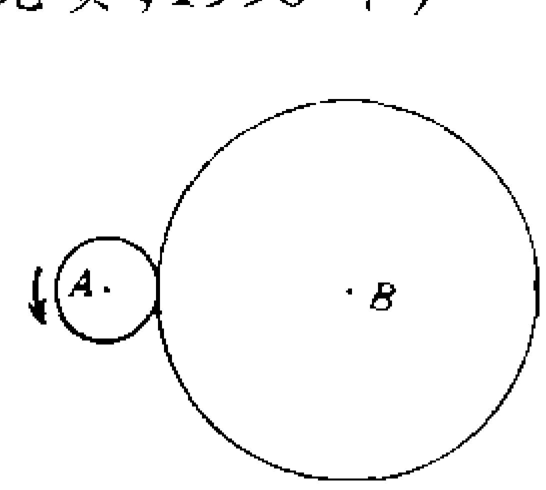


36·45 如图,圆 A 的半径为r,圆 O 的半径为$4r$,圆 A 从图上所示位置出发绕圆O作无滑动滚动,要使圆 A 的圆心返回到原来位置,圆 A 滚动的圈数为

(A)3. (B)4. (C)5. (D)6.

(中国山西省初中数学竞赛,1990 年)

[解] 由设知圆 O 半径为圆A 半径的 4 倍,则圆 O 周长亦为圆A 周长的 4 倍.



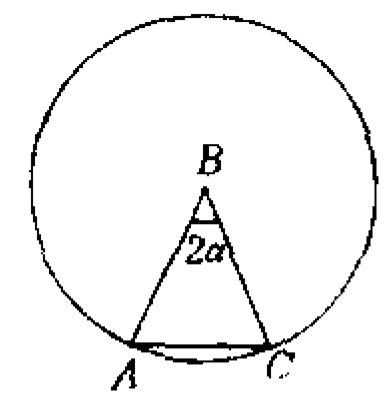
看上去圆 A 滚动的圈数为 4. 实际实验中我们会发觉圆 A 只转动了 3 圈,这因为圆 A 上的点当圆 A 滚动时按顺时针方向移动的话,圆 B 是按逆时针方向延伸的,故人们观察到的次数比自转次数少 1.

若小圆 A 在圆B 外圈滚动,人们观察到圆 A 转动的圈数,要比其自转圈数多 1.

故选(A).

36·46 如图,$\triangle ABC$ 的顶点B 在单位圆的圆心上,A,C 在圆周

上，$\angle ABC=2\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$. 现将 $\triangle ABC$ 在圆内按逆时针方向依次作旋转，具体方法如下：第一次，以 A 为中心，使 B 落到圆周上；第二次，以 B 为中心，使 C 落到圆周上；第三次，以 C 为中心，使 A 落到圆周上. 如此旋转直到第 100 次. 那么，A 点所走路程的总长度为



(A)$22\pi(1+\sin\alpha)-66\alpha$.　　(B) $\frac{67}{3}\pi$.

(C)$22\pi+\frac{68}{3}\pi\sin\alpha-66\alpha$.　　(D)$33\pi-66\alpha$.

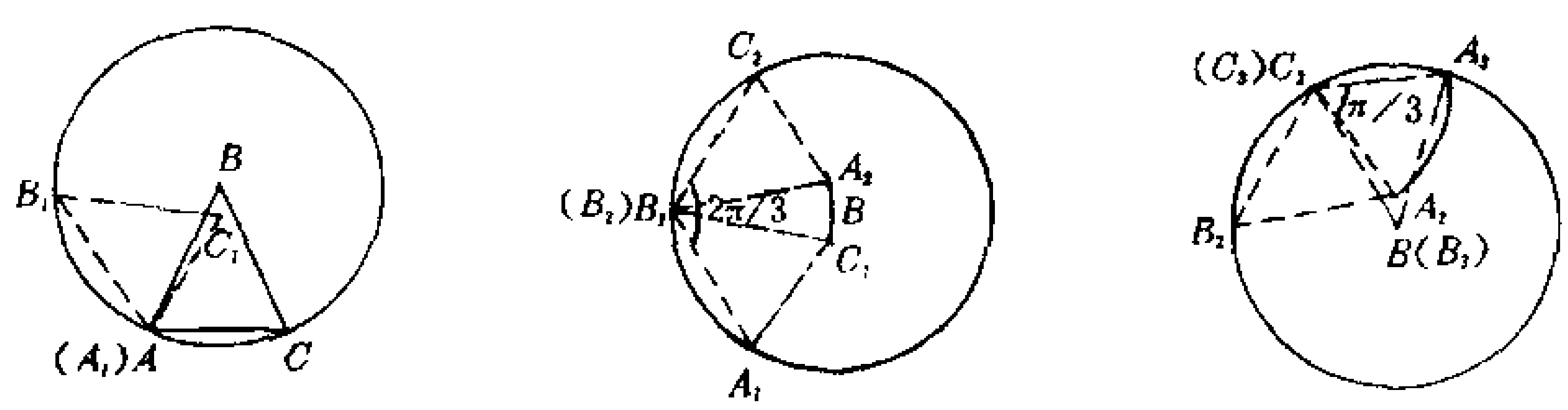
（中国高中数学联赛，1987 年）

[解]　在这 100 次运动中，A 点在第 1,4,7,11,…,100 次运动中都未动，而第 2,5,8,…,98 次运动中 A 点走过的路程相等；第 3,6,9,…,99 次运动中 A 点走过的路程相等；所以，只要计算出 A 点在第 2 次及第 3 次运动中走过的路程即可.

在下图中，A_2 表示 A 点第 2 次运动后的位置，其余下标类似.

因　$\angle AB_1C_2=\frac{2\pi}{3}$，　所以 $\angle AB_1A_2=\frac{2\pi}{3}-2\alpha$，

所以 A 点在第 2 次运动中走过的路程为



$$\overset{\frown}{AA_2}=1\cdot\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=\frac{2\pi}{3}-2\alpha,$$

由于 B_3 必在 C_2A_3 的中垂线上，且 $C_2B_3=1$，所以 B_3 即是 B 点，这样从 $\triangle C_3A_2B_2$ 到 $\triangle C_2A_3B_3$ 的旋转角为$\frac{\pi}{3}$，

故　　$\angle A_3C_2A_2=\frac{\pi}{3}$.

又　　$A_3C_2=AC=2\sin\alpha$，

故 A 点在第 3 次运动中走过的路程为

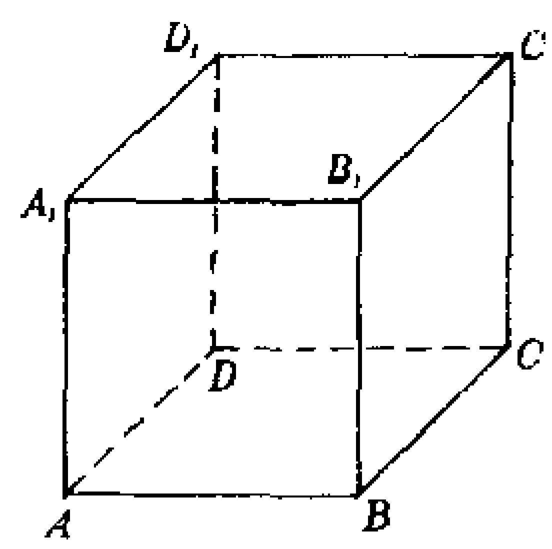
$$\overset{\frown}{A_2A_3}=2\sin\alpha\cdot\frac{\pi}{3}.$$

综上讨论，得 A 点在 100 次运动中走过的路程为

$$33(\overset{\frown}{AA_2}+\overset{\frown}{A_2A_3})=22\pi(1+\sin\alpha)-66\alpha.$$

故选(A).

36·47　$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位立方体，黑白两蚁都从点 A 出发沿棱向前爬行，每走完一条棱称为"走完一段". 白蚁爬行的路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots$，黑蚁爬行的路线是 $AB\to BB_1\to\cdots$ 它们都遵循下列规则：所爬的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须为异面直线(i 是自然数). 设黑白两蚁走完第 1990 段后，各停在正方体的某个顶点处. 这时黑白两蚁的距离是



(A)1.　　(B) $\sqrt{2}$.　　(C) $\sqrt{3}$.　　(D)0.

(第 1 届"希望杯"全国数学邀请赛，1991 年)

[解]　白蚁所经路线依题设规则为

$$AA_1\to A_1D_1\to D_1C_1\to C_1C\to CB\to BA\to AA_1,$$

周期为 6，又 $1990\equiv4(\mathrm{mod}6)$，知其最后落在点 C.

黑蚁所经路线依题设规则为

$$AB\to BB_1\to B_1C_1\to C_1D_1\to D_1D\to DA\to AB,$$

周期亦为 6，因而其最后落在点 D_1.

这时两蚁距离为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

故选(B).

36·48　一昼夜中，时针，分针，秒针三者重合的次数是

(A)2.　　(B)4.　　(C)6.　　(D)24.

(中国湖北省黄冈地区初中数学竞赛，1993 年)

[解]　时钟三针重合当且仅当 12 时整的时刻，这样一昼夜时针，分针，秒针三者仅重合两次.

故选(A).

36·49　时针和分针在下列时段重合过一次的是

(A)2 : 30 ~ 3 : 00.　　(B)7 : 30 ~ 7 : 45.

(C)12 : 45 ~ 13 : 00.　　(D)18 : 00 ~ 18 : 30.

(第 2 届"五羊杯"初中数学竞赛，1990 年)

[解]　时针在

2 : 30 ~ 3 : 00，12 : 45 ~ 13 : 00，18 : 00 ~ 18 : 30 不会与分针重合.

而时针与分针在 7 : 35 ~ 7 : 40 之间会重合一次.

故选(B).

36·50　时间 2 : 15,其时针与分针的夹角为

(A)30°.　(B)5°.　(C)22.5°.　(D)7.5°.　(E)28°.

(第 2 届美国高中数学考试,1951 年)

[解]　2 时整,时钟分针与时针夹角为 60°. 又分针旋转速度变为时针的 12 倍.

时间从 2 : 00 到 2 : 15,分针旋过 90°,此时时针走过$\frac{90^\circ}{12}$. 因而 2 : 15 时,分针与时针夹角为

$$90^\circ-(60^\circ+\frac{90^\circ}{12})=22.5^\circ.$$

故选(C).

36·51　时间在 7 点与 8 点之间,当时针与分针之间夹角为 84° 时,正确到最接近的时间是

(A)7 : 23 与 7 : 53.　(B)7 : 20 与 7 : 50.

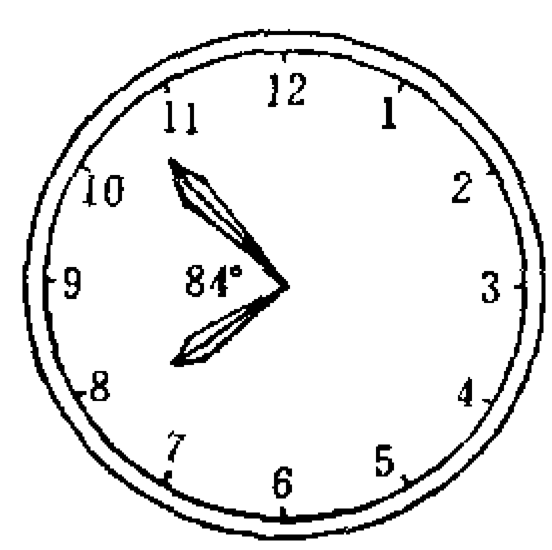
(C)7 : 22 与 7 : 53.　(D)7 : 23 与 7 : 52.

(E)7 : 21 与 7 : 49.

(第 5 届美国高中数学考试,1954 年)

[解]　时针与分针夹角为 84° 时,相当于分针走过

$$84^\circ\cdot\frac{60}{360^\circ}=14(\text{分}).$$



设正确时间为 7 点 x 分,注意到分针走 x 分钟时,时针走$\frac{x}{12}$(分钟格),此时,时针实际位置相当于 $35+\frac{x}{12}$(分钟格)处,故依题设有

$$35+\frac{x}{12}=x\pm 14,$$

得　$x=\frac{12}{11}\cdot 21\approx 23$　或　$\frac{12}{11}\cdot 49\approx 53.$

故选(A).

36·52　某人在下午 6 : 00 刚过去用晚餐时看了手表，指针成 110°,在下午 7 : 00 前返回,注视手表上指针也成 110°,则此人用餐共花费的分钟数为

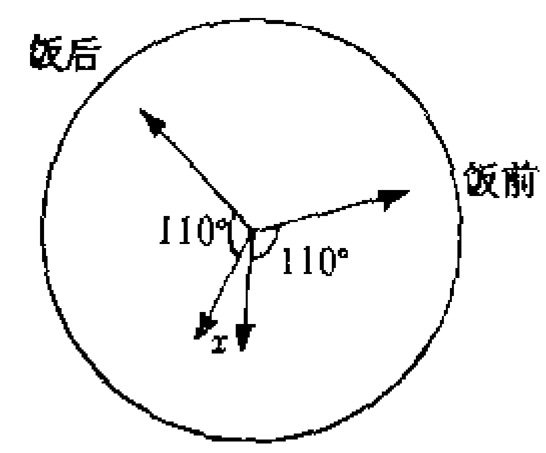
(A)$36\frac{2}{3}$.　(B)40.　(C)42.　(D)42.4.　(E)45.

(第 13 届美国高中数学考试,1962 年)

[解]　令 x 为时针在此期间走过的角度,此时分针走过角度为 $12x$.

从图中可以看出分针走过的角度又为 $220+x$,从而

$220+x=12x$,　得　$x=20$.



此间分针共走过 $12x=240$ 度,而分针每走 6° 对应 1 分钟,从而分针走过的时间为

$$\frac{240}{6}=40(分).$$

故选(B).

36·53　如果现在时间是 10 : 00 与 11 : 00 之间,而 6 分后,钟表的分针将会刚好同 3 分前时针的方向相反,现在的准确时间是

(A)10 时 $5\frac{5}{11}$ 分.　(B)10 时 $7\frac{1}{2}$ 分.　(C)10 时 10 分.

(D)10 时 15 分.　(E)10 时 $17\frac{1}{2}$ 分.

(第 21 届美国高中数学考试,1970 年)

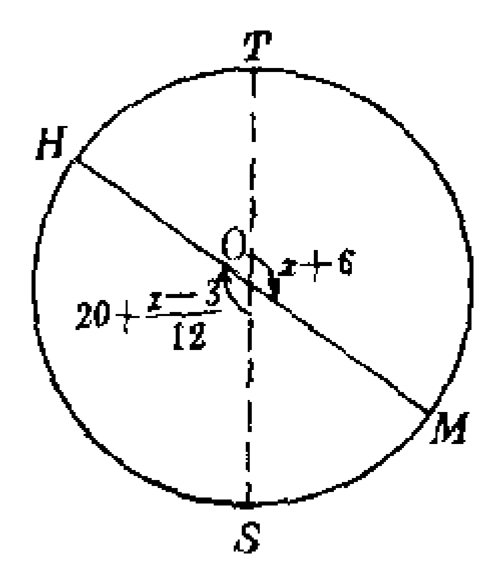
[解]　设 x 为 10 点后的分钟数.且设 M,H 分别为分针 6 分钟后,时针 3 分钟前的位置.

若以分钟来度量则有　$\angle TOM=x+6$,

及　$\angle SOH=20+\frac{x-3}{12}$.

于是　$x+6=20+\frac{x-3}{12}$,　解得　$x=15$.

故选(D).



36·54　某君作一旅行,当时钟的两针在上午 8 时与 9 时间重合时出发,而在下午 2 时与 3 时之间时钟的两针恰成 180° 时到达,故此旅行共用

(A)6 时.　　(B)6 时 $43\frac{7}{11}$ 分.　　(C)5 时 $16\frac{4}{11}$ 分.

(D)6 时 30 分.　　(E) 非上述答案.

（第 6 届美国高中数学考试,1955 年）

[解]　设时针分针在 8 点 x 分重合,因 8 点时分针距时针 40 个单位(一周视为 60 单位),则重合时(分针追上时针):

$$x-\frac{x}{12}=40,\ 得\ x=43\frac{7}{11}(分).$$

类似地 2 点至 3 点间,时,分针在 2 点 $43\frac{7}{11}$ 分时成 180°.

综上知此君共用 6 小时.

故选(A).

36·55　一手表每天慢 $2\frac{1}{2}$ 分,设在 3 月 15 日下午 1 时整拨正.又设 n 为当时手表所指之时间经拨正所须加之正确分数,当 3 月 21 日手表指上午 9 时,则 n 等于

(A)$14\frac{14}{23}$.　　(B)$14\frac{1}{14}$.　　(C)$13\frac{101}{115}$.

(D)$13\frac{83}{115}$.　　(E)$13\frac{13}{23}$.

（第 15 届美国高中数学考试,1964 年）

[解]　由于一天共有 $60\cdot 24=1440$ 分钟,而表每天慢 $2\frac{1}{2}$ 分钟,因而其每天实际只走了

$$1440-2\frac{1}{2}=1437\frac{1}{2}(分).$$

故实际时间与表走过的时间之比为　$\dfrac{1440}{1437\frac{1}{2}}=\dfrac{576}{575}$.

按该表所走一分钟为一分,一天为一天计算,从 3 月 15 日下午 1 时至 3 月 21 日上午 9 时计 $5\frac{5}{6}$ 天,或 $60\cdot 24\cdot 5\frac{5}{6}$ 分钟.

故　$$60\cdot 24\cdot 5\frac{5}{6}+n=60\cdot 24\cdot 5\frac{5}{6}\cdot\frac{576}{575},$$

∴　$$n=60\cdot 140\cdot\left(\frac{576}{575}-1\right)$$

$$= 14\frac{14}{23}.$$

故选(A).

36·56　某厂一只普通的钟走得慢了,以至要每69分分针才能与时针在通常钟面位置(如12时等等)上相遇一次.支付给一个工人每小时4.00美元,超过规定的时间则每小时6.00美元.工人按该慢钟做完规定的8小时工作后,应额外付给工人

(A)2.30美元.　(B)2.60美元.　(C)2.80美元.

(D)3.00美元.　(E)3.30美元.

(第22届美国高中数学考试,1971年)

[解]　慢钟时针,分针相遇11次,即

走12小时 = 69·11分钟 = 12小时 + 39分钟.

∴　慢钟走8小时 = 8小时 + 26分钟,超过规定时间26分钟.

每小时要付6美元,或每分钟10美分,总共要付给2.60美元.

故选(B).

第3节　竞技与博弈

36·57　把2,4,7,K四张牌分发给四人,每人按牌面数字记分(K记为13),然后收回重洗,再分发和记分,…,若干次后,发现四人累计各得16,17,21和24分.已知得16分者最后一次得2分.则他在第一次得分数是

(A)2.　(B)4.　(C)7.　(D)13.

(第2届"五羊杯"初中数学竞赛,1990年)

[解]　由题设知每次四人得分总计均为

$$2 + 4 + 7 + 13 = 26,$$

又若干次后四人累计得分和为

$$16 + 17 + 21 + 24 = 78.$$

可见共发了三次牌($78 \div 26 = 3$).又得16分者最后一次得2分,则前两次共得14分.

而　2,4,7,13中只有两次均取7其和才能是14.

故选(C).

36·58 A 给B的钱数等于B手中的钱数,A给C的钱数等于C手中的钱数,与此相同,B给A和C的钱数等于他们各自手中的钱数,C给A和B的钱数等于他们各自手中的钱数,若最后大家都各有16元,则A最初的钱数为

(A)24. (B)26. (C)28. (D)30. (E)32.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解] 设A,B,C三人最初手中钱数分别为a,b,c.由设可列出下表

	A	B	C
开始	a	b	c
第一轮后	$a-b-c$	$2b$	$2c$
第二轮后	$2(a-b-c)$	$2b-(a-b-c)-2c$ $=3b-a-c$	$4c$
第三轮后	$4(a-b-c)$	$2(3b-a-c)$	$4c-2(a-b-c)$ $-(3b-a-c)$ $=7c-a-b$

则 $\begin{cases}4(a-b-c)=16,\\2(3b-a-c)=16,\\7c-a-b=16.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=26,\\b=14,\\c=8.\end{cases}$

故选(B).

36·59 某人最初有64元,和人打赌6次,结果赢三次,输三次,其输赢的次序是任意的,赢的机会与输的机会是相等的,若赌金是每一次赌时所余钱的一半,则最后的结果是

(A) 输了27元. (B) 赢了27元. (C) 输了37元.

(D) 不赢也不输. (E) 输赢依据输赢发生的次序而定.

(第14届美国高中数学考试,1963年)

[解] 设M_0为开始的款数.若第一次打赌赢后,其款数将为

$$M_1=M_0+\frac{1}{2}M_0=\frac{3}{2}M_0.$$

若第二次打赌又赢后,其款数为

$$M_2 = M_1 + \frac{1}{2}M_1 = \frac{3}{2}M_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 M_0.$$

……

由上分析可知：每赢一局，其手中款数为原来款数的$\frac{3}{2}$.

同样分析可知：每输一局，其手中款数为原来款数的$\frac{1}{2}$.

因其在 6 次中三赢三输，不论次序如何，最后其手中款数为

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 M_0 = \frac{27}{64}M_0,$$

即其损失 $$M_0 - \frac{27}{64}M_0 = \frac{37}{64}M_0.$$

因 $M_0 = 64$，故知 6 次下来，输掉 37 元.

故选(C).

36·60　三个男孩同意分配一袋的石子，分配如下：第一人得总数的一半多一个，第二人得剩下来的三分之一，第三人发现剩下来给他的刚好是第二人的 2 倍. 则石子的总数为

(A)8 或 38.　(B) 从已予的数据无法决定.　(C)20 或 26.

(D)14 或 32.　(E) 非上述答案.

（第 6 届美国高中数学考试，1955 年）

[解]　设石子总数为 n，则由题设知

第一人得$\frac{n}{2}+1$；第二人得$\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}-1\right)$；第三人得$\frac{2}{3}\left(\frac{n}{2}-1\right)$.

事实上第三人所得恰是

$$n-\left(\frac{n}{2}+1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

而已（此条件如同虚设），因而无法建立相应的方程.

故选(B).

36·61　一次职业保龄球赛的最后阶段，前五名选手再按下法比赛，首先由第五名与第四名赛，输者得 5 等奖；赢者与第三名赛，输者得 4 等奖；赢者与第二名赛，输者得 3 等奖；赢者与第一名赛，输者得 2 等奖；赢者得 1 等奖，不同的得奖顺序种类有

(A)10.　　(B)16.　　(C)24.　　(D)120.

(E) 不同于以上答案中任一个.

（第 39 届美国高中数学考试,1988 年）

［解］ 设前五名分别为 A,B,C,D,E;则

D,E 比赛决定 5 等奖方式有 2 种;

D,E 胜者与 C 决定 4 等奖方式亦有 2 种;

他们中胜者与 B 决定 3 等奖方式有 2 种;

最后前三轮胜者与 A 决定 2 等奖和 1 等奖方式亦有 2 种.

故总计有 $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$(种).

故选(B).

36·62　在一次越野比赛中,双方各有 5 名队员.若队员在比赛中获第 n 名就为本队得到 n 分,得分少的队获胜.如果队员之间无任何关系,那么可能获胜队的分数的个数是

(A) 10.　(B) 13.　(C) 27.　(D) 120.　(E) 126.

（第 40 届美国高中数学考试,1989 年）

［解］ 两队比赛后的总分是

$$1+2+3+\cdots+9+10=\frac{10\cdot11}{2}=55,$$

因而获胜队的分数应不大于 $\left[\frac{55}{2}\right]=27$.

又每队最少得分是 $1+2+3+4+5=15$,这样获胜队的可能得分是介于 15 和 27 之间,即 15,16,…,26,27 共 13 个.

故选(B).

36·63　在一次网球比赛中,n 个女子和 $2n$ 个男子打,并且每个选手与其他各个选手恰恰比赛一次.若没有平局,并且女子赢的局数与男子赢的局数之比是 7/5,那么 n 等于

(A) 2.　(B) 4.　(C) 6.　(D) 7.　(E) 这些都不对.

（第 29 届美国高中数学考试,1978 年）

［解］ 设 k 表示在比赛中女子战胜男子的局数,又设 W 和 M 分别表示女子和男子赢的局数.

依题设比赛的总局数,一男一女间比赛的局数,二男间比赛的局数和二女间比赛的局数分别是

$$\frac{3n(3n-1)}{2},\quad 2n^2,\quad \frac{2n(2n-1)}{2}\quad 和\quad \frac{n(n-1)}{2},$$

因为 $k \leqslant 2n^2$,逐步可推出,

$$\frac{3n(3n-1)}{2k+n(n-1)} = \frac{2(M+W)}{2W} = \frac{M}{W}+1 = \frac{12}{7},$$

即
$$63n^2 - 21n = 24k + 12n^2 - 12n.$$

故
$$\frac{17n^2-3n}{8} = k \leqslant 2n^2, \tag{⊛}$$

或 $\quad 17n^2 - 3n \leqslant 16n^2,\quad$ 得 $\quad n \leqslant 3.$

把 $n = 1,2,3$ 代入⊛式得到 $k = \frac{7}{4},\ \frac{31}{4},\ 18.$

因为 k 必须是一个整数,则 $n = 3.$

故选(E).

36·64　一次数学竞赛中,B,D 得分和与 A,C 得分和相等,若将 B,C 得分互换,则 A,C 得分和将超过 B,D 得分和.此外,还知 D 的得分比 B,C 得分和还多.假定所有得分都是非负的,那么从高分到低分排列顺序是

(A) D,A,C,B.　　(B) D,A,B,C.　　(C) D,C,B,A.

(D) A,D,C,B.　　(E) A,D,B,C.

（第 38 届美国高中数学考试,1987 年）

[解]　设 a,b,c,d 分别为 A,B,C,D 的得分.依题设有

$$\begin{cases} b+d = a+c, & ① \\ a+b > c+d, & ② \\ d > b+c. & ③ \end{cases}$$

由①有　$d = a+c-b$　代入③得

$$a > 2b, \tag{④}$$

又由①有　$a = b+d-c$　代入②得

$$b > c, \tag{⑤}$$

再由①有　$b = a+c-d$ 代入②得

$$a > d, \tag{⑥}$$

又由③显然有　$d > b$,且 $d > c$.

综上有　$a > d > b > c$.

故选(E).

36·65　桌上放着32只棋子，甲、乙两人轮流取走若干棋子. 规则是：由甲先取，且每人每次至少取1只，至多取6只，谁最后取完棋子，谁就获胜. 甲为了保证获胜，开始时，甲先取棋子的只数应该是

(A) 6只.　　(B) 5只.　　(C) 4只.　　(D) 3只.

（中国江苏省苏州市高中数学竞赛，1990年）

[解]　先走者若最后将剩7只棋子的局势留给对手，则他可胜；

倒推看，上一把应将14只棋子的局势留给对手(对手无论取几只，你只须取到与对手所取棋子数和为7即可)；

仿上分析，甲只须将7－14－21－28－35－… 等局势留给对手即可.

如题设情形，当他取走4只后，剩28只留给对手，他可获胜.

故选(C).

36·66　有三堆石子粒数各为2,3,4. 两人轮流取走石子，规则是：每人每次至少取走1粒，多取不限，但必须在同一堆石子中取，取到最后1粒者为输. 则必胜的方法

(A) 先取者有.　　(B) 后取者有.

(C) 两人均有.　　(D) 两人均没有.

（第3届"五羊杯"初中数学竞赛，1991年）

[解]　先取者有获胜方法，请循下法：

(1) 先从第3堆中取走3粒石子，使剩下的石子数为1，由(2,3,4) → (2,3,1)；

(2) 如对手取后为(2,3,0)，这时你设法使你取后余下两堆石子数变得相等，即你取后应留下(2,2,0)局面；

如对手取后为(1,3,1)，这时你取后应留给对手(1,1,1).

总之，一但你把局势即三堆石子数$(k,k,0)(k \geqslant 2)$或(1,1,1)留给对手，你必获胜(余下步骤只须在对手所取石子的另一堆，取对手所取同样石子数即可).

故选(A).

36·67　第二届"中华少年"杯初二数学竞赛，如果有148名学生

的分数在100分与120分之间(得分记正整数),将分数相同的学生列为同一名次,设同一名次内最多为 x 名学生,那么 x 的最小值为

(A) 7 名.　　(B) 8 名.　　(C) 20 名.　　(D) 100 名.

(第 2 届中国天津市"中华少年杯"数学邀请赛,1988 年)

[解]　100 到 120 之间共有 21 个正整数,注意到

$$148 = 21 \cdot 7 + 1,$$

所以 x 的最小值为 $7 + 1 = 8$.

故选(B).

36·68　有一份选择题试卷共六道小题.其得分标准是:一道小题答对得 8 分,答错得 0 分,不答得 2 分.某同学共得了 20 分,则他

(A) 至多答对一道小题.　　(B) 至少答对三道小题.

(C) 至少有三道小题没答.　　(D) 答错两道小题.

(第 2 届"希望杯"全国数学邀请赛,1991 年)

[解]　设该同学答对 x 题,不答的有 y 题,答错的有 z 题.依题设

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 8x + 0y + 2z = 20, \end{cases}$$

这里 $x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad z \geqslant 0$ 且为整数.

解得　$x = y = z = 2$.

故选(D).

36·69　一些同学参加三项比赛,冠军得 5 分,亚军得 3 分,季军得 1 分,没有并列的.那么,一个同学要想使得分一定比其他同学高,他至少要得的分数为

(A) 9.　　(B) 10.　　(C) 11.　　(D) 13.　　(E) 15.

(第 7 届美国初中数学考试,1991 年)

[解]　三项比赛总分为$(5 + 3 + 1) \cdot 3 = 27$.

而每位选手得分最多的前三种可能得分是 15;13,11,且一选手一但得 13 分时(两冠一亚),其他选手无论如何也达不到此分数.

少于 13 分不行,比如该选手得 11 分(一冠两亚),其他选手仍有可能得 13 分.

故选(D).

36·70　在共有 n 个问题的考试中,某学生答对前 20 道题中的 15 题,余下的问题他答对$\frac{1}{3}$,所有的问题有相同的计分,若此学生之得分是 50% ,那么 n 的不同值的个数有

(A) 4.　(B) 3.　(C) 2.　(D) 1.　(E) 此问题不能解.

(第 10 届美国高中数学考试,1959 年)

[解]　设每题得分为 t,则总分为 nt.则该学生得分为

$$15t+\frac{1}{3}\cdot t(n-20).$$

再由设有　$\dfrac{15+\dfrac{(n-20)}{3}}{n}=50\%$,　解得　$n=50$.

故选(D).

36·71　某次数学测验共有十道选择题,评分办法是:每一题答对得 4 分,答错得 -1 分,不答得 0 分.设这次测验至多有 n 种可能的成绩,则 n 应该等于

(A) 42.　(B) 45.　(C) 46.

(D) 48.　(E) 以上答案都不对.

(北京市初中数学竞赛,1983 年)

[解]　按题设评分办法,最少得 -10 分(十题均答错),最多得 40 分(十题均答对). -10 到 40 共有 51 种可能的分数.

但十题全对得 40 分,对九题最多得 36 分,因此,不能取得 39,38,37 这三种分数;

当对九题时,只能得 36(对九,空一)或 35(对九,错一)两种分数.因此 34,33 这两种分数不能取到;

当对八题时,只能得 32(对八,空二),31(对八,错一,空一),30(对八,错二)三种分数,而 29 分则不能取到.

容易验证,由 -10 到 28 分这些分数均可取到.因此这次测验至多有 $51-3-2-1=45$ 种可能的成绩.

故选(B).

36·72　在某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有3名选手各比赛了2场之后就退出了.这样，全部比赛只进行了50场，那么在上述3名选手之间比赛的场数是

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

（中国高中数学联赛，1999年）

[解]　设这三名选手之间的比赛场数是 r，共 n 名选手参赛.

由题意，可得　$50 = C_{n-3}^{2} + r + (6 - 2r)$，

即　$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} = 44 + r.$$

由于　$0 \leqslant r \leqslant 3$，经检验可知，仅当 $r = 1$ 时，$n = 13$ 为正整数.

故选(B).

第三十七章　格　点

37·1　整(格)点是指在平面上坐标均为整数的点.以点(3,17),(48,281)为端点的线段上的整点的个数为(含端点)

(A) 2.　(B) 4.　(C) 6.　(D) 16.　(E) 46.

(第40届美国高中数学考试,1989年)

[解]　过题设两点的直线的斜率为

$$k=\frac{281-17}{48-3}=\frac{264}{45}=\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 11}{3\cdot 3\cdot 5}=\frac{3\cdot 2^3\cdot 11}{3^2\cdot 5}$$

显然,分子分母仅有公约数3,即 $k=\frac{88}{15}$.

这样线段上除端点外,还仅有两个整点:

$$(48-15,\ 281-88)=(33,\ 193),$$

和

$$(15+3,\ 88+17)=(18,\ 105).$$

故选(B).

37·2　在直角坐标系中,横坐标和纵坐标都为整数的点称为整点.设过 $A(-2\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$,$B(0,\sqrt{2})$两点的直线为 l;过 $C\left(0,\frac{3}{2}\right)$,$D\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$两点的直线为 m.则

(A) 直线 l 上无整点.　(B) 直线 l 上有有限个整点.

(C) 直线 m 上无整点.　(D) 直线 m 上有有限个整点.

(中国广州、武汉、福州等五市初中数学联赛,1990年)

[解]　设(x,y)为 l 上的点,则有

$$\frac{x-0}{y-\sqrt{2}}=\frac{0+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)},$$

即 $$\frac{x}{y-\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\quad 或\quad x=2\sqrt{2}y-4.$$

故其整数解仅有$(-4,0)$,即 l 仅过一个整点.

同理可证 m 上有无穷多整点.

综上,故选(B).

37·3　在坐标平面上,纵横坐标都是整数的点叫做整点,我们用 I 表示所有直线的集合,M 表示恰好通过一个整点的直线的集合,N 表示不通过任何整点的直线的集合,P 表示通过无穷多个整点的直线的集合.那么表达式

(1) $M\cup N\cup P=I$,　　(2) $N\neq\varnothing$,

(3) $M\neq\varnothing$,　　(4) $P\neq\varnothing$,

中,正确的表达式的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(中国高中数学联赛,1988年)

[解]　设 k 为无理数,则直线 $y=kx+\frac{1}{2}$ 不过任何整点($\because$ 当 x 为整数时,y 为无理数或$\frac{1}{2}$),故 $N\neq\varnothing$,即(2) 正确.

直线 $y=kx$ 只有一个整点$(0,0)$,故 $M\neq\varnothing$.

直线 $x=0$ 上显然有无穷多个整点,故 $P\neq\varnothing$,于是,(2),(3),(4)都是正确的.

下面证明(1) 成立.任取一直线 l,若 l 不过任何整点,则 $l\in N$;

若 l 恰好过一个整点,则 $l\in M$;

若 l 过 2 个或多于 2 个整点,则必 $l\in P$.

因为只要设(a,b),(c,d)是 l 上的两个整点,若 $a=c$,则 l 的方程是 $x=a$,此时 $l\in P$.

若 $a\neq c$,则 l 的方程是$y=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$,当 $x=n(c-a)+a$(n 为整数)时.　y 也是整数,故 $l\in P$.这就证得(1) 正确.

综上知:表达式 4 个全部正确.

故选(D).

37·4　在平面直角坐标系中,纵横坐标均为有理数的点称为有理点,若 a 为无理数,则过点$(a,0)$的所有直线中

(A) 有无穷多条直线,其中每条直线上至少存在两个有理点.

(B) 恰有 $n(2\leqslant n<+\infty)$ 条直线,其中每条直线上至少存在两个有理点.

(C) 有且仅有一条直线至少通过两个有理点.

(D) 每条直线至多通过一个有理点.

(中国高中数学联赛,1987 年)

[解]　过点$(a,0)$的直线方程为 $x=a$ 及 $y=k(x-a)$,这里 $-\infty<k<+\infty$.在直线 $x=a$ 上无有理点.

再考虑直线 $y=k(x-a)$.

当 $k=0$ 时,直线 $y=0$ 上有无穷多个有理点,从而否定结论(D);

当 $k\neq 0$ 时,若此直线上有两个有理点(x_1,y_1)及(x_2,y_2),则由

$$y_1=k(x_1-a),\text{及 } y_2=k(x_2-a),$$

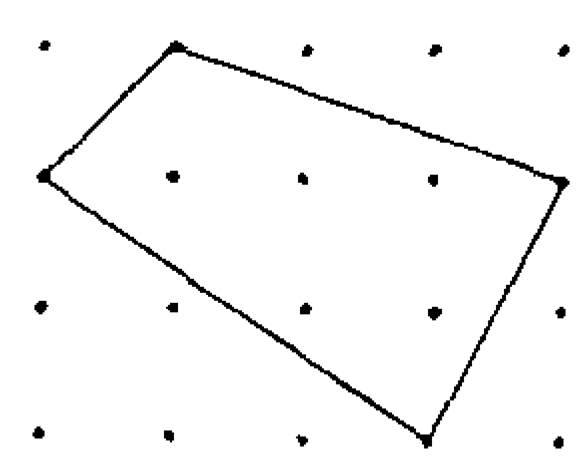
得

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1),\text{知 } k \text{ 应为有理数.}$$

但当 k 为有理数且 $k\neq 0$ 时,直线 $y=k(x-a)$ 上无有理点(注意到若 x,y,k 均为有理数,a 亦为有理数与题设相抵),从而否定结论(A)及(B).

故选(C).

37·5　将一些钉子钉在一块木板上,使得它们在水平方向与竖直方向都相隔 1 个单位长度.用一条橡皮圈套在如图所示的四个钉子上而形成一个四边形,该四边形的面积(平方单位)是



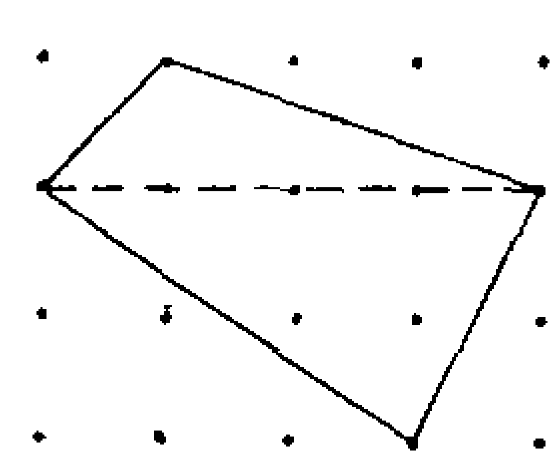
(A) 4.　　(B) 4.5.　　(C) 5.

(D) 5.5.　　(E) 6.

(第 36 届美国高中数学考试,1985 年)

[解]　如右图连接一条线段,将四边形分割成两个三角形,这样

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=6.$$



故选(E).

注　关于"格点多边形面积"计算(亦称为"果园问题")有下面公式:

设多边形内部格点数为 N，边界上（包括多边形顶点）格点数为 L，则该多边形面积

$$S = N + \frac{L}{2} - 1.$$

37·6　点 (x, y) 的坐标 x, y 都是有理数时，该点称为有理点. 在半径为 r，圆心为 (a, b) 的圆中，若 a 是有理数，b 是无理数，这个圆上的有理点个数有

(A) 最多一个.　　　　(B) 最多两个.

(C) 最多三个.　　　　(D) 有无穷多个.

（第1届"希望杯"全国数学邀请赛，1990年）

[解]　由设圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

今考虑圆上两个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 代入上方程相减整理后有

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2a) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 2b) = 0. \quad ⊛$$

若该两点均为有理点，则 $y_1 + y_2 - 2b \neq 0$.

但当 $y_1 = y_2$ 时，若 $x_1 + x_2 = 2a$，⊛式仍成立.

此即说，圆上可有两个有理点.

倘若圆上再有一个有理点 (x_3, y_3)，则必须 $y_1 = y_2 = y_3$，但这不可能.

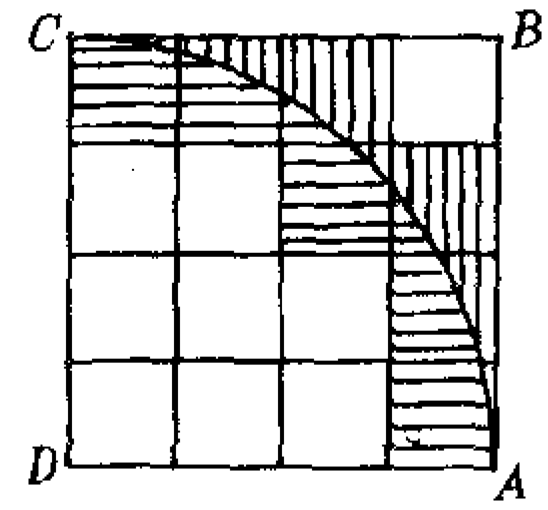
故选 (B).

37·7　在一个由 8×8 个方格组成的边长为8的正方形棋盘内放一个半径为4的圆. 若把圆周经过的所有小方格的圆内部分的面积之和记为 S_1，把圆周经过的所有小方格的圆外部分的面积之和记为 S_2，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的整数部分是

(A) 0.　　　(B) 1.　　　(C) 2.　　　(D) 3.

（中国初中数学联赛，1992年）

[解]　根据正方形棋盘的对称性，只需考察它的四分之一部分即可（如图）. 设圆周经过的所有小方格的圆内部分的面积之和为 S'_1，圆周经过的所有小方格的圆外部分的面积之和为 S'_2.



则有　$S'_1 = 4\pi - 8$，且 $S'_2 = 15 - 4\pi$.

于是 $\quad \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4S'_1}{4S'_2}=\dfrac{4\pi-8}{15-4\pi}\approx\dfrac{4.56}{2.44}.$

又 $$1<\frac{4.56}{2.44}<2.$$

故选(B).

37·8　一个直径是D的圆盘放在宽度是D,并有8×8方格的棋盘上,两者中心重合.棋盘上的方格完全被圆盘所覆盖的数目是

(A) 48.　　(B) 44.　　(C) 40.　　(D) 36.　　(E) 32.

（第23届美国高中数学考试,1972年）

［解］　所有边缘的棋盘方格没有被圆盘所完全遮盖,它有$8+8+6+6=28$个.36个余下的内部方格中只有6×6棋盘的四个角的方格没被完全覆盖.因为这些角到圆心的距离是

$$\sqrt{3^2+3^2}\cdot\frac{D}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{8}D,$$

由于 $\quad \dfrac{3\sqrt{2}}{8}>\dfrac{1}{2},\quad$ 即 $\quad \dfrac{3\sqrt{2}}{8}D$ 大于圆半径$\dfrac{D}{2}$.

因此有$36-4=32$个方格是被圆盘完全覆盖的.

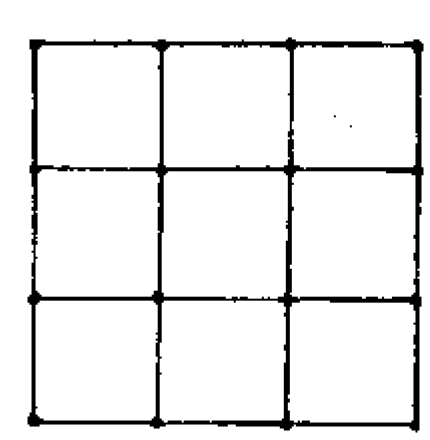
故选(E).

37·9　在xy平面的三角形,它的顶点坐标为(x,y),其中x,y均为整数,且满足$1\leqslant x\leqslant4,1\leqslant y\leqslant4$.这样的三角形的个数有

(A) 496.　　(B) 500.　　(C) 512.　　(D) 516.　　(E) 560.

（第44届美国高中数学考试,1993年）

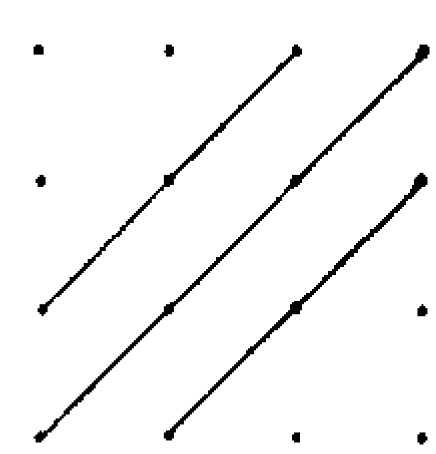
［解］　在xy平面上满足题设:$1\leqslant x\leqslant4,1\leqslant y\leqslant4$的整点有16个,则共有$C_{16}^3=560$个三点集.要从中减去那些三点共线的集合.



平面上有4条垂直线和4条水平线,每条线上有4个点,这8条线上含有$8C_4^3=32$个三点共线的集合.

同样地,斜着在一条线(斜率为±1)上三点共线的集合有

$$2C_4^3+4C_3^3=8+4=12\text{个}.$$



此外没有其他的三点共线的集合.

所以组成的三角形的个数是

$$560-32-12=516.$$

故选(D).

37·10　将平面上两坐标均为整数的点称为整点，则曲线 $y=\frac{1}{5}(x^2-x+1)$ 通过的整点数为

(A) 0 个.　　(B) 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 无穷多个.

（中国湖北省黄冈地区高中数学竞赛，1989 年）

[解]　若曲线经过整点(a,b)，则 $b=\frac{1}{5}(a^2-a+1)$.

即　$a^2-a+1-5b=0$，视之为 a 的二次三项式，其有整根，则 $\Delta=1-4(1-5b)=20b-3=0$ 或是完全平方数.

∵　b 是整数，$20b-3\neq 0$；

又　b 是整数知 $20b-3$ 末位数为 7，从而它不是完全平方数（完全平方数仅以 0,1,4,5,6,9 结尾）.

∴　曲线 $y=\frac{1}{5}(x^2-x+1)$ 不通过整点.

故选(A).

37·11　横纵坐标为整数（包括零）的点称为格点（或整点）. 由 x 轴，直线 $x=4$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成的区域（包括边界在内）共有格点数为

(A) 24.　(B) 35.　(C) 34.　(D) 30.　(E) 不能确定.

（第 8 届美国高中数学考试，1957 年）

[解]　上述区域内格点横坐标只能为 0,1,2,3,4. 又对 $x=k$ 来讲，格点数为　k^2+1（注意 $y=x^2$）.

故格点总数为　$\sum_{k=0}^{4}(k^2+1)=35$.

故选(B).

37·12　平面直角坐标系中，纵、横坐标都是整数的点叫做整点，那么满足不等式$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$ 的整点(x,y)的个数是

(A)16.　　(B)17.　　(C)18.　　(D)25.

（中国高中数学联赛，1999 年）

[解]　由$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2<2$，可得$(|x|-1,|y|-1)$中满足不等式的整点为$(0,0)$,$(0,1)$,$(0,-1)$,$(1,0)$,或$(-1,0)$.

从而不难得到整点(x,y)共有 16 个.

故选(A).

37·13　ABC 为三角形，A，B 两点的坐标分别为 $A(0,0)$，$B(36,15)$，C 的两坐标均为整数，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值是

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) 1.　(C) $\frac{3}{2}$.　(D) $\frac{13}{2}$.　(E) 不存在最小值.

（第 38 届美国高中数学考试，1987 年）

[解]　设 C 点坐标为(x,y)，则由三角形面积公式

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\36&15&1\\x&y&1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}(36y-15x)\text{的绝对值},$$

$\because$　x,y 均系整数，且 $S_{\triangle}\neq 0$，

又　$36y-15x=3(12y-5x)$，而当 x,y 均为整数时 $12y-5x$ 的最小值是 1(当 $y=3,x=7$ 时).

$\therefore$　当 x,y 均为整数时 $36y-15x$ 的最小值是 3.

因而　$(S_{\triangle})_{\min}=\frac{3}{2}$.

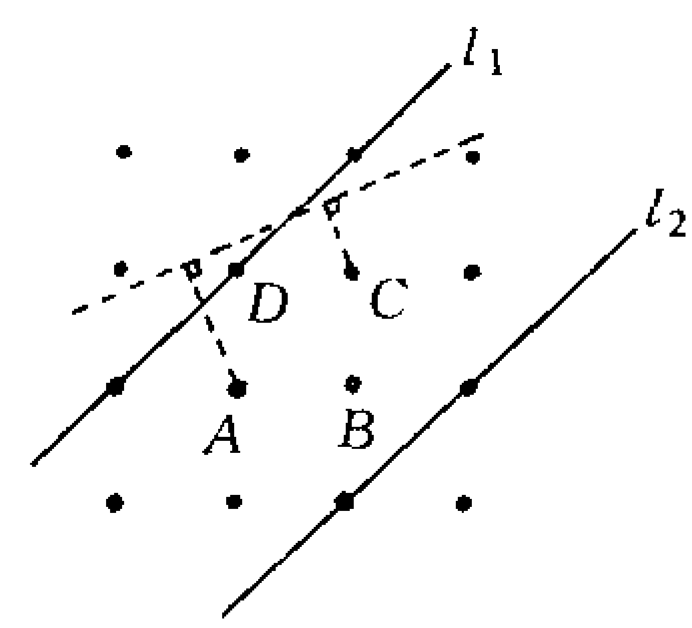
故选(C).

37·14　若(x,y)中 x,y 皆为整数的点称为格点，内部包含 3 个格点的正方形面积最大值接近于

(A)4.0.　(B)4.2.　(C)4.5.　(D)5.0.　(E)5.6.

（第 49 届美国高中数学考试，1998 年）

[解]　正方形内包含的 3 个格点不共线. 设它们为 A、B、C.



与 A、C 连线同侧最近的格点是 D. 今设 l_1，l_2 为正方形边所在的直线，显然 l_1 不能越过 D，否则 D 在 A、C 到 l_1 的垂线之间(如图)，此时正方形内有四个格点，不妥.

若 l_1 不垂直于 BD，则 B 到 l_1 的距离小于 BD，故 l_1 位置如图所标.

仿上分析，l_2 位置亦应如图所示，此时 l_1，l_2 距离为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$$\therefore\qquad S_{\text{正方形}}\leqslant\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2=4.5.$$

故选(C).

37·15　两个球,一球球心在$\left(0,0,\frac{21}{2}\right)$半径为6;另一球球心在$(0,0,1)$半径为$\frac{9}{2}$.设两球相交部分点的坐标为$(x,y,z)$,其中的格点(坐标皆为整数者)个数为

(A)7.　　(B)9.　　(C)11.　　(D)13.　　(E)15.

(第47届美国高中数学考试,1996年)

[解]　由题设知两球方程分别为

$$\begin{cases}x^2+y^2+\left(z-\frac{21}{2}\right)^2\leqslant 6^2,\\ x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant\left(\frac{9}{2}\right)^2.\end{cases}$$

由上有$\frac{9}{2}\leqslant z\leqslant\frac{11}{2}$.因考察其中的格点,则$z=5$.

此时有　$x^2+y^2\leqslant 4\frac{1}{4}$.若$x,y$均为整数,则$x^2+y^2\leqslant 4$.

满足上式的整数对(x,y)有

$(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1),$

$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1).$

共9组,因而(x,y,z)中的格点数为9.

故选(B).

附录

索引

本索引列出本卷所收集的全部数学竞赛试题的竞赛名称，竞赛时间.括号内的第一个数为所赛试题在本卷中章的序号，第二个数为该试题在本章的题的序号.

中国初中数学联赛

中国北京市数学竞赛

[高中竞赛部分]

1986 年 (4·32, 7·111, 22·7, 22·8)

1987 年 (6·58, 7·111, 9·38, 13·57, 23·3)

1990 年 (4·28, 4·56, 4·57, 5·32, 6·23, 7·1, 7·55, 7·72, 22·10, 33·19)

1991 年 (1·21, 7·89, 7·105)

1992 年 (4·23, 7·82, 7·83, 9·14)

1993 年 (2·132, 7·70, 9·5)

[初中竞赛部分]

1982 年 (1·4, 1·33, 1·69, 2·16, 6·11, 7·39, 8·39, 17·184)

1983 年 (1·25, 1·42, 2·93, 4·2, 6·27, 6·44, 7·50, 9·6, 13·19, 17·134, 25·1, 30·18, 36·69)

1984 年 (2·57, 6·14, 6·36, 18·89, 19·27, 29·47, 35·39)

1985 年 (1·87, 2·118, 17·15, 30·19, 33·21)

1986 年 (1·86, 18·7)

1990 年 (2·122, 4·18, 4·40, 17·27, 17·170, 31·21, 33·18)

1991 年 (1·43, 2·65, 2·94, 6·8, 18·2, 18·4, 32·55)

1992 年 (2·17, 4·39, 19·31, 32·50)

1993 年 (1·74, 1·127, 13·15, 17·180, 31·39)

中国天津市初中数学竞赛

1983 年 (2·39, 2·95, 6·19, 8·31, 17·112, 17·136, 18·72, 19·41, 25·20)

1984 年 (2·37, 2·66, 17·179, 18·6, 20·104, 25·5, 30·29, 31·11)

中国河北省初中数学竞赛

1993 年 (5·29, 18·46)

1995 年 (17·161, 17·190, 17·197)

中国山西省初中数学竞赛

1990 年 (4·21, 7·34, 31·7, 36·45)

中国山西省太原市数学竞赛

[高中竞赛部分]

1990 年 (23·7, 27·6, 29·16)

1993 年 (10·12, 27·5, 30·24, 33·22)

1986 年 (18·52, 29·2, 29·63, 32·36, 32·67, 36·32)

1987 年 (18·106, 30·21, 31·25, 33·31)

1988 年 (15·3, 30·13, 31·20, 35·37)

1989 年 (5·18, 18·28, 33·4, 36·36)

1990 年 (3·42, 4·9, 5·17, 6·13, 18·34, 20·120, 31·6)

1991 年 (2·10, 8·56, 13·28, 17·93, 17·188, 33·17)

中国江苏省南京市初中数学竞赛

1991 年 (19·46, 36·41)

中国江苏省苏州市数学竞赛

[高中竞赛部分]

1988 年 (7·104)

1990 年 (12·33, 32·57, 36·65)

1993 年 (8·47, 12·14, 12·36)

[初中竞赛部分]

1985 年 (5·6, 17·106, 35·20)

1987 年 (17·199, 36·39)

1998 年 (20·57)

中国江苏省徐州市初中数学竞赛

1985 年 (1·92, 13·30, 18·43)

1988 年 (18·93)

中国浙江省初中数学竞赛

1991 年 (10·9, 21·11, 32·19, 33·46)

1992 年 (17·91, 17·120, 18·53, 32·34)

1993 年 (17·84, 18·90, 31·36, 32·5)

中国浙江省杭州市初中数学竞赛

1985 年 (6·13, 17·82)

中国浙江省宁波市初中数学竞赛

1984 年 (1·84)

1985 年 (2·69, 28·31)

1987 年 (19·28)

中国安徽省初中数学竞赛

1994 年 (17·193)

中国湖北省武汉市初中数学竞赛

1985 年 (4·55, 13·22, 19·31)

1988 年 (17·4, 32·33, 32·56)

中国湖北省黄冈地区数学竞赛

[高中竞赛部分]

1989 年 (7·15, 10·6, 12·32, 33·7, 37·10)

[初中竞赛部分]

1989 年 (2·63, 18·30)

1990 年 (21·10, 35·18)

1991 年 (2·78, 4·13, 7·67, 13·20, 18·29)

1993 年 (1·11, 2·36, 13·59, 16·4, 18·41, 30·25, 31·49, 36·48)

1996 年 (17·115, 18·112)

中国湖北省荆州地区初中数学竞赛

1987 年 (17·13)

中国湖南长沙市初中数学竞赛

1987 年 (35·2)

中国广东省深圳市初中数学竞赛

1988 年 (18·67, 29·44)

中国四川省数学竞赛

[高中竞赛部分]

1989 年 (7·88, 9·9, 22·1, 26·19, 33·40)

1990 年 (8·52, 9·20, 26·4)

1991 年 (4·26, 7·113)

1993 年 (7·73, 22·9, 23·9, 32·52)

[初中竞赛部分]

1988 年 (2·40, 17·192, 33·13)

1989 年 (1·58, 6·2, 6·3, 17·35, 17·111)

1990 年 (2·47, 2·70, 2·80, 9·13, 17·165)

1991 年 (1·34, 17·10, 18·50, 32·49, 33·47)

1992 年 (1·72, 2·58, 2·130, 4·22, 7·54, 17·164, 18·20)

中国四川省重庆市初中数学竞赛

中国天津市“中华少年杯”初中数学邀请赛

1987 年 (2·96, 17·1, 17·21, 18·5, 29·15, 29·38, 32·58)

1988 年 (1·73, 2·126, 9·1, 17·97, 18·1, 30·26, 31·44, 36·67)

“希望杯”全国数学邀请赛

1990 年 (1·97, 1·112, 4·6, 4·30, 8·57, 15·19, 17·27, 17·61, 18·3, 28·33, 30·32, 30·38, 31·23, 35·51, 37·6) 1991 年 (1·25, 1·46, 1·88, 1·100, 2·34, 2·43, 2·92, 2·99, 2·112, 3·3, 3·28, 4·27, 5·10, 6·25, 6·29, 6·35, 7·18, 7·19, 7·71, 7·76, 7·77, 7·85, 7·86, 7·94, 7·103, 8·23, 8·42, 8·46, 8·54, 9·16, 9·18, 9·19, 9·22, 11·18, 13·50, 13·51, 13·52, 15·9, 15·10, 15·17, 15·18, 16·14, 16·23, 17·18, 17·126, 17·171, 22·2, 22·11, 23·28, 23·31, 24·4, 24·5, 24·6, 24·7, 24·10, 26·18, 26·21, 26·25, 29·30, 30·5, 31·16, 32·18, 32·37, 32·53, 33·39, 36·3, 36·47, 36·68)

“祖冲之杯”初中数学邀请赛

1988 年 (4·44, 6·26, 7·26, 7·58, 31·45)

1989 年 (2·77, 17·108, 17·177, 30·15, 35·7)

1990 年 (9·3, 17·24, 18·42)

1991 年 (3·34, 5·19, 18·26, 18·108, 35·24)

1993 年 (1·78, 5·16, 28·18, 32·32)

1994 年 (2·19)

1995 年 (2·13, 20·44)

“缙云杯”初中数学邀请赛

1985 年 (1·48, 2·35, 2·95, 3·10, 3·32, 3·44, 9·7, 18·32, 18·109, 19·48, 21·7, 32·25, 32·62)

1986 年 (17·182, 19·13, 31·19)

1988 年 (1·66, 17·159, 18·19, 18·97)

1989 年 (2·128, 9·36, 17·42, 17·175, 33·11, 33·37)

1991 年 (1·19, 4·7, 10·69, 33·15, 33·36)

1992 年 (32·24, 35·23, 36·39)

“五羊杯”初中数学竞赛

·47, 18·49, 18·113, 20·40, 20·52, 27·2, 29·39)

1954 年 (1·7, 1·35, 2·72, 2·102, 2·124, 2·135, 3·24, 3·39, 6·52, 17·9, 17·22, 17·70, 17·73, 18·44, 20·23, 20·41, 20·79, 29·40, 29·53, 33·51, 36·51)

1955 年 (1·12, 1·68, 2·20, 3·9, 3·25, 3·54, 10·45, 17·48, 20·1, 20·100, 20·102, 25·2, 29·37, 32·2, 33·58, 36·54, 36·60)

1956 年 (1·121, 2·6, 2·127, 3·17, 17·14, 17·69, 17·202, 18·69, 20·5, 29·21, 29·64, 32·10, 32·63)

1957 年 (2·26, 10·35, 12·1, 17·12, 17·79, 18·65, 18·73, 18·111, 20·14, 20·18, 20·49, 20·80, 25·27, 28·5, 29·23, 30·36, 30·43, 33·56, 37·11)

1958 年 (1·37, 1·114, 2·53, 2·98, 5·34, 8·3, 10·51, 11·5, 13·34, 13·46, 17·55, 17·67, 17·68, 17·98, 17·135, 18·55, 20·22, 20·31, 20·48, 20·69, 26·13)

1959 年 (2·5, 2·30, 2 62, 2·114, 6·57, 10·36, 10·58, 10·63, 10·74, 10·81, 15·23, 17·8, 17·46, 17·49, 17·81, 17·89, 10·110, 17·140, 20·45, 20·65, 20·91, 20·111, 29·31, 35·16, 35·29, 36·31, 36·70)

1960 年 (2·12, 2·25, 2·31, 6·10, 8·18, 10·24, 11·1, 17·20, 17·76, 18·66, 18·74, 19·16, 20·27, 20·28, 24·2, 26·1, 29·45, 30·23, 31·46, 33·53, 36·33)

1961 年 (2·4, 2·67, 3·31, 4·49, 6·31, 11·14, 16·15, 17·16, 17·51, 17·96, 17·156, 18·35, 19·22, 19·38, 20·51, 20·76, 27·3, 29·41, 31·40, 33·1, 33·73, 34·6, 35·50)

1962 年 (2·11, 2·59, 2·125, 3·48, 6·32, 8·7, 8·26, 10·30, 10·80, 11·8, 15·29, 15·31, 16·10, 17·19, 18·57, 17·92, 18·92, 19·18, 20·82, 33·65, 36·52)

1963 年 (1·8, 2·29, 2·51, 2·79, 2·129, 6·42, 8·15, 10·37, 11·2, 13·21, 13·40, 13·54, 15·30, 16·17, 17·65, 18·33, 18·64, 18·75, 18·78, 19·19, 20·36, 20·93, 25·11, 25·21, 28·21, 29·51, 30·40, 31·9, 32·64, 35·33, 36·58, 36·59)

1964年(1·18, 1·32, 1·111, 2·60, 3·7, 4·36, 4·41, 7·98, 8·8, 8·30, 10·22, 11·15, 12·11, 13·25, 17·85, 17·101, 17·105, 18·12, 18·36, 18·51, 20·38, 20·62, 25·12, 25·22, 25·26, 29·50, 32·47, 36·55)

1965年(1·126, 2·68, 2·73, 2·110, 3·23, 3·40, 4·17, 6·61, 8·25, 10·84, 11·16, 13·34, 13·63, 15·2, 16·2, 17·104, 17·144, 20·37, 20·113, 21·13, 26·23, 29·42, 29·46, 33·52, 33·60, 33·64)

1966年(1·41, 2·109, 2·119, 2·120, 3·22, 3·43, 4·51, 6·59, 6·60, 7·96, 8·14, 10·27, 11·17, 12·24, 15·20, 16·13, 17·123, 17·148, 17·168, 19·45, 20·29, 20·56, 26·26, 31·47, 32·28, 33·71)

1967年(2·105, 5·36, 6·54, 7·116, 8·10, 8·40, 10·49, 10·83, 10·87, 15·6, 15·24, 17·66, 17·86, 17·155, 17·169, 17·187, 18·16, 18·54, 18·120, 20·63, 20·119, 29·12, 29·27, 29·28, 30·7, 31·1, 31·8, 32·65, 33·62, 36·14)

1968年(1·23, 2·27, 3·29, 7·95, 9·8, 10·53, 15·25, 17·64, 18·9, 18·18, 18·58, 18·91, 19·20, 19·39, 20·42, 20·88, 29·22, 32·11, 33·16, 33·61, 35·27)

1969年(2·24, 2·116, 3·15, 5·35, 6·21, 8·1, 10·1, 10·29, 10·68, 10·88, 11·6, 13·45, 16·8, 20·72, 20·105, 20·117, 25·15, 25·17, 25·30, 26·9, 26·30, 26·40, 27·1, 28·10, 29·29, 29·58, 31·28, 32·45, 33·57)

1970年(1·54, 1·71, 1·81, 2·61, 3·36, 3·55, 4·20, 7·93, 10·23, 10·59, 14·5, 15·35, 17·96, 18·103, 18·107, 19·7, 20·47, 25·3, 25·14, 29·14, 30·34, 32·7, 33·27, 33·54, 33·59, 36·35, 36·53)

1971年(1·108, 1·117, 2·64, 2·76, 7·102, 8·35, 10·50, 10·67, 10·70, 11·4, 11·9, 12·5, 14·19, 17·99, 17·138, 20·4, 20·86, 20·106, 20·115, 26·34, 29·10, 29·26, 31·18, 32·16, 33·63, 35·21, 35·32, 36·29, 36·56)

1972年(1·17, 2·3, 3·18, 3·33, 3·51, 4·37, 7·24, 7·31, 7

·37, 7·115, 8·2, 8·36, 10·39, 10·57, 12·10, 12·19, 13·43, 14·9, 15·8, 18·77, 18·101, 19·43, 20·12, 20·13, 20·83, 21·8, 26·28, 29·3, 29·18, 36·40, 37·8)

1973年 (1·85, 1·116, 3·2, 3·26, 3·27, 3·45, 3·46, 4·35, 7·13, 7·64, 10·25, 10·44, 14·18, 15·11, 15·38, 17·88, 17·141, 19·24, 20·21, 20·34, 21·2, 23·12, 24·15, 26·8, 30·10, 30·22, 32·6, 32·15, 33·26, 33·66, 34·4, 35·6)

1974年 (1·2, 1·95, 2·9, 2·15, 4·50, 6·33, 7·101, 10·33, 10·47, 10·89, 11·3, 12·2, 13·49, 14·23, 15·34, 16·12, 18·37, 18·85, 20·26, 20·64, 25·10, 29·57, 30·17, 32·41, 36·6)

1975年 (2·42, 2·103, 2·104, 2·113, 4·29, 7·11, 7·118, 8·24, 10·31, 10·64, 10·78, 11·7, 13·14, 14·12, 15·26, 15·27, 16·11, 17·6, 17·32, 17·87, 17·103, 18·84, 28·35, 32·8, 36·30)

1976年 (1·94, 1·109, 2·50, 3·50, 7·12, 8·28, 8·58, 10·18, 10·48, 13·44, 14·8, 15·28, 17·139, 19·23, 20·25, 20·107, 20·112, 26·6, 29·11, 31·52, 32·30, 34·1, 35·22, 35·34)

1977年 (1·5, 1·10, 1·89, 1·120, 2·49, 2·54, 6·39, 7·61, 7·117, 10·42, 10·60, 11·13, 12·12, 13·39, 14·22, 17·23, 18·21, 19·12, 20·3, 20·61, 27·12, 28·16, 29·25, 29·60, 31·17, 33·25, 36·11)

1978年 (1·13, 1·27, 1·31, 1·67, 2·55, 3·6, 3·20, 6·62, 7·9, 7·97, 8·9, 10·20, 10·43, 13·12, 14·7, 15·22, 17·30, 17·31, 18·25, 18·86, 20·32, 20·54, 25·16, 26·24, 29·13, 33·69, 36·21, 36·63)

1979年 (1·113, 2·115, 4·54, 6·53, 7·17, 7·40, 8·59, 10·56, 10·66, 13·35, 14·14, 17·143, 18·68, 19·9, 20·8, 20·73, 20·110, 20·118, 23·6, 29·62, 30·27, 31·26, 31·30, 32·68)

1980年 (1·75, 3·4, 3·37, 6·43, 7·38, 7·100, 10·21, 12·3, 13·37, 14·30, 17·43, 18·23, 18·24, 20·19, 23·24, 24·12, 25·24, 29·4, 29·49, 29·61, 30·39, 31·53, 33·41, 36·42)

1981年 (1·6, 1·22, 2·106, 2·111, 2·133, 4·48, 7·58, 8·

23, 13·42, 14·11, 15·12, 16·18, 17·114, 17·132, 18·14, 20·7, 20·89, 23·35, 24·13, 32·1, 32·21, 32·38, 35·5, 35·10, 36·20, 36·26)

1991 年 (1·16, 1·99, 1·104, 1·105, 3·47, 6·63, 7·16, 7·28, 8·6, 10·76, 12·29, 14·20, 15·16, 16·22, 18·87, 19·5, 19·49, 20·108, 21·14, 24·9, 28·28, 30·41, 32·42, 32·44, 35·26, 36·25)

1992 年 (1·28, 1·30, 5·1, 7·42, 7·49, 10·4, 10·77, 12·18, 12·37, 14·29, 15·13, 18·40, 19·47, 20·97, 20·101, 20·121, 21·1, 23·29, 25·7, 29·5, 30·8, 31·3, 31·34, 35·41, 35·47)

1993 年 (1·70, 1·106, 6·17, 7·66, 7·109, 8·20, 10·7, 10·13, 10·28, 12·17, 13·36, 14·27, 15·32, 17·200, 18·81, 18·88, 19·21, 20·116, 23·21, 28·29, 31·33, 32·39, 35·12, 36·16, 36·44, 37·9)

1994 年 (3·11, 10·40, 12·25, 14·31, 15·21, 17·109, 19·35, 20·59, 20·92, 25·4, 25·29, 28·23, 29·8, 35·30, 36·24)

1995 年 (7·91, 8·32, 11·10, 14·6, 15·5, 17·78, 17·166, 17·198, 18·62, 20·16, 20·20, 20·98, 23·39, 36·34)

1996 年 (10·55, 13·27, 14·34, 17·28, 18·63, 19·10, 20·99, 23·5, 23·27, 26·31, 26·33, 29·9, 35·31, 37·12)

1997 年 (6·65, 7·74, 10·32, 10·65, 12·24, 17·146, 20·58, 23·38, 26·32, 28·24, 31·51, 32·18, 33·72, 36·2)

1998 年 (7·46, 7·92, 8·21, 10·61, 18·8, 24·1, 25·8, 25·18, 26·29, 32·43, 34·7, 37·14)

1999 年 (5·8, 7·3, 7·30, 10·62, 13·68, 14·33, 14·35, 17·62, 19·11, 19·36, 20·68, 20·85, 28·34, 29·59, 31·27)

美国初中数学考试

1989 年 (14·1, 18·56, 28·4, 28·22, 30·11, 35·11, 36·13)

1990 年 (10·52, 28·3, 28·6, 28·20, 28·26, 35·4, 36·21, 36·23)

1991 年 (14·2, 15·1, 28·2, 28·7, 28·19, 28·25, 35·1, 35·3, 35·49, 36·1, 36·69)

历届国际数学奥林匹克概况

届次	时间	举办国家 (或地区)	总分第一	总分第二	总分第三
1	1959 年	罗马尼亚	罗马尼亚 249 分	匈牙利 233 分	前捷克斯洛伐克 192 分
2	1960 年	罗马尼亚	前捷克斯洛伐克 257 分	匈牙利 248 分	罗马尼亚 248 分
3	1961 年	匈牙利	匈牙利 270 分	波　兰 203 分	罗马尼亚 197 分
4	1962 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 289 分	前苏联 263 分	罗马尼亚 257 分
5	1963 年	波　兰	前苏联 271 分	匈牙利 234 分	罗马尼亚 191 分
6	1964 年	前苏联	前苏联 269 分	匈牙利 253 分	罗马尼亚 213 分
7	1965 年	前民主德国	前苏联 281 分	匈牙利 244 分	罗马尼亚 222 分
8	1966 年	保加利亚	前苏联 293 分	匈牙利 281 分	前民主德国 280 分
9	1967 年	前南斯拉夫	前苏联 275 分	前民主德国 257 分	匈牙利 251 分
10	1968 年	前苏联	前民主德国 304 分	前苏联 298 分	匈牙利 291 分
11	1969 年	罗马尼亚	匈牙利 247 分	前民主德国 240 分	前苏联 231 分
12	1970 年	匈牙利	匈牙利 233 分	前苏联、前民主德国 221 分	
13	1971 年	前捷克斯洛伐克	匈牙利 255 分	前苏联 205 分	前民主德国 142 分
14	1972 年	波　兰	前苏联 270 分	匈牙利 263 分	前民主德国 239 分
15	1973 年	前苏联	前苏联 254 分	匈牙利 215 分	前民主德国 188 分
16	1974 年	前民主德国	前苏联 256 分	美　国 243 分	匈牙利 237 分
17	1975 年	保加利亚	匈牙利 258 分	前民主德国 249 分	美　国 247 分
18	1976 年	奥地利	前苏联 250 分	英　国 214 分	美　国 188 分
19	1977 年	前南斯拉夫	美　国 202 分	前苏联 192 分	匈牙利、英国 190 分
20	1978 年	罗马尼亚	罗马尼亚 237 分	美　国 225 分	英　国 201 分
21	1979 年	英　国	前苏联 267 分	罗马尼亚 240 分	前联邦德国 235 分

届次	时间	举办国家（或地区）	总分第一	总分第二	总分第三
22	1981年	美　国	美　国 314分	前联邦德国 312分	英　国 301分
23	1982年	匈牙利	前联邦德国 145分	前苏联 137分	前民主德国、美国 136分
24	1983年	法　国	前联邦德国 212分	美　国 171分	匈牙利 170分
25	1984年	前捷克斯洛伐克	前苏联 235分	保加利亚 203分	罗马尼亚 199分
26	1985年	芬　兰	罗马尼亚 201分	美　国 180分	匈牙利 168分
27	1986年	波　兰	前苏联、美国 203分		前联邦德国 196分
28	1987年	古　巴	罗马尼亚 250分	前联邦德国 248分	前苏联 235分
29	1988年	澳大利亚	前苏联 217分	中国、罗马尼亚 201分	
30	1989年	前联邦德国	中　国 237分	罗马尼亚 223分	前苏联 217分
31	1990年	中　国	中　国 230分	前苏联 193分	美　国 174分
32	1991年	瑞　典	前苏联 241分	中　国 231分	罗马尼亚 225分
33	1992年	俄罗斯	中　国 240分	美　国 181分	罗马尼亚 177分
34	1993年	土耳其	中　国 215分	德　国 189分	保加利亚 178分
35	1994年	中国香港	美　国 252分	中　国 229分	俄罗斯 224分
36	1995年	加拿大	中　国 236分	罗马尼亚 230分	俄罗斯 227分
37	1996年	印度	罗马尼亚	美　国	匈牙利
38	1997年	阿根廷	中　国 223分	匈牙利 219分	伊　朗 217分
39	1998年	中国 台北	伊　朗	保加利亚	匈牙利、美国
40	1999年	罗马尼亚	中国、俄罗斯 182分		越南 177分
41	2000年	韩　国	中　国 218分	俄罗斯 215分	美国 184分
42	2001年	美国	中国 225分	俄罗斯、美国 196分	

注：第39届IMO中国未参加.

编者的话

当今的世界,数学已成为广泛渗透到各种自然科学、社会科学,并发挥着重大作用的一门基础和应用学科.从教育要面向世界,面向未来,面向现代化这一高度来看,让青少年从小就打下扎实的数学基础,这对我国今后的发展是极为重要的.国际上为推动数学的发展而进行的数学奥林匹克活动,现在已成为一种培养和选拔数学人才的特殊事业.

当前,数学奥林匹克活动正方兴未艾,数学竞赛遍及五洲四海,尤其是我国中学生选手在国际数学奥林匹克大赛中屡夺金牌,成绩显赫,捷报频传,令世人瞩目,为祖国赢得了骄傲和荣誉.这些,充分显示了我国的数学水平和中华民族的聪明才智.

眼下,许多数学奥林匹克教练员,许多大、中学教师,许多学生和家长都渴望在自己的案头有一部能够指导数学奥林匹克解题的工具书.希望这部书能够广泛收集国内外数学奥林匹克试题的精品,包揽奥林匹克数学专题和有关内容,以开阔自己的眼界,提高数学能力和品鉴数学的魅力;也希望这部书能够提供这些试题的更精确、更简捷的解法,以开拓思路,掌握技巧,提高水平.为适应各界的上述渴求,这部《世界数学奥林匹克解题大辞典》终得以问世.

这部大辞典的出版,是中国数学奥林匹克委员会,南开大学数学系和河北少年儿童出版社通力合作的产物;是中国

数学奥林匹克专家和教练员辛勤劳动的结晶;也是老一代数学家关心和支持的结果.我们也骄傲地告诉大家:这部辞典在编辑过程中始终得到数学前辈陈省身先生、吴大任先生的关心和指导;中国数学会名誉理事长王元先生专为本辞典作序.可以这样说,如果没有作为数学泰斗的老一代数学家的关怀与支持,没有一批才华横溢的中青年数学家的艰苦努力,没有极具胆识的出版工作者的辛勤劳动,艰难而浩大的世纪工程——《世界数学奥林匹克解题大辞典》是难以如此顺利出版的.

这部大辞典精选了国内外数学竞赛的有代表性的试题,其中大部分是已经比赛过并经过锤炼的试题,还有少部分竞赛的备(候)选题.

辞典共分五卷,其中有四卷是按奥林匹克数学一般的分类方法而分为《代数卷》、《几何卷》、《数论卷》、《组合卷》;为了普及奥林匹克数学,完善辞典中题目类型,还编辑出版了《选择题卷》.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》五卷共约500余万字.《代数卷》、《数论卷》和《选择题卷》是按知识内容分章的;《组合卷》是按题目的内容分章的;《几何卷》则是按题目的结论分章的.每一卷的正文包括试题、试题的出处及解答三部分,试题的多种解法,则由解1,解2或证1,证2等给出.正文后有附录,附本卷常用的有关数学知识提要;还有本卷的索引,索引是按书中涉及到的竞赛地区、国家和竞赛名称按英文字母的顺序排列的.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》的出版,无疑对我国数学奥林匹克事业的发展,对我国跨世纪科技人才的培养、造就和选拔有重要的促进作用,并为之摇橹扬帆,推波助澜!

愿数学奥林匹克之花香飘四海,

盼新一代科学精英普降神州!

本书的出版仅仅是一个尝试,希望广大读者帮助我们完善它.我们相信,经过不断地去粗取精,去伪存真,去旧增新,伴随着我国数学水平的不断提高,这部大辞典必将成数学奥林匹克的经典之作.

世界数学奥林匹克

解题大辞典

选择题卷

